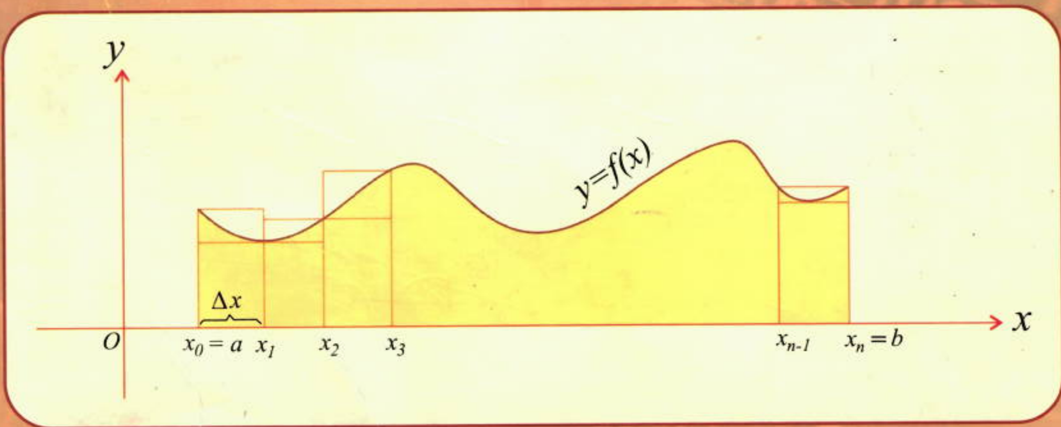
(نوی نصاب)

عمومي رياضي

له اووم ټولګي څخه تر دولسم ټولګي پورې



ارشمیدس اراتوستنس محمد بن موسی اسحاق نیوټن کوشي

Ketabton.com

مؤلف: استاد سردارمحمد (خوږیانی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږیانی)

0700202080
0700203080

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم/
عمومي رياضي (نوی نصاب)
مؤلف/
سردار محمد (خوږياني)
ډيزاين/
الله يار تسل
خپرندوی/
ميهن خپرندويه ټولنه
چاپکال/
۱۳۹۵ل
چاپشمېر/
۱۰۰۰ټوکه

آدرس
ميهن خپرندويه ټولنه پېښور- جلال آباد
جلال آباد: اسحاقزی مارکيټ لاندې پوړ، لومړی دوکان
Email: Khorshidhimat@yahoo.com
Abdurashid.himat@gmail.com
Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱
۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

د چاپ حقوق له ميهن خپرندويې ټولنې سره خوندي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مقدمه

الحمد لله الذی فهمنا بعلوم الاشیاء والحوادث و علمنا بزیادات هم و النواقص و الصلوة و سلام علی رسوله بفهم الانسان باشرع فی الاعمال و المباحث.

اما بعد!

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهربانۍ باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه شوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لنډیز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی د غه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر انتیګرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توګه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شویدي څو څو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غواړي که څه هم مونږ دا کتاب څو څو واره په غور سره کتلي او کمۍ او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود ؤ، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار-تالاشی چوک د حاجي زرخان پلازه
سردار محمد خوږیانی
د نصرت عالي لېسې د ریاضاتو استاد

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیک لړ

حساب

اول فصل

حساب 1
د حساب د علم موضوع 1
د مکمل اعدادو سیټ 1
د طبیعي اعدادو سیټ 2
د حساب د علم د زده کړې غرض 2
د حساب اصطلاحات 2
واحد 2
عدد 2
ارقام 4
طبقې 5
د صحیح عددونو څلور ګوني عملیې 6
1- د صحیح عددونو جمع 6
2- د صحیح عددونو تفریق 8
3- د صحیح عددونو ضرب 10
اضافي معلومات 12
4- د صحیح عددونو تقسیم 16

دویم فصل

کسر 21
اعشار کسر 21
د اعشار کسر څلور ګوني عملیې 21
عام کسر 24
د کسرونو مقایسه 26
تجنیس 26
د کسرونو اختصار 27
د عام کسر څلور ګوني عملیې 33

(c) ketabton.com: The Digital Library

کسر الکسر....37
د کسرونو تبادله....39
دریم فصل
طاقت لرونکی عددونه....42
تجزیه....44
جذر....49
د اعدادو سیستمونه....59
د 2 په قاعده د اعدادو سیستم....60
د 5 په قاعده د اعدادو سیستم....61
څلورم فصل
نسبت....63
تناسب....83
پنځم فصل
فیصد....72
تخفیف....73
أحدیت....75
ربحه....76
تنزیل....79
مشارکت....80
شپږم فصل
سیټ....84
د سیټ د لیکلو طریقې....84
د سیټ اقسام....86
د روابطو له مخې د سیټونو اقسام....86
د سیټونو عملیې....89
الجبر
اول فصل
الجبر....93
د الجبر اصطلاحات....94

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم 95
د الجبري عددونو څلور ګوني عملیې 97
د پولینومونو څلور ګوني عملیې 100
د باقي مانده دعوه 102
ترکیبي تقسیم 104

دویم فصل

مساوات 106
مطابقت 106
تجزیه 110
الجبري کسرونه 116
د الجبري کسرو خواص 116
د الجبري کسرونو جمع 117
د الجبری کسرونو تفریق 117
د الجبري کسرونو اختصار 118
د الجبري کسرونو تقسیم 118
د کسرونو ګویا کول 119
قسمي کسرونه 122

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات 127
د معادلې اقسام 127
یو مجهوله اوله درجه معادله 127
د معادلې خواص 128
جذري معادلی 129

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلی 133
د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل 133
متریکس 138
د متریکس ډولونه 139
د متریکسونو جمع 141

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکس تفریق........141
د دوه متریکسونو ضرب........143
د یوه متریکس ترانسپوز متریکس........144
دیترمینانت........145
د دیترمینانت د حل طریقه........145
د دیترمینانت خواص........147
الحاقي متریکس........148
پنځم فصل
دویمه درجه یومجهوله معادلې........151
د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې........152
دجذرو له مخې د یو مجهوله دویمه درجه معادلې جوړول........161
د دویمه درجه یومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول........162
دډیکارت قاعده........163
شپږم فصل
غیرمساوات........173
د غیرمساوات خواص........173
دغیرمساوات اقسام........175
مطلقه قیمت........177
دبینوم داشاری ځېرل........177
د یو مجهوله غیرمساوات سیستم........183
دوه مجهوله غیرمساوات........184
ددوه مجهوله غیرمساوات سیستم........185
ددوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه........185
یو مجهوله دویمه درجه غیر مساوات........186
ددویمه درجه غیرمساوات دحل طریقه........187
اووم فصل
پارامتریک معادلې........190
اتم فصل
اکسپوننشل (نمائي) معادلې........199

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوګاریتمي معادلې.. 203
دقاعدې د بدلولو فارمول.. 206
د لوګاریتم اقسام.. 207
دیوه عدد د لوګاریتم پیدا کول.. 208
د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم.. 209
انتي لوګاریتم.. 210
انترپولېشن.. 211
کولوګاریتم.. 212
د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه.. 213

لسم فصل

توابع.. 220
د تابع اقسام.. 221
ناطقه تابع.. 221
خطي تابع.. 221
دخطي تابع د تعریف ناحیه.. 222
د مستقیمې کرښې مېل.. 224
دمېل معادله.. 225
محوري معادله.. 227
پولینومي تابعګانې.. 231

یوولسم فصل

دویمه درجه تابع.. 233
د دویمه درجه تابع ګراف.. 233
د دویمه درجه تابع د ګراف ترسیم.. 233
د ګراف انتقال.. 235
هوموګرافیک تابع.. 248
مجانب.. 248
د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم.. 250
اکسپوننشل تابع.. 253
لوګاریتمي تابع.. 255

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد.......257
حسابي ردیف.......257
د حسابي ردیف فارمول.......257
حسابي ردیف ته د حدونو داخلول.......259
هندسي ردیف.......260
د هندسي ردیف فارمول.......260
د هندسي ردیف خصوصیات.......262
هارمونیکي ردیف.......263
سلسلې.......265
حسابي سلسله.......265
د حسابي سلسلې فارمول.......265
د مسلسلو عددونو فارمول.......266
دجفتو عددو فارمول.......267
د طاق عددونو فارمول.......267
هندسي سلسله.......269
د هندسي سلسلې فارمول.......269

دیارلسم فصل

د ریاضي استقراء.......274

څوارلسم فصل

فکتوریل.......277
د بینوم قضیه.......279

پنځلسم فصل

لیمیټ.......281
انټروال.......281
د لیمیټ تعریف.......288
د لیمیټ د استعمال ځایونه.......284
د لیمیټ پیدا کول.......285
په (∞) کې د یوې تابع لیمیټ.......287

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليميټ قضيې.......... 288
ابهام.......... 295
د ابهام رفع کول.......... 295
د مثلثاتي تابعګانو ليميټ.......... 302
د تابعګانو متماديت (اتصال).......... 305
متمادي تابع.......... 305
غیر متمادي تابعګانې.......... 305
د متماديت شرطونه.......... 306
د ښي لاس ليميټ.......... 307
د چپ لاس ليميټ.......... 307
د متمادي تابعګانو خواص.......... 309
شپاړلسم فصل
مشتق.......... 311
منحنی یا وسطي تعبير.......... 312
د يوې تابع مشتق.......... 313
د مشتق تعريف.......... 314
د مشتق هندسي تعبير.......... 315
د مشتق قوانين.......... 318
د يوې طاقت لرونکې تابع مشتق.......... 318
د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق.......... 319
د دوه تابعګانو د تفاضل مشتق.......... 320
د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق.......... 321
د دوه تابعګانو د حاصل تقسيم مشتق.......... 322
د جذري تابع مشتق.......... 324
د مرکبې تابع مشتق.......... 326
د مثلثاتي تابعګانو مشتق.......... 329
ضمني مشتقات.......... 333
د تابع دويم ضمني مشتق.......... 334
متوالي مشتقات.......... 336

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د استعمال ځایونه.......... 337
د یوې تابع بحراني ټکي.......... 339
د انعطاف نقطه.......... 340
د تابع د ګراف د ترسیم طریقه.......... 343
د انعطاف د نقطې پیدا کول.......... 344
د دویمه درجه تابع ګراف.......... 345
هوموګرا فیک تابع.......... 348
د مجانب د ټاکلو عمومي لار.......... 351
د دریمه درجه یومجهوله تابع ګراف.......... 352
د رول قضیه.......... 355
د متوسط قیمت قضیه.......... 357
د لوهپیتال قاعده.......... 358
دبحراني ټکو تطبیق.......... 359

اولسم فصل

انتیګرال.......... 363
د ریمان مجموعه.......... 363
د انتیګرال مفهوم.......... 368
د انتیګرال اقسام.......... 368
غیرمعین انتیګرال.......... 368
د غیر معین انتیګرال خواص.......... 369
معین انتیګرال.......... 373
د معین انتیګرال خواص.......... 375
دانتیګرال او مشتق اساسي قضیې.......... 382
په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول.......... 385
قسمي انتیګرالونه.......... 386
دلوګاریتمي او اکسپونتشل تابعګانو مشتق.......... 387
د اعشاري لوګاریتم مشتق.......... 388
د معکوسو تابعګانو مشتق.......... 392
د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق.......... 392

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه........ 394
د اکسپونشل تابعګانو انتیګرالونه........ 396
د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال........ 397
د منحني سطحې د مساحت پیدا کول........ 401
د کروي اجسامو د حجمو محاسبه........ 410
د انتیګرال پواسطه د کرې د حجم پیدا کول........ 411
د انتیګرال پواسطه د مخروط د حجم پیدا کول........ 411
د انتیګرال پواسطه د بیضوي د حجم پیدا کول........ 412
د قوس د اوږدوالي محاسبه........ 416
تفاضلي معادلې........ 419
د دیفرینشیال ترتیب........ 420
د دیفرینشیال معادلې درجه........ 420
خطي دیفرینشیال معادلې........ 421

احصائیه

اتلسم فصل

احصائیه........ 425
د اطلاعاتو د راټولو طریقه........ 425
ټولنه او جامعه........ 426
تصادفي نمونه........ 426
تصادفي متحول او د ولونه یې........ 426
د فریکونسي جدول........ 427
انځوریز ګراف یا تصویري ګراف........ 427
موډ........ 428
اوسط........ 428
د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول........ 429
د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه........ 429
ډله ایز (تجمعي) کثرت........ 430
نسبي کثرت........ 430
میله اي ګراف........ 431

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمنکسری کرښی ګراف....431
د ګسسته یا غیر متصلو داتا ګانو اوسط....432
د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط....433
د داتاګانو د ګېډۍ کولو طریقه....434
وسعت....434
د ګېډۍ اوږدوالی....434
میله ئي ګراف....434
د متصلو داتاګانو دسته بندي....434
وزني اوسط یا منځنی قیمت....435
مستطیلي ګراف....436
دایروي ګراف....437
میانه....438
د تحول ساحه....438
د انحراف اوسط....439
د څوضلعي فریکونسي ګراف....440
د ساقې او پاڼې ګراف....441
ربعي....442
صندوقچه یي ګراف....443
ربعي انحراف....446
واریانس....446
معیاري انحراف (مطلق تیتوالی)....448
دبدلون ضریب یانسبي پراګنده ګي....450
په نورمال منحني کې تیتوالی....451
د نورماله توزیع مشخصات....452
څومتحوله تړلنې....453
دپراګنده ګۍ ګراف....454
پیوستون او دپیوستون ضریب....454
د خطي مېلان معادله....456
د احتمال د تابع توزیع....459

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت 461
د پواسن د احتمال توزيع 462
د نورمال توزيع 463
نمونه اخيستل 467
د نمونې د اوسط توزيع 468

احتمالات

نوولسم فصل

احتمالات 471
چانس 471
تصادفي پېښه 471
تجربوي احتمال 471
نظري احتمال 471
نسبي کثرت او احتمال 472
په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس 472
د يويې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه 472
د احتمال قاعدې 474
ونه ايز دياګرام 475
د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده 475
د ناڅاپي پېښو اتحاد 476
د ناڅاپي پېښو تقاطع 477
د سيټونو او مډل جوړونه 478
د شمېرنې اصل 479
ترتيب (پرموټېشن) 480
ترکيب 480
وريشن (تبديل) 481
د بينوم قضيه 483
د دوه جمله يي احتمال 484
متمادي او غېر متمادي فضاګانې 486
هم چانسه پېښې 487

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال.......488
مشروط احتمال.......488
د ناڅاپه پېښو استقلالیت.......493
شلم فصل
موهومي عددونه.......495
د اعدادو سیټونه.......496
دموهومي عددونو څلورګوني عملیې.......497
صفري مختلط عدد.......498
د مختلطو عددونو څلورګونی عملیې.......498
د مختلط عدد مزدوج.......500
د مختلط عدد ضري معکوس.......500
دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت.......501
دمختلطو عددونود دویم جذر پیدا کول.......505
یوویشتم فصل
د ریاضي منطق.......507
د ریاضي استدلال.......507
تمثیلي استدلال.......507
استقرائي استدلال.......507
استنتاجي استدلال.......509
دحکم د نفی کولو استدلال.......509
د ریاضي منطق او د بیان استنتاج.......510
د بیانونو ترکیب.......510

(c) ketabton.com: The Digital Library

حساب

(c) ketabton.com: The Digital Library

[illegible]

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

رياضي

رياضي د رياض څخه اخيستل شويده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتي ده رياض د روضة مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه يا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کيفيتو ، کميتو ، تغيراتو ، ارتباطاتو او تاثيراتو څخه بحث کوي.

رياضي ډېرې څانګې لري لکه :

1- حساب　　2- الجبر　　3- نجوم
4- هندسه　　5- مثلثات　　6- علم هيئت

او داسې نور.

څرنګه چې زمونږ د وطن په تعليمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول ليکل شوي دي نو مونږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شيان په دی کتاب کې ليکو.

1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايې او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې يوه عمليه اجراء کوي او مجهول عدد پيدا کوي.

د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سيټ دی .

د مکمل اعدادو سيټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايې.

$$0 \longrightarrow \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.

د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخيستل ، خرڅول ، په صحيح ډول د دوا ګانو ترکيب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غير په فزيک ، کيميا ، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

د حساب اصطلاحات:

واحد:

د هر شي يوې دانې ته واحد وايي. لکه يو موټر ، يوه طياره يوه کښتۍ او داسې نور.

عدد:

واحد يا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي . لکه (1) ، 13 ، 159 او داسې نور.

عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د يوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه ، 107 شاګردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180 ، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسيميږي جفت عددونه دي لکه 170 ، 532 ، 714 ، 326 ، 748 او داسې نور ،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ويشل کيږي لکه : 3 ، 41 ، 587 او داسې نور.

5- لمړني عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ويشل کيږي په نورو عددو پوره نه ويشل کيږی. لکه 2 ، 3، 5 ، 7 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دی. دا عددونه یو یوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273 -192) ق م کی یي یونان کی ژوند کاوه په یوه جدول کې پیدا کړی ؤ.

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه یې په یوه مربعي جدول کې ولیکل بیا یې (2) پرېښودل او هغه عددونه چې په (2) ویشل کیدل حذف کړل. بیا یې (3) پرېښودل او هغه عددونه چې په (3) ویشل کیدل حذف کړل په همدې ترتیب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ویشل کیدل حذف یې کړل په اخر کې یې په جدول کی پاتی شوي عددونه چې 25 عددونه وه په یوه پاڼه کې ولیکل او لمړني عددونه یې وبلل. عددونه دا دي.

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47 ، 53 ، 59 ، 61 ، 67، 71، 73، 79، 83 ، 89 ، 97

6- مرکب عددونه : هغه عددونه چې له ځان او یوه څخه په غیر په نورو عددو هم ویشل کیږي مرکب عددونه بلل کیږي. لکه 4 ، 6 ، 8 ، 9 ، 10 او داسې نور .

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د یوه عدد ټول واحدادت پوره وي دغه عدد ته تام عدد وایې لکه 12 هنداونې ، 15 روپۍ.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې یو واحد یې نیم ګړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هندوانې، $17\frac{1}{2}$ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج وویشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وایې لکه $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، چې $0.75 = \frac{3}{4}$او $0.4 = \frac{2}{5}$کیږي.

b- غیر مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي مګر د خارج قسمت رقمونه یې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$او داسې نور .

چې $0.33\overline{3} = \frac{1}{3}$کیږي او $0.166\overline{6} = \frac{1}{6}$ کیږی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- غير مختوم غير متوالي كسر: كه د يوه كسر صورت په مخرج پوره تقسيم نه شي او د خارج قسمت رقمونه يې هم تكراري نه وي دى كسر ته غير مختوم غير متوالي كسر وايي لكه $\frac{13}{47}$ چې ... $\frac{13}{47} = 0.27659574468085 1$ كيږي.

9- ناطق عدد: صحيح عدد، متوالي كسر او مختوم كسر ناطق عددونه دي. لكه 15 ، 28 ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غير ناطق عدد: غير مختوم غير متوالي كسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غير ناطق عددونه دي لكه $\frac{13}{49}$ ، $\frac{11}{47}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

ارقام:

د اعدادو د ليكنې سمبول ته رقم وايي.

په ډېرو ممالكو كې د اعدادو د ليكنې لپاره سمبولونه ټاكل شوي دي چې په همغه ممالكو كې استعماليږي. مګر هغه رقمونه چې د نړۍ په زياتو ممالكو كې استعماليږي درې دي.

1- رومي رقمونه 2- هندو عربي رقمونه 3- اريك رقمونه.

1- رومي رقمونه :

د هندو عربيك رقمو تر ليكنې د مخه رومي رقمونه زيات استعماليدل. اوس رومي رقمونه په كتابونو كې د مختلفو مقاصدو لپاره استعماليږي. خو په حسابي او الجبري عمليو كې نه استعماليږي I د يو لپاره V د 5 لپاره X د 10 لپاره L د 50 لپاره C د 100 لپاره D د 500 لپاره او M د 1000 لپاره په سمبوليك ډول استعماليږي.

كه يو رقم درې واره څنګ په څنګ وليكل شي جمع كيږي لكه II دوه دي III درې دي كه X درې واره وليكل شي (30) كيږي كه L درې واره وليكل شي 150 كيږي كه دوه مختلف عددونه څنګ په څنګ وليكل شي كه د ښي خوا عدد زيات ؤ د چپې خوا عدد ور څخه منفي كيږي IV چې څلور دي IX نه دى $XL = 40$ دي $XC = 90$ دي او كه د چپې خوا عدد زيات ؤ د ښې خوا عدد ور سره جمع كيږي.

$VI = 6$ ، $VII = 7$ او $VIII = 8$ دي $XIX = 19$ او $CX = 110$ ، $LX = 60$ دي $CXXX = 130$ او $MDCXIX = 1619$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي. دې رقمو ته شرقي رقمونه هم وايي. اریک رقمونه په لاندې ډول دي. ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹

ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربیک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصریانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هندیانو لیکل دي دغه رقمو ته غربي رقمونه هم وايي دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شویدي.

1- معنی دار رقمونه 2- بې معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمو ته معنی دار رقمونه وايي .

2- بې معنی رقم : صفر بې معنی رقم دې ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه . 0000000

او که د عدد چپې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیرېږي او نه کمیږي .

لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقې : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلې دي چې هره طبقه درې مرتبې ده هره طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شویدي.

1- احادو طبقه	9- کوادریلیون	17- اوکتیلیون
2- زرو طبقه	10- کوادریلیارد	18- اوکتیلیارد
3- میلیون طبقه	11 - کوینتیلیون	19- نونیلیون
4- میلیاردو طبقه	12- کوینتیلیارد	20- نونیلیارد
5- بیلیون طبقه	13- سکستیلیون	21- د سیلیون
6- بیلیاردو طبقه	14- سکستیلیارد	22- دسیلیارد
7- تریلون طبقه	15- سپتیلیون	
8- تریلیارد طبقه	16- سپتیلیارد	

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شويدي يعنې تر ترليارد پورې طبقې استعمال شويدي.

د عدد لوستل : عدد د ښي خوا څخه په طبقو ويشو او د چپې خوا څخه يې لولو اول د طبقې عدد لولو بيا دطبقې نوم اخلو. که طبقه يا مرتبه صفر وه نوم يې نه اخيستل کيږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ويل کيږي څلورسوه اوپنځوس ترليارده درې سوه اواوه څلويښت ترلونه اته سوه اوپنځه ويشت بيليارده شپږسوه اويوبيلونه دوه سوه اوڅلورد پرش ميلياردہ څلورميلونه اواته سوه اويو.

د عددو ليکل : عدد د چپې خوا څخه ليکل کيږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کې ليکل کيږي که د کومې طبقې يا مرتبې نوم وانه خيستل شي پر ځای صفرونه ليکل کيږي لکه.

درې سوه څوارلس ترليارده اوه ترليونه نه ويشت بيلونه يو سل او دولس ميلياردہ نه څلويښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

د صحيح عددونو څلور ګونې عمليې:

1- د صحيح عددونو جمع:

جمع په لغت کې يو ځای کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شيانو يو ځای کولو ته جمع وايي.

هغه عددونه چې جمع کيږي د جمع عوامل ورته وايي او هر عدد ته عامل وايي او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتيجه کې لاس ته راځي. د جمع حاصل ورته وايي.

د جمع د عمليې طريقه :

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د يويز مرتبو رقمونه جمع کوو که دجمع حاصل يې دوه رقمي شو لمړی رقم يې ليکو او دويم رقم يې دلسيز مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


```
+456783456
  789432187
 1246215643
```

د جمع د عمليې ميزان:

1- د جمع ميزان په جمع :

عوامل د لاندې خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحيح حل شويدی.

```
 12349391
+7894321
 2578092
 1876978
 12349391
```

2- د جمع ميزان په تفريق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه يو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحيح حل شويدی.

```
+ 489785        −1165759
  675974          675974
 1165759          489785
```

3- د جمع ميزان په طرح نه :

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو . بيا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحيح حل شويدی.

```
+ 5689247
  7563785
 13253032

   1 X 1
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجمع دعمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلي د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.

لکه:

$$\begin{array}{r} +451 \\ 238 \\ \hline 689 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +238 \\ 451 \\ \hline 689 \end{array}$$

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په ګروپو ويشو د هر ګروپ د جمع حاصل پيد اکوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلى سيټ دى.

4- د جمع دعمليې خنثى عنصر صفر دې.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقې ته تفريق وايي. لوى عدد ته مفروق منه وايي کوچنى عدد ته مفروق وايي د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.

د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يويز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يويز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې دلسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ 14987675 \\ \hline 63414463 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تفریق د عملیې میزان:

1- د تفریق میزان په جمع :

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -48356782 \\ \underline{17987998} \\ 30368784 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +30368784 \\ \underline{17987998} \\ 48356782 \end{array}$$

2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغي سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ \underline{1789756798} \\ 6064564748 \end{array}$$

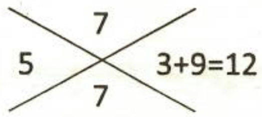
میزان

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ \underline{6064564748} \\ 1789756798 \end{array}$$

3- د تفریق میزان په طرح نه :

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل يط مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو . او منفي کوو يې او په دريم طرف کې يې ليکو بيا د تفريق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو د دريم او څلوزم عددونه مساوي وه سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} -43756832109 \\ \underline{12898098734} \\ 30858733375 \end{array}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مفروق منه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم ؤ د مفروق منه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بیا د مفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.

د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق منه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ \underline{250} \\ 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

2- که مفروق منه ثابت وي مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ \underline{150} \\ 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منه زیات شي د تفریق حاصل ډیریږي.

$$\begin{array}{r} -500 \\ \underline{200} \\ 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منه کم شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ \underline{200} \\ 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کې تغیز نه راځي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ \underline{200} \\ 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ \underline{250} \\ 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ \underline{200} \\ 250 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د مساوي عددونو د جمع لنډې طریقې ته ضرب وایي. د ضرب په عملیه کې اول عدد ته مضروب فیه او د دویم عدد ته مضروب وایي. په مضروب فیه کې د مضروب د ضرب په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عمليې طريقه:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو بيا د مضروف دويم رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

```
×  4587
    896
 ------
  27522
 41283
36696
-------
4109952
```

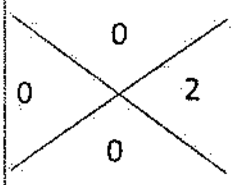
د ضرب د عمليې ميزان:

1- د ضرب ميزان په تقسيم:

د ضرب حاصل په مضروب فيه ويشو که مضروب لاس ته راغی سوال صحيح حل شوی دی او يا د ضرب حاصل په مضورب ويشو که مضروف فيه لاس ته راغي سوال حل شوی دي.

2- د ضرب ميزان په طرح نه :

مضروب فيه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د مضروب فيه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو او ضربوو يې که د ضرب حاصل يې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو يې په دريم طرف کې يې ليکو بيا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو که د دريم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحيح دی.




```
×   56783
     5238
    ------
   454264
  170349
 113566
283915
---------
297429354
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عمليې أساسي اصول:

1- د اعدادو سيټ د ضرب د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.
2- د ضرب عمليه د تبديلی د قانون پيروي کوي.
3- د ضرب عمليه د اتحادي قانون پيروي کوی.
4- د ضرب عمليه د توزيعي خاصيت پيروي کوي.
5- د ضرب دعمليې خنثی عنصر (1) دی.

اضافي معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصة الحساب کې ليکلي دي. مونږ د شاګردانو د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدين محمد بن الحسين چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زيږيدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شويدی اصلاً د لبنان ؤ عامل په لبنان کې يو غر دی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده :

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

يو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفريق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$
$$10 - 9 = 1$$
$$1 \times 7 = 7$$
$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$
$$10 \times 4 = 40$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$40 + 8 = 48$$

دریمه قاعده:

د يو رقمي او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو يو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې يې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه يې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$
$$16 \times 10 = 160$$
$$10 - 7 = 3$$
$$3 \times 9 = 27$$
$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$
$$15 \times 10 = 150$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$150 - 14 = 136$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورمه قاعده:

د 10 او 20 تر منځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد ديويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$18 \times 3 = 21$$
$$21 \times 10 = 210$$
$$3 \times 8 = 24$$
$$210 + 24 = 234$$

پنځمه قاعده :

په 5 ، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نيمايي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه :

$$5 \times 28 = 10 \times 14 = 140$$
$$50 \times 36 = 100 \times 18 = 1800$$
$$500 \times 32 = 1000 \times 16 = 16000$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 تر منځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$7 \times 5 = 35$$
$$35 + 59 = 94$$
$$94 \times 10 = 940$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$940 + 63 = 1003$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسیز یې مساوي وي.

د یوه عدد یویز د بل عدد سره جمع کوو او په لسیز رقم کې یې ضربوو او 10 چنده کوو یې او د یویز رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$68 + 3 = 71$$
$$71 \times 6 = 426$$
$$426 \times 10 = 4260$$
$$4260 + 24 = 4284$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسیز مرتبې یې مختلفې وي.

د کوچني عدد لسیز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د یویز مرتبې او دلوی عدد د لسیز مرتبې د ضرب حاصل ور سره جمع کوو او 10 چنده کوو یې او د یویز مرتبو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$69 \times 2 = 138$$
$$7 \times 6 = 42$$
$$138 + 42 = 180$$
$$180 \times 10 = 1800$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$1800 + 63 = 1863$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$87 \times 3 = 261$$
$$5 \times 8 = 40$$
$$261 + 40 = 301$$
$$301 \times 10 = 3010$$
$$5 \times 7 = 35$$
$$3010 + 35 = 3045$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 47او 95 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$380 + 63 = 443$$
$$443 \times 10 = 4430$$
$$7 \times 5 = 35$$
$$4430 + 35 = 4465$$

4- د صحیح عددونو تقسیم:

تقسیم په لغت کې ویشلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد څخه د مساوي عددونو دتفریقولو لنډې طریقې ته تقسیم وایي.

هغه عدد چه ویشل کیږي مقسوم بلل کیږي هغه عدد چې مقسوم پرې ویشل کیږي مقسوم علیه بلل کیږي په مقسوم علیه باندې د مقسوم د تقسیمیدو په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کیږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم علیه څخه کمه شي او په مقسوم علیه نه ویشل کیږي باقي بلل کیږي.

د تقسیم د عملیې طریقه:

د مقسوم علیه مرتبې شمیرو د مقسوم د چپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوو د مقسوم علیه سره یې مقایسه کوو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو یې. د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو رقم راکښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې او که کم ؤ خارج قمست ته صفر یورته کوو او د مقسوم څخه یو بل رقم راکښته کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا د مقسوم علیه څخه کم شي دغې کمې شوې برخې ته باقي وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


```
456340189 | 56342
450736    |------
--------- | 8099
 560418
 507078
---------
  533409
  507078
---------
   26331
```

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم دعملیې میزان په ضرب:

خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال صحیح دی.

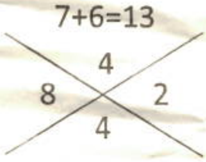
```
     × 56342
        8099
     -------
      507078
     507078
    00000
   450736
  -----------
   456313858
```

```
+456313858
     26331
----------
 456340189
```

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه:

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم علیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي د طرح نه حاصل ور سره جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا مقسوم طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شوی دی.

7+6=13



(c) ketabton.com: The Digital Library

نوټ: که د تقسیم عملیې باقي نه لرل او یا یې باقي تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

893001 | 197
788 | 4534
1050
985
650
591
591
394
197

893001 | 4532
4532 | 197
44980
40788
39214
31724
197

د تقسیم د عملیې اساسي اصول:

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازې باقي په همغه عدد کې ضربیږي . لکه:

60 | 8
56 | 7
4

300 | 50
280 | 7
20

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازې باقي په هغه عدد تقسیمیږي. مثال:

25 | 2
2 | 12
5
4
1

250 | 20
20 | 12
50
40
10

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده .

مثال:

1280 | 80
80 | 16
480
480
xxx

2000 | 80
160 | 25
400
400
xxx

3280 | 80
320 | 41
80
80
xxx

+1280
2000
3280

4- که د دوو عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

−2000
1280
720

720 | 80
720 | 9
xxx

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مگر 50 په 6 نه ویشل کیږي مگر $2400 = 48 \times 50$ په 6 ویشل کیږي.

2400 | 6
24 | 400
00

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

1- د درې عددو مجموعه 180 ده د اول او دويم مجموعه 105 ده د دويم او دريم مجموعه 135 ده عددونه پيدا کړئ؟

2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.

3- د دوه ښارو تر منځ فاصله $900km$ ده يو موټر د يو ښار څخه د $85km$ په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانيږي او دويم موټر د دويم ښار څخه د $95km$ په سرعت اول ښار ته روانيږي وواياست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.

4- عبدالوهاب دوه تانه رخت له يوه جنسه يو په $9000Rs$ او بل په $10500Rs$ واخيستل د تانونو فرق 5 متره دی وواياست چې هر تان څو متره دی.

5- يو سړي دوه بوجۍ مميز له يوه جنسه يو په 37800 روپۍ او بل بوجۍ يې په $31500Rs$ واخيستل که د بوجيو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پيدا کړئ؟

6- دوه طياري له يوه ميدان څخه په يوه وخت کې پرواز کوي د يوې سرعت $500km/_h$ او د بلې سرعت $750km/_h$ دی يوه د شرق او بله د غرب خواته ځي پس له 2 ساعتو به يې په منځ کې فاصله څومره شي؟

7- يو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي يو د شمال خواته او بل جنوب خواته ځي د يوه سرعت $70km/_h$ او د بلې سرعت $90km/_h$ دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله $960km$ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم فصل

کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وایي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وویشل شي دې عملیې ته کسر وایي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر   2- عام کسر

1- اعشار کسر:

که واحد په 10 یا د 10 په طاقت وویشل شي دی کسر ته اعشار کسر وایي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ویشل شویدی او 3 برخې ور څخه اخیستل شویدی.

0.13 واحد په 100 برخو ویشل شویدی او 13 برخې ترې اخیستل شویدی. 0.007 واحد په 1000 برخو ویشل شویدی او 7 برخې ور څخه اخیستل شویدی.

د اعشار کسر څلور ګونې عملیې:

1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې یو تر بل لاندې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بیا یې د صحیح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +87965.38 \\ 32887.45 \\ \hline 120852.83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +7678.3 \\ 6845.83 \\ \hline 1\,4524.13 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د جمع د میزان غوندې دی.

2- د اعشار کسر تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بیا یې د صحیح عددو د تفریق په شان تفریقوو.

$$\begin{array}{r} -5345.870 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.87 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1467.23 \\ 894.85 \\ \hline 572.38 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د تفریق د میزان غوندې دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندي لیکو. د صحیح عددونو د ضرب په شان یې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بیلوو د راکړ شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

```
      4563.85
       3278.3
     1369155
    3651080
   3194695
  912770
 1369155
 14961669.455
```

میزان یې د صحیح عددونو د ضرب د میزان غوندي دی.

4- د اعشار کسر تقسیم:

د اعشار کسر تقسیم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاریه وي او په مقسوم علیه که نه وي.

لکه

4587.5	345

د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو کله چې اعشاریې ته ورسیږو اعشاریه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کښته کوو عملیې ته تر درې اعشاري رقمو پورې ادامه ورکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

```
4587.5 | 345
345    | 13.297
1137
1035
1025
 690
 3350
 3105
  2450
  2415
    35
```

2- حالت: چې په مقسوم علیه کې اعشاریه وي په مقسوم کې نه وي.

لکه:

7562 | 34.2

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو او د صحیح عدد د تقسیم په شان یې تقسیموو که باقي وکړل باقي ته صفر ږدو او خارج قسمت کې اعشاریه ږدو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

756920 | 347

3- چې په مقسوم او مقسوم علیه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته درې حالته موجود دي.

الف: چې د مقسوم او مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وی لکه:

7843.82 | 9.23

د مقسوم او مقسوم علیه دواړو څخه اعشاریه حذفوو د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو که عملیې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ږدو او په خارج قسمت کې اعشاریه لیکو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

784382 | 923

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زیات او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

845.234 | 85.7

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاريه مخ ته ورو بيا يې د اعشار کسر د تقسيم د اول حالت په څير تقسيموو.

$$8452.34 \;\big|\; \underline{857}$$

ج: چې د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زيات وي لکه.

$$87635.3 \;\big|\; \underline{0.456}$$

د مقسوم او مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو اود مقسوم عليه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

$$87635300 \;\big|\; \underline{456}$$

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو.

ميزان يې د صحيح عددونو د تقسيم د ميزان غوندې دی.

2- عام کسر:

که واحد د 10 او او 10 د طاقت څخه په غير په نورو عددو وويشل شي دی کسر ته عام کسر وايي لکه $\frac{2}{3}$، $\frac{5}{11}$، $\frac{7}{99}$، $\frac{4}{101}$، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام کسر په څلور قسمه دی.

1- اصل کسر يا واقعي کسر
2- واحد کسر
3- غير واجب کسر
4- واجب کسر يا کسري عدد يا مخلوط کسر

1- واقعي کسر: هغه کسر دی چې صورت يې لږ مخرج يې ډېر وي.

لکه $\frac{5}{13}$، $\frac{7}{19}$، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد کسر: هغه کسر دی چې صورت او مخرج يې مساوي وي لکه $\frac{8}{8}$، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر واجب کسر : هغه کسر دی چې صورت یې ډیر او مخرج یې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې دیوه صحیح عدداو یوه اصل کسرڅخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.

غیر واجبول:

په غیر واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غیر واجبول وایې.

طریقه یې داسې ده چې مخرج په صحیح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرج یې لیکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غیر واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7} = \frac{7 \times 9 + 1}{7} = \frac{63 + 1}{7} = \frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غیر واجب یې کړئ؟

$$8\frac{3}{5} = \frac{5 \times 8 + 3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

تصحیح:

په واجب کسر باندې د غیر واجب کسر بدلولو ته تصحیح وایې .

طریقه یې داسې ده چې صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غیر واجب کسر دی واجب یې کړئ؟

```
 27 | 5
 25 | 5
----
  2
```

$$\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- غیر واجب یې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$ 2- $11\frac{6}{7}$ 3- $8\frac{2}{5}$ $4-9\frac{1}{8}$

2- تصحیح یې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$ 2- $\frac{48}{5}$ 3- $\frac{77}{8}$ 4- $\frac{46}{11}$ 5- $\frac{117}{11}$

د کسرونو مقایسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرجونه یې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرج یې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرجونه یې مساوي وي.

لکه:

$$\frac{4}{7} ، \frac{3}{7} ، \frac{2}{7} ، \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت یې ډېر وي.

$$\frac{4}{7}>\frac{3}{7}>\frac{2}{7}>\frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرجونه مختلف وي د دې کسرو د مقایسې لپاره کسرونه تجنیسوؤ.

تجنیس :

تجنیس په لغت کې هم جنس کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې که د یوه کسر صورت او مخرج د بل کسر په مخرج کې ضرب شي دې عملیې ته تجنیس وایي.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقایسه کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4}{7}=\frac{4\times 9}{7\times 9}=\frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5\times 7}{9\times 7}=\frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63}>\frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$$

تمرين :

لاندې کسرونه مقايسه کړئ؟

1- $\frac{6}{11}$ او $\frac{9}{16}$ 2- $\frac{7}{9}$ او $\frac{8}{11}$ 3- $\frac{2}{5}$ او $\frac{3}{7}$ 4- $\frac{5}{7}$ او $\frac{7}{9}$ او $\frac{9}{11}$

د کسرونو اختصار :

اختصار په لغت کې لنډولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه کسر صورت او مخرج په يوه عدد ويشلو ته اختصار وايي.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرج په (3) ويشو .

$$\frac{\overset{4}{\overline{12}}}{\underset{5}{\underline{15}}}=\frac{4}{5}$$

صورت او مخرج په 7 ويشو.

$$\frac{\overset{5}{\overline{35}}}{\underset{9}{\underline{63}}}=\frac{5}{9}$$

صورت او مخرج په 6 بيا په 4 ويشو.

$$\frac{\overset{\overset{5}{\overline{20}}}{\overline{120}}}{\underset{\underset{6}{\underline{24}}}{\underline{144}}}=\frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

صورت او مخرج په 12 ویشو او بیا یي په (2) ویشو.

$$\frac{\frac{120}{10}}{\frac{144}{12}} = \frac{\frac{10}{5}}{\frac{12}{6}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسیم د قابلیتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی رقم صفر یا جفت وي په (2) ویشل کیږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد رقمو مجموعه په 3 ویشل کیدله دا عدد په (3) ویشل کیږي.

لکه 11124 ، 1032 ، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی رقمونه صفرونه وه یا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ویشل کیږي نو دا ټول په څلور ویشل کیږي . لکه 300 ، 712 ، 520 ، 316 ، 316 ، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ویش قابلیت: که د یوه عدد لمړی رقم صفر یا 5 وي دا عدد په 5 ویشل کیږي لکه 310 ، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ویش قابلیت :که یو عدد په 2 او 3 ویشل کیدلو دا عدد په (6) هم ویشل کیږي لکه 312 ، 414 ، 276 ، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوؤ که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په (7) ویشل کیږي.

لکه: 359156 په 7 ویشل کیږي او که نه:

$$\begin{array}{r} 359156 \\ \underline{12} \\ 35903 \\ \underline{6} \\ 3584 \\ \underline{8} \\ 350 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې 350 په 7 ویشل کیږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ویشل کیږي.

7- په (8) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه یا داسې درې عددونه وه چې په 8 ویشل کیدل نو دا ټول عدد په (8) ویشل کیږي.

لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.

8- په (9) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ویشل کیداله نو دا عدد په 9 ویشل کیږي.

لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.

9- په 10 باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد لمړی صفر وي په (10) ویشل کیږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.

10- په 11 باندې د ویش قابلیت: د طاق مرتبو رقمونه بیل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بیل جمع کوو یو دبل څخه یې منفي کوو که د تفریق حاصل صفر یا داسې عدد شو چې په 11 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 11 ویشل کیږی.

لکه : 558998

11- په 12 باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 3 او 4 ویش کیدلو دا عدد په 12 هم ویشل کیږی لکه 8016

12- په 13 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده یې د متباقي عد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ویشل کیږی.

لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.

13- په 17 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب تر اخره عملیې ته ادامه ورکوو که په اخرکی صفر یا داسې یو عدد لاس ته راغی چې په 17 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 17 ویشل کیږي.

لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- په 19 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغلی چې په 19 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 19 ويشل کيږي لکه (871701) اوداسې نور.

15- په 23 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متباقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ويشل کيږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو حذف شوي دري چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ويشل کيدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ويشل کيږي.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ويشل کيږي لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغلی په 37 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 37 ويشل کيږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ويشل کيږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کیږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخرني عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کیږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کیږي لکه 24220311 ، 13383825 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتې عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کیږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کیږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتې عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر ؤ نو دا عدد په 67 ویشل کیږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

26- په 71 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو حذف شوي اوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که د عمليې په اخر کې که صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ويشل کيږي نو دا ټول په 71 ويشل کيږي.

لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 22 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ويشل کيږي.

لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 8 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغي چې په 79 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 79 ويشل کيږي.

20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 25 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو عمليه تر اخره اجراء کوو که اخرني عدد په 83 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 83 ويشل کيږي.

لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ويش قابليت : لمړی رقم حذفوو د حذف شوي (9) چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ويشل کيږي.

لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسيم قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 29 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليه تر اجره اجراء کوو که اخرني عدد صفر شو او يا داسې يو عدد شو چې په 97 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ويشل کيږي.

لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عام کسر څلور ګوني عملیې

1- د عام کسر جمع او تفریق :

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرج مشترک پیدا کوو مخرج مشترک د هر کسر په مخرج ویشو د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو د مخرج مشترک پر سر یې لیکو د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو .او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي.

خو د مخرج مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرجو پیژندل ضرور دي.

مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه : مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وایې.

$$4\frac{5}{9}+3\frac{7}{9}+8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9}+\frac{34}{9}+\frac{80}{9}=\frac{41+34+80}{9}=\frac{155}{9}=17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r|l} 155 & 9 \\ \underline{9} & 17 \\ 65 & \\ \underline{63} & \\ 2 & \end{array}$$

$$19\frac{3}{5}-8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5}-\frac{44}{5}=\frac{98-44}{5}=\frac{54}{5}=10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \underline{5} & 10 \\ 4 & \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې لوي مخرج په کوچني مخرج پوره تقسیم شي لکه:

$$5\frac{7}{12}+8\frac{3}{4}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخرج مشترک يې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12}+\frac{35}{4}+\frac{47}{6}+\frac{17}{2}=\frac{67+105+94+102}{12}=\frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12}=30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ \underline{36} & 30 \\ 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8}-\frac{19}{4}=\frac{93-38}{8}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \underline{48} & 6 \\ 7 & \end{array}$$

3- **متوافق مخرجونه**: هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي لکه $8\frac{5}{9}+7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک يې په ذو اضعاف اقل پيدا کيږي.

$$15\frac{5}{6}-7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \underline{96} & 8 \\ 1 & \end{array}$$

$$2\,\Big)\ \frac{95}{6}+\frac{31}{4}=\frac{190-93}{12}=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}$$

$$3 \quad 2$$

4- **متباين مخرجونه**: هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي لکه

$$9\frac{2}{3}+7\frac{3}{4}+7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک يې په حاصل ضرب پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}+\frac{31}{4}+\frac{37}{5}=\frac{580+456+444}{60}=\frac{1480}{60}=24\frac{40}{60}=24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 1480 & 60 \\ 120 & 24 \\ \hline 280 & \\ 240 & \\ \hline 40 & \end{array}$$

$$19\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2}-\frac{26}{3}=\frac{117-52}{6}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 6 \\ 6 & 10 \\ \hline 5 & \end{array}$$

تمرین :

لاندې سوالونه حل کړئ

1. $9\frac{4}{11}+8\frac{5}{11}+4\frac{7}{11}$
2. $12\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
3. $9\frac{5}{6}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
4. $14\frac{5}{8}-7\frac{1}{2}$
5. $6\frac{2}{9}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
6. $8\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}$

2- د عام کسر ضرب:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو یې بیا صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

1- $9\frac{2}{3}\times 5\frac{1}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}\times\frac{21}{4}=\frac{29\times 21}{3\times 4}=\frac{609}{12}=50\frac{9}{12}=50\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 609 & 12 \\ \underline{60} & 50 \\ 9 & \end{array}$$

تمرین:

لاندي سوالونه حل کړئ؟

$12\frac{3}{4}\times 8\frac{7}{9}$ -1

$6\frac{1}{8}\times\frac{11}{13}$ -2

$2\times 4\frac{3}{4}$ -3

$6\frac{1}{8}\times 7$ -4

3- د عام کسر تقسیم:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو يې . بيا د تقسيم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم عليه سرچپه کوؤ.

$19\frac{1}{2}\div 3\frac{1}{8}$ -1

$$\frac{39}{2}\div\frac{25}{8}=\frac{39}{2}\times\frac{8}{25}=\frac{312}{50}=6\frac{12}{50}=6\frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r|l} 312 & 50 \\ \underline{300} & 6 \\ 12 & \end{array}$$

$8\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}$ -2

$$\frac{33}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{99}{8}=12\frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 8 \\ \underline{8} & 12 \\ 19 & \\ \underline{16} & \\ 3 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $15\frac{4}{9} \div 3$

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 27 \\ \underline{135} & 5 \\ 4 & \end{array}$$

4- $8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$

تمرين:

1- $20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6}$

2- $41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5}$

3- $16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$

4- $111 \div 1\frac{1}{2}$

5- $14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$

کسر الکسر یا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي.

لکه:

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} \text{ یا } \frac{5}{\frac{3}{4}} \text{ ، } \frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}$$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفينو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطينو حاصل ضرب په مخرج کې ليکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}=\frac{1\times 2}{3\times 7}=\frac{2}{21}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times 5}{3\times 1}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}=\frac{7\times 13}{8\times 11}=\frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسر ورته وايي.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرين: لاندې کسرونه ساده کړئ؟

-1 $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$

-2 $\frac{9\frac{1}{8}+5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$

-3 $\frac{11\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$

-4 $\frac{4\frac{1}{2}\times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4}\div 2\frac{1}{3}}$

-5 $\frac{6+7\frac{1}{2}}{9-3\frac{1}{4}}$

-6 $\frac{\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسرونو تبادله:

1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

```
 40   | 5
 40   |0.8
----
  4
```

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

```
 10   | 6
  6   |0.16
----
  40
  36
----
   4
```

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

```
 30   | 8
 24   |0.375
----
 60
 56
----
  40
  40
----
  xx
```

2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندي خط کشوو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندي صفرونه ږدو او د اعشاريي د علامي په عوض یو لیکو او اختصار وؤ يي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ.

$$\frac{0.375}{1000}=\frac{\cancel{375}}{\cancel{1000}}=\frac{3}{8}$$

(375 → 75 → 15 → 3 ؛ 1000 → 200 → 40 → 8)

2- مثال: $0.\overline{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شویدی د 0.3 لاندې خط کشوو بیا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10}=\frac{3\times3+1}{10\times3}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

مثال: $0.1\overline{6}$ عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100}=\frac{16\times6+4}{100\times6}=\frac{96+4}{600}=\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$ 2- $\frac{3}{5}$ 3- $\frac{7}{8}$ 4- $\frac{5}{6}$ 5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$ 2- $0.7\overline{3}$ 3- $0.95\overline{45}$ 4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$ 6- $0.4\overline{16}$ 7- $0.9\overline{1}$ 8- $0.\overline{814}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه:

1- احمد د یوې هنداونې $\frac{3}{7}$ برخه واخیسته پاتي شوي برخه يې پیدا کړئ؟

2- د تیلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د $200li$ ګنجایش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تیل څومره وي؟

3- د غوړیو د بیلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړیو څخه ډکه ده د ډکې برخې دریمه برخه يې $30kg$ ده د بیلر ګنجایش څو دی؟

4- احمد د $200\frac{1}{2}$ روپو بوره د $300\frac{1}{4}$ روپۍ يې چاى د $700\frac{3}{4}$ روپۍ غوښه $30\frac{1}{2}$ روپۍ يې مالګه او اورلګيت واخیست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟

5- امین $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخیسته که غوښه کیلو ګرام په $300\frac{1}{4}$ روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخیستي دي؟

6- چاى خرڅوونکی د چایو یو پیټی چې $50kg$ چاى پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چاى عمود ته يې $3\frac{1}{4}kg$ چاى او یو دکاندار ورڅخه $20\frac{1}{4}$ کیلو ګارم چاى واخیستی دوست چې په پیټی کې څومره چاى پاتي دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم فصل

طاقت، تجزیه او جذر

طاقت لرونکی عددونه :

هغه عددونه دي چې څو واره په خپل ځان کې ضرب شوي وي.

لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربیږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وایې او د ضربیدو کرتو ته توان وایې.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

د طاقت قوانین:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي . د قاعدوڅخه یوه قاعده لیکو او توانونه یې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لروکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې یې مختلفي او توانونه یې مساوي وي قاعدې سره ضربوؤ او د توانو څخه یو توان راخلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسیم په حال کې وي قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي د قاعدو څخه یوه قاعده لیکو او توانونه یې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسیم په حال کې وي قاعدې یې مختلفي او توانونه یې مساوي وي قاعدې یې یو پر بل لیکو او د توانو څخه یو توان راخلو.

1- $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $\frac{16^7}{12^7} = (\frac{16}{12})^7 = (\frac{4}{3})^7$

3- $\frac{5^8}{3^8} = (\frac{5}{3})^8$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه یې ضربیږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر یو کیږي.

$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$

$5^0 = 1$

$\frac{5^3}{5^3} = 1 \ldots\ldots\ldots I$

$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \ldots\ldots\ldots II$

د I او II رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي. یعني $5^0 = 1$ کیږي.

2- که یو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرج ته یاد مخرج څخه صورت ته ویوړل شي د توان علامه یې تغیر خوري.

$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$

$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجزيه :

تجزيه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه مرکب عدد د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

د تجزيې طريقه:

عدد ليکو خط يې لاندې کشوو چپې خواته يې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد ليکو چې د راکړ شوي عدد په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راکړ شوی پدې لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې ليکو په همدې ترتيب عمليې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوو تر څو چې د عدد په ستون کې يو لاس ته راشي. د عمودي خط د چپې خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربي عوامل دي.

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزيه کړئ؟

3	55125
3	18375
5	6125
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

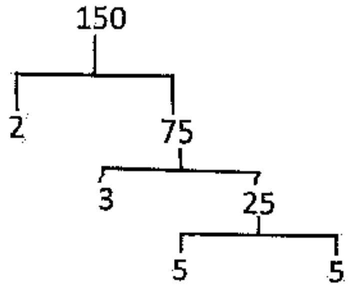
$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیاګرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسې ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول د مرکب عدد ضربي عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاګرام په طریقه تجزیه کړئ؟



$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم: د څو عددو لوی مشترک قاسم هغه عدد دی چې تر هغه په بل لوی عدد باندې دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچني مشترک مضرب: د څو عددو کوچني مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندې تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی. ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندې وویشل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه تجزیه کوو په ضربي عواملو کې یې مشترک او غیر مشترک پیدا کوو په مشترکو ضربي عواملو کې د کوچني توان والاضربي عوامل راخلو ضربوویې لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربي عواملو کې د لوړ توان والاضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

هڅال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړی؟

2	150
3	75
5	25
5	5
	1

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پیدا کړئ؟

2	660
2	330
3	165
5	55
11	11
	1

2	840
2	420
2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$
$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین :

د لاندې عددونو ا ، مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 630 او 450

2- 780 او 540

3- 960 او 660

5- 1440 او 1260

د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچني عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقي وکړي مقسوم علیه په باقي ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقي صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دی

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قسام او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس به طریقه پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 1080 & 780 \\ 780 & 1 \\ \hline 300 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 780 & 300 \\ 600 & 2 \\ \hline 180 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 180 \\ 180 & 1 \\ \hline 120 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 120 \\ 120 & 1 \\ \hline 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 60 \\ 120 & 2 \\ \hline & \end{array}$$

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پیدا کوو.

$$L.C.M = \frac{\overset{13}{780} \times 1080}{\underset{1}{60}} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

په یوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه په یوه کرښه کې لیکو خط ور لاندې کشوو چپې خواته یې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د دوي په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو تر هغو پورې عملیې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په یوه عدد ویشل کیږي د عملیې په اخر کې که د عمودي خط د چپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

2	780	1080
2	390	540
3	195	270
5	65	90
	13	18

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرین:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې عددونو کوچنی مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 960 او 1530

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر :

جذر په لغت کې ولې، ربښه یا جرړې ته وایې.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کیږي.

د یو عدد دویم جذر : هغه عدد دی چې د (2)په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي. لکه:

1- $\sqrt{64} = 8$
$8^2 = 64$
2- $\sqrt{169} = 13$
$13^2 = 169$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د درې په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

نو $64 = 4^3$ کیږي.

ددویم جذرپیدا کول:

دیوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د تجزیې پواسطه   2- په عمومي طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د تجزيي پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا کول:

عدد تجزيه کوو په مساوي ضربي عواملو کې دوه ، دوه جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو او ضربوو يې د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا کړئ؟

2	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
3	3	9
	3	3
		1

$$324 = 2 \times 3^{2}$$

د يوه عدد د دريم جذر پيداکول په

عدد تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل ئي درې،درې جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو ضربوو يي د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا کړئ؟

2	2	1000
	2	500
	2	250
5	5	125
	5	25
	5	5
		1

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوؤ، د هرې جوړې څخه یو عدد راخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

2	2	1296
	2	648
	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
	3	9
	3	3
		1

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزیې پواسطه ، پنځم ، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو ښی خواته یې د تقسیم علامه او چپې خواته یې یو عمودي خط رسموؤ بیا د عدد د ښی خوا څخه دوه ، دوه مرتبې جوړه کوؤ اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتې شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چپې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخرني جوړې یا اخرنی عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څیر یې استعمالوو د عمودي خط د چپې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ورڅخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکینې عدد مخې ته او د عمودي خط د چپې د خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چپې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکښته کوو د عمودي خط د چپې نوی رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عملیې باقي ونکړل د تقسیم د عملیې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عملیې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$\sqrt{209764} = 458$

4	20 97 64	458
85	16	
805	497	
	425	
	7264	
	7264	
	xxxx	

$\sqrt{502681} = 709$

7	50 26 81	709
1409	49	
	12681	
	12681	
	xxxx	

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$
2- $\sqrt{318096} = ?$
3- $\sqrt{734449} = ?$
4- $\sqrt{2047.5625} = ?$
5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

تقریبي جذر :

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شویدی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایي د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه 2- د اوسط په طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- په عمومي طريقه :

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوؤ که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلي جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

3	128968	359.1
65	9	
709	389	
7169	325	
	6468	
	6381	
	8600	
	7169	
	باقي 1431	

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه :

د کوچنيو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچنی عدد ته نژدې ؤ نو جذر يې د کوچنی عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راکړ شوي عددتقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيداکوو $2.5 = \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2}$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2.5+2}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$$

2.25 د 5 تقريبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقريبي 2.25جذر دی د 7 او 8 تقريبي جذر 2.75 دی.

د اعشاري عدد دويم جذر پيدا کول:

صحيح عدد يې د ښي خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه يې د چپې خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه يې طاق وي مخې ته يو صفر ږدو. کله چې د اعشار يې د علامې څخه اوړو اعشاريه خارج قسمت ته وړو.

مثال: 903.6036 دويم جذر پيدا کړئ؟

3	$\overset{\frown}{9}\,\overset{\frown}{03}.6036$	30.06
6006	9	
	036036	
	36036	
	xxxxx	

تمرين:

لاندې عددو تقريبي جذر په عمومي طريقه پيدا کړئ؟

4716 -1   35811 -2   7504-3   9814 -4   6763 -5

2- د لاندې عددو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کړئ؟

11 -1   13 -2   19 -3   29 -4   34-5

3- د لاندې اعشاري عدد دويم جذرپيدا کړئ؟

457.96 -1   1229.9049 -2   337444.81 -3   48830.25 -4

2605.0816 -5   64.048009 -6   2711.2849 -7

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذر قوانین:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي. که وغواړو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددو يې بدلووډ طاقت قوانين پرې تطبيقوو اخري عدد بيرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{31}}$$
$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{15+10+6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي. د طاقت د قوانينو سره سم کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5} = \sqrt[7]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[7]{30}$$
$$2^{\frac{1}{7}} \times 3^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{1}{7}} = (2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{7}} = 30^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{30}$$

3-که دوه جذري عددونه د تقسيم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي د طاقت د قوانينو په اساس کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[35]{5^4}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}} = 5^{\frac{7-3}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسيم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي د طاقت د قوانينو سر سم يې تر يوه جذر لاندې ليکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندې عدد لاس ته راځي

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7 = \left(5^{\frac{1}{7}}\right)^7 = 5^{\frac{1}{7}\times\frac{7}{1}} = 5^{\frac{7}{7}} = 5^1 = 5$$

6- که يو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانينو سره سم يې تر يوه جذر لاندې کوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left\{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2}$$

تمرين:

تر يوه جذر يې لاندې کړئ؟

1- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[5]{3}$ 2- $\sqrt[7]{2}\times\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{5}$ 3- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2}}$

4- $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{7}}$ 5- $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}$

د حسابي افادو د قيمت پيدا کول:

حسابي افاده: که په يوه حسابي جمله کې څو عمليې (جمع ، تفريق ، ضرب ، تقسيم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قيمت د پيدا کولو لپاره لمړی طاقت او جذر د منځه ورو بيا قوسونه خلاصوو دريم قدم کې د ضرب او تقسيم عمليې او په اخر د جمع او تفريق عمليې اجراء کوو.

قوس: يو سمبول دی چې څو عددونه تر يوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي.

1- کوچنې قوسونه چې شکل يې ( ) دی.

2- منځنی قوسونه چې شکل يې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل يې [ ] دی.

مثال:

$$(8-11)(4-5)+8-2\div 2-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3(-1)+8-1-11$$
$$3+8-12$$
$$11-12=-1$$

هم درجه کول:

که څو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندې عددونه مختلفې او درجې یې هم مختلفې وي که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو لمړی یې هم درجه کړو. طریقه یې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د همغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt[5]{3}\times\sqrt{2}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل : لمړی یې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5}\times\sqrt[10]{3^2}=\sqrt[10]{2^5\times3^2}=\sqrt[10]{32\times9}=\sqrt[10]{288}$$

2- $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt{3}}$ هم درجه یې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}}=\sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین : هم درجه یې کړئ؟

1- $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{2}$ 2- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}$ 3- $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[4]{5}$ 4- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

5- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}}$ 6- $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

همغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوي وي او د جذر درجې یې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt[3]{2}+11\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(7+11+6)\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$24\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$(24-15)\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$

2- $5\sqrt{32}+7\sqrt{128}+5\sqrt{8}-20\sqrt{2}$ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟

$5\sqrt{16\times 2}+7\sqrt{64\times 2}+5\sqrt{4\times 2}-20\sqrt{2}$

$5\times 4\sqrt{2}+7\times 8\sqrt{2}+5\times 2\sqrt{2}-20\sqrt{2}$

$(20+56+10-20)\sqrt{2}=66\sqrt{2}$

تمرين:

لاندې جذري عددونه جمع او تفريق کړئ؟

1- $11\sqrt{5}+19\sqrt{5}+8\sqrt{5}-25\sqrt{5}$

2- $\sqrt{128}+3\sqrt{8}-5\sqrt{32}$

3- $13\sqrt{27}+5\sqrt{243}-20\sqrt{3}$

ګويا کول:

که د يوه کسر په صورت يا مخرج کې جذري حد يا عدد موجود وي کولای شو چې ګويا يې کړو. مګر مشهور په رياضي کې د مخرج ګويا کول دي د کسر د مخرج ګويا کول په حساب کې دوه حالتونه لري .

1- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$. صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوؤ.

$$\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}=\frac{5\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

2- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه زياته وي لکه $\frac{3}{\sqrt[5]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د ګويا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر د درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{2}{\sqrt[5]{12}\times\sqrt[5]{12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12\times 12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرین : ګویا یې کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 2- $\frac{3}{\sqrt{12}}$ 3- $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 4- $\frac{15}{\sqrt{5}}$ 5- $\frac{2}{\sqrt{2}}$

6- $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}}$ 8- $\frac{12}{\sqrt[5]{3}}$ 9- $\frac{14}{\sqrt[5]{7}}$ 10- $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

د اعدادو سیستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه لیکل شویدی نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعمالیږي د 10 په قاعده د اعدادو سیستم او یا اعشاري سیستم بلل کیږي.

مثلاً 5918 یو عدد راکړ شویدی د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چه رقمونه یې څلور دي نو راکړ شوي عدد څلور ځایه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې لیکو.

$$5918 = 5000 + 900 + 10 + 8$$
$$= 5 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

که ضریبونه څنګ په څنګ په ترتیب سره ولیکل شي نو بیرته لمړنی عدد لاس ته راځي.

همدغه ډول که راکړ شوی عدد په مسلسله توګه په 10 وویشو او باقیات د تقسیم په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته ولیکو. او بیا دباقیاتو د ستون رقمونه په افقي کرښه کې داسې ولیکو چې د ستون د سر رقم یې په سر کې راشي. او نور رقمونه یې په ترتیب سره وروسته ولیکل شي بیرته راکړ شوی عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

10	5918	
10	591	8
10	59	1
10	5	9
	0	5

$5918_{10} = 5918$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپيوتري معايناتو کې د امراضو د تشخيص لپاره دوه نور سيستمونه هم ليکل شويدي چې د 2 په قاعده د اعدادو سيستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سيستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سيستم:

که وغواړو چې يو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سيستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ويشو باقيات يي د تقسيم د عمليي په مقابل کی دپاس څخه کښته خواته ليکوکه د باقياتو د ستون رقمونه په افقي ډول وليکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سيستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سيستم ته واړوئ؟

2	31	
2	15	1
2	7	1
2	3	1
2	1	1
	0	1

$31_{10} = 11111_2$

يا دا چې د طاقت د قوانينو څخه استفاده کوو.

$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$

$31_{10} = 11111_2$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2)دي چې عبارت له (0,1) څخه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوئ؟

حل:

5	251	
5	50	1
5	10	0
5	2	0
	0	2

$$251_{10} = 2001_5$$

$$251 = 2 \times 125 + 1$$
$$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$
$$251 = 2001_5$$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

1-33   2- 47   3- 65

4-77   5-71   6-97

لاندې عددونه د 5 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

1-211   2- 314   3- 97

4- 86   5- 98   6- 101

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 111011_2 د 10 قاعدې ته واړوئ

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59$$
$$59_{10} = 111011_2$$

د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمړی رقم په 5^0کې دریم رقم 5^1 کې .... په همدې ترتیب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه یې جمع کوؤ د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 32104_5 د 10 قاعدې ته واړو.

$$3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$
$$3 \times 625 + 2 \times 125 + 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$
$$1875 + 250 + 25 + 0 + 4 = 2154$$

تمرین:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 101111_2 2- 111011_2 3- 111111_2

4- 1010001_2 5- 100011_2

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 231_5 2- 341_5 3- 423_5 4- 143_5 5- 234_5

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم فصل

نسبت او تناسب

نسبت:

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

a ته اول حد يا صورت يا مقدم وايي b ته دويم حد يا مخرج يا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فيصد په شکل او د اعشار کسر په شکل هم ليکلای شو.

اوله قاعده - د نسبت پيدا کول: که دوه عددونه راکړ شوي وي او وغواړو چې نسبت يې پيدا کړو يو پر بل يې ليکو او اختصاروؤ يې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دويم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت يې پيدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دويمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او اول حد معلوم وي دويم حد معلوم نه وي. دويم حد په لاندې ډول پيدا کوو.

$$\text{دويم حد} = \text{اول حد} \div \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{د محمود روپی} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$

$\text{احمد روپی} = 430$ $\text{د محمود روپی} = 688Rs$

$\text{د محمود روپی} = ?$

دریمه قاده: چې د دوه کمیتو نسبت او دویم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

$$\text{اول حد} = \text{دویم حد} \times \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپی 688 دي د احمد روپی څو دي؟

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{احمد روپی} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$

$\text{محمود روپی} = 688$ $\text{احمد روپی} = 430Rs$

$\text{احمد روپی} = ?$

څلورمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې یې ضرب کړو دویم حد لاس ته راځي.

مثال:- د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پیسو مجموعه 4080 ده د هر یوه روپی څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپی}}{\text{د انور روپی}} = \frac{3}{5}$$

$\text{مجموعه} = 4080$ $\text{اکرم روپی} = \frac{3\times4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$

$\text{د اکرم روپی} = ?$ $\text{انور روپی} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$

$\text{د انور روپی} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او تفاضل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پیسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پیسو فرق یې 750 دی د هر یوه پیسي څو دي؟

نسبت $= \frac{6}{11}$

تفاضل $= 750$

عبدالهادي روپی =?

عبدالباري =?

عبدالهادي روپی $= \frac{6 \times 750}{11-6} = \frac{4500}{5} = 900$

عبدالباري روپی $= \frac{11 \times 750}{11-6} = \frac{8250}{5} = 1650$

شپږمه قاعده : چې د دوه کمیتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ویشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال:- د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل یې 2240 دی د هر یوه روپی پیدا کړئ؟

نسبت $= \frac{5}{7}$

د ضرب حاصل $= 2240$

د احمد روپی $= 5\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40$

د محمد روپی $= 7\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه یا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرج د دویم کسر صورت په همدې ترتیب اخره وي دی کسروته معکوس نسبت وایي لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتود ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{\cancel{c}} \times \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}} \times \frac{\cancel{d}}{e} = \frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پیسو نسبت $\frac{3}{4}$ دی د محمود او حامد د پیسو نسبت $\frac{5}{7}$ دی که د احمد روپی 300 وي د حامد روپی څو دی؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپی}}{\text{دمحمودروپی}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{نسبت} = \frac{\text{محمود روپی}}{\text{حامد روپی}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\cancel{\text{محمود}}} \times \frac{\cancel{\text{محمود}}}{\text{حامد}} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$$

$\text{احمد روپی} = 300Rs$ $\quad$ $\text{نسبت} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$ $\quad$ $\text{د حامد روپی} = 300 \div \frac{15}{28}$

$\text{حامد روپی} = ?$

$\text{دحامد روپی} = 300 \times \frac{28}{15} = 20 \times 28 = 560$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- یو سړي 42 منه مميز د 70 منه نخودو سره گډوي نسبت یې پیدا کړئ؟

2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟

3- یو دکاندار دوه قسمه چای سره گډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که دګډ شوي چای تفاضل 50 منه وي د چای د هر قسم مقدار پیدا کړئ؟

4- د میو او وریجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وریجې 50 منه وي مې به څومره وي او څومره مې زیاتې شي چې نسبت یې $\frac{3}{8}$ شي؟

5- د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل یې 36000 دي د هر یوه روپۍ څو دي؟

6- د بادامو او پستې د قیمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پیستې د یومن قیمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟

7- د احمد او اکرم د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپۍ 3000 وي د انور روپۍ به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

لکه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يا $a:b::c:d$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدوته وسطين وايي.

a او d طرفين دي b او c وسطين دي.

د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$$

$$2\times 24=3\times 16$$

$$48=48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه ولیکل شي نوی نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي دتناسب خواص تغير نه خوري .

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په درې حالتو کې مطالعه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب   b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر یې دوه وي لکه $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زیات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وایي.

لکه........... $\frac{5}{8} = \frac{35}{56} = \frac{45}{72}$

2- د حدو د ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب   b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په ډېریدو د بل نسبت مربوطه حد ډېریدلو او په کمیدلو سره یې کمیدلو دی تناسب ته مستقیم تناسب وایي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12} = \frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمیدو سره د بل نسبت مربوطه حد ډېریدولو او په ډېریدو سره یې کمیدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وایي.

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي

$$\frac{12}{6} = \frac{18}{36}$$

3- د حدو د ورکیدو له کبله دتناسب اقسام:

د حدو د ورکېدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- څلورم تناسب: که په یوه تناسب کې یوه حد ورک ؤ دی تناسب ته څلورم تناسب وايي لکه:

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصیت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$
$$5x = 360$$
$$\frac{5x}{5}=\frac{360}{5}$$
$$x = 72$$

ب- دريم تناسب: که په یوه تناسب کې وسطين مساوي وي دی تناسب ته دريم تناسب وايي.

مثال: د 5 او 30 دريم تناسب پيدا کړئ؟

$$\frac{5}{30}=\frac{30}{x}$$
$$x=\frac{30\times 30}{5}=\frac{900}{5}=180$$
$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په يو تناسب کې طرفين معلوم او وسطين معلوم نه وي دې تناسب ته هندسي وسط وايي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پيدا کړئ؟

$$\frac{5}{x}=\frac{x}{180}$$

$x^2 = 5 \times 180$ $\qquad$ $x^2 = 900$ $\qquad$ $\sqrt{x^2}=\sqrt{900}$

$$x = 30$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی ووایاست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟

2- اته کسه یو کار په 20 ورځو کوي ووایاست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

3- احمد یو کار په 4 ورځو او حامد یې په 12 ورځو کې کوي ووایاست چې دواړه به یې په شریکه په څو ورځو کې وکړي؟

4- احمد او محمود په شریکه یو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد یې یوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به یې په څو ورځو کې وکړي؟

5-احمد یو کار په 6 ورځو کې محمود یې په 9 ورځو کې او حامد یې په 12 ورځو کې کوي ووایاست چې ټول به یې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟

6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او یو کار په 15 ورځو کې خلاصوي ووایه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟

7- د 8 او 12 دریم تناسب پیدا کړئ؟

8- د 8 او 18 هندسي وسط څو دي؟

9- د 20 او 80 هندسي وسط پیدا کړئ؟

10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او یوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي. ووایاست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او یوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

فیصد:

د 100 له قراره د یوې تجارتي معاملې د ګټې یا تاوان معلومولو ته فیصد وایي.

یا داچه په یوه مرکبه ماده، مخلوط یا محلول کې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فیصد وایي.

د فیصد فارمولونه دا دي.

$$\text{ګټه} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}{100}$$

په مرکبه ماده یا مخلوط یا محلول کې د هغوي مقدار د سرمایې حیثیت لري د اجزاو فیصدي نرخ دی او په ټوله ماده کې د هغه جز مقدار د ګټې حیثیت لري.

$$\text{نرخ} = \frac{\text{ګټه} \times 100}{\text{سرمایه}}$$

$$\text{سرمایه} = \frac{\text{ګټه} \times 100}{\text{نرخ}}$$

مثال: 8000 روپۍ ګټه د 3 فیصد په نرخ پیدا کړئ؟

$$\text{ګټه} = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: یو سړي په 12000 روپیو کې 960 روپۍ وګټلې نرخ کې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

$\text{سرمایه} = 12000Rs$

$\text{ګټه} = 960Rs$

$\text{نرخ} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 6% په نرخ ګټلي سرمایه یې پیدا کړئ؟

ګټه $= 15000$ $\qquad$ $سرمایه = \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$

نرخ $= 6$ $\qquad$ $سرمایه = 250000$

سرمایه $= ?$

4- د یوه سړي د ګټې او سرمایې مجموعه $28000Rs$ ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او ګټه یې معلومه کړئ؟

حل:

ګټه او سرمایه $= 28000Rs$ $\qquad$ $100 + 12 = 112$

نرخ $= 12$ $\qquad$ $\frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$

سرمایه $= ?$ $\qquad$ $x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$

ګټه $= ?$ $\qquad$ $سرمایه = x = 250000Rs$

$$ګټه = 28000 - 25000 = 3000$$

$$ګټه = 3000$$

پوښتنه:- په $40kg$ مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وايي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پریږدي. تخفیف بلل کیږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د ګټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{تخفيف} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{نرخ}}$$

اصلي قيمت −

تخفيف

فعلي قيمت

مثال: د يوه موټر اصلي قيمت $300000Rs$ دی خرڅوونکی اخيستونکی ته په 100 کې 8 روپۍ پرېښودی تخفيف او اصلي قيمت يې پيدا کړئ؟

$\text{اصلي قيمت} = 300000$

$\text{نرخ} = 8\%$

$\text{تخفيف} = ?$

$\text{فعلي قيمت} = ?$

$\text{تخفيف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$

$\text{تخفيف} = 24000$

$\text{فعلي قيمت} = 300000 - 24000 = 276000Rs$

2- د يوه اس اصلي قيمت $240000Rs$ دي که تخفيف يې $16800Rs$ وي نرخ يې پيدا کړئ؟

$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7 \qquad \text{نرخ} = 7$

3- د يوه موټرتخفيف $80000Rs$ دی نرخ يې 8 دی اصلي قيمت يې څو دی؟

$\text{تخفيف} = 80000R_s$

$\text{نرخ} = 8$

$\text{اصلي قيمت} = ?$

$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000\mathrm{R_s}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

احدیت:

په لغت کې تنهایي او یوازي والي ته وايي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شیانو د مجموعي قیمت څخه د یوه شي د قیمت پیدا کولو ته احدیت وايي.

طریقه یې داسې ده چې مجموعي قیمت د شیانو په شمېر ویشو.

$$\text{احدیت} = \frac{\text{مجموعي قیمت}}{\text{د شیانو شمېر}}$$

مثال: یو خیاط په څلور ورځو کې 28 کمیسونه وګنډل وواياست چې په یوه ورځ کې به یې څو کمیسونه ګنډلي وي؟

ورځې	کمیسونه
$\frac{4}{1}$	$= \frac{28}{x}$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په یوه ورځ کې یې 7 کمیسونه ګنډلي دي.

2- یو درجن قلمونه چې (12) داني دي په $240Rs$ کیږي 7 داني به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنګه سوالونه په تناسب کې ډېر اسنه حل کیږي خو د احدیت په طریقه داسې حلیږي اول د یو پنسل قیمت پیدا کوو بیا یې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قیمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$\text{د 7 پنسلو قیمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قیمت 360 روپۍ وي د یو متر رخت قیمت څو دی او بیا د 5 مترو قیمت یې پیدا کړئ؟

$$\text{د یوه متر قیمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$\text{د 5 مترو قیمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربحه یا ربح:

ربح په لغت کې سود یا گټې ته وايي.

او په اصطلاح کې په یوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د يوې سرمايې د گټې د پيدا کولو طريقې ته ربح وايي. ربح په دوه ډوله ده.

1- ساده ربح   2- مرکبه ربحه

1- ساده ربحه:

هغه ربحه ده چه د مودې تر رسيدلو وروسته گټه اخيستل کيږي او سرمايه بيا په ربحه اچول کيږي

د ساده ربحې فارمولونه څلور دي.

$$\text{ربح} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{ربح} \times 1200}{\text{موده} \times \text{سرمایه}}$$

$$\text{موده} = \frac{\text{ربحه} \times 1200}{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{سرمایه} = \frac{\text{ربحه} \times 1200}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

مثال: د 20000 روپيو ربحه د 15٪ په نرخ په 8 مياشتو کې پيدا کړئ؟

$$\text{ربحه} = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000 \qquad \text{ربحه} = 2000Rs$$

مثال: يو سړی د 8 مياشتو لپاره $20000Rs$ په مرابحه واچوي پس له 8 مياشتو يې ربحه $2000Rs$ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15 \qquad \text{نرخ} = 15\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 20000 روپیو ربحه د 15٪ په نرخ 2000 روپۍ ده موده يې پيدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \qquad \text{8 مياشتې} = \text{موده}$$

مثال: يو سړي يوه سرمايه په مراجعه واچوله پس له 8 مياشتو يې د 15٪ په نرخ 2000 روپۍ ربحه واخيسته سرمايه يې پيدا کړئ؟

$$\text{سرمايه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمايه} = 20000\text{Rs}$$

2- مركبه ربحه :

که د مرابحې د وخت تر را رسيدلو وروسته ربحه او سرمايه بيا په ربحه واچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وايي.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1+r)^n$$

A د سرمايې او ربحې مجموعه ده C اولنۍ سرمايه ده r نرخ دی او n د کلونو شمير دی.

C سرمايه او Cr گټه او A د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$
$$A_1 = C(1+r)$$
$$A_2 = C(1+r) + C(1+r)r$$
$$A_2 = C(1+r)(1+r) = c(1+r)^2$$
$$A_3 = C(1+r)^2 + C(1+r)^2 r$$
$$A_3 = C(1+r)^2(1+r) = C(1+r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د n کلو د سرمايې او ربحې مجموعه پيدا کړو.

په عمومي صورت ليکو چې:

$$A = C(1+r)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو سړي $50000Rs$ د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ربحه واچولی ګټه او سرمایه يې پيدا کړئ؟

$$A = 50000(1 + \frac{5}{100})^3$$

$$A = 50000(\frac{100 + 5}{100})^3$$

$$A = 50000\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000\left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5 \times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرين:

1- د 10000 روپيو ربحه 8٪ په نرخ په 9 مياشتو کې څو ده ؟

2- د 50000 روپيو ګټه په 6 مياشتو کې 5250 روپۍ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

3- د 20000 روپيو ګټه د اوه مياشتو په موده کې 1750 روپۍ ده نرخ يې څو دی؟

4- د 18000 او ګټې د 18٪ په نرخ 1750 روپۍ ده موده يې پيدا کړئ؟

5- لوی سرمايې په 8 مياشتو کې د 15٪ په نرخ 3000 ګټې سرمايه څو ده ؟

6- احمد 5000 روپۍ د 20٪ په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ربحه واچولې ګټه او سرمايه يې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تنزیل:

تنزیل په لغت کې کښته کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې سند خرڅوونکي یې سند اخیستونکي ته په یوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې پرېږدي تنزیل بلل کیږي.

د تنزیل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزیل} = \frac{\text{اصلي قیمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قیمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{اصلي قیمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزیل} - \text{اصلي قیمت} = \text{فعلي قیمت}$$

مثال: د سند اصلي قیمت $300000Rs$ دی مودې ته یې 9 میاشتې دي نرخ یې 15٪ دي تنزیل یې څو دي؟

$$\text{تنزیل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قیمت 50000 دی په 9 میاشتو کې یې تنزیل $3000Rs$ دی نرخ یې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8 \qquad \text{نرخ} = 8$$

3- د 20000 د تنزیل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6 \qquad \text{شپږ میاشتې} = \text{موده}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د يوه سند تنزيل د 15% په نرخ چې موده ته يې 6 مياشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قيمت څو دی؟

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قيمت} = 45000Rs$$

تمرين:

1- د يوه سند اصلي قيمت $450000Rs$ موده ته يې 6 مياشتې پاتې دي د 15% په نرخ يې تنزيل څو دی؟

2- د يوه سند اصلي قيمت $75000Rs$ دی د 4% په نرخ يې تنزيل $2250Rs$ شو موده ته يې څومره وخت پاتې دی.

3- د يو سند اصلي قيمت $90000Rs$ دی موده ته يې 8 مياشتې دی که تنزيل $3000Rs$ وي نرخ يې پيدا کړئ؟

4- د يوه سند تنزيل په 8 مياشتو کې د 7% په نرخ $5600Rs$ شوي اصلي قيمت يې څو دي.

مشارکت:

که څو کسه په يوه تجارتي معامله لاس پورې کړي ګټه او تاوان يې سره شريک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وايي.

د شراکت د ګټې تقسيم په څلور حالتو کې مطالعه کوو.

اول حالت:

چې سرمايې او مودې يې مساوي وی. ګټه په نفرو ويشل کيږي.

مثال: احمد ، محمود او حامد هر يوه $500000Rs$ لري د جمل په اول يې په تجارت پيل وکړ د کال تر اخره پورې $900000Rs$ روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه څو ده.

حل:

$$\text{د هريوه ګټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

چې مودې یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي ګټه د سرمایو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد $60000Rs$ لري په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې $300000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ.

د احمد سرمایه $= 40000Rs$ 1/حمل

د محمود سرمایه $= 50000Rs$ 1/حمل

د حامد سرمایه $= 60000Rs$ 1/حمل

ګټه $= 300000Rs$

د هر یوه ګټه $=?$ $4 + 5 + 6 = 15$

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

د احمد ګټه $= 4 \times 20000Rs = 80000Rs$

د محمود ګټه $= 5 \times 20000Rs = 100000Rs$

د حامد ګټه $= 6 \times 20000Rs = 120000Rs$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي ګټه د مودو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد $150000Rs$ لرلې د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د $150000Rs$ په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د $150000Rs$ په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library -

حل:

احمد	150000	1/ حمل/	12
محمود	150000	1/ اسد/	8
حامد	150000	1/عقرب/	$\frac{5}{25}$

گټه = 500000

د هر يوه گټه =?

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

$$د\ احمد\ گټه = 12 \times 20000 = 240000$$

$$د\ محمود\ گټه = 8 \times 20000 = 16000$$

$$د\ حامد\ گټه = 5 \times 20000 = 100000$$

څلورم حالت:

چې مودې او سرمايې مختلفې وي.

د هر سړي موده د هغه به سرمايه کې ضربيږي د ضرب حاصلونه يې جمع کيږي گټه په دغه مجموعه ويشل کيږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايې په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لرلې د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده؟

احمد	= 50000	1/حمل/
محمود	= 80000	1/ميزان/
گټه	= 216000	

د هر يوه گټه =?

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد ګټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود ګټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرين:

1- څلور کسان هر يو 200000 روپۍ لرلې. په اول د حمل يې تجارت شروع کړ د کال تر اخره يې [illegible] روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه څو ده؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلې د حمل په اول يې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپيو په سرمايه په اول دسنبله ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 120000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلې په اول د ثور يې تجارت شروع کړ د کال تر اخره يې 150000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلې په اول د جوزا يې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپيو په سرمايه په اول د ميزان ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 112000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

سیټ (Set):

سیټ یو انګلیسي لفظ دی چې مفهوم یې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

په اصطلاح کې سیټ د هغو شیانو مجموعه یا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخیص وړ وي.

سیټ د الفباء د غټو تورو پواسطه ښودل کیږي لکه A ، B ، C ، M ، .... او داسې نور.

د سیټ نظریه د Gorge cantor (1845 – 1919) م پواسطه په ریاضي کې داخل او معرفي شوه.

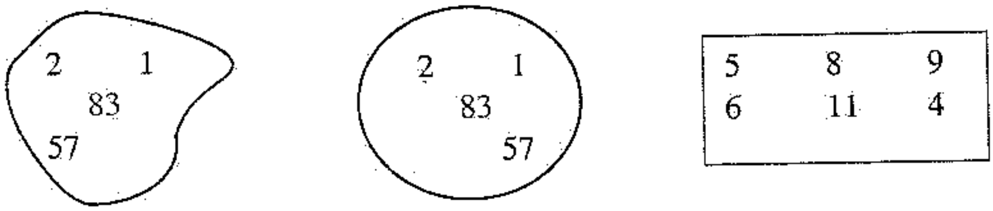
د سیټ عناصر Element of set:

په سیټ کې شاملو شیانو ته د سیټ عناصر وايي. مثلاً $A = \{2,3,a,b\}$

چې 2، 3، a او b د سیټ عناصر دي.

د سیټ نمایش:

Venn برطانوي عالم سیټ د هندسي او غیر هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې دسیټ دغه نمایش Venn diagram وايي.



د سیټ د لیکلو طریقې:

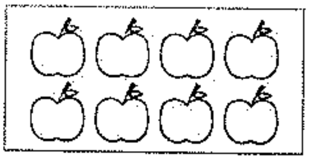
د سیټ د لیکلو طریقې څلور دي.

1- Picture Method:

پدې میتود کې د سیټ د عناصرو شکلونه رسموي دا میتود په کښته ټولګیو کې استعمالیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:



2- د Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفي میتود پواسطه لیکل کیږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کیږي

د E ژبې د بې اوازه تورو سیټ په A ښیو.

$$A = \{\text{د } E \text{ بې اوازه توری}\}$$

$$B = \{\text{حسابي ارقام}\}$$

3- د Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي.

لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په (x) ښیي فرضاً د A د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو x د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کېږي چې د A د سیټ عناصر x دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیټ اقسام:

سیټ په څلور قسمه دي.

1- خالي سیټ
2- یو عنصره سیټ
3- معین سیټ
4- غیر معین سیټ

1- خالي سیټ: هغه سیټ چه عناصر نلري د خالي سیټ په نوم یادیږي لکه $A = \{\ \}$ خالي سیټ د ϕ د علامې پواسطه ښودل کیږي.

2- یو عنصره سیټ: که کوم سیټ یو عنصر ولري دې سیټ ته یو عنصره سیټ وایې. لکه $B = \{3\}$ یا $A = \{$ لمر $\}$

3- معین سیټ: هغه سیټ چې عناصر یې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سیټ.

$$A = \{0,1,2,3,,4,5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غیر معین سیټ :

هغه سیټ چې عناصرئي د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبعي اعدادو سیټ.

$$A = \{IN \text{ د طبیعي اعدادو سیټ}\}$$
$$B = \{IR\}$$

د روابطو له مخې د سیټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سیټونه په 8 اته قسمه دي.

1- فرعي سیټ 2- کلي سیټ 3- مکمله سیټ
4- طاقت لرونکي سیټ 5- مساوي سیټونه 6- معادل سیټونه
7- منفصل سیټونه 8- غیر منفصل سیټونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- فرعي سیټ: که د A او B دوه داسې سیټونه ولرو چې د B د سیټ هر عنصر د A په سیټ کې شامل وي نو د B سیټ د A د سیټ فرعي سیټ بلل کیږي لکه

$A = \{x \epsilon IR / 1 < x < 12\}$ او د $B = \{4,6,8,10\}$

څرنګه چې د B د سیټ هر عنصر په A کې شامل دی نو د B سیټ د A د سیټ فرعي سیټ دی او داسې لیکل کیږي. $B \subset A$

فرعي سیټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعي سیټ   b- غیر واقعي فرعي سیټ

a- واقعي فرعي سیټ: که دیوه سیټ ټول عناصر په بل سیټ کې شامل وي او په دویم سیټ کې داسې عناصر وي چې په لمړی سیټ کې نه وي. لکه:

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ او د $B = \{3,4,5,6\}$ نو $B \subset A$

b- غیر واقعي فرعي سیټ: که دوه داسې سیټونه ولرو چې د اول سیټ ټول عناصر په دویم سیټ کې او د دویم سیټ هر عنصر په اول سیټ کې شامل وي دغه سیټونه یو دبل غیر واقعي فرعي سیټونه دي. لکه:

$A = \{2,4,6,8,10\}$ او $B = \{10,8,2,6,4\}$ نو $B \subseteq A$ او $A \subseteq B$.

2- کلي سیټ: که یو سیټ څو فرعي سیټونه ولري دې سیټ ته کلي سیټ وایي لکه $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ چې $B = \{3,4\}$ او $C = \{5,6,7\}$ او د $D = \{8,9,10\}$ فرعي سیټونه دي نو د A سیټ کلي سیټ وي.

3- مکمله سیټ: که یو کلي سیټ یو واقعي سیټ ولري نو د کلي سیټ د پاتې عناصرو سیټ د فرعي سیټ مکمله سیټ دی.

مثلاً $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ او $B = \{2,3,4,5,6\}$ دوه ستونه لرو چې $B \subset A$ دی نو د B د سیټ مکمله سیټ چې په د B' ښودل کیږي عبارت $B' = \{7,8,9,10,11,12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سیټونه: هر کلي سیټ د خپلو فرعي سیټونو طاقت لرونکي سیټ یا $Power\ Set$ دی لکه $A = \{\triangle, \odot, \boxdot\}$ او $A_1 = \{\triangle\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A_2 = \{\odot\}$ ، $A_3 = \{\boxdot\}$ ، $A_4 = \{\Delta,\odot\}$ ، $A_5 = \{\Delta,\boxdot\}$ ، $A_6 = \{\odot,\boxdot\}$ ،
$A_7 = \{\Delta,\odot,\boxdot\}$ او $A_8 = \{\}$

ستونه لرو چې A سیټ ئې کلي سیټ او نور يې فرعي سیټونه دي.

يعني $P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

د يوه سیټ د فرعي سیټونو شمېر د 2^n پواسطه بيدا کيږي n د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د B د سیټ عناصر څلور دي د فرعي سیټونو شمېر يې پیدا کړئ؟

$n = 4$ $\qquad P(B) = 2^n$

$P(B) =?$ $\qquad P(B) = 2^4 = 16$

$P(B) = 16$

5- مساوي سیټونه: که د A او B دوه داسې سیټونه ولرو چې د A د سیټ هر عنصر د B په سیټ کې او د B دسیټ هر عنصر د A په سیټ کې شامل وي . نو دې سیټونو ته مساوي سیټونه وايي.

يعني که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

6- معادل سیټونه: هغه سیټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4,5,8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

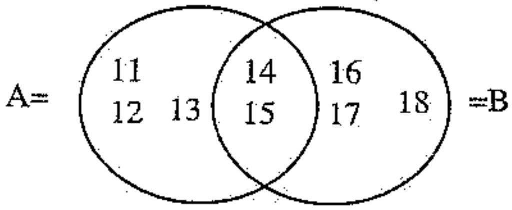
7- منفصل سیټونه: هغه سیټونه دي چې د هر سیټ هیڅ عنصر په بل سیټ کې نه وي.

لکه $A = \{1,3,5,7,99,11,13\}$ او $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

8- غیر منفصل سیټونه: که د دوه یا څو سیټونو یو یا څو عناصر سره شریک وي دې سیټونو ته غیر منفصل سیټونه وايي.

لکه $A = \{11,12,13,14,15\}$ او $B = \{14,15,16,17,18\}$ چې $\{14,15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د A او B سیټونه غیر منفصل دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سیټونو عملیې:

په حساب کې د سیټونو عملیې درې دي.

1- د سیټونو اتحاد 2- د سیټونو تقاطع 3- د سیټونو تفاضل

1- دسیټونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیټونو اتحاد د هغه عناصرو سیټ دی چې اقلاً هغه عناصر په دغه سیټونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضي په دوه یا درې سیټونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$B = \{8,9,10,11,12,13\}$ او $A = \{4,5,6,7,8,9\}$

$$A \cup B = \{4,5,6,7,8,9\} \cup \{8,9,10,11,12,13\} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$$
$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

2- د سیټونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په دوه یا څو سیټونو کې شامل وي. لکه $A = \{3,4,5,6,7\}$ او $B = \{6,7,8,9,10\}$

$$A \cap B = \{6,7\}$$
$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

3- د سیټونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$B = \{4,5,6,7,8,9\}$ او $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3\}$$
$$A - B = \{1,2,3\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شویدی چې جبر د مات هډوکي تړلو ته وایي.

او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په IR سره ښودل کیږي.

د حقیقي اعدادو سیټ IR:

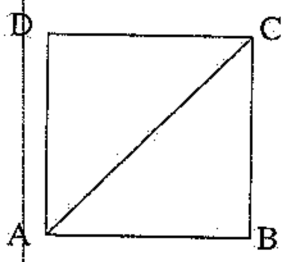
د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وایي.

$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وایي که ناطق عدد په Q او غیر ناطق په Q' وښیو نو $IR = [Q \cup Q']$

صحیح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوی چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقې څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبداء واقع وي د دې مربع مساحت $1cm^2$ دي که د A نقطه د C سره وصل کړو نو AC د مربع وتر لاس ته راځي چې.



$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1r$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پيدا کولو لپاره د A نقطه مرکز نيسو او د $\sqrt{2} = \overline{AC}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او يوه دايره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړي دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتيب کولای شو چې دغير ناطقو عدد و نقطې د عددو په کرښه پيدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غير ناطق عدد نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤد پرکارخوله په همدغه شعاع خلاصوواو قوس وهو د XX' د محور سره يې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه ليکل کيږي مګر په الجبر کې عدد او علامه دواړه يو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مګر 19− او 19+ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعماليږي مګر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړيږي.

لکه $4x-5$ ، $7x^2+6x+7=0$ ، $y=3x-4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانين بشپړ شويدي زيادت نه قبلوي مګر الجبر د تمدن تابع دي د تخنيک او تکنالوژۍ د پرمختګ سره سم يې قوانين او فارمولونه ډيريږي او انکشاف کوي.

د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب ، تقسيم ، جذر او طاقت حالتو ته حد وايي.

لکه: -3 ، x ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، x^3 ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{-5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عين حروفو توانونه يې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ يا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ يا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفريق حالتو ته افاده وايي لکه $11x - 8$

يو حده افادې ته مونوم وايي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بينوم وايي. لکه $19x - 20$

درې حده افدې ته ترينوم وايي.لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دريو زيات حدونه ولري کثير الحده افاده ورته وايي. لکه
$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$

په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولينوم وايي.

پولينوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه يې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل يې دادی.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

د پولينوم دهر حد ضريب د همغه پولينوم د توان په نوم يادېږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$a_5 = 7$, $a_4 = -12$, $a_3 = 13$, $a_2 = 0$, $a_1 = -2$, $a_0 = 15$

پولينوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې موجود وي لکه $7x - 20x^3 + 8x^2 - 8x^4 + 7$ پدې پولينوم کې کوچنی توان صفر دی او لوړ توان يې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1 ، 2 ، 3 دي چې درې واړه پکې موجود دي نو پورتنی پولينوم کامل پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- ناقص پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه يکې موجود نه وي لکه .

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې يې حرف موجود نه وي. لکه:

$$7x^3 + 4x^2 + 11x + 8$$

$$\frac{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}{5}$$

4- کسري پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه :

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1}, \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3}, \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس په صعودي يا نزولي ډول ترتيب شوي وي.

لکه $2 - 4x + 11x^2 + 8x^3 + 8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غير منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس ترتيب شوي نه وي.

لکه: $3x - 8x^3 + 7 + 3x^2$

7- ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $7x^2 - 31x + \sqrt{2}$.

8- غير ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي. لکه :

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه يې کسري کيږي.

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غير ناطق پولينوم ته ملتي نوم هم وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف يې ترجذر لاندې وي که دطاقت په شکل وليکل شي توانونه يې کسري کيږي.

د مونوم درجه: د يو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دريمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله يا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ يو $3 + 2 = 5$ درجه مونوم دی.

د پولينوم درجه: Degree of a Polynome د پولينوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولينوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2 + 5x^2y^3 + 8x^3y^4$ چې اومه درجه پولينوم دی. $8x^3 + 5x^2 - 4x + 2$ يو دريمه درجه پولينوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې يې مساوي وي. لکه $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

که په يوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قيمت د هغه حد د توان څخه پيدا کوو چې توان يې معلوم وي.

لکه $x^3 + x^my + x^ny^2 + y^3$

حل:

$m + 1 = 3$	$m = 3 - 1$	$m = 2$
$n + 2 = 3$	$n = 3 - 2$	$n = 1$

د الجبري عددونو څلور ګوني عمليې

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو . هم علامه عددونه جمع کيږي او علامه يې شريکه علامه ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} -435 \\ -387 \\ \hline -822 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +215 \\ +416 \\ \hline +631 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلف العلامه عددونه یو د بل څخه منفي کیږي او علامه د لوی عدد لیکل کیږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ \underline{-416} \\ -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ \underline{-168} \\ +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ورکوو. او د جمعې عملیه پرې اجراء کوو.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \underline{\pm 263} \\ +468 \end{array} \quad \begin{array}{r} -216 \\ \underline{\mp 418} \\ +202 \end{array} \quad \begin{array}{r} -485 \\ \underline{\pm 316} \\ -801 \end{array} \quad \begin{array}{r} +465 \\ \underline{\mp 317} \\ +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو.

د علامو ضربول په یوه جدول کې مطالعه کوو.

د عین علامو د ضرب حاصل مثبت دی.	$+ \times + = +$ $- \times - = +$
او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی.	$+ \times - = -$ $- \times + = -$

د $+ = - \times -$ ثبوت:

اول د $+ = - \times -$ ثبوت په عدد:

$$5 \times 8 = 40$$

$$(6 - 1)(9 - 1) = 40$$

$$54 - 6 - 9 \boxdot 1 = 40$$

$$54 - 15 \boxdot 1 = 40$$

$$39 \boxdot 1 = 40$$

که په خالي خانه کې + علامه ولیکل شي د مساوات دواړه خواوې مساوي کیږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1) = +1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم د + =− × − ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$

$$(-a)(-b) = x \ldots\ldots\ldots\ldots I$$

$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$

$$-a(-b + b) = x - ab$$

$$-a(0) = x - ab$$

$$0 = x - ab$$

$$ab = x$$

په I رابطه کې د x په عوض ab وضع کوؤ.

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې + =− × − کیږي.

د − =− × + ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$

$$(+3)(+3) = 9$$

$$(+3)(+2) = 6$$

$$(+3)(+1) = 3$$

$$(+3)(\ 0\ ) = 0$$

$$(+3)(-1) = -3$$

$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې − =− × +

مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$

$$(-8)(-9) = 72$$

$$(-5)(+8) = -5$$

$$(+4)(-7) = -28$$

$$\begin{array}{r} -13 \\ \underline{-\ 5} \\ +65 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +3 \\ \underline{-4} \\ -12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -9 \\ \underline{+3} \\ -27 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +8 \\ \underline{+7} \\ +56 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبري عددونو تقسيم:

علامه په علامه او عدد په عدد ویشو لمړی د علامو خارج قسمت په یوه جدول کې مطالعه کوؤ.

$$\frac{+}{+}=+ \qquad \frac{-}{-}=+ \qquad \frac{+}{-}=- \qquad \frac{-}{+}=-$$

$$\frac{+18}{+3}=+6 \qquad \frac{-15}{-5}=+3 \qquad \frac{+12}{-6}=-2 \qquad \frac{-10}{+2}=-5$$

د پولینومونو څلور ګوني عملیې

1- د پولینومونو جمع:

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليکو چې مشابه حدونه يو تر بل لاندې راشي بيا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه يې شريکه علامه ليکو او مختلف العلامه مشابه حدونه يو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد ليکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3+8x^2-11x+8 \\ \underline{11x^3+9x^2+15x-3} \\ 18x^3+17x^2+4x+5 \end{array}$$

2- د پولینومونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې مشابه حدونه يو د بل لاندې راشي بيا د مفروق علامو ته تغير ور کوؤ او د جمع عمليه پرې تطبيقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4-15x^3+8x^2-20x+\ \ 8 \\ \underline{\pm35x^4\pm9x^3\pm11x^2\pm\ \ 9x\mp16} \\ -22x^4-24x^3\ \ -3x^2-29x+24 \end{array}$$

3- د پولینومونو ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې ليکو بيا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوؤ د پولینومونو دضرب حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$
\begin{array}{r}
3x^3-5x^2+7x-7\\
7x^2-8x+9\\
\hline
21x^5-35x^4+49x^3-49x^2\\
-24x^4+40x^3-56x^2+56x\\
27x^3-45x^2+63x-63\\
\hline
21x^5-59x^4+116x^3-150x^2+119x-63
\end{array}
$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوونې د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کښته کوو نوی مقسوم جوړو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوي برخې ته باقي وايي.

مثال:

$$
\begin{array}{r|l}
72x^5+95x^4-39x^3+9x^2+64x-21 & 8x^2+7x-3\\
\cline{2-2}
\pm72x^5\pm63x^4\mp27x^3 & 9x^3+4x^2-5x+7\\
\cline{1-1}
32x^4-12x^3+9x^2 & \\
\pm32x^4\pm28x^3\mp12x^2 & \\
\cline{1-1}
-40x^3+21x^2+64x & \\
\mp40x^3\mp35x^2\pm15x & \\
\cline{1-1}
56x^2+49x-21 & \\
\pm56x^2\pm49x\mp21 & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده دعوه :

د صحیح عددونود تقسیم میزان په لاندې ډول دی

باقي + خارج قسمت × مقسوم علیه = مقسوم

که مقسوم په $P(x)$ اومقسوم علیه په $(x-a)$ اوخارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په R وښیونو لیکو چې:

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د x په عوض a وضع کوو نو :

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

$$Q(a) = R$$

دی دعوی ته د باقیمانده دعوه یا $Remainder's\ Theorem$ وائي.

مثال: وښیاست چه $x+2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ دپولینوم جذر دی او که نه دی؟

حل: د $x+2$ جذر پیدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولینوم کې د x په عوض (-2) وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو (-2) د پولینوم جذر دی او $x+2$ د پولینوم فکتور دی.

$$P(-2) = 3(-2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$$
$$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$$
$$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$$
$$P(-2) = -28 + 28$$
$$P(-2) = 0$$
$$R = 0$$

$x+2$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (-2) ئي جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: هغه افاده پیدا کړئ چه په $x-1$ باندی وویشل شي باقي ئي (-3) شي او که په $x+2$ باندي وویشل شي باقي ئي -9 شي.

$$p(x) = ax + b$$
$$p(1) = a.1 + b = -3$$
$$p(-2) = a(-2) + b = -9$$
$$a + b = -3$$
$$\mp 2a \pm = \mp 9$$
$$3a = 6$$
$$3a = 6 \Rightarrow a = 2$$
$$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$$
$$b = -5$$

مطلوبه افاده $(2x-5)$ ده.

تمرین:

1- جمع یې کړئ؟

a-
$$\begin{array}{r} 11x^3 - 11x^2 + 7x - 9 \\ 8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \\ \underline{9x^3 - 4x^2 + x - 2} \end{array}$$

b-
$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 16 \\ 7x^2 - 20x + 8 \\ \underline{5x^2 + 3x - 11} \end{array}$$

2- تفریق کړئ؟

a-
$$\begin{array}{r} 8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15 \\ \underline{7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20} \end{array}$$

b-
$$\begin{array}{r} 11x^3 - 13x^2 + 20x - 8 \\ \underline{5x^3 + 15x^2 + 8x + 11} \end{array}$$

3- ضرب یې کړئ؟

a-
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \\ \underline{7x^2 - 8x + 6} \end{array}$$

b-
$$\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 7 \\ \underline{3x^2 + 7x - 8} \end{array}$$

c-
$$\begin{array}{r} 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \\ \underline{3x^3 - 8x^2 + 6x - 8} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تقسيم يې کړئ؟

$$\frac{15x^5+16x^4-73x^3+101x^2-5x+6}{3x^2+8x-6}-a$$

$$\frac{21x^4+67x^3-58x^2-119x+77}{7x^2+6x-11}-b$$

$$\frac{35x^6-59x^5+36x^4+35x^3-74x^2+60x-24}{5x^3-7x^2+6x-3}-c$$

$$\frac{16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4}{2x+37}-d$$

ترکیبي تقسیم *Synthetic Division*

هغه تقسیم دی چه د خارج قسمت د ضریبو د پیدا کولو لپاره د مقسوم ضریبونه ټول په یوه وار استعمالیږي.

طریقه یې داسې ده چه د مقسوم ضریبونه په یوه افقي کرښه کې لیکو د کرښې په اخر کې په یوه کنج کې د قیمت لیکو بیا یوې کرښې ته ځای پریږدو او یو خط کشوو دمقسوم د پولینوم د اول حد ضریب بې له کوم تغیره راکښته کوو. د x په قیمت کې یې ضربوو د دویم حد دضریب لاندې یې لیکو او ورسره جمع کوو یې. د جمع حاصل د x په قیمت کې ضربوو. په همدې ترتیب تر اخره اجراتت کوو. د خط لاندې اخرنې عدد د R قیمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضریبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجې څخه یوه کمه ده.

که R=0 وي نو x-a د مقسوم دپولینوم فکتور دی. او د قیمت د پولینوم جذر دي.

مثال:-د ترکیبي تقسیم پواسطه وښیاست چه $(x-2)$ د $P(x)=x^4+6x^3-8x^2-12x-8$ د پولینوم فکتور دي.

1	+6	-8	-12	-8	2
	2	16	16	8	
1	8	8	4	0	

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او (2) د پولینوم جذر دی او $q(x)=x^3+8x^2+8x+4$ د خارج قسمت پولینوم دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که بینوم د $(x-a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x+a)$ شکل لرلوو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $\left(\pm\frac{b}{a}\right)$ لیکل کیږي. نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

تمرین

1 : د باقیمانده دعوی پواسطه یي حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x+3)$ وویشل شي باقي یي (-24) شي او که په $(2x-3)$ وویشل شي باقي یي (-6) شي.

2 : د ترکیبي تقسیم پواسطه یي حل کړئ؟

a: $\dfrac{x^4-6x^3+15x^2-6x-40}{x-3}$

b: $\dfrac{2x^4-13x^3+4x^2+24x-28}{2x+3}$

c: $\dfrac{6x^3+4x^2-84x-9}{x+4}$

d: $\dfrac{12x^4-x^3-20x^2+8}{3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم فصل

مساوات

د دوه افادو د عددي قيمتو برابرى ته مساوات وايي.

مساوات په دوه قسمه دی.

1- مطابقت 2- شرطيه مساوات يا معادله

1- مطابقت:

مطابقت هغه مساوات دی چې د مجهول په ټولو قيمتو باندې يې دواړه خواوي مساوي وي.

د اسانتيا لپاره مطابقتونه په شپږو ګروپو کې مطالعه کوو.

1 ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a+b)^n$ شمکل ولري.

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n+1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې يې مثبت دي په اول حد کې د a توان n د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان n شي د اول حد ضريب يو دی د دويم حد ضريب n دی د نورو حدو د ضريبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکيني حد ضريب د a په توان کې ضربوو د مخکينو حدو په شمېر يې ويشو.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$
$$(a+b)^9 = ?$$
$$(a+b)^{10} = ?$$
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \dots\dots + nab^{n-1} + b^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- گروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a-b)^n$ شکل ولري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول گروپ د مطابقتو په څېر دي. صرف د اول گروپ د ټول حدو علامې مثبت دی او د دویم گروب د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتیب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$
$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$
$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$
$$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$
$$(a-b)^9 = ?$$
$$(a-b)^{10} = ?$$
$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 \ldots\ldots + nab^{n-1} - b^n$$

3- دریم گروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې گروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړه حدو د قاعدو تفاضل دی دویم قوس n حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان $(n-1)$ شي.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$
$$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
$a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

|
|
|

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

4- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n طاق وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دویم قوس n حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي. په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر څو چې د a توان صفر شي او د b توان $n-1$ شي.

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^6 + b^6 = (a+b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^9 + b^9 = ?$

$a^{11} + b^{11} = ?$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n جفت وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي د هر قوس اول حد د دواړو حدودقاعدو مجموعه ده او دویم حد یې د دواړو حدو د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چند جذر دی.

$a^2 + b^2 = \left(a + b - \sqrt{2ab}\right)\left(a + b + \sqrt{2ab}\right)$
$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = \left(a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$

$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$

شپږم ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري درې لمړي حدونه يې مربعګاني دي درې وروستي حدونه يې د دوه حدو د حاصل ضرب دوه چند دی.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

1: $(2x + 3y)^2 = (2x)^3 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

2: $(4x - 5y)^4 = (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4$

$= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4$

3: $(2x + 3y + 5z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y$

$+2 \times 2x \times 5y + 2 \times 3y \times 5z$

$= 4x^2 + 9y^2 + 25y^2 + 12xy + 20xz + 30yz$

2- مثال: تجزيه يې کړئ؟

1: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

5: $9x^4 + 36y^4 = (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = \left(3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}\right)$

$(3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2})$

$(3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy)$

تمرين:

انکشاف ورکړئ

1- $(3x + 5y)^2$ 2- $(2x + 7y)^3$ 3- $(4x + 5y)^4$

4- $(4x - 5y)^5$ 5- $(3x - 7y)^4$ 6- $(2x - 3y)^6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- $7x^2-9y^2$ 8- $8m^3-125n^3$ 9- $\frac{8}{125}x^3-\frac{216}{1331}y^3$

10- $8x^3+27y^3$ 11- $64m^3+1000n^3$ 12- $\frac{125}{216}x^3+\frac{729}{1728}y^3$

13- $4x^2+y^2$ 14- $16x^4+256y^4$ 15- $\frac{81}{625}m^4+\frac{1296}{2401}n^4$

16- $(2x+3y+5z)^2$ 17- $(3x+2y-5z)^2$ 18- $(\frac{2}{8}x-\frac{4}{5}y-\frac{7}{8}z)^2$

تجزیه:

تجزیه په لغت کې توټه ، توټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوې افادې د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

1- د مشترک نیولو پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد یا حرف شامل وي دا شامل مشترک نیسو د قوس د باندې يې لیکو بیا د افادې هر حد په دې مشترک ویشو د قوس په داخل کې یې لیکو افاده تجزیه کیږي.

1: $3x^2-15=3(x^2-5)$

2: $5x^2-15x+10=5(x^2-3x+2)$

3: $4x^3+24x^2-36x=4x(x^2+6x-9)$

4: $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x=\frac{1}{4}x(x-3)$

2- د a^2-b^2 د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

1: $4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x-5y)(2x+5y)$

2: $\frac{4}{25}m^2-\frac{9}{49}n^2=\left(\frac{2}{5}m\right)^2-\left(\frac{3}{7}n\right)^2=\left(\frac{2}{5}m-\frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m+\frac{3}{7}n\right)$

3: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{49}=\left(\frac{x}{6}\right)^2-\left(\frac{y}{7}\right)^2=\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6}+\frac{y}{7}\right)$

3- د a^3-b^3 د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

1: $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

2: $64x^3-125y^3=(4x)^3-(5y)^3=(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$

3: $216m^3-343n^3=(6m)^3-(7n)^3=(6m-7n)(36m^2+42mn+49n^2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

$$1:\ 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2:\ 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3$$
$$= (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3:\ \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترينوم:

دري حده افادې ته ترينوم وايي.

عمومي شکل يې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترينوم تجزيه:

د ترينوم تجزيه په دوه حالته کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي

2- $a \neq 1$ وي

1- چې $a = 1$ وي ترينوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترينوم د دغه شکل د تجزيې لپاره داسې دوه عدده پيدا کوو چې د ضرب حاصل يې c او د جمع حاصل يې b شي. فرضاً m او n داسې دوه عددونه دي.

يعني $b = m + n$ او $c = mn$ دي نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

گروپ بندي کوو يې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$
$$(x + m)(x + n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال:

$x^2+11x+30$

$x^2+5x+6x+30$

$x(x+5)+6(x+5)$

$(x+5)(x+6)$

2- مثال :

$x^2-11x+30$

$x^2-5x+6x+30$

$x(x-5)-6(x-5)$

$(x-5)(x-6)$

نوټ: که په ترینوم کې د (c)علامه $(+)$وه هغه عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي هم علامه دي بیا د b علامی ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د b علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

1: $x^2+15x+36$

$x^2+12x+3x+36$

$x(x+12)+3(x+12)$

$(x+12)(x+3)$

2: $x^2-13x+40$

$x^2-8x-5x+40$

$x(x-8)-5(x-8)$

$(x-8)(x-5)$

2- که په ترینوم کې د c علامه منفي وه نو عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي مختلف العلامه دي بیا د b علامې ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د b علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

1: $x^2+5x-66$

$x^2-6x+11x-66$

$x(x-6)+11(x-6)$

$(x-6)(x+11)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2: $x^2 - 5x - 66$

$x^2 - 11x + 6x - 66$

$x(x - 11) + 6(x - 11)$

$(x - 11)(x + 6)$

تمرين:

1- $x^2 + 15x + 44$	2- $x^2 + 19x + 70$	3- $x^2 + 29x + 180$
4- $x^2 - 16x + 55$	5- $x^2 - 21x + 90$	6- $x^2 - 13x + 36$
7- $x^2 + 6x - 135$	8- $x^2 + 11x - 210$	9- $x^2 + 31x - 630$
10- $x^2 - 7x - 170$	11- $x^2 - 9x - 400$	12- $x^2 - 25x - 186$

2- حالت چې $a \neq 1$ وي.

د ترينوم د دغه حالت د تجزيې لپاره داسې دوه عددونه پيدا کوو چې دضرب حاصل يې ac او د جمع حاصل يې b شي؟

1. $3x^2 + 11x + 10$
   $ac = 3(10) = 30$
   $b = 11$
   $3x^2 + 6x + 5x + 10$
   $3x(x + 2) + 5(x + 2)$
   $(x + 2)(3x + 5)$
2. $5x^2 - 19x + 12$
   $ac = 5(12) = 60$
   $b = -19$
   $5x^2 - 15x - 4x + 12$
   $5x(x - 3) - 4(x - 3)$
   $(x - 3)(5x - 4)$
3. $7x^2 + 3x - 34$
   $ac = 7(-34) = -238$
   $7x^2 - 14x \qquad x - 34$
   $7x(x - 2) + 17(x - 2)$
   $(x - 2)(7x + 17)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $11x^2-23x-30$
$ac=11(-30)=330$
$b=-23$
$11x^2-33x+10x-3$
$11x(x-3)+10(x-3)$
$(x-3)(10x+10)$

تمرين:

لاندې ترينومونه حل کړئ؟

$5x^2+11x+2$ -1	$7x^2+24x+9$ -2	$3x^2+31x+80$ -3
$7x^2-19x+10$ -4	$5x^2-22x+21$ -5	$2x^2-17x+35$ -6
$3x^2+2x-33$-7	$4x^2+7x-57$-8	$7x^2+3x-34$-9
$5x^2-10x-54$-10	$7x^2-11x-30$-11	$8x^2-23x-85$-12

د ګروپ بندۍ پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

که د يوې افادې حدونه تر درې حدو زيات وه او په ټولو حدو کې يو کوم حرف يا عدد شامل نه ؤ مګر په بعضو حدو کې شامل ؤ دغسې افاده په ګروپو ويشو په هر ګروپ کې شامل مشترک نيسو تر مشترک نيولو وروسته بايد قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نيسو افاده په قوسو تجزيه کيږي.

$x^3+5x^2+3x+15$
$x^2(x+5)+3(x+5)$
$(x+5)(x^2+3)$

د تجزيې د استعمال ځايونه:

تجزيه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پيدا کولو لپاره استعماليږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راکړ شوي افادې تقسيم نشي لکه $x^2+7x+12$ او $x^2+10x+21$ چې په $x+3$ باندې ويشل کيږي نو $x+3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچني مشترک مضرب L.C.M:

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنۍ افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمیږي او تر دې بله کوچنۍ افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمیږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملوکې یې مشترک او غیرمشترک پیدا کوو که په مشترکو ضربي عواملوکې د (کوچني) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1: $(x^2 + 2x)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

1: $(x^2 + 2x)^2 = \{x(x+2)\}^2 = x^2(x+2)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x+2)(2x-1)$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x+2)(2x-7)$

$G.C.D = x(x+2) = x^2 + 2x$

$L.C.M = x^2(x+2)^2(2x-1)(2x-7)$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

1- $2ax^3 - 4a^3x - 6a^3$

2- $ax^2 + 2a^2x + a^3$

3- $3a^2(x+a)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري كسرونه

الجبري کسر هغه افاده ده چې په مخرج کې یې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2+3x-2}{x}\ ,\qquad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه 2- غیر ناطق الجبري کسرونه

2- ناطق الجبري کسرونه :

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه کوچنی وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ یا $\frac{2}{x+3}$

b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه زیاته یا ورسره مساوي وي. لکه:

$$\frac{4x^2+5x-1}{x^2+3x-4}, \frac{3x^2+5x+3}{x+5}$$

2- غیر ناطق الجبري کسرونه :

هغه کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي.

لکه $\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2}$ ، $\frac{x+5}{\sqrt{x}+3}$

د الجبري کسرو خواص:

1- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)}=\frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}{\frac{x^2+5x+6}{x+3}}=\frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}}=\frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرج علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y}=+\frac{x}{-y}=+\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$$

د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرج مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوؤ

1: $\frac{x}{x+5}+\frac{3x-1}{x+5}-\frac{x+3}{x+5}=\frac{x+3x-1-x-3}{x+5}=\frac{3x-4}{x+5}$

2: $\frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+7}{x+2}=\frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)}$

$$=\frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

3: $\frac{x}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{x(x+2)+(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$

$$=\frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

د الجبری کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړ د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرج سره اختصاریدلو اختصاروو بیا یې ضربوو.

1: $\frac{x+3}{x+1}\times\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2:\quad \frac{x^2-2x}{x+2}\times\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-10}=\frac{x(x-2)}{x+2}\times\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)}=\frac{x(x+1)}{x+5}$$
$$=\frac{x^2+x}{x+5}$$

د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرج تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرج څخه حذفوو.

$$1:\quad \frac{x^2+3x-28}{x^2+9x+14}=\frac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)}=\frac{x-4}{x+2}$$

$$2:\quad \frac{x^2+3x}{x^2+11x+24}=\frac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)}=\frac{x}{x+8}$$

د الجبري کسرونو تقسیم:

د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

$$1:\quad \frac{x^2+13x+30}{x+5}\div\frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+15}$$
$$\frac{x^2+13x+30}{x+5}\times\frac{x^2+6x+5}{x^2+8x+15}$$
$$\frac{(x+3)(x+10)}{x+5}\times\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{(x+10)(x+1)}{x+5}=\frac{x^2+11x+10}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x^2-11x+18}{x-3}\div\frac{x^2+7x-18}{x^2-9}$$
$$\frac{x^2-11x+18}{x-3}\times\frac{x^2-9}{x^2+7x-18}$$
$$\frac{(x-2)(x-9)}{x-3}\times\frac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)}=\frac{(x-9)(x+3)}{x+9}=\frac{x^2-6x-27}{x+9}$$

تمرین:

1- لاندې کسرونه جمع کړئ؟

1- $\frac{2x-3y}{6y^2}+\frac{18xy-9y^2}{9y^2}$

2- $\frac{x+5}{x^2}+\frac{x-3}{x}-\frac{x+7}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $\frac{x+11}{x+3}+\frac{x-1}{x+2}$

4- $\frac{2x+1}{x^2-16}+\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}$

5- $\frac{x}{x+5}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{x-2}{x+5}$

6- $\frac{2}{x+7}+\frac{3}{x-7}$

2- لاندې کسرونه اختصار کړئ؟

1- $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$

2- $\frac{x^2+5x-24}{x+8}$

3- $\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22}$

3- لاندې کسرونه ضرب کړئ؟

1- $\frac{x^2+5x+6}{x+5}\times\frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6}$

2- $\frac{x^2+x}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

3- $\frac{x^2-3x-28}{x-7}\times\frac{x+5}{x+4}$

4- $\frac{x^2+3x-40}{x+8}\times\frac{x-3}{x+5}$

4- لاندې کسرونه تقسیم کړئ؟

1- $\frac{x^2+13x+6}{x+5}\div\frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35}$

2- $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+1}{x}$

3- $\frac{x^2}{x-1}\div\frac{x}{x^2-1}$

4- $\frac{x}{x+3}\div\frac{x^2}{x^2-9}$

5- $\frac{x+5}{x}\div\frac{x+5}{x}$

د کسرونو ګویا کول:

د یوه کسر د صورت یا مخرج څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر ګویا کول وایي. معمول په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي.

د کسر د مخرج ګویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې (2) وي. لکه $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{x}=3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}}=\frac{2\times\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\times\sqrt{2x}}=\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}^2}=\frac{2\sqrt{2x}}{2x}=\frac{\sqrt{2x}}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}\times\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2}=\frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې دكسر په مخرج كې يو جذري حل موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي لكه $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ ، $\frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ ، $\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}$ او داسې نور.

د داسې كسرو د مخرجو د ګويا كولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد كې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان وركوؤ.

$$1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x\times x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x}=\sqrt[3]{x^2}$$

$$2-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x\times x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3-\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x}\times\sqrt[7]{x^6}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x\times x^6}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{x}=2x\sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د كسر مخرج كې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه يې (2) وي.

لكه $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ او داسې نور.

صورت او مخرج د مخرج په مزدوج كې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}$$
$$=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2:\quad \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{11}^2}$$
$$=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11}=\sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3:\quad \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- چې د کسر په مخرج کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې يې د (2) څخه زياتې وي .

لکه: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$ ، $\frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو او که د منځ علامه يې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو.

$$1:\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}=\frac{1\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5x^2}-\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{x-5}$$

$$2:\quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}=\frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}$$

$$=\frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[5]{3x^4}+\sqrt[5]{9x^3}-\sqrt[5]{27x^2}+\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{3x^4}-\sqrt[5]{9x^3}+\sqrt[5]{27x^2}-\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{243}}$$

$$=\frac{(x+3)(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}}{x+3}$$

$$=\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}$$

تمرين:

د لاندې کسرو مخرجونه ګويا کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 2- $\frac{x}{\sqrt{x}}$ 3- $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ 4- $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ 5- $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

6- $\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$ 7- $\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}}$ 8- $\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}$ 9- $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ 10- $\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

11- $\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$ 12- $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ 13- $\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}}$ 14- $\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$ 15- $\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي كسرونه:

كه د دوه كسرونو د مجموعې څخه يو واقعي كسر جوړ شي. دغه كسرونه د واقعي كسر قسمي كسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}=\frac{2(x+5)+3(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5}=\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

$\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$ يو واقعي كسر دی د $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ كسرونه يې قسمي كسرونه دي.

د يوه واقعي كسر د قسمي كسرو پيدا كول:

د قسمي كسرو د پيدا كولو لپاره د واقعي كسر مخرج تجزيه كوو د مخرج د ضربي عواملو شمېر د قسمي كسرونو شمېر ښيي. د مخرج د ضربي عواملو په لحاظ د واقعي كسر د قسمي كسرو پيدا كول په څلورو حالتو كې مطالعه كوو.

1- چې د كسر د مخرج ضربي عوامل غير تكراري بينومونه وي هر بينوم د يوه كسر مخرج دی صورت يې د الفباء په غټو حروفو ښيو عمليې پرې اجراء كوو د حروفو قيمتونه پيدا كوو د هغوي په عوض يې وضع كوو د واقعي كسر قسمي كسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي كسرونه پيدا كړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{8x+51}{(x+6)(x+7)}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه يې مساوي دی نو $8x+51=A(x+7)+B(x+6)$

د A او B د قيمتو د پيدا كولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د A او د B قيمتونه پيدا كوو نو د هر قوس جذر پيدا كوو.

$x+7=0$

$x=-7$

-7 د x په عوض وضع كوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$8(-7)+51=A(-7+7)+B(-7+6)$$
$$-56+51=A(0)+B(-1)$$
$$-5=0-B$$
$$-B=-5 \qquad B=5$$
$$x+6=0 \qquad x=-6$$

6- په معادله کې د x په عوض وضع کوؤ.

$$8(-6)+51=A(-6+7)+B(-6+6)$$
$$-48+51=A(1)+B(0)$$
$$3=A \qquad A=3$$

د A په عوض 3 او د B په عوض 5 وضع کوؤ.

$$\frac{3}{x+6}+\frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عینیت پواسطه:

$$8x+51=A(x+7)+B(x+6)$$
$$8x+51=Ax+7A+Bx+6B$$
$$8x+51=Ax+Bx+7A+6B$$
$$8x+51=(A+B)x+7A+6B$$

په عینیت کې د مشابه حدو ضریبونه مساوي وي.

$$A+B=8$$
$$7A+6B=51$$
$$7A+7B=56$$
$$-7A\pm6B=\pm51$$
$$B=5$$
$$A+B=8\rightarrow A=8-5=3$$
$$A=3$$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بینومونه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2+12x+2=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$
$$=Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx$$
$$=Ax^2+Bx^2+2Ax+Bx+Cx+A$$
$$5x^2+12x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

$$A+B=5$$
$$2A+B+C=12$$
$$A=2$$
$$A+B=5\rightarrow 2+B=5 \qquad B=5-2=3$$
$$B=3$$
$$2A+B+C=12$$
$$2\times 2+3+C=12$$
$$4+3+C=12$$
$$7+C=12$$
$$C=12-7$$
$$C=5$$
$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غير تکراري ترينومونه وي. او د تجزيې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترينوم وي په صورت کې يې بينوم ليکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+7}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو.

$$5x^2+20x+21=A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=(A+B)x^2+(5A+C)x+7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5\Rightarrow 3+B=5\Longrightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5\times 3+C=20$$

$$15+c=20 \qquad C=20-15$$

$$C=5$$

$$\frac{3}{x}+\frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه يې داسې پیدا کوؤ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+3x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+3x+5)+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax^3+3Ax^2+5Ax++Bx^2+3Bx+5B+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو :

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+3Ax^2+Bx^2+5Ax+3Bx+Cx+D+5B$$

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+(3A+B)x^2+(5A+3B+C)x+D+5B$$

$$A=2$$

$$3A+B=7$$

$$3\times 2+B=7\Rightarrow 6+B=7\Rightarrow B=7-6$$

$$B=1$$

$$5A+3B+C=14$$

$$5\times 2+3\times 1+C=14$$

$$10+3+C=14$$

$$3+C=14$$

$$C=14-13$$

$$C=1$$

$$5B+D=5$$

$$5\times 1+D=5$$

$$5+D=5$$

$$D=5-5$$

$$D=0$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+5}+\frac{x}{(x^2+3x+5)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قیمتو یې دواړه خواوې مساوي وي
لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره یې دواړه خواوې مساوي دي.
دغسې مساوات ته شرطیه مساوات وایي.

د معادلې اقسام:

معادله په لاندې قسمونه لري:

1- یو مجهوله اوله درجه معادله
2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
3- درې مجهوله اوله درجه معادله
4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
5- یو مجهوله دویمه درجه معادله
6- یو مجهوله دریمه درجه معادله
7- یو مجهوله څلورمه درجه معادله
8- جذري معادلې
9- اکسپونښیشل معادلې
10- لوګاریتمي معادلې
11- مثلثاتي معادلې

اول: یو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې هم یوه وي.
عمومي شکل یې دا دی $ax + b$ چه a او b ثابت عددونه دي او x مجهول دی څرنګه چې د x توان یو دی نو ځکه ورته یو مجهوله اوله درجه معادله وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلې خواص:

1- که د معادلې د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي په معادله کې تغیر نه راځي.

2- که د معادلې د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي په معادله کې تغیر نه راځي.

3- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد کې ضرب شي په معادله کې تغیر نه راځي.

4- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد تقسیم شي په معادله کې تغیر نه راځي.

5- که د معادلې دواړه خواوې په عین توان رفع شي په معادلې کې تغیر نه راځي.

6- که د معادلې دواړه خواوې تر عین جذر لاندې شي په معادله کې تغیر نه راځي.

د یو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طریقه:

که د معادلې دواړه خواو ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښی خواته او مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د یوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کیږي که مثبت وي منفي کیږي که منفي وي مثبت کیږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربیږي.

مثال:

1: $x + 5 = 8 \qquad x = 8 - 5 \qquad x = 3$

2: $x - 7 = 11 \qquad x = 11 + 7 \qquad x = 18$

3: $3x = 36 \qquad \frac{3x}{3} = \frac{36}{3} \qquad x = 12$

4: $\frac{x}{5} = 4 \qquad 5 \times \frac{x}{5} = 4 \times 5 \qquad x = 20$

5: $\frac{5}{x} - 3 = -2 \qquad \frac{5}{x} = -2 + 3 \qquad \frac{5}{x} = \frac{1}{1} \qquad x = 5$

6: $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} + \frac{2}{x} = 36$

$\frac{3 + 7 + 2}{x} = 36$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{12}{x} = 36 \qquad \frac{12}{x} = \frac{36}{1} \qquad 36x = 12$

$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36} \qquad x = \frac{1}{3}$

جذري معادلې

هغه معادلې دي چې مجهول يې تر جذر لاندې وي

لکه $\sqrt{3x+30} + 11 = 17$

د جذري معادلو دحل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوې خواته پرېږدو نور جذري او غېرجذري حدونه د مساوات بلې خواته ورو. بيا د مساوات دواړه خواوې د جذر په درجه رفع کوو جذر د منځه ځي .که بيا هم په معادله کې جذر موجود ؤ عمليه تکراروو .

1- مثال:

$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$

$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$

$\sqrt{5x-4} = 6$

$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2 = 6^2$

$5x - 4 = 36$

$5x = 36 + 4 = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 8$

$x = 8$

2- مثال:

$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$

$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$

$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{5x+6}\right)^2$

$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x + 108 = -20\sqrt{5x+6}$$

$$\frac{2x+108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x+6}}{2}$$

$$x + 54 = -10\sqrt{5x+6}$$

$$(x+54)^2 = \left(-10\sqrt{5x+6}\right)^2$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x+6)$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$

$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$

$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$

$$\acute{\Delta} = 38416 - 2316 = 36100$$

$$\acute{\Delta} = 36100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$

$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$

$$x_2 = \frac{196-190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+4} = -1 \ \sqrt{3x-1} = \sqrt{3x+4} - 1$$

$$\left(\sqrt{3x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+4} - 1\right)^2$$

$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1$$

$$2\sqrt{3x+4} = 6$$

$$\left(2\sqrt{3x+4}\right)^2 = 6^2$$

$$4(3x+4) = 36$$

$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$

$$3x = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-7}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}\right)^2$$

$$x=\frac{441}{x-7}-2\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}\times\sqrt{x-7}\right)+x-7$$

$$\frac{441}{x-7}-49=0\Rightarrow 49x-343=441\Rightarrow 49x=441+343=784$$

$$49x=784$$

$$\frac{49x}{49}=\frac{784}{49}\Rightarrow x=16$$

$$x=16$$

تمرین

لاندې جذري معادلې حل کړئ

1. $\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+9}=0$ $\qquad x=1$
2. $\frac{2x^2-128}{\sqrt{3+x^2}}=0$ $\qquad x=8$
3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{91}{\sqrt{x+13}}$ $\qquad x=36$
4. $\frac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$ $\qquad x=\frac{81}{a}$
5. $\sqrt[5]{x+8}=\sqrt[10]{x^2+64x+36}$ $\qquad x=\frac{7}{12}$
6. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\qquad x=81$
7. $\sqrt{x+13}-\sqrt{2x+1}=0$ $\qquad x=12$
8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ $\qquad x=\frac{16}{25}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $\sqrt{x}+5=6-\sqrt{x+7}$ $\qquad x=9$

10. $2(x+2)=1+\sqrt{4x^2+9x+14}$ $\qquad x=\frac{5}{3}$

تمرين:

1. $\frac{5-x}{4}+\frac{x}{8}=1$
2. $\frac{2}{x}-3=\frac{3}{x}-8$
3. $\frac{4}{x-3}+\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x-3}=6$
4. $\frac{x}{2}-\frac{2x-8}{5}+\frac{4}{5}=3$
5. $\frac{x-1}{4}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{2}+x-4=4$
6. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلی

هغه معادلي دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان يې يو وي عمومي شکل يې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a_1 ، a_2 ، b_2 ، b_2 ، c_1 او c_2 ثابت عددونه دي x او y مجهولونه دي څرنګه چې د هر مجهول توان يو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وايي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سیستم زیات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سیستم حل نلري.

3- که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سیستم يو حل لري.

د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلي په (6) طريقو حليږي.

1- د جمع يا افناء په طريقه:

په دواړو معادلو کې د يوه مجهول ضريبونه مساوي کوؤ. که هم علامه وه معادلي يو د بل څخه منفي کوو او که مختلف العلامه وه معادلي جمع کوو پدې ترتيب د دوه مجهوله معادلو سيستم په يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قيمت يې پيدا کوو بيا دا جذر د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د دويم مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندي سيستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$
$$5x + 3y = 19$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5(7x + 8y = 38)$$
$$7(5x + 3y = 19)$$
$$35x + 40y = 190$$
$$\pm 35x \pm 21y = \pm 133$$
$$19y = 57$$
$$y = 3$$
$$7x + 8y = 38$$
$$7x + 8 \times 3 = 38$$
$$7x + 24 = 38$$
$$7x = 38 - 24$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

2- مثال:

$$3x - 5y = 2$$
$$4x + 2y = 20$$
$$2(3x - 5y = 2)$$
$$5(4x + 2y = 20)$$
$$6x - 10y = 4$$
$$20x + 10y = 100$$
$$26x = 104$$
$$x = 4$$
$$4(4) + 2y = 20$$
$$16 + 2y = 20$$
$$2y = 20 - 16$$
$$2y = 4$$
$$y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقه حل کړئ؟

$$1-\quad \begin{aligned} 5x + 4y &= 32 \\ 8x - y &= 29 \end{aligned} \qquad\qquad 2-\quad \begin{aligned} 6x - 8y &= 4 \\ 7x - 2y &= 12 \end{aligned}$$

$$3-\quad \begin{aligned} 6x + 3y &= 21 \\ 5x + 7y &= 26 \end{aligned} \qquad\qquad 4-\quad \begin{aligned} 9x - 2y &= -3 \\ 4x + 3y &= 57 \end{aligned}$$

2- په تعویضي طریقه د دوه مجهوله معادلو حل:

د یوې معادلې څخه د یو مجهول قیمت د بل له جنسه پیدا کوو او په بله معادله کې یې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوؤ د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دا قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

مثال:

$$\begin{aligned} 3x - 11y &= 10 \\ 4x + 2y &= 30 \end{aligned}$$

$$x = \frac{11y + 10}{3}$$

$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$

$$44y + 40 + 6y = 90$$

$$50y = 50$$

$$y = 1$$

$$3x - 11y = 10$$

$$3x - 11 \times 1 = 10$$

$$3x - 11 = 10$$

$$3x = 10 + 11$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

لاندې سیستمونه په تعویضي طریقه حل کړئ؟

-1 $\begin{matrix} 3x + 13y = 25 \\ 2x + 2y = 10 \end{matrix}$

-2 $\begin{matrix} 6x - 5y = 20 \\ 7x + 3y = 41 \end{matrix}$

-3 $\begin{matrix} 11x + 5y = 53 \\ 8x - 9y = -12 \end{matrix}$

-4 $\begin{matrix} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 12 \end{matrix}$

3- د مساوات په طریقه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دوارو معادلو څخه د یو مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه پیدا کوو او سره مساوي کوو یې د دوه مجهوله معادلو سیستم په اوله درجه یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دغه قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$\begin{matrix} 3x + 7y = 19 \\ 5x - 2y = 18 \end{matrix}$$

$$3x + 7y = 19 \qquad\qquad 5x - 2y = 18$$

$$3x = 19 - 7y \qquad\qquad 5x = 18 + 2y$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \ldots\ldots I \qquad\qquad x = \frac{18 + 2y}{5} \ldots\ldots II$$

څرنګه چې په I او II نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي نو لیکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad ; \quad x = 4$$

تمرين:

-1 $\begin{matrix} 4x + 2y = 14 \\ 15x - y = 10 \end{matrix}$ -2 $\begin{matrix} 7x - 3y = 5 \\ 8x - 4y = 0 \end{matrix}$

-3 $\begin{matrix} 11x + 6y = 40 \\ 2x + 9y = 31 \end{matrix}$ -4 $\begin{matrix} 9x - 3y = 21 \\ 8x + 7y = 38 \end{matrix}$

4-د ديترمينانت په طريقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

ديترمينانت په لغت کې (معين يا ثابت) ته وايي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتيب ته د يترمينانت وايي لکه $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

د ديترمينانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل :

د x او y د ضريبو ديترمينانت په D ښيو او قيمت يې پيدا کوو . د x د ضريبو په عوض ثابت عددونه ليکو په D_x يې ښيو قيمت يې پيدا کوو بيا د D په ديتر مينانت د y د ضريبو په عوض ثابت عددونه ليکو په D_y يې نيسو او قيمت يې پيدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د x قيمت لاس ته راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د y قيمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{matrix} 3x - 5y = 2 \\ 5x + y = 22 \end{matrix}$ د ديترمينانت پواسطه حل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1b_2 - a_2b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \qquad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \qquad D_y = 56$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{112}{28} = 4 \qquad x = 4$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{56}{28} = 2 \qquad y = 2$$

5- دګراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په ( ) صفحه د تابع په بحث کې وګورئ.

6- د متريکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متريکس($Matrixes$):

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطيلي ته وايي ترتيب ته متريکس وايي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متريکس په غټو خروفو ښودل کيږي او هغه اعداد يا حروف چې په متريکس کې ليکل کيږي د متريکس د عناصرو په نوم يادېږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول ليکل شوي وي د متريکس د سطر په نوم يادېږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول ليکل شوي وي د متريکس د ستن په نوم يادېږي د سطرونو شمير په i او د ستونونو شمېر په j ښيئ چې i او j طبيعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \dots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکس مرتبه:

که د متریکس د سطرونو شمېر m او د ستونو شمېر یې n وي دغه متریکس ته $m \times n$ مرتبه متریکس وایي.

او داسې لیکل کیږي $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$

مثال: لاندې متریکسونه حل کړئ؟

$(a_{ij})_{2\times 2} = (i+j)_{2\times 2}$ -1 $\qquad (a_{ij})_{3\times 2} = (i+j)_{3\times 2}$ -2

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = i + j \qquad a_{12} = 1 + 2 = 3 \qquad a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

په نتیجه کې لاندې متریکس لاس ته راځي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د متریکس ډولونه:

متریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري متریکس: هغه متریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \quad 5 \quad 9]_{1\times 3}$

2- ستوني متریکس: هغه متریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

3- صفري متیریکس: هغه متریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي متیریکس: هغه متریکس دی چې د سطرونو شمېر یې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

مربعي يا مستطيلي متريکسونه دوه قطرونه لري ، چې يوه ته اصلي قطر يا (Mean diagonal) او بل ته ($Minor\ diagonal$) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22} \ldots \ldots \ldots a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{nn} \ldots \ldots \ldots a_{12}$ ، a_{21} فرعي قطر دی.

لاندې متريکسونه څه ډول متريکسونه دي. 3×1 او 1×4

5- قطري متريکس: هغه متريکس دی چې د اصلي قطر څخه پە غیر نور عناصر یې صفرونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متريکس: که د قطري متريکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متريکس ته سکالر متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متريکس: که د قطري متريکس داسې قطر عناصر يو (1) وي نو دې متريکس ته واحد متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلثي متريکس: که د يوه متريکس د اصلي قطر لاندې او يا پورته عناصر صفرونه وي دې متريکس ته مثلثي متريککس وايي لکه.

پورتنی مثلثي متريکس په لاندې ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندې مثلثي متریکس دی.

په انګلیسي کې ورته *Upper Tringolar matrix* او *Lower Tringolar matrix* وایي.

متقابل یا متضاد متریکس:

هغه متریکسونه چې عناصر یې یو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m\times n} = A(-a_{ij})_{m\times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د متریکسونو جمع:

د متریکسونو په جمع کې د متریکسو د مرتبې مساوات ضرور دي یعنې که a_{ij} او b_{ij} دوه متریکسونه ولرو کولای شو چې دغه دوه متریکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ متریکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د متریکس تفریق:

په تفریق کې هم د متریکس د تفریقولو لپاره د متریکس د مرتبو مساوات ضرور دی.

که a_{ij} او b_{ij} وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متریکسونه راکړ شویدي $A - B$ متریکس پیدا کړئ؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-2) & -1-(-1) \\ 3-3 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & -1+1 \\ 3-3 & +1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

د متریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د متریکسونو جمع د تبدیلی د قانون پیروي کوي مګر د متریکسونو تفریق د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي. لکه

$$A + B = B + A$$
$$A - B \neq B - A$$

2- د متریکسونو جمع او تفریق د تبدیلی د خاصیت پیروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مګر د متریکسونو په تفریق کې ی‌یې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

په متریکسونو کې د سکالر ضرب:

په یوه متریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو یعنی که $A = a_{ij}$ او $K \in IR$ وي نو KA د C سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي KA پیدا کړئ؟

$$KA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times3 & 2\times6 \\ 2\times2 & 2\times1 & 2\times0 \\ 2\times1 & 2\times0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه متریکسونو ضرب :

د متریکس د ضرب لپاره باید د یوه متریکس د سطرونو شمېر د بل متریکس د ستونو د شمېر سره مساوي وي یعنی که $A = (a_{ij})_{m\times n}$ او $B = (b_{ij})_{n\times p}$ وي کولای شو چې ضرب یې کړو.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

طریقه یې داسې ده چې د یوه متریکس لمړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې یې لیکو او په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د متریکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 + 1(-1) \\ -1\times 1 + 0\times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 \\ -1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2\times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1\times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6+4 & 8+3 \\ -3-8 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

د متریکس د ضرب خواص:

1- د متریکس ضرب عملیه د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي یعنې:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متریکسونو ضرب د اتحادي خاصیت پیروي کوي.

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د متریکسونو ضرب د توزیعي خاصیت پیروي کوي.

$$A(B+C) = AB + Ac$$

د یوه متریکس ترانسپوز متریکس:

که د یوه متریکس سطر په ستون او ستون یې په سطر بدل شي نوی متریکس ته ترانسپوز متریکس وایې.

که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وي نو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متریکس وایې په A^T ښودل کیږي.

که $A = A^T$ وي نو پدې صورت کې A ته متناظر متریکس وایې.

لکه $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ یو متناظر متریکس دی ځکه $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

د ترانسپوز متریکس خواص:

1- ترانسپوز متریکس د خپل لمړني متریکس سره مساوي وي.

$$(A^T)^T = A = \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ij})A$$

2- د دوه یا څو ترانسپوز متریکسو د جمع او تفریق حاصلونه د لمړنیو متریکسو د جمع د حاصلو او تفریق د حاصلو د ترانسپوزو سره مساوي دي.

$$(A \pm B \pm C \pm \ldots\ldots)^T = A^T + B^T + C \ldots\ldots\ldots$$

3- $(AB)^T = A^T \times B^T$

4- $(\alpha A)^T = \alpha \times A^T$

5- $(-A)^T = -A^T$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیترمینانت

مربعي متریکس ته دیترمینانت وايي.

لکه که $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ متریکس ولرو نو $A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ يو دیترمینانت دی او په $|A|$ سره ښودل کیږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطراو $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطر وايي.

د دیترمینانت محاسبه

د اصلي قطر څخه فرعي قطر منفي کوو $|A|=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$

مثال: $|A|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 7 & 2\end{vmatrix}$ قیمت پیدا کړئ

حل: $|A|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 7 & 2\end{vmatrix}=3\times2-7\times4=6-28=-22$

د دیترمینانت د حل طریقه

دیترمینانت په دوه طریقو حلیږي.

1- دساروس په طریقه 2- دکرامر په طریقه

1- دساروس د دیترمینانت په طریقه لول

اول ستون او دریم سطر د منځه وړواو پاتې 2× 2 مرتبې دیترمینانت محاسبه کوو او دتقاطع عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})a_{31}$$

دویم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})a_{32}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم ستون او دريم سطر د منځه وړو. او دتقاطع په عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ ديترمينانت حل کړئ

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4\big(6 \times 2 - (-3 \times 1)\big) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دويم- د کرامر په طريقه:

د ديترمينانت دوه لمړي ستونونه د ديترمينانت د باندي ليکو د اصلي قطرو د مجموعې څخه د فرعي قطرومجموعه منفي کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:
$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5(-1)\}$$
$$-\{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2(-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$
$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194$$
$$= -117$$
$$|B| = -117$$

د دیترمینانت خواص

1-که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفر وي نو د دیترمینانت د صفر سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت يې صفر دي

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د A د متریکس دیترمینانت د A^T دمتریکس د دیترمینانت سره مساوي دی.

د 2×2 مرتبې متریکس ضربي معکوس د معکوس متریکس سره د مربعي متریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د متریکس قیمت $|A| = 0$ وي نودی متریکس ته *Singular Matrix* وائي اوکه $|A| \neq 0$ وي نو دی متریکس ته *Non singular Matrix* وایي.

هغه متریکسونه چې معکوس لري .

1- چې متریکسونه مربعي وي یعنی د $A_{n\times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متریکسونه یو د بل معکوس دي .

حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لیدل کیږي چې $AB = BA = 1$ دي نو A او B یو د بل معکوس دي.

الحاقي متریکس Adjoin of Matrix

که د یوه متریکس د اصلي قطر د عناصرو ځایونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغیر شي دغه متریکس ته الحاقي متریکس وایي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متریکس د یوه متریکس د معکوس متریکس د لاس ته راوړلو لپاره استعمالیږي طریقه یې داسې ده چې دالحاقي متریکس د دیترمینانت دقیمت په معکوس کې ضربوو د راکړشوي متریکس معکوس متریکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل:- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ويلای شوچې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

تمرین

د لاندې متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

a: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

b: $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

د متریکس پواسطه ددوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1yc = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دې غواړو چې دمتریکس پواسطه یې حل کړو د x او y د ضریبو متریکس په A ښیو $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په B ښیي. اود x او y متریکس په X ښیو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نو ليکو چې:

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

يا $X = A^{-1}B$

مثال: لاندې ددوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x = 1$ & $y = 2$

تمرين

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د ګوس Goose طريقه د افناً طريقه ده.

په همدې ترتيب کولای شو چې څلورمجهوله،پنځه مجهوله او نورې څو مجهوله معادلې په مختلفو طريقو حل کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

دویمه درجه یومجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې یو مجهول ولري او د مجهول توان یې دوه وي. عمومي شکل یې دادی:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې b, a او c ثابت عددونه دي (x) مجهول دی څرنګه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دویمه درجه یو مجهوله معادله وایي.

خصوصي حالتونه

1- که b=c=0 وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلې دواړه جذرونه صفردي یعنی :

$$x_1 = 0 \qquad \& \qquad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

(x) مشترک نیسو اومعادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بیا هر قوس په نوبت سره دصفر سره مساوي کووا و د معادلې جذرونه پیدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5x^2 + 11x = x(5x + 11) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx_1 = 0$$
$$5x + 11 = 0$$
$$5x = -11$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$
$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- که $b = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 + c = 0$

د دغسی معادلو د حل کافي او لازمي شرط دادې چې a او c باید مختلف العلامه وي .او که نه نو د حقیقي اعدادو په سیټ کې حل نلري .د مختلطو اعدادو په سیټ کې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ؟

1: $5x^2 + 21x = 0$ 2: $11x^2 - 22x = 0$ 3: $2x^2 + 28x = 0$

4: $7x^2 - 63 = 0$ 5: $4x^2 + 16 = 0$ 6: $-7x^2 + 28 = 0$

د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې په څلورو طریقو حلیږي.

1- د تجزیې پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

2- د تکمیل مربع پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلوحلول

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د محمد بن موسی دفارمول پواسطه د دويمه درجه يو مجهوله معادلو حلول

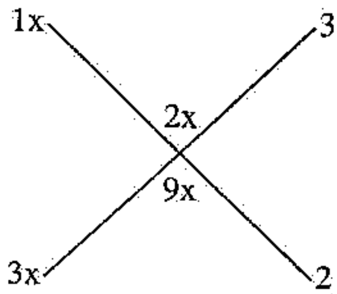
4- دګراف پواسطه ددويمه درجه يو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزيي پواسطه ديو مجهوله دويمه درجه معادلوحل:

(a) او (c) تجزيه کوو د ضربي عواملو څخه يي داسې يوه يوه جوړه ضربي عوامل راخلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه يي (b) شي بيا دغه ضربي عوامل په چارت کې ليکواو د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پيدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي

مثال:- $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزيي پواسطه حل کړئ.

$$a = 3 = 1.3 = -1(-3)$$
$$c = 6 = 2.3 = 1.6 = -2(-3) = -1(-6)$$
$$b = 11$$



$$(x + 3)(3x + 2) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x_{1=-3}$$
$$3x + 2 = 0$$
$$3x = -2$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکميل مربع پواسطه د دويمه درجه يو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راکړشوی ده غواړو چې د تکميل مربع پواسطه يي حل کړو ټول حدونه د x^2 په ضريب ويشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5x^2}{5}-\frac{17x}{5}+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x=-\frac{6}{5}$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\left(\frac{17}{10}\right)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2-\frac{6}{5}$$

$$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2=\frac{289}{100}-\frac{6}{5}=\frac{289-120}{100}=\frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{17}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x-\frac{17}{10}=\pm\frac{13}{10}$$

$$x=\frac{17}{10}\pm\frac{13}{10}=\frac{17\pm 13}{10}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=\frac{2}{5}=0.4$$

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

لمړي د محمد بن موسی فارمول ثبوتوو.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

داساتنیا لپاره b^2-4ac په Δ ښیو:

$$\Delta=b^2-4ac$$

نو:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

د (Δ) په باب دری حالته موجود دي .

1- چې $\Delta>0$ وي معادله دوه جذرونه لري اوجذرونه يې:

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\qquad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پيدا کيږي.

2- چې $\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري اوجذر يي د $x=\frac{-b}{2a}$ پواسطه پيدا کيږي.

3- چې $\Delta<0$ وي معادله دحقيقي اعدادو په سيټ کې جذر نه لري.

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$7x^2-13x-24=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times7\times(-24)$$
$$\Delta=169+672=841$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)+\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13+29}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)-\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13-29}{14} = \frac{-16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$x_{1=3} \qquad x_2 = -\frac{8}{7}$$

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4\times 9\times 25 = 900 - 900 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله یوجذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{30}{2\times 9} = -\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2 + 3x + 10 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 2\times 10 = 9 - 80 = -71$$

څرنګه چې $0 > \Delta$ دي نومعادله جذر نه لري.

تمرین

لاندې معادلې د تجزیې پواسطه حل کړئ.

1: $3x^2 + 5x - 42 = 0$ 2: $7x^2 - 29x + 4 = 0$ 3: $2x^2 + 3x - 14 = 0$

لاندې معادلې دتکمیل مربع پواسطه حل کړئ.

1: $11x^2 - 17x - 48 = 0$ 2: $13x^2 + 7x - 360 = 0$ 3: $8x^2 - 65x + 102 = 0$

لاندې معادلې د محمد بن موسی د فارمول پواسطه حل کړئ.

1: $2x^2 + 3x - 65 = 0$ 2: $9x^2 - 43x + 48 = 0$

3: $25x^2 - 11x - 192 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمحمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که b جفت وي د b نیمایي په $\acute{b}$ ښیو $\frac{b}{2}=\acute{b}$ او $b=2\acute{b}$ کیږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د b په عوض $(2\acute{b})$ لیکو:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2\acute{b})\pm\sqrt{(2\acute{b})^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm\pm\sqrt{4\acute{b}^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\acute{b}\pm\sqrt{4(\acute{b}^2-ac)}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm2\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}\right)}{2a}$$

$$=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\acute{b}^2-ac$ په $\acute{\Delta}$ ښیو یعنې:

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac$$

د $\acute{\Delta}$ په باب هم دری حالته موجود دي.

1- که $0<\acute{\Delta}$ وي معادله دوه جذره لري اوجذرونه یې د $x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي.

2- که $0=\acute{\Delta}$ وي معادله یوجذرلري، اوجذر یې د $x=\frac{-\acute{b}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي

3- که $0>\acute{\Delta}$ وي معادله جذرنه لري.

مثال:- $3x^2+14x-40=0$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=7^2-3(-40)=49+120=169$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-14\pm13}{3}$$

$$x_1=-\frac{1}{3}\qquad x_2=-9$$

مثال:- $4x^2+12x+9=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\acute{\Delta} = 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = -\frac{\acute{b}}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad so \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندې معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\acute{\Delta} = -19$$

$$\acute{\Delta} < 0$$

معادله جذر نه لري.

تمرين

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د يو مجهوله دويمه درجه معادلو د جذرو او ضريبو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

دمحمد بن موسى فارمولونه ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2- د $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ثبوت

د محمد بن موسى فارمولونه ليکو:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

3: د $x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$ ثبوت

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

4: د $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$ ثبوت

$$x_1{}^3 + 3x_1{}^2x_2 + 3x_1x_2{}^2 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1{}^2x_2 - 3x_1x_2{}^2$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{3abc}{a^3}$$

5: د $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$ ثبوت

$$x_1{}^4 + 2x_1{}^2x_2{}^2 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2x_1{}^2x_2{}^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

مثال: د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه،د جذرونو د ضرب حاصل، دجذرو د مربعګانو مجموعه پیدا کړئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} == \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول

که د يوې معادلې جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله يې پيدا کړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړشوو جذرو مربوطه معادله لاس ته راځي . د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي:-

1: $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

2: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

د $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ ثبوت

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

مثال:- د يوې معادلې جذرونه په ترتيب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله يې پيدا کړئ

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$x^2-(5-7)x+(5)(-7)=0$$
$$x^2-(-2)x-35=0$$
$$x^2+2x-35=0$$

تمرين

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1=3$ & $x_2=\frac{3}{5}$ 2: $x_1=\frac{7}{3}$ & $x_2=5$

3: $x_1=\sqrt{3}$ & $x_2=2$

د دويمه درجه يومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول

دجذرو علامې په يوه جدول مطالعه کوو

که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S > 0$ وي دواړه جذرونه مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S < 0$ وي دواړه جذرونه منفي دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $S > 0$ وي لوی جذر مثبت دي
که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $S < 0$ وي لوی جذر منفي دي
$\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري		که $S > 0$ وي لوی جذر مثبت دي
$\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري		که $S < 0$ وي لوی جذر منفي دي
$\Delta < 0$ وي	معادله جذر نه لري	

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $3x^2+5x-22=0$ دجذروعلامې مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times 3\times(-22) = 25+264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$0<\Delta$ معادله دوه جذره لري.

$$p=\frac{c}{a}=\frac{-22}{3}$$

$p<0$ جذرونه مختلف العلامه دي.

$$s=\frac{-b}{a}=\frac{-5}{3}$$

$s<0$ لوی جذر يې منفي دی.

د ديکارت قاعده

ديکارت ددويمه درجه معادلو د علامو تغير ته تحول وايي.

ديکارت وايي:

1- که دويمه درجه معادلو دعلامو دوه تحوله لرل دمعادلې دواړه جذرونه مثبت دي

2- که د علامو تحول يو ؤ د معادلې يو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه ؤ نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه يې منفي دي.

لکه:

$5x^2-17x+6=0$ دواړه جذرونه يې مثبت دي.

$3x^2+7x-26=0$ يو جذر يې مثبت دي.

$x^2+169x+4=0$ دواړه جذرونه يې منفي دي.

دهغه معادلو حلول چې په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي:

شپږ قسمه معادلې په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- دریمه درجه معادلې:

هغه دریمه درجه معادلې چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري دداسې معادلو د حل لپاره x مشترک نیسو او معادله د دوه فکتورو په حاصل ضرب بدلوو هر فکتور د صفر سره مساوي کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال:- $5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \qquad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلې:

هغه څلورمه درجه معادلې چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي طریقه یې داسې ده چې x^2 په y سره بدلوو څلورمه درجه معادله په دویمه درجه معادله بدلیږي. دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دویمه درجه معادلې دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه یې مثبت او دوه یې منفي وي.

2- که د دویمه درجه معادلې یو جذر مثبت ؤ نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې یو یې مثبت او بل یې منفي وي.

3- که دویمه درجه معادلې مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دویمه درجه معادلې جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال:- لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : x^2 په y ښيو نو $x^4 = y^2$ کيږي

$3y^2 - 7y - 20 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$

$\Delta = 289$

$\Delta > 0$

معادله دوه جذره لري يوجذر يې مثبت او بل يې منفي دې نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$y_1 = 4 \qquad y_2 = -\frac{5}{3}$

$x^2 = y = y_1 = 4$

$x^2 = 4 \qquad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

تمرين

لاندې معادلې حل کړئ

1- $4x^2 + 3x - 45 = 0$ 2- $7x^2 - 11x - 6 = 0$

3- $5x^2 + 13x + 6 = 0$ 4- $13x^2 + x - 14 = 0$

5- $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ 6- $7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$

3- جذري معادلې :

هغه جذري معادلې چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادلو بدليدلای شي طريقه يې داسې ده چې $\sqrt{x}$ په y ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو چې $x = y^2$ کيږي او دويمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال :- $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دويمه درجه معادله بدله کړئ او حل يې کړئ؟

حل: $y = \sqrt{x}$ ښيو نو $x = y^2$ کيږي د (x) په عوض (y^2) او د $(\sqrt{x})$ په عوض (y) وضع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$
$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac$$
$$\acute{\Delta} = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$
$$\acute{\Delta} = 100$$
$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$
$$x_1 = 2 \qquad \& \qquad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلی چې توانونه يې کسري وي اود يو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي. لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په (y) ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو نو $\left(x^{\frac{2}{3}} = y^2\right)$ کيږي.

$5y^2 + 3y - 26 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$
$\Delta = 529$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$
$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \therefore \; y_1 = 2$$
$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \qquad \therefore \; y_2 = -2\frac{3}{5}$$
$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \qquad x^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$
$$x_1 = 8$$

تمرين:

لاندې معادلی حل کړئ.

1- $x^{\frac{2}{5}} + 3x^{\frac{1}{5}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵- هغه معادلې چې توانونه يې کسري وي:

هغه معادلې چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي.

$x^{\frac{m}{2n}}$ په y او $x^{\frac{m}{n}}$ په y^2 بنيو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$

دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول يا په کومه بله طريقه حلوو قيمتونه يې پيداکوو د y

د قيمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قيمت پيداکوو دمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال :- د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلې جذرونه پيدا کړئ؟

$x^{\frac{1}{3}} = y$ بنيو نو $x^{\frac{2}{3}} = y^2$ کيږي.

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$
$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$
$$\Delta = 289$$
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$
$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -\frac{11}{2}$$
$$\because \ x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \qquad \therefore \ x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \qquad \& \ x_1 = 27$$
$$\because \ x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \qquad \therefore \ x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2},$$
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$
$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرين :

لاندې معادلې دويمه درجه معادلو ته واړوئ؟

1: $5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0$ 2: $4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1: د (A)او (B) ددوه ښارو تر منځ فاصله (450) کېلومتره ده يو موټر سهار په اوه بجې په يوسرعت د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجې د $(x+15)$ کېلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په يو وخت کې د (B)ښار ته ورسيدل د هر يوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x}-\frac{450}{x+15}=1$$
$$\frac{450(x+15)-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{450x+6750-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{6750}{x(x+15)}=\frac{1}{1}$$
$$x^2+15x=6750$$
$$x^2+15x-6750=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(15)^2-4\times1\times(-6750)=225+27000=27225$$
$$\Delta=27225$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{27225}}{2\times1}=\frac{-15\pm165}{2}$$
$$x_1=\frac{-15+165}{2}=\frac{150}{2}=75$$
$$x_2=\frac{-15-165}{2}=\frac{-180}{2}=-90$$

2- د يوه قايم الزاويه مثلث ضلعې په ترتيب سره $(x+1)$ ، $(x+2)$ او $(x+3)$ دي دمثلث ضلعې پيدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$$
$$x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9$$
$$x^2=4$$
$$x_1=2 \qquad \& \qquad x_2=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي د یوه ارتفاع د قاعدې څخه یو متر او د بل ارتفاع دقاعدې څخه دری متره زیاته ده او د مساحتو تفاضل یې اوه مترمربع دی د هر یوه مساحت قاعده او ارتفاع پیدا کړئ

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2}-\frac{x(x+1)}{2}=7$$
$$\frac{x^2+3x-x^2-x}{2}=7 \Rightarrow \frac{2x}{2}=7 \Rightarrow x=7$$

قاعده $x=7$

ارتفاع د کوچني مثلث $x+1=8$

ارتفاع د لوی مثلث $x+3=10$

۴- د یوه عدد د طرفینو د ضرب حاصل (323) عدد پیدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1)=323$$
$$x^2-1=323$$
$$x^2=323+1=324$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{324}$$
$$x=18$$

۵- دیوه مستطیل اوږدوالی تر سور دری متره زیات دی که مساحت یې (88) سانتي مترمربع وي سور او اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3)=88$$
$$x^2+3x-88=0$$
$$\Delta = x^2-4ac=3^2-4\times1\times(-88)=$$
$$9+352=361$$
$$\Delta = 361$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-3\pm\frac{\sqrt{361}}{2\times1}=\frac{-3\pm19}{2}\Rightarrow x_1=8\Rightarrow x_2=-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- یو سړی د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته په یوه سرعت روان شوبله ورځ یې په خپل سرعت کې دوه متره زیادت راوست نیم ساعت مخکې ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کېلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20(x+2)-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20x+40-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{40}{x^2+2x}=\frac{1}{2}$$
$$x^2+2x=80$$
$$x^2+2x-80=0$$
$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=1^2-1(-80)=1+80=81$$
$$\acute{\Delta}=81$$
$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{1}=-1\pm9=8$$

$x=8$ اولنی سرعت

$x+2=10$ اخرنی سرعت

7- د یوې دایرې مساحت (154) سانتي مترمربع دې شعاع یې څو ده؟

حل:

$$\pi r^2=154$$
$$\frac{22}{7}r^2=154$$
$$\frac{7}{22}\times\frac{22}{7}r^2=154\times\frac{7}{22}$$
$$r^2=49$$
$$\sqrt{r^2}=\sqrt{49}$$
$$r=7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1- د يوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدې څخه $(3cm)$ زياته ده مساحت يې $27cm^2$ دې قاعده او ارتفاع يې پيدا کړئ؟

2- د يوه مستطيل طول د هغه د سور څخه $(5cm)$ زيات دی مساحت يې $(24cm^2)$ دی سور او طول يې پيدا کړئ؟

3- ديوې دايرې مساحت (616) سانتي مترمربع ده شعاع يې څو ده؟

4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله $800m$ ده يو موټروان په يوه سرعت سره دا فاصله طې کوي دبېرته راتګ په وخت کې $5m$ په خپل سرعت کې تغير راولي يو ساعت مخکې رارسيږي دتګ او راتګ سرعت يې پيدا کړئ؟

5- احمد د محمود څخه يوه روپۍ زياته لري که د پيسو د ضرب حاصل يې (840) وي دهر يوه روپۍ پيدا کړئ؟

6- يو سړی په خپله ځمکه باندې دېوال تاووي د دېوال سور نيم متر دې که د دېوال تر تاوولو وروسته يې ځمکه $(29cm^2)$ کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکې مساحت څو وي؟

7- د يوې دايرې مساحت د هغې تر محيط (5) واره زيات دې ضلعه يې پيدا کړئ؟

8- د يوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $\left(\frac{82}{9}\right)$ ده عدد پيدا کړئ؟

9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟

10- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي ديوه ارتفاع دقاعدې څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدې څخه د دوه واحدو په اندازه زياته ده که مساحتونه يې جمع شي $(76cm^2)$ کيږي د مثلثو قاعدې او ارتفاعګانې پيدا کړئ؟

11- احمد دمحمود درې چنده کار کوي که دواړه په شريکه يو کار په (3) ورځو کې وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

12- که د يوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کيږي عدد پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

13- که د یوه سړي اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ یې کټلي وي وواياست چه څو ورځی کار يې کړئ دئ؟

14- د یوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پيدا کړئ؟

15- د احمد او محمود د پیسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل یې (609) ده د هر یوه پیسی څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زياتی اود محمود روپۍ (5)کمی شي د یوی ورځی د اجوری د ضرب حاصل یې (2475) روپۍ کیږي د هر یوه اجوره څو ده ؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لګیا دي احمد خپل کار تر محمود دری ورځی د مخه خلاصوي که په شریکه یې په دوه ورځو کی وکړي وواياست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کی وکړي؟

18- د مربع مساحت ($125316cm^2$)دی ضلعه یې پیدا کړئ؟

19- د یوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زیاته ده که مساحت يې ($675cm^2$) وي قاعده او ارتفاع به يې څو وي؟

20- يو موټر سهار په اته بجی حرکت کوي بل موټر يوساعت وروسته (10)کېلو متر سرعت په زیادت وریسی روان شوکه دواړه په یوه وخت کی مطلوب ته رسیږي که وهل شوی فاصله (900) کېلو متره وي د هريوه سرعت پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

غېرمساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو نه برابري ته غېرمساوات وايي.

د غېر مساوات علامه دا (>) یا دا (<) ده هره افاده چې ددې علامې مخې ته لیکل شوی وي لويه ده تر هغه افادې چې د علامې شاته لیکل شوې وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

یا لکه $18 < 45$ او داسې نور.

د غیرمساوات خواص:

1- که د غېرمساوات د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي دغېرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$11 < 19$$
$$11 + 8 < 19 + 8$$
$$19 < 27$$

2- که د غېرمساوات د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي د غېرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$13 > 9$$
$$13 - 10 > 9 - 10$$
$$3 > -1$$

3- که دغېرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد کې ضرب شي دغېرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$12 > 4$$
$$+2(12) > +2(4)$$
$$24 > 8$$

4- که د غېرمساوات دواړه خواوي په منفي عدد کې ضرب شي دغېرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$15 < 21$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15(-2) > 21(-2)$$
$$-30 > -42$$

5- که د غیرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$
$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$
$$3 < 5$$

که د غیرمساوات دواړه خواوې په منفي عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$
$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$
$$-15 < -12$$

7- که د غیرمساوات دواړه خواوې معکوس شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیرمساوات دواړه خواوې د طاق عدد په توان رفع شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$
$$(2)^3 > (-9)^3$$
$$8 > -729$$

9- که د غیرمساوات دواړه خواوې د جفت عدد په توان رفع شي دلته درې حالتونه موجود دي.

الف: که د غیرمساوات دواړه خواوې مثبت وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$
$$5^2 > 3^2$$
$$25 > 9$$

ب: که د غیرمساوات دواړه خواوې منفي وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-2 > -5$$
$$(-2)^2 < (-5)^2$$
$$4 < 25$$

ج: که د غیرمساوات د یوی خوا عدد مثبت او د بلی خوا عدد منفي وي دلته دری حالته موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$7 > -5$$
$$(7)^2 > (-5)^2$$
$$49 > 25$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$4 > -7$$
$$(4)^2 < (-7)^2$$
$$16 < 49$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غیرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$6 > -6$$
$$(6)^2 = (-6)^2$$

دغیر مساوات دحل سیټ:

د حقیقي اعدادو هغه سیټ چې په راکړشوی غیر مساوات کی صدق کوي د غیر مساوات د حل سیټ بلل کیږي.

دغیرمساوات اقسام

په دی کتاب کی موږ دري قسمه غیر مساواتونه مطالعه کوو.

1- یومجهوله اوله درجه غیر مساوات

2- دوه مجهوله اوله درجه غیرمساوات

3- یومجهوله دویمه درجه غیرمساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- يومجهوله اوله درجه غير مساوات:

هغه غيرمساوات دي چې مجهول يي يو او د مجهول درجه يي يوه وي عمومي شكل يي دا $ax + b \geq 0$ يا دا $ax + b \leq 0$ دی.

ديومجهوله غيرمساوات د حل طريقه:

معلوم دغيرمساوات ښی خواته او مجهول د غيرمساوات چپې خواته ورولازمی عمليي پرې اجراء كوو په اخر كی د غيرمساوات دواړه خواوی د x په ضريب ويشو د غيرمساوات دحل سيټ لاس ته راځي.

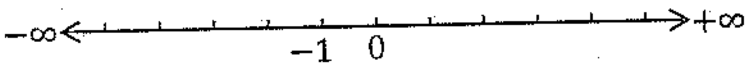
مثال: لاندې غيرمساوات حل كړئ.

$$3(4x + 11) - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$12x + 33 - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$10x + 39 \leq 15x + 44$$
$$10x - 15x \leq 44 - 39$$
$$-5x \leq 5$$
$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{5}{-5}$$
$$x \geq -1$$

د حل سيټ يي عبارت دی له:

$$A = \{x/-1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددو په كرښه داسې ښودل كيږي.



تمرين:

لاندې غيرمساواتونه حل كړئ.

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مطلقه قیمت:

د یوه الجبري عدد حسابي برخی ته دهغه الجبري عدد مطلقه قیمت وایي.د مطلقه قیمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقه قیمت یي مطلوب وي د عمود خطونو تر منځ لیکل کیږي. لکه $|-15|$ یا $|+15|$ چې دغه دواړه د مطلقه قیمت معنی ورکوي او داسې لیکل کیږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غیرمساوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: یو وار افاده د راکړشوي عدد څخه لویه او بیا یي دعدد د متناظرڅخه کوچنی فرضوو.

$3x - 11 > 19$

$3x > 19 + 11$

$3x > 30$

$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$

$x > 10$

$A = \{x/x > 10\}$

$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$

$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$

$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$

$C = A \cup B \left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$

دبېنوم داشاری څېړل

د بېنوم عمومي شکل$(ax + b)$ دې د بېنوم داشاری د څېړلو لپاره (a) مشترک نیسو د قوس د باندی يي لیکو د بېنوم هر حد په دی مشترک وېشو او د قوس په داخل کی يي لیکو.دقوس جذر پیدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

دلته د (a) په باب دوه حالتونه موجود دي.

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$-$	0	$+$

دبینوم اشاره د جذر څخه کښته منفي اوپورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$+$	0	$-$

د بینوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $(3x-6)$ اشاره وټاکئ؟

حل: $3x-6=0 \quad \Rightarrow 3(x-2) \quad \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$3(x-2)$	$-$	0	$+$

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x+15$ اشاره وټاکئ ؟

حل:

$$-5x+15=-5(x-3)$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$
$-5(x-3)$	$+$	0	$-$

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونو اشارې وټاکئ؟

1- $2x-12$ 2- $3-x$ 3- $-4x+12$

4- $4x-20$ 5- $-6x-18$

د هغه افادو د اشارو ټاکل چې د څو بینومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پیدا کوو او ضربوو یې د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي

مثال: $(4-x)(x+4)$ اشاره وټاکئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$4 - x = 0 \quad \Rightarrow -x = -4 \quad \Rightarrow x = 4$
$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$	-4		$+4$	$+\infty$
$4 - x$	+		+	0	−
$x + 4$	−	0	+		+
$(4 - x)(x + 4)$	−	0	+	0	−

دجذرو منځ کی د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کی منفي ده.

تمرين:

د لاندي بينومونه د حاصل ضرب په شکل راکړشوي دي اشاره يي وڅيړئ؟

1- $(2x - 12)(3 - x)$
2- $(3 - x)(x + 7)$
3- $(-4x + 12)(x + 8)$
3- $(-6x - 18)(x + 5)$

دکسري افادو د اشارو څيړل:

د صورت او مخرج اشاري پيدا کوو او يو پر بل يي ويشو د کسر اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅيړئ؟

$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -4$
$2x - 6 = 0$
$2x = 6 \quad \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow x = 3$

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$x + 4$	−	0	+		+
$2x - 6$	−		−	0	+
$\frac{x + 4}{2x - 6}$	+	0	−	0	+

دجذرو منځ کی د کسر اشاره منفي او په خارج کی مثبت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

د لاندې کسرو اشارې وڅیړئ:

1: $\frac{2x+6}{x-1}$ 2: $\frac{3x+4}{2-x}$

3: $\frac{x+2}{12x-18}$ 4: $\frac{-x-1}{1-2x}+3$

دهغه غیرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بینومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بینومو اشارې پیدا کوو او سره ضربوو یې دحاصل ضرب اشارې لاس ته راځي.دغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو هره اشاره چې دغیرمساوات دعلامې سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دې

مثال:

$$(x+3)(x-4)>0$$
$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$
$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)>0$	د حل سیټ		د حل سیټ نه دی		د حل سیټ

تمرین :

د لاندې غیرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ

1: $(x-8)(2-x)<0$ 2: $(3x-6)(12-x) > 0$

3: $(x-1)(1-x)\leq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه غیرمساوات د حل د سیټ پیدا کول چې د کسر په شکل وي:

د صورت او مخرج اشارې پیدا کوو د صورت اشاره د مخرج په اشاره ویشود کسر اشارې لاس ته راځي. د هغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو د غیر مساوات د حل سیټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2}+1<0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2}<0$$

$$\frac{2x+2}{x-2}<0$$

$$2x+2=0 \quad \Rightarrow 2x=-2 \quad \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-2}{2} \quad \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}<0$	د حل سیټ نه دی		د حل سیټ		د حل سیټ نه دی

تمرین:

د لاندې کسري غیرمساواتو د حل سیټ پیدا کړئ.

1: $\frac{2x+1}{x-1}+2>0$ 2: $\frac{4x+7}{2x-3}-1<0$

3: $\frac{x-6}{x+2}-2\geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیو مجهوله غیرمساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیرمساواتو ته د یو مجهوله غیرمساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیټ پیدا کوو هغه سیټ چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د سیستم د حل سیټ دی.

مثال: د لاندي غیرمساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$
$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow 3x = 6 \quad \Rightarrow x = 2$

$5x + 20 = 0 \quad \Rightarrow 5x = -20 \quad \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
$3x - 6 < 0$	$-$		$-$	0	$+$
$5x + 20 < 0$	$-$	0	$+$		$+$
	د حل سیټ				

تمرین:

په لاندي ډول دیو مجهوله غیرمساوات سیستمونه راکړ شویدي حل یي کړئ.

1- $7x - 11 > 0 \ \& \ 4x + 13 > 0$

2- 2: $13x + 2 > 0 \ \& \ 5x - 8 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مجهوله غېرمساوات

هغه غېرمساوات دی چې مجهولونه یې دوه او د هر مجهول درجه یې یوه وي عمومي شکل یې دا $ax + by \geq c$ یا دا $ax + by \leq c$ دې

د دغه رنګه غېرمساوات دحل د سیټ د لاس ته راوړلو لپاره دغېرمساوات ګراف رسموو ګراف مستوي په دوه برخو ویشي یوه برخه یې په غېرمساوات کې صدق کوي او بله برخه یې نه کوي دغه برخه یې کرښې، کرښی کوو بله برخه یې دغېر مساوات د حل سیټ دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غېرمساوات حل کړئ.

حل : غېرمساوات په مساوات بدلوو اوګراف یې رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

1- $x = 0$ نو:

$$2y = 6 \quad \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

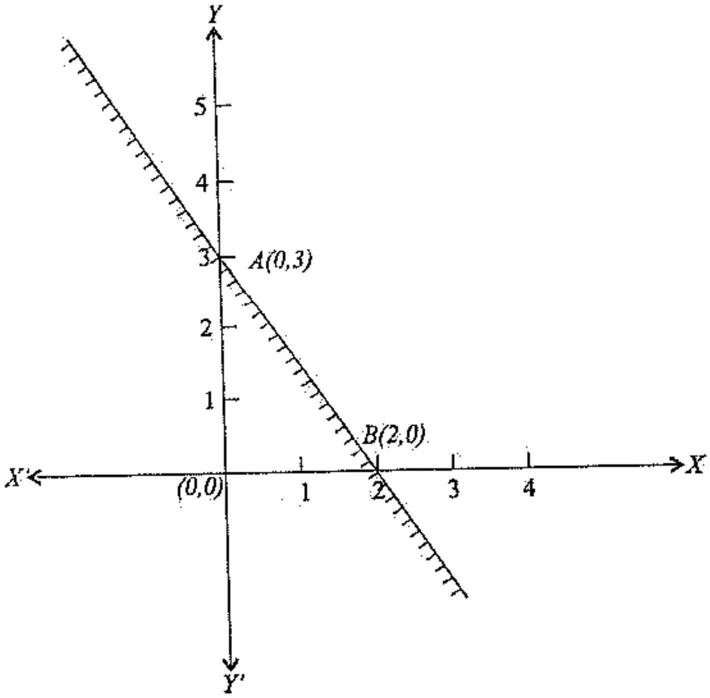
$$A(0,3)$$

2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مجهوله غیرمساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کې دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وايي.

لکه: $2x - 3y > 6$ او $3x + 5y < 15$

دغه دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وايي.

د دوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه:

غیرمساواتونه په مساواتو بدلوو اود هر مساوات گرینه یعنی گراف رسموو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یې په مربوطه غیرمساوات کې صدق کوي.دهر غیرمساوات د حل سیټ پیدا کوو. څرنگه چې د غیرمساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یې په دواړو غیرمساواتو کې صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیټ دي.

-1

$$3x + 5y < 15 \quad \Longrightarrow 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضوو نو:

$$5y = 15 \qquad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \qquad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \qquad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

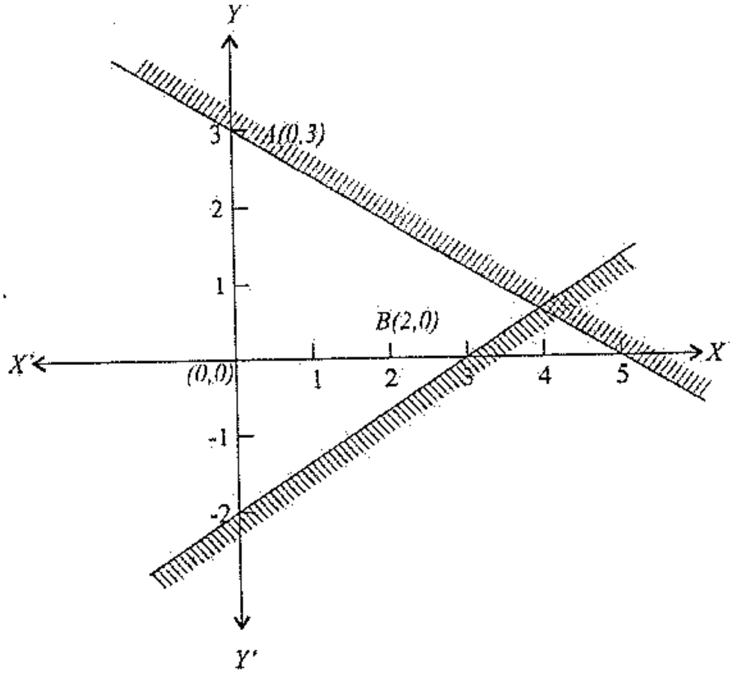
$$C(0,-2)$$

$$y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$



که درې دوه مجهوله غیرمساواتونه راکړ شوي وي د ګراف د ترسیم په وخت کی مثلث لاس ته راځي د څلور غیرمساواتونو څخه څلور ضلعي په همدی ترتیب د دوه مجهوله غیرمساواتونو شمېر دمضلعګانو دضلعو شمېر رابښيئ.

یو مجهوله دویمه درجه غیرمساوات

هغه غیرمساوات دي چې مجهول یي یو او د مجهول درجه یي دوه وي عمومي شکل یي $ax^2 + bx + c \geq 0$ او یا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غیرمساوات د حل څخه مطلب د هغه سیټ پیدا کول دي چې په غیرمساوات کی وضع شي اوپه غیرمساوات کی صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددویمه درجه غیرمساوات دحل طریقه

که د غیرمساوات دواړو خواو ته حدونه موجود وي ټول د غیر مساوات چپې خواته ورواړوو رسمي عملیي پرې اجراء کوو او د ترینوم شکل ته یې رااړوو اوتجزیه کوویې. د هر قوس جذر پیدا کوو د حل سیټ یې په دوه طریقوپیدا کیږي.

1- د جدول په طریقه   2- د سیټ بلډر په طریقه

1- د جدول په طریقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپې خواته او لوی جذر ښی خواته لیکوکه د (a)علامه مثبت وه د جذر څخه کښته دقوس علامه منفي اوپورته مثبت ده اوکه د(a) علامه منفي وه نو د جذرڅخه کښته د قوسعلامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دویمه درجه غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ.

$$3x^2+13x-38<0$$

$$3x^2-6x+19x-38<0$$

$$3x(x-2)+19(x-2)<0$$

$$(x-2)(3x+19)<0$$

$$x-2=0 \quad \Rightarrow x=2$$

$$3x+19=0 \quad \Rightarrow 3x=-19 \quad \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{-19}{3} \Rightarrow x=-\frac{19}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{19}{3}$		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$3x+19$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(3x+19)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x-2)(3x+19)<0$	د حل سیټ ندی		د حل سیټ		د حل سیټ ندی

(c) ketabton.com: The Digital Library

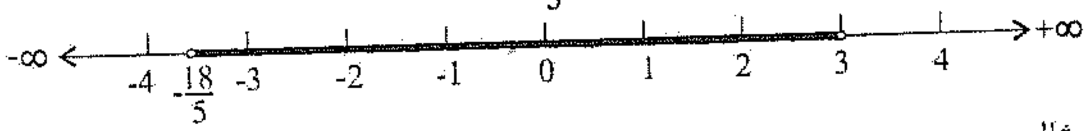
2- د سیټ بلډر په طریقه د دویمه درجه غیرمساوات حلول:

تر تجزیه کولو وروسته د غیرمساوات علامې ته ګورو که د غیرمساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي یو وار دواړه مثبت اوبل واردواړه منفي فرضوو او که د غیرمساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف العلامه دي په نوبت سره یو مثبت او بل منفي فرضوو.

مثال: $5x^2 + 3x - 54 < 0$

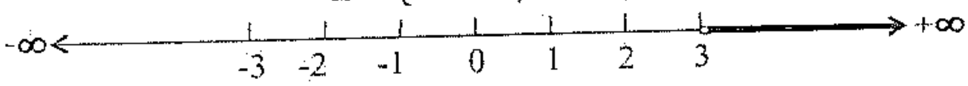
حل:

$$5x^2 - 15x + 18x - 54 < 0$$
$$5x(x-3) + 18(x-3) < 0$$
$$(x-3)(5x+18) < 0$$
$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$
$$5x + 18 > 0 \Longrightarrow 5x > -18 \Rightarrow \frac{5x}{5} > \frac{-18}{5} \Rightarrow x > -\frac{18}{5}$$
$$A = \{x \,/ -\frac{18}{5} < x < 3\}$$



مثال:

$$3x^2 - 13x + 12 > 0$$
$$3x^2 - 9x - 4x + 12 > 0$$
$$3x(x-3) - 4(x-3) > 0$$
$$(x-3)(3x-4) > 0$$
$$x - 3 > 0 \qquad \Longrightarrow x > 3$$
$$3x - 4 > 0 \qquad \Longrightarrow 3x > 4$$
$$\frac{3x}{3} > \frac{4}{3} \qquad \Longrightarrow x > \frac{4}{3}$$
$$A = \{x \in I\mathcal{R} \,/\, x > 3\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین

لاندې دویمه درجه غیرمساواتونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$
2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$
3. $\frac{3x+1}{x+2} \leq 2x + 3$
4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$
5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$
6. $\frac{x+1}{x} > 2$
7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$
8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$
9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$
10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$
11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$
12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$
13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$
14. $7x^2 + 3x \geq 0$
15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم فصل

پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غیرمشخص مقدار ته وايي

اوپه اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول څخه په غیر يو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر اودغې معادلی ته پارامتریک معادله وايي. لکه:

$$(m+3)x^2+3(m-3)x-19m-6=0$$

د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلیږي.

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول

2- د پرامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولوپه هره طریقه حلیدله حلوو يي.

مگر ښه او اسانه طریقه يي د محمدبن موسی فارمول دی.

مثال: لاندې پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2+mx-(6m^2+10m+4)=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=m^2-4\{-(6m^2+10m+4)$$
$$\Delta=m^2+24m^2+40m+16$$
$$\Delta=25m^2+40m+16$$
$$\Delta=(5m+4)^2$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{(5m+4)^2}}{2\times1}=\frac{-m\pm(5m+4)}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د m له جنسه پیدا کړئ؟

$1:\ (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$

$2:\ (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$

$3:\ (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$

$4:\ x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$

$5:\ x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$

2- د پارامتر د قیمت له مخې د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخې د پارامتر قیمت پیدا کوو اوپه معادله کې یې وضع کوي یومجهوله دویمه درجه معادله لاس ته راځي. دغه معادله حلوو دمعادلې د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کې د جذرو مجموعه $\left(-\frac{7}{2}\right)$ ده په معادله د (m) کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \quad \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow m = 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(m-1)x^2+(2m+1)x-5m=0$$
$$(3-1)x^2+(2\times 3+1)x-5\times 3=0$$
$$2x^2+7x-15=0$$
$$\Delta= b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-15)$$
$$\Delta= 49+120=169$$
$$\Delta= 169$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 13}{4}$$
$$x_1=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$ معادلې دجذرو دضرب حاصل (-15) معادله حل کړئ؟

حل:

$$x_1x_2=-15$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-15$$
$$\frac{c}{a}=\frac{-4m-3}{m-2}=-15 \quad\Rightarrow -15m+30=-4m-3$$
$$-15m+4m=-3-30$$
$$-11m=-33$$
$$\frac{-11m}{-11}=\frac{-33}{-11}$$
$$m=3$$
$$(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$$
$$(3-2)x^2-(3-1)x-4\times 3-3=0$$
$$x^2-2x-15=0$$
$$\Delta= b^2-ac=(-1)^2-1(-15)=1+15=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta}= 16$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{16}}{1} = \frac{1 \pm 4}{1}$$

$$x_1 = \frac{1+4}{1} = \frac{5}{1} = 5 \qquad \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1-4}{1} = \frac{-3}{1} = -3 \qquad \Rightarrow x_2 = -3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$ په معادله کې $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$ رابطه کې معادله حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}} = \frac{-b}{+c} = \frac{-(-3m)}{9m-1} = \frac{+3m}{9m-1} = \frac{12}{35}$$

$$108m - 12 = 105m$$
$$108m - 105m = 12$$
$$3m = 12$$
$$\frac{3m}{3} = \frac{12}{3} \quad \Rightarrow m = 4$$

$$(m-3)x^2 - 3mx + 9n - 1 = 0$$
$$(4-3)x^2 - 3 \times 4x + 9 \times 4 - 1 = 0$$
$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2 - ac = (-6)^2 - 1(35) = 36 - 35 = 1$$
$$\acute{\Delta}= 1$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{1}}{1} = 6 \pm 1$$

$$x_1 = 6 + 1 = 7 \quad \Rightarrow x_1 = 7$$
$$x_2 = 6 - 1 = 5 \quad \Rightarrow x_2 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$ معادلې جذرونه د $(3x_1-1)(3x_2-1)=70$ په رابطه کې صدق کوي د معادلې جذرونه پیدا کړئ؟

حل:

$$(3x_1-1)(3x_2-1)=70$$
$$9x_1x_2-3x_1-3x_2+1=70$$
$$9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1=70$$
$$9\left(\frac{c}{a}\right)-3\left(\frac{-b}{a}\right)=70-1$$
$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right)-3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right)=69$$
$$\frac{45m}{m-1}-\frac{9m+3}{m-1}=69$$
$$\frac{45m-9m-3}{m-1}=69$$
$$\frac{36m-3}{m-1}=\frac{69}{1}$$
$$69m-69=36m-3$$
$$69m-36m=-3+69$$
$$33m=66 \qquad \Rightarrow m=2$$
$$(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$$
$$(2-1)x^2-(3\times 2+1)x+5\times 2=0$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times 1\times 10=49-40=9$$
$$\Delta=9$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7\pm\sqrt{9})}{2\times 1}=\frac{7\pm 3}{2}$$
$$x_1=\frac{10}{2}=5 \;\Rightarrow\; x_1=5$$
$$x_2=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \;\Rightarrow x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- مثال: د $(m-4)x^2-mx-5m+1=0$ په معادله کی د معادلی یو جذر (8) دی د m قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$(m-4)8^2-m\times 8-5m+1$$
$$(m-4)64-8m-5m+1=0$$
$$64m-256-13m+1=0$$
$$51m-255=0$$
$$51m=255 \quad \Rightarrow m=5$$

7- مثال: د m په کوم قیمت باندی $(m-2)x^2-(m-3)x-8m-1=0$ معادله دوه مساوي مختلف العلامه جذرونه لري؟

حل:

$$-\{-(m-3)\}=0$$
$$m-3=0 \quad \Rightarrow m=3$$

7- مثال: د (m) قیمت د $(2m-1)x^2-(2m+1)x+2m-4=0$ څخه داسی پیدا کړئ چه د معادلی یو جذر صفر وي؟

حل: هغه وخت د معادلی یو جذر صفر کیږي چه $c=0$ شي

$$-(2m+1)=0$$
$$2m-4=0 \;\Rightarrow 2m=4 \quad \Rightarrow \frac{2m}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$m=2$$

8- مثال: د (m) په کوم قیمت $(2m+1)x^2-(7m+2)x+6m+1=0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چه $\Delta=0$ شي.

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(7m+2)\}^2-4(2m+1)(6m+1)$$
$$\Delta=49m^2+28m+4-48m^2-32m-4$$
$$\Delta=m^2-4m$$
$$\Delta=0 \quad \therefore \; m^2-4m=0 \Rightarrow m(m-4)=0$$
$$m_1=0$$
$$m-4=0 \quad \Rightarrow m=4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9- مثال: د پە (m)کومو قیمتو باندی $(m-1)x^2-(2m+2)x+2m-5=0$ معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چه $a=c$ شي

$$m-1=2m-5$$
$$m-2m=-5+1$$
$$-m=-4 \quad \Rightarrow m=4$$

10- مثال: د(m) په کومو قیمتونو باندی $(m+1)x^2-mx-4m=0$ معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه لري؟

حل:- کله چه $p<0$ وي

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4m}{m+1}<0$$

$$(m+1)^2\left(\frac{-4m}{m+1}\right)<0\times(m+1)^2$$

$$-4m(m+1)<0$$

$$-4m<0$$

$$\frac{-4m}{-4}>\frac{0}{-4}$$

$$m>0$$

$$m+1>0 \quad \Rightarrow m>-1$$

$$A=\{m\in IR/m>-1\}$$

11- مثال: د (m) په کومو قیمتونو باندی $(m-3)x^2-(m-2)x-2m+8=0$ معادله دوه حقیقي جذرونه لري؟

حل:- کله چه $(\Delta>0)$ تر صفر وي

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=\{-(m-2)\}^2-4(m-3)(-2m+8)$$

$$\Delta=m^2-4m+4+8m^2-32m-24m+96$$

$$\Delta=9m^2-60m+100=(3m-10)^2$$

$$\Delta>0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3m-10)^2>0$$
$$3m-10>0$$
$$3m>10 \quad \Rightarrow m>\frac{10}{3}$$
$$A=\{m\in IR\ /\ m>\frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د (m) په کوم قیمت د $(m-2)x^2-(m-1)x-5m=0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل:- کله چه $(b\ \&\ c)$ دواړه منفي وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-5)\}^2-4(m-2)(-6m)$$
$$\Delta=m^2-10m+25+24m^2-40m$$
$$\Delta=25m^2-50m+25=(5m-5)^2$$

$$\Delta=(5m-5)^2\Rightarrow\Delta=5m-5\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow 5m-5>0\Rightarrow 5m>+5\Rightarrow m>1$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\{-(m-5)\pm\sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)}=\frac{m-5\pm(5m-5)}{2(m-2)}$$
$$x_1=\frac{m-5+5m-5}{2(m-2)}=\frac{6m-10}{2m-4}$$
$$x_2=\frac{m-5-5m+5}{2m-4}=\frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د (m) قیمت داسې تعین چه معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه ولري.

1: $x^2-5x-3m+1=0$

2: $(2+3)x^2-mx-25m+4=0$

3: $mx^2-2(m+1)x+m+15=0$

4: $mx^2-(2m+1)x+m=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m - 3)x + m + 9 = 0$

6: $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m + 1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه موهومي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m + 1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم فصل

اکسپوننشل (نمائي) معادلی

اکسپوننشل معادلی هغه معادلی دي چه توان یي مجهول وي عمومي شکل یې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د (1) وي یعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزایده ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

داکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو او معلوم دمساوات ښې خواته وړو لازمي عملیي پرې اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسې طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدی یې سره مساوي وي نو توانونه یې هم مساوي دي دلته څو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کې توان مونوم یا بینوم وي نو یو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه یې پیدا کوو

1- مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$
$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$
$$2 \times 3^x = 18 \quad \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \quad \Rightarrow 3^x = 9 \quad \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدې یې مساوي دي نو توانونه یې هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$
$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$
$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$
$$3^x\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{5}\left\{3^x\left(\frac{5}{3}\right)\right\} = 45 \times \frac{3}{5}$$
$$3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حده وي قاعدی یي مساوي اود یوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلی په دویمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلی حلوو اود جذرو له مخی یي د اکسپوننشل معادلی جذرونه پیدا کوو.

مثال:

$$3^{2x} - 3^x = 702$$
$$(3^x)^2 - 3^x = 702$$

$3^x = y$ وضع کوو.

$$y^2 - y - 702 = 0$$
$$(y-27)(y+26) = 0$$
$$y_1 = 27$$
$$x_2 = -26$$
$$y_1 = 3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$
$$y_2 = 3^x = -26$$

د اکسپوننشل معادلی دومېن همېشه مثبت وي نود (y_2) د قیمت څخه دمعادلی جذرنه پیدا کیږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حدونه موجود وي او توانونه یي جذري حدونه وي دغه ډول معادلی هم په دویمه درجه یو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$\left(27^{\sqrt{x}}\right)^2 - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$27^{\sqrt{x}} = y$ وضع کوو.

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$
$$(y-1)(y-3) = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$
$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$
$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$
$$3\sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{9}$$
$$S = \left\{x \in IR/x = 0 \vee x = \frac{1}{9}\right\}$$

4- چه دوه داسې اکسپوننشل معادلې راکړ شویوي چه چپ طرف یې د دوه داسې طاقت لرونکوعددو د ضرب حاصل وي چه قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي، دغسې معادلې په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$
$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$
$$2^{x+y} = 2^4$$

$$\begin{array}{c} 2^{x+y} = 2^4 \\ \underline{2^{2x+3y} = 2^{15}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x + y = 4 \\ \underline{2x + 3y = 15} \end{array}$$

$$2(x + y = 4)$$
$$\begin{array}{r} 2x + 2y = 8 \\ \underline{\pm 2x \pm 3y = \pm 15} \\ -y = -7 \end{array}$$
$$y = 7$$
$$x + 7 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = 4 - 7 = -3$$
$$x = -3$$

تمرين

1. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$
2. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$
3. $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$
4. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$
5. $\frac{1-2^x}{2^x} = 1$
6. $4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$
7. $5^{2y} - 5^y - 600 = 0$
8. $\begin{matrix} 3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} = 243 \end{matrix}$
9. $9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$
10. $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$
11. $\begin{matrix} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024 \end{matrix}$
12. $\frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$
13. $2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوګاریتمي معادلی Logarithm's Equation:

لوګاریتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وايي.

او په اصطلاح کی داکسپوننشل معادلو معکوسی معادلی ته لوګارتمي معادله وايي.

فرضاً ($b = a^x$) يوه اکسپوننشل معادله لرو معکوسه معادله يي لوګاريتمي معادله ده.

چه داسی ليکل کيږي.

$$log_a b = x$$

a ته د $log\, b$ قاعده وايي.

کولای شو چه اکسپوننشل تابع په لوګاريتمي تابع او لوګاريتمي تابع په اکسپوننشل تابع بدله کړو.لکه ($x = 2^3$) يوه اکسپوننشل تابع ده لوګاريتمي تابع يي عبارت له ($log_2 x = 3$) څخه ده.

اوهمدا ډول ($log_2 8 = x$) يوه لوګاريتمي تابع ده اکسپوننشل تابع يي عبارت له ($8 = 2^x$) څخه ده.

د لوګاريتم خواص:

1- د (1) لوګاريتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کيږي.

$$\begin{pmatrix} log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$$

2- د هر مثبت لوګاريتم په خپله قاعده باندی (1) کيږي. $\begin{pmatrix} log_b b =.1 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ دا ځکه چه ($b = b^1$) کيږي.

مثال:

$$log_8 8 = 1 \qquad\qquad log_x x = 1$$

3- د يوه طاقت لرونکي عدد لوګاريتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت دی. $\begin{pmatrix} log_b b^r = r \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ ځکه چه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^r = b^r$$

4- د یوه حاصل ضرب لوګاریتم په یوه قاعده باندی دضربي عواملو د لوګاریتمو د مجموعی سره مساوي دي په همغه قاعده باندی:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N.$$

$$log_a M = x \qquad M = a^X$$

$$log_a N = y \qquad N = a^Y$$

اکسپوننشل معادلی طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

دچپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a MN = x + y$$

$$log_a MN = log_a M + log_a N$$

1- مثال: ?= $log_2(2x)$ لوګاریتم پیدا کړئ

حل:

$$log_2(2x) = log_2 2 + log_2 x = 1 + log_2 x$$

2- مثال:لاندي لوګاریتم پیدا کړئ ؟

$$log_x(xy) = ?$$

$$log_x(xy) = log_x x + log_x y = 1 + log_x y$$

5- د یوه خارج قسمت لوګاریتم په یوه قاعده باندی د صورت او مخرج د لوګاریتمو د تفاضل سره مساوي دی په همغه قاعده باندی.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_A N$$

$$log_a M = x \qquad M = a^x$$

$$log_a N = y \qquad N = a^y$$

اکسپوننشل معادلی طرف په طرف یو پر بل ویشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

د چپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a\frac{M}{N}=x-y=log_a M-log_a N$$

1- مثال: لاندي لوګاریتم حل کړئ؟

$$log_2\frac{x}{2}=?$$

$$log_2\frac{x}{2}=log_2 x-log_2 2=log_2 x-1$$

2- مثال:

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=log_x x+log_x 5-log_x y$$

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=1+log_x 5-log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په بله قاعده ونیول شي لوګاریتم یې عبارت دي توان ضرب یې دهغه لوګاریتم په همغه قاعده.

$$log_b M^r=r\,log_b M$$
$$log_b M=x$$
$$M=b^x$$
$$M^r=(b^x)^r\Longrightarrow M^r=b^{rx}$$
$$log_b M^r=rx$$
$$log_b M^r=r\,log_b M$$

1- مثال:

$$log_3 81^7=?$$
$$log_3 81^7=7\,log_3 81=7\,log_3 3^4=4\times 7\,log_3 3=28\times 1=28$$

2- مثال:

$$log_3(3x)^5=?$$
$$log_3(3x)^5=5\,log_3(3x)=5(log_3 3+log_3 x)$$
$$=5(1+log_3 x)=5+5\,log_3 x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- دیوه عدد لوګاریتم د یوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندی عبارت دي د قاعدی د توان معکوس ضرب یي دهغه عدد لوګاریتم د قاعدی دقاعدی په قاعده.

$$log_{a^b} M = \frac{1}{b} log_a m$$
$$x = log_{a^b} M$$
$$(a^b)^x = M$$
$$(a^x)^b = M \quad \Longrightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Longrightarrow a^x = \sqrt[b]{M}$$
$$x = log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} log_a M$$
$$log_{a^b} M = \frac{1}{b} log_a M$$

مثال:

$$log_{16} 32 = ?$$
$$log_{16} 32 = log_{2^4} 32 = \frac{1}{4} log_2 32$$
$$= \frac{1}{4} log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4} log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$
$$log_{16} 32 = \frac{5}{4}$$

دقاعدی د بدلولو فارمول:

که د یوه عدد لوګاریتم په یو ه قاعده غوښتل شوی وي مګر په دغه قاعده باندی د راکړ شوي عدد د لوګاریتم پیدا کول مشکل وي نو د راکړشوي عدد او د لوګاریتم د قاعدی لوګاریتم په یوه بله قاعده باندی پیدا کوو د عدد لوګاریتم د لوګاریتم د قاعدی په لوګاریتم ویشو د راکړ شوي عدد لوګاریتم په را کړشوی قاعده باندی لاس ته راځي.

مثلاً $log_b M$ غوښتل شوی دی لوګاریتم یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$log_b M = \frac{log_a M}{log_a b}$$

ثبوت: $log_b M$ په x ښیو.

$$log_b M = x \quad \Longrightarrow M = b^x$$
$$log_a M = log_a b^x = x \, log_a b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_a M = \log_b M \log_a b$$
$$\frac{\log_b M \log_a b}{\log_a b} = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

1- مثال:

$$\log_{27} 81 = ?$$
$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

2- مثال:

$$\log_{32} 128 = ?$$
$$\log_{32} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5}$$

د لوګاریتم اقسام

لوګاریتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی.

1- اعشاري لوګاریتم یا معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

2- طبعي لوګاریتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوګاریتم:

که د لوګاریتم قاعده (10) وه دی لوګاریتم ته اعشاري لوګاریتم وایي.

$\log x$

2- طبعي لوګاریتم:

هغه لوګاریتم دی چه قاعده یي (e) وي.

څرنګه چه د دوارو قسمو قاعدی معلومی دي نو قاعده یي نه لیکل کیږي.

$\ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیوه عدد د لوګاریتم پیداکول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غیر د نورو عددو لوګاریتم دوه برخې لري.یوه برخه یې صحیح او بله برخه یې اعشاري ده .صحیح برخې ته کرکټرستیک ($Characteristic$) او اعشاري برخې ته یې مانتیس ($Mantesa$) وایي .کرکټرستیک د محاسبې پواسطه او مانتیس د جدول او یا د حساب د ماشین پواسطه پیدا کیږي.که دطاقت لرونکي عدد قاعده لس وي یوازې کرکټرستیک لري او مانتیس نه لري

1- مثال: ?= $log(1000000)$ څو دی؟

$$log(1000000) = log\, 10^6 = 6$$

کرکټرستیک د ارقامو د شمېر څخه یو کم وي.

2- مثال: ?= $log(0.000000001)$ څو دی؟

$$log(0.000000001) = log\, 10^{-9} = -9$$

کرکټرستیک یې د اعشاریې د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمېر سره مساوي دی او علامه یې منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه ؤ نو دغه عدد مانتیس او کرکټرستیک دواړه لري.لکه $log(4560000)$ د داسې عدد د لوګاریتم د پیدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلوو چه یو رقم یې صحیح او نور رقمونه یې اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمېر ته ګورو عدد اوه رقمي دې نو په ($10^6 = 1000000$) کې یې ضربوو په دې ترتیب کولای شو چه کرکټرستیک یې پیدا کړو.

$$log(4560000) = log(4.56 + 10^6) = log\, 4.56 + log\, 10^6 = log\, 4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکټرستیک دې.مانتیس یې د ($log\, 4.56$) څخه لاس ته راوړو.طریقه یې داسې ده چه (6) د دری رقمي عددو د لوګاریتمي دجدول په پورتنې. کرښه کې پیدا کوواو (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پیداکوو او د مخکینې لیکل شوي عدد شاته یې لیکو بیا کرکټرستیک ته ګورو که مثبت ؤ نو د کرکټرستیک په اندازه د جدول څخه د پیدا شوي عدد مخې ته صفرونه ږدو. اوکه کرکټرستیک منفي ؤ د پیدا شوي عدد شاته د اعشاریې د علامې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

$$log(4560000) = log\, 4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$
$$log(4560000) = 6.6590$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او مانتیس یې مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسر یې بدلوو او د مخکیني سوال په څېر یې حلوو.

مثال: $log(0.00567)$ پیداکړئ؟

حل:

$$log(0.00567) = log(5.67 \times 10^{-3}) = log\,5.67 + log\,10^{-3}$$
$$= log\,5.67 - 3 = 0.3690 - 3$$

د راکړشوي عدد لوګاریتم $(0.3690 - 3)$ دی مګر که وغواړو چه د کرکترستیک او مانتیس څخه یو عدد جوړ کړو نود کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی$(\bar{3}.3690)$ او که وغواړو چه مانتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او دمانتیس څخه یې منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$
$$log(0.00567) = 0.3690 - 3 = \bar{3}.3690 = -2.6310$$

تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000
2- $log\,5890000$
3- $log\,69200$
4- $log\,73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- $log\,0.00234$
2- $log\,0.0598$
3- $log\,0.000568$
4- $log\,0.008$

د صفر لوګاریتم:

$$0 = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty}$$
$$log_{10}\,0 = -\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتي لوګاريتم:

هر عدد د خپل لوګاريتم انتي لوګاريتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $anti \log 3 = 1000$ دی.

انتي لوګاريتم پيدا کول:

مانتيس په جدول کی پيدا کوو هغه عدد چه د مانتيس په ستون کی ليکل شوی دي ليکو بيا هغه عدد د مانتيس په کرښه کی دی په لسيز او سليز مرتبو کی ليکو کرکترستيک ته ګورو که مثبت وُ کرکترستيک د عدد د ارقامو دشمېر څخه يو کم دی يعنی تر کرکترستيک يو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستيک منفي و نو دعدد شاته د کرکترستيک په اندازه د اعشاريي دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$antilog(2.3690) = ?$$
$$anti\ log(0.3690) = 2.338837239$$
$$anti\ log(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$anti\ log\ \bar{6}.3710 = ?$$
$$anti\ log\ 0.3710 = 2.35$$
$$anti\ log(\bar{6}.3710) = 0.00000235$$

تمرين:

1- $anti\ log(3.4581)$

2- $anti\ log(\bar{2}.6589)$

3- $anti\ log(-4.2907)$

4- $anti\ log(0.7551 - 4)$

د لوګ $(\log)$ اولن $(\ln)$ پيدا کول يو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول ليکو:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M \cdot \log_a b = \log_a M$$

د (a) په عوض (10) او د (b) په عوض (e) ليکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_e M \cdot \log_{10} e = \log_{10} M$$
$$\ln M \cdot \log 2.72 = \log M$$
$$\ln M \cdot 0.4343 = \log M$$

مثال: ($\ln 6.73 = 1.9066$) دی ($\log 6.73$) پیدا کړئ؟

حل:

$$\log M = \ln M \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = \ln 6.73 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 0.8280$$

د $\log$ څخه د $\ln$ د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوې په (0.4343) ویشو.

$$\frac{\ln M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{\log M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343}\log M$$
$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$
$$\ln M = 2.3026 \cdot \log M$$

مثال:

$$\ln 563 = ?$$
$$\ln 563 = \log 563 \cdot 2.3026$$
$$\ln 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

انترپولېشن Interpolation:

انترپولېشن په نوي عبارت باندی د یوی موضوع بیانولو ته وایي.

او په اصطلاح کی انترپولېشن هغه عملیه ده چه د هغه عددو لوګاریتم پیدا کوي چه لوګاریتمي جدول یي ترتیب شوی نه وي طریقه یي داسی ده چه عدد لیکو مانتیس یي په یوه حرف ښیو د راکړشوي عدد څخه لاندی باندی عددونه په دری رقمي عدد کی پیدا کوو او لیکویي او مانتیس یي د جدول څخه لیکو په دی ترتیب شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي بیا د دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کی څلور عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د مانتیس سره یي جمع کوود راکړشوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- $log\ 4567$ پیدا کړئ؟

$$0.01\left[0.007\begin{pmatrix} log\,4.57 & 0.6599 \\ log\,4.567 & m \\ log\,4.56 & 0.6589 \end{pmatrix} d\right]0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007}=\frac{d}{0.0010}\Longrightarrow d=\frac{0.01\cdot 0.0010}{0.007}=\frac{10}{7000}=\frac{1}{700}=0.00143$$

$$d=0.00143$$
$$m-0.6589=0.00143$$
$$m=0.00143+0.6589=0.6603$$
$$log\,4567=3.6603$$

دانترپولېشن پواسطه د انتي لوګاریتم پیدا کول:

د انتي لوګاریتم د پیدا کولو لپاره مانتیس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه ؤ نو د دغه مانتیس انتي لوګاریتم په یوه حرف ښیو د مانتیس څخه لاندې باندې مانتیسونه په جدول کې پیدا کوو په نتیجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یې مجهول وي پیا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدلیږي. چه یو به یې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پیدا کوو اود کوچني عدد د انتي لوګاریتم سره یې جمع کوو د راکړشوي لوګاریتم انتي لوګ لاس ته راځي.

مثال:- دیوه عدد لوګاریتم (3.7351) دی انتي لوګ یې پیدا کړئ؟

$$0.01\left[d\begin{pmatrix} 5.44 & 0.735 \\ m & 0.7352 \\ 5.43 & 0.7348 \end{pmatrix}0.0004\right]0.0008$$

$$\frac{0.01}{d}=\frac{0.0008}{0.0004}$$

$$d=\frac{0.0004\cdot 0.01}{0.0008}=\frac{4}{800}=\frac{1}{200}=0.005$$

$$m-5.43=d$$
$$m=d+5.43$$
$$m=0.005+5.43$$
$$m=5.435$$

کولوګاریتم $Cologarthm$:

د یوه عدد د معکوس لوګاریتم ته د هغه عدد کولوګاریتم وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً (a) او $\left(\frac{1}{a}\right)$ عددونه يو د بل معکوس دي نو د $\left(\frac{1}{a}\right)$ لوګاريتم د (a) د کولوګاريتم په نوم نوم ياديږي.

$$co\log a = \log\frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a$$
$$co\log a = -\log a$$

نو معلومه شوه چه د يوه عدد کولوګاريتم دهغه عدد منفي لوګاريتم دي.

د لوګاريتمي معادلو د حل طريقه:

د لوګاريتمي معادلو په حلولو کې د لوګارتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$\log_a(x+6) - \log_a(x+2) = \log_a x$$
$$\log_a\frac{x+6}{x+2} = \log_a x$$
$$\frac{x+6}{x+2} = x$$
$$x^2 + 2x = x + 6$$
$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$
$$\Delta = 25$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2\log x} = 10x$$
$$\log x^{2\log x} = \log 10x$$
$$2\log x \times \log x = \log 10x \Longrightarrow 2\log^2 x = \log 10 + \log x$$
$$2\log^2 x - \log x - 1 = 0$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$log\, x = y = y_1 = 1$$

$$log_{10} x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \qquad x_1 = 10$$

$$log_{10} x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$log_{10} x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{log(35 - x^3)}{log(5 - x)} = 3$$

$$3\,log(5 - x) = log(35 - x^3)$$

$$log(5 - x)^3 = log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$log_5\left(log_{10}\sqrt{x^2 + 19}\right) = 0$$

$$log_{10}\sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt{x^2+19}\right)^2 = 10^2$$
$$x^2 + 19 = 100$$
$$x^2 = 100 - 19 = 81$$
$$x^2 = 81$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$
$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$log_3 x + log_9 x + log_{27} x = 5.5$$
$$log_3 x + log_{3^2} x + log_{3^3} x = 5.5$$
$$log_3 x + \frac{1}{2} log_3 x + \frac{1}{3} log_3 x = 5.5$$
$$log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$
$$log_3 x \left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \qquad \Rightarrow \frac{11}{6} log_3 x = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$
$$log_3 x = 3$$
$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$log_2(11x - 1) = 5$$
$$11x - 1 = 2^5$$
$$11x = 32 + 1 = 33$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$
$$x = 11$$

7- مثال:

$$log_3(2^x - 7) = 2$$
$$2^x - 7 = 2$$
$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x = 3$

8- مثال:

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$
$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$
$$5^2 = (x^3)^2$$
$$x^3 = 5$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{5}$$

9- مثال:

$$\log_{10} \sqrt{x+1} + \log_{10} \sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$
$$\log_{10} \frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$
$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$
$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$
$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 1 = 25 \quad \Longrightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$
$$x^2 = 26 \quad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

10- مثال:

$$\log(x^2 - 1) - \log(x+1) = \log 2$$
$$Log \frac{x^2 - 1}{x+1} = \log 2$$
$$\frac{x^2 - 1}{x+1} = 2 \quad \Longrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 \quad \Longrightarrow x - 1 = 2\ ,\ \ x = 3$$

11- مثال:

$$x^{\log_{10} x} = 10$$
$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$
$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow \log^2{}_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow x = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- مثال:

$$\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$$
$$\frac{x+1}{x-1} = 3^1 \quad \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \quad \Rightarrow x+1 = 3x-3$$
$$x - 3x = -3 - 1 \quad \Rightarrow -2x = -4 \quad \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

13- مثال:

$$\log_4(3x-3) = \log_2 3$$
$$\log_{2^2}(3x-3) = \log_2 3$$
$$\frac{1}{2}\log_2(3x-3) = \log_2 3$$
$$\log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$
$$\sqrt{3x-3} = 3 \quad \Rightarrow \sqrt{(3x-3)}^2 = 3^2$$
$$3x - 3 = 9 \quad \Rightarrow 3x = 9 + 3 = 12 \Rightarrow\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

14- مثال:

$$\log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = \log_2 4$$
$$\log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = \log_2 2^2 \Rightarrow \log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2\log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$
$$\log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7$$
$$\frac{1}{x} = 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

15- مثال:

$$\log\sqrt{x} + \log x^{\frac{3}{2}} = \log 100$$
$$\log\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3} = \log 100 \Rightarrow \log\sqrt{x\cdot x^3} = \log 100$$
$$x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 10$$

16- مثال:

$$\log_{(x^2-x+4)}(x^2+5x-1) = 1$$
$$x^2 + 5x - 1 = x^2 - x + 4 \qquad \Rightarrow 5x - 1 = -x + 4$$
$$\Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

17- مثال:

$$log_9 3 \cdot log_2 x = 1$$
$$log_{3^2} 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} log_3 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot log_2 x$$
$$= log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$
x^(1/2)=2^1⟹x^(1/2)=2⟹(x^(1/2))^2=2^2⟹ x=4

18- مثال:

$$log_3 log_2(x-1) = 2$$
$$log_2(x-1) = 3^2 \Longrightarrow x - 1 = 2^9 \Longrightarrow x = 2^9 + 1$$
$$= 513 \Longrightarrow x = 513$$

19- مثال:

$$log_{10} x = \frac{log_3 12}{log_3 10}$$
$$log_{10} x = log_{10} 12$$
$$x = 12$$

20- مثال:

$$3^{log_4 16} = 27^x$$
$$3^{log_4 16} = 3^{3x}$$
$$log_4 16 = 3x \Longrightarrow 16 = 4^{3x} \Longrightarrow 2^4 = 2^{6x} \Longrightarrow 6x = 4 \Longrightarrow x = \frac{4}{6}$$
$$x = \frac{2}{3}$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ؟

1) $x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

2) $\log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$

3) $\log(x-3) = 1 - \log x$

4) $\ln(y+1) = \ln(y-7) + \ln 4$

5) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6) $log_2 x + log_3 x = 1$

7) $log_3 x + log_5 x = log_{10} 15$

8) $log^2{}_2(x-1)^2 - log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} log_3 x + log_3 y = -3 \\ log_{10} x^3 - log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} log_4 x - log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم فصل

توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وایي.

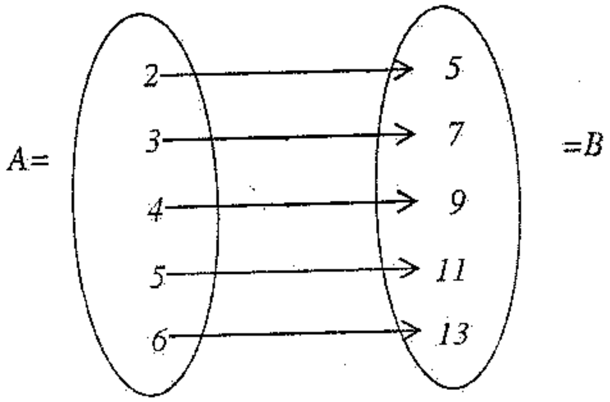
او په اصطلاح کې که د (A) او (B) دوه داسې سیټونه ولروچه د (A) دسیټ هر عنصر د (B) د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطې ته تابع وایي.

لکه: $A = (2,3,4,5,6)$ او $B = (5,7,9,11,13)$

سیټونه د لاندې رابطې پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وایي.



په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه ،د قیمتونو سیټ اویا ډومېن $(Domain)$ وایي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ ، رنج$(Range)$ او کوډومېن$(Codomain)$ وایي.

رنج : د تعریف د ناحیې د عناصرو دتصویرونو سیټ ته رنج وایي.

کوډومین: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومېن وایي.

کله کله د ډومېن ټول عناصر د کوډومېن د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دی صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومېن دی.لکه پورتني سیټونه .

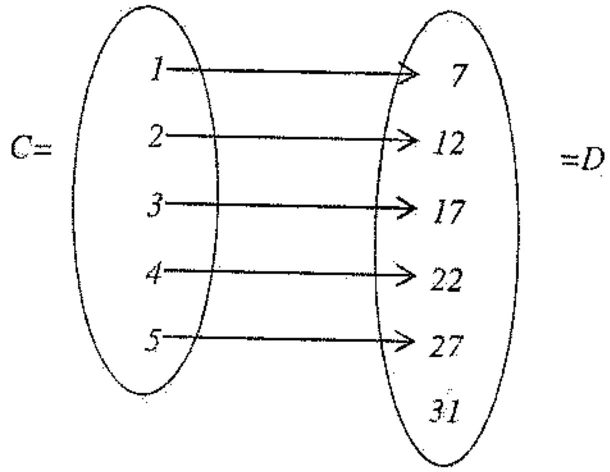
او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدی صورت کې د دویم

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیټ هغه عناصر چه د اول سیټ د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیټ یا رنج بلل کیږي.
او د دویم سیټ ټول عناصر د کوډومین په نوم یادیږي.

$C = (1,2,3,4,5)$

$D = (7,12,17,22,27,31)$



په دغه حالت کې د رنج او کوډومین تر منځ لاندې رابطه موجود ده.

$Range \subseteq Codomain$

د تابع اقسام:

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع 2- ترانسندنتل تابع

1- ناطقه تابع:

خطي تابع ، دویمه درجه تابع او هوموګرافیک تابعګانې ناطقی تابعګانې دي.

a- خطي تابع:

هغه تابع ده چه ګراف یې مستقیم خط وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = ax + b$$

$$y = mx + b$$

(a) او (b) ثابت عددونه دي (x) متحول دی (y) د (x) تابع دی. a او m دواړه یو شی دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي تابع د تعريف ناحيه :

د خطي تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی په (IR) سره يي ښيي يعني:

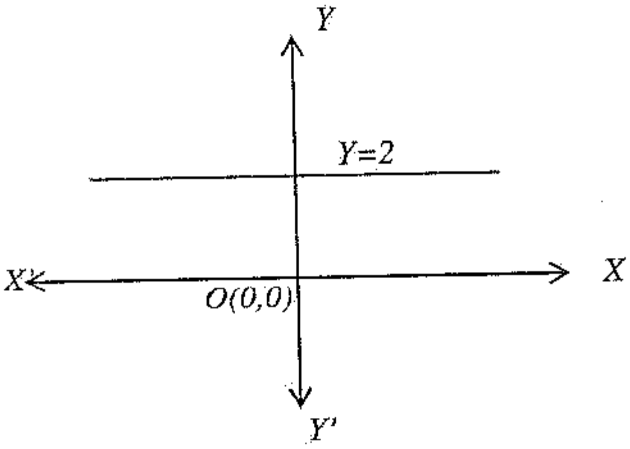
$$IR = (-\infty \,،\, +\infty)$$

د خطي تابع میل د (x) ضريب يعنی (m) دی.

خصوصي حالتونه:

1- که په يوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابته تابع وايي.ګراف يي د $X\acute{X}$ د محورسره موازي دی.

مثال:- $Y = 2$ ګراف رسم کړئ؟



2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

$$y = mx + b \Longrightarrow 1.x + 0 = x$$

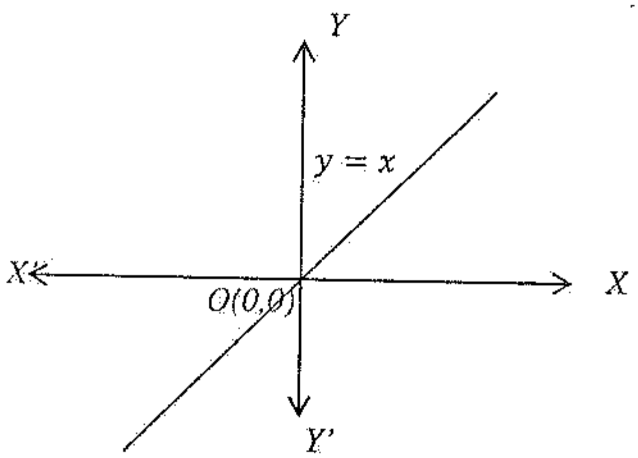
$$y = x$$

دغې تابع ته د عينيت تابع وايي ګراف يي اوله او دريمه ربعه نيمايي کوي .

مثال:- $y = x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دخطي تابع د عمومي شكل د ګراف ترسيم:

1- د $X\acute{X}$ محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $X = 0$ فرضوو.

پيدا شوي نقطې وصلوو د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع ګراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کيږي نود (YY') د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

2- $y = 0$ فرضوو نو:

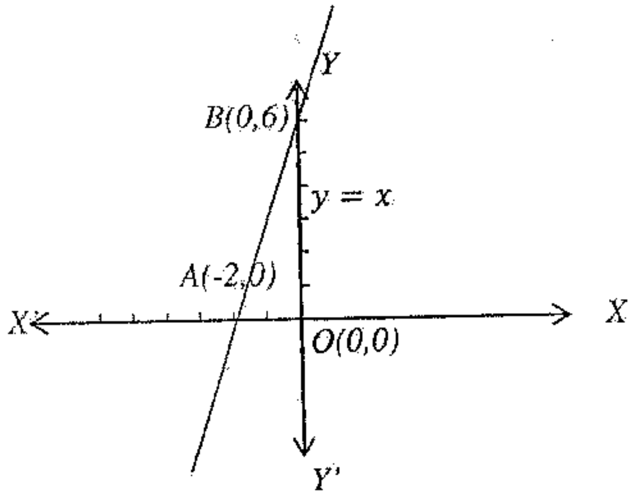
$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د (XX') د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده د وضعيه کميتونو د محورونو په مستوي کې يې د وضعيه کميتونو د محورونو پر مخ يې پيدا کوو او و صلوو يې غوښتل شوی ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



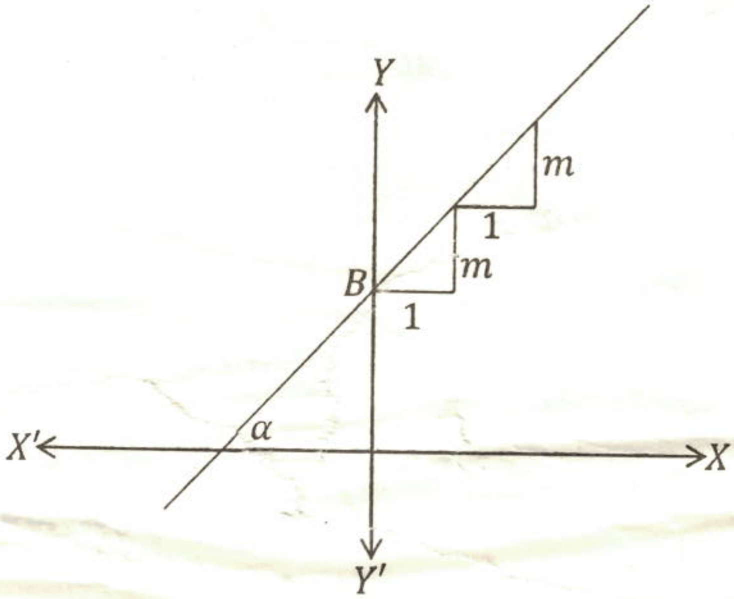
د مستقیمي کرښې میل:

د مستقیمی کرښی میل د هغه زاویي تانجانت دی چه مستقیمه کرښه یي د $X\acute{X}$ د محور سره جوړوي.

په عمومي صورت د متحول ضریب د مستقیمی کرښی میل دی.ددی خبری دثبوت لپاره د وضعیه کمیتونو په مستوي کې د وضعیه کمیتونو محورونه د (Δ)د مستقیم پواسطه قطع کوو چه د $Y\acute{Y}$ محور د B په نقطه کې قطع کړي او $X\acute{X}$ د محور سره د (α) په اندازه زاویه جوړه کړي بیا د $X\acute{X}$او $Y\acute{Y}$ د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د (m) په اندازه توټې را بېلو او د (α) د زاویې تانجانت پیدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقیمی کرښی میل دی.

$$tan\,\alpha = \frac{m}{1} = m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



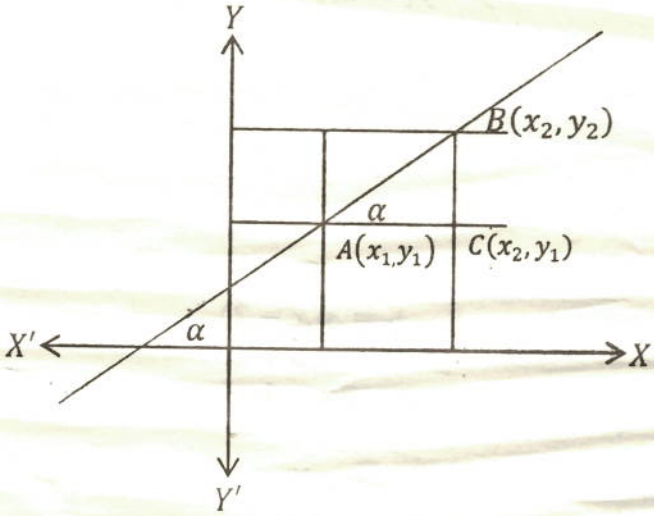
دمېل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطې د مستقیمې دوه نقطې دي

د (A) او (B) د نقطو څخه د $X\acute{X}$ او $Y\acute{Y}$ د محورو سره موازي خطونه رسموو چه یو

او $B(X_2, Y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د ABC

په مثلث کې د α دزاويي تانجانت پيدا کوو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ دیوی مستقیمی کرښی دوه نقطی دي مېل يي پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-9}{-2-5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقيمی کرښې معادله چه مېل او يوه نقطه يي معلومه وي:

د مستقيمی کرښی عمومي معادله ليکو.

$$y = mx + b \ldots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د يوې مستقيمی کرښی يوه نقطه ده په عمومي معادله کې يي وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \cdots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطی څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{c} y = mx + b \\ \underline{\pm y_1 = \pm mx_1 \pm b} \\ y - y_1 = mx - mx_1 \end{array}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقيمی کرښی معادله پيدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = 3(x - 2)$$
$$y = 3x - 6 + 5$$
$$y = 3x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیمی کربښی د معادلی پیدا کول چه دوه نقطی یي معلومی وي:

د هغه مستقیمی کربښی معادله لیکو چه مېل او یوه نقطه یي معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د (m) په عوض یي قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمی کربښی معادله پیدا کړئ چه دوه نقطی یي $A(-4,14)$ او $B(4,8)$ وي.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)}\{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4}(x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8}(x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}(x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یي د تقاطع نقطی معلومی وي.

معادله یي په لاندي ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د $X\acute{X}$ دمحور سره یي د تقاطع نقطه $A(a,0)$ ده او د $Y\acute{Y}$ سره یي د تقاطع نقطه $B(0,b)$ ده دا نقطی په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطی یي معلومی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} - \frac{ay}{-ab} = \frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: د يوې مستقيمې کرښې دوه نقطې $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله يي پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{2x + y}{10} = 1$$

$$y = -2x + 10$$

تمرين:

1- په لاندې ډول د کرښو نقطې راکړ شويدي مېل يي پيدا کړئ؟

1- $A(3,5)$, $B(4,-11)$ 2- $C(9,3)$, $D(2,7)$
3- $E(9,3)$, $F(3,-5)$

2- په لاندې ډول د مستقيمې کرښې يوه نقطه او مېل راکړشوې دي معادله يي پيدا کړئ؟

1- $A(5,4)$, $m = 4$ 2- $B(5,8)$, $m = 2$

3- $C(-3,7)$, $m = \frac{1}{2}$

3- په لاندې ډول د مستقيمې کرښې دوه نقطې راکړ شويدي معادله يي پيدا کړئ؟

1: $A(3,4)$, $B(6,2)$ 2: $C(8,12)$, $D(4,-7)$
3: $E(2,-1)$, $F(3,-4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- په لاندي ډول د محورېنوسره د مستقیمې کرښې د تقاطع نقطې راکړشویدي محوري معادلې یې پیداکړئ؟

1- $A(4,0)\ ,B(0,8)$ 2- $C(3,0)\ ,D(0,12)$
3- $E(8,0)\ ,F(0,24)$

جفته تابع :

که یوه تابع د او لپاره یو شان وي دی تابع ته جفته تابع وایي. لکه $y = x^2$ چې:

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

یعنې:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع :

هغه تابع ده چه او لپاره یو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چه د (x) او لپاره یو شان نه ده یعني د (x) لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو $f(x) \neq f(-x)$ نو دغه تابع طاق تابع ده.

معکوسه تابع:

دوه تابعګانې هغه وخت یو د بل معکوسې دي چه د یوې ډومېن دبلې کوډومېن وي او کوډومېن دبلې تابع ډومېن وي .

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د (x) قیمت د (y) له جنسه پیداکوو اوبیا د (x) او (y) ځایونه بدلوو معکوسه تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پیدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$
$$3x = y + 7$$
$$x = \frac{y + 7}{3}$$
$$y = \frac{x + 7}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مرکبه تابع:

هغه تابع ده چه متحول يي د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع ،تابع ته مرکبه تابع وايي.

که وغواړو چه د دوه تابعګانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو يوه تابع په بله تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.مرکبه تابع لاس ته راځي اوداسی ليکل کيږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعګانی راکړشويدي fog او gof پيدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x^2 - 1)^2 - 5 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 5$$
$$= 27x^2 - 18x + 1 - 5$$

$$gof = 27x^2 - 18x - 4$$

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه د اولی تابع د تعريف د ناحيي د هغه عناصرو سيټ دی چه په مرکبه تابع کې تصوير ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعګانې لرو چې $domf(x) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، hof او foh او ډومېنونه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h\left(\sqrt{4x - 1}\right) = \left(\sqrt{4x - 1}\right)^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \qquad ; \; domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$foh = f\{h(x)\} = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{4x^2 + 4 \times \frac{1}{4} - 1}$$

$$= \sqrt{4x^2 + 1 - 1}$$

$$foh = 2x \quad ; \quad domf\{h(x)\} = IR$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو معکوسې تابعګانې پیدا کړئ؟

$1\text{-}\ y = 4x - 3$ $\qquad$ $2\text{-}\ y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$

$3\text{-}\ y = x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $4\text{-}\ y = 5x - 8$

د لاندې تابعګانو ترکیب او دومېنونه پیدا کړئ؟

$1\text{-}\ f(x) = 3x - 4\ ,\ g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

$2\text{-}\ f(x) = x^2 + 1\ ,\ h(x) = \sqrt{x}$

پولینومي تابعګانې

څو شاخه اي تابعګانو ته پولینومي تابع وایي.لکه

$$y = \begin{cases} x + 1 & : x < -2 \\ x + 3 & : x > 2 \\ x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \qquad : x > 2$$

x	3	4
y	6	7

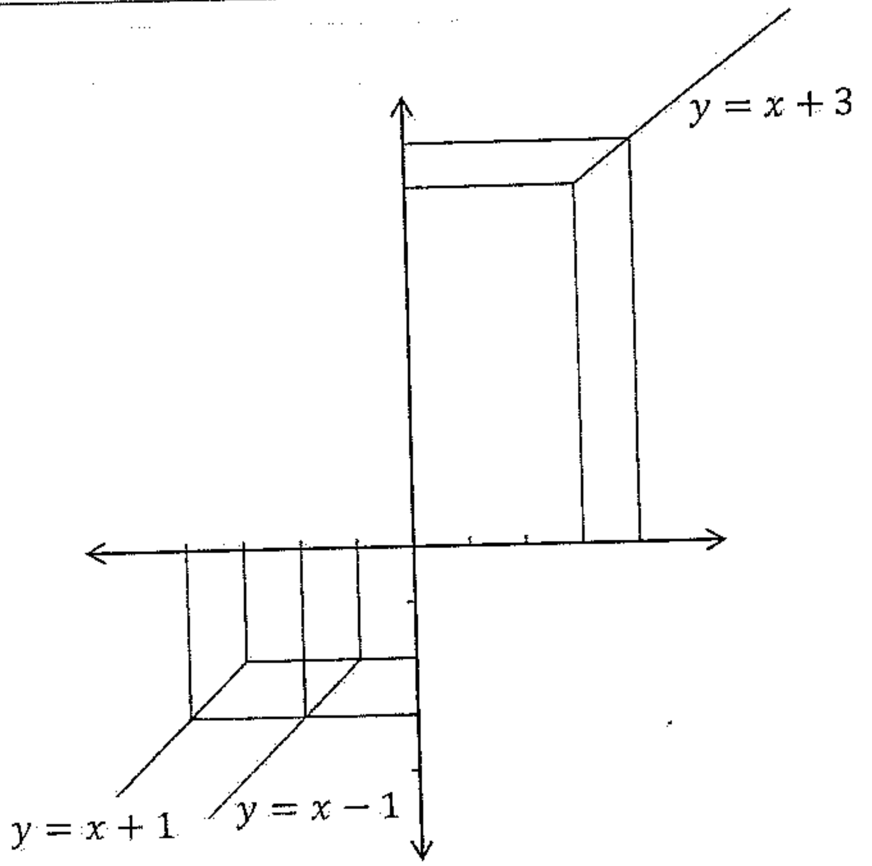
$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

x	−4	−3
y	−3	−2

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

x	−2	−1
y	−3	−2

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين

د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = \begin{cases} x+2 & : \ x > 3 \\ x-2 & : x < 3 \end{cases}$

2- $y = \begin{cases} x-1 & : \ x > 2 \\ x+1 & : \ x < 2 \\ x+2 & : \ x > 5 \end{cases}$

3- $y = \begin{cases} x+4 & : \ x < 2 \\ x-1 & : x > 0 \end{cases}$

4- $y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : \ x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : \ x > 6 \end{cases}$

5- $y = \begin{cases} x+4 & " \ x < 3 \\ x-4 & " \ x > 3 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوولسم فصل

دویمه درجه تابع

دویمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه یي دوه وي.

عمومي شکل یې دا دی.

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

a، b او c ثابت عددونه دي او (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

د دویمه درجه تابع د تعریف ناحیه:

د دویمه درجه تابع د تعریف ناحیه د حقیقي اعدادو سیټ دی او په IR سره یي ښیي. د تعریف ناحیې ته د قیمتونوسیټ او ډومین $(Domain)$ هم وایي.

د دویمه درجه تابع ګراف:

د دویمه درجه تابع ګراف ته پارابول وایي.

که په دویمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع ګراف اصغري نقطه لري اود پارابول خوله پورته خواته خلاصیږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله کښته خواته خلاصیږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس $(Vertex)$ وایي.

د دویمه درجه تابع د ګراف ترسیم:

د دویمه درجه تابع د ګراف ترسیم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسیم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسیم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

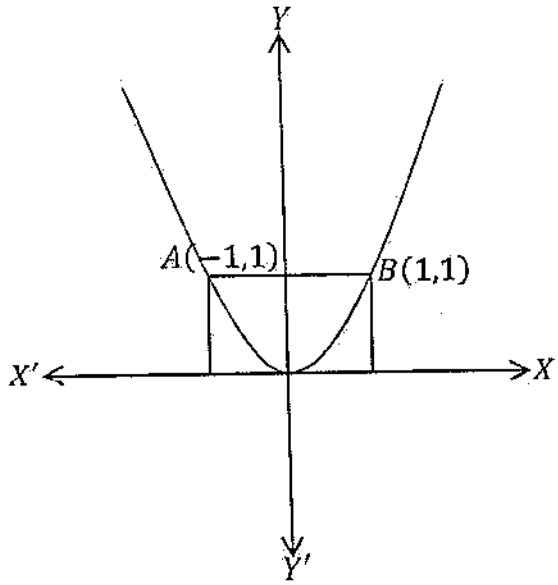
1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسیم:

x ته ځو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. بیا د تابع د ګراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال:- د $y = x^2$ ګراف رسم کړئ؟

x ته ځو قیمتونه ورکوو او د y قیمتونه پیدا کوو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو:

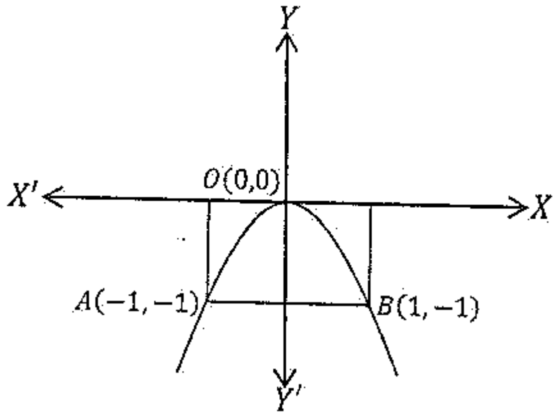
x	-1	0	1
y	-1	0	$+1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $y = -x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$



نوټ:

که $(a < 1)$وي نو د تابع ګراف پلن او سوررور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع ګراف نري او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$ 2- $y = 2x^2$ 3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$ 5- $-\frac{2}{3}x^2$

د ګراف انتقال:

د $(X\acute{X})$ او $(Y\acute{Y})$ په محورو باندې د تابع د ګراف حرکت ته د تابع دګراف انتقال وايي.

1- د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع د ګراف انتقال :

که وغواړو چه د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع ګراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو او ګراف یې رسموو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (3) په اندازه چپې او ښې خواته انتقال ورکړئ؟

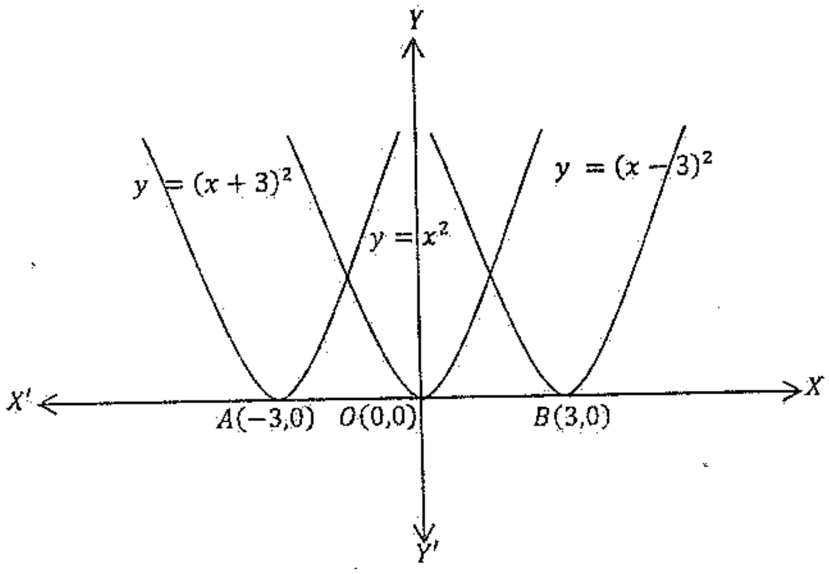
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: چپې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکوو نو 3 ورسره جمع کوو.

$$y = (x+3)^2$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$A(-3,0)$$

ښې خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x-3)^2$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



2- د YY' په محور باندې د تابع د ګراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د $(y\acute{y})$ په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع يا تفريقوو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه ګراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو (2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

... تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $y = 0$ فرضوو.

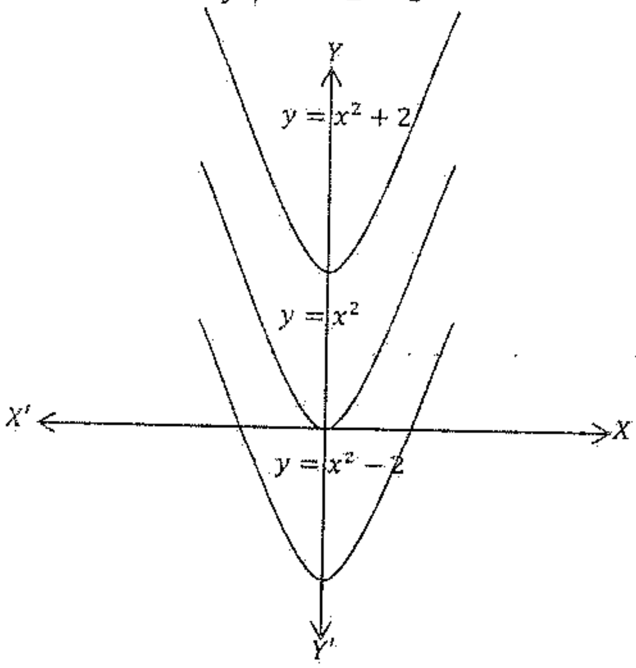
$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2$$

ځرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

د ګراف د ښه ترسیم لپاره (x) ته ځو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتیجه کې $y = 2$ کیږي چه د $Y\acute{Y}$ دمحور سره د ګراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.

x	-1	0	$+1$
y	3	2	3



تمرین:

لاندې تابعګانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع ګراف ته د (3) په اندازه ښي او چپې خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع ګراف ته د $\left(\frac{3}{2}\right)$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسیم:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې يې عبارت دي.

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-C}{A}}, 0\right)$$

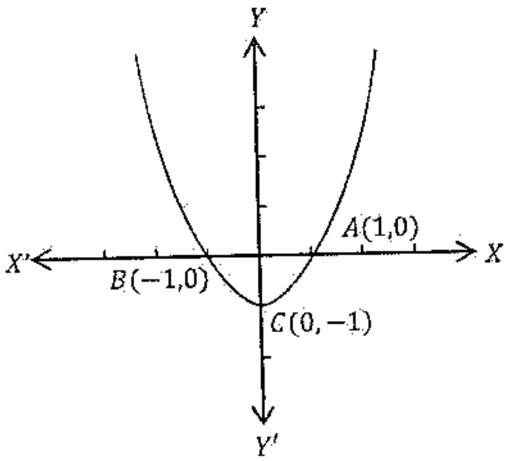
2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له $M(0, C)$ دغه نقطه د تابع د ګراف راس هم دی.

د (A) نقطه د (C)سره او د (C) نقطه د (B) سره وصلوو د تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د xx' د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې عبارت دي:

$A(1,0) \quad B(-1,0)$

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو چې $y = -1$ کیږي نو د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0,-1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د xx' د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

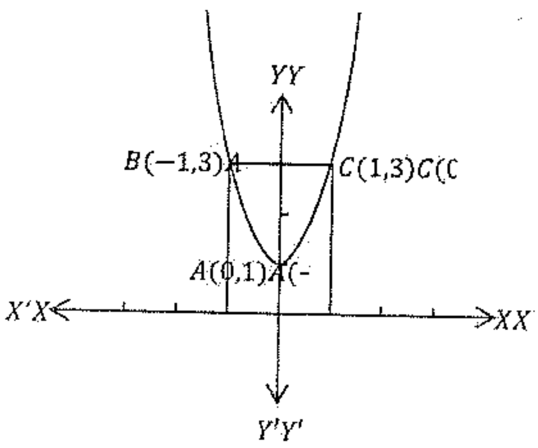
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$A(0,1)$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	$+1$
y	2	0	2

$B(-1,2) \quad O(0,1) \quad C(1,2)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

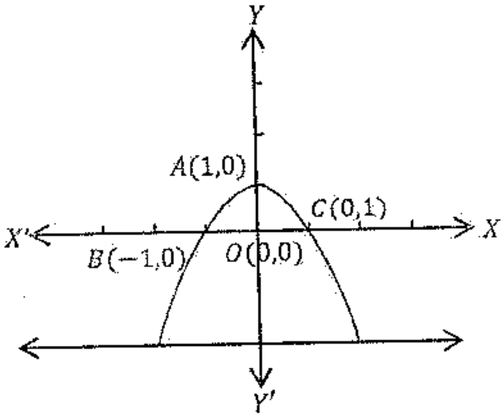
1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 + 1 = 0$
$-x^2 = -1$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$

$A(1,0)$ $B(-1,0)$

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د گراف نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کیږي د تقاطع نقطه يي عبارت ده.

$C(0,1)$



مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 - 1 = 0$
$-x^2 = 1$
$x^2 = -1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چه منفي عدد جذر نلري نو د تابع ګراف د (XX') محور نه قطع کوي.

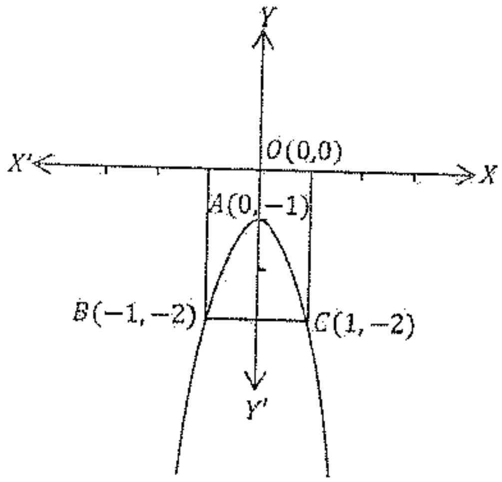
2- د YY' د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x=0$ فرضوو نو $y=-1$ نو د X د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,-1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته ځو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	1
y	-2	-1	-2

$B(-1,-2)$ $\quad O(0,0)$ $\quad C(1,-2)$



3- د $\begin{cases} y=ax^2+bx \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}$ د تابعګانو د ترسیم طریقه:

1- د (XX') د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $(y=0)$ فرضوو، په نتیجه کې $ax^2+bx+c=0$ دویمه درجه معادله لاس ته راځي . د دغه معادلې د حل لپاره د (Δ) قیمت پیدا کوو د (Δ) په باب دری حالته موجود دي.

a- که $0<\Delta$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه یې د $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي او د تقاطع نقطې یې عبارت دي له: $A(X_1,0)$ او $B(X_2,0)$

b- که $(\Delta=0)$ وي معادله یو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي $x=\frac{-b}{a}$ نو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له: $A(x,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- كه $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.په دغه حالت کې د پاره ددې چه د $(Y\acute{Y})$ د محور يوى او بلى خواته دګراف خط السير تعين شي نو(x) ته يو منفي او يو مثبت قيمت ورکوو اود (y) قيمتونه پيدا کوو د $(Y\acute{Y})$ د محور يوى او بلى خواته دوه نقطى لاس ته راځي چه د تابع د ګراف خط السير تعينوي.

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحورسره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوونو $x = 0$ فرضوود $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع دګراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع د ګراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

كه $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \qquad \therefore \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

كه $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ کيږي.نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $0 < a$ وي بيا هم $0 > \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کيږي مګر $0 > a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کيږي. دواړه خواو څخه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{4ac-b^2}{4a}<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ او $x=\frac{-b}{2a}$ شي نو $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ کيږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y=2x^2-3x-2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د د قاطع نقطه پيدا کوو نو $y=0$ فرضوو.

$2x^2-3x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25$

$\Delta=1$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm5}{2\times2}=\frac{3\pm5}{4}$

$x_1=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2 \qquad \therefore\ x_1=2$

$x_2=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \qquad \therefore\ x_2=\frac{-1}{2}$

نو د محور سره دګراف د د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(2,0) \qquad B\left(\frac{-1}{2},0\right)$$

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y=0$ فرضوو. نو $y=6$ کيږي. نو

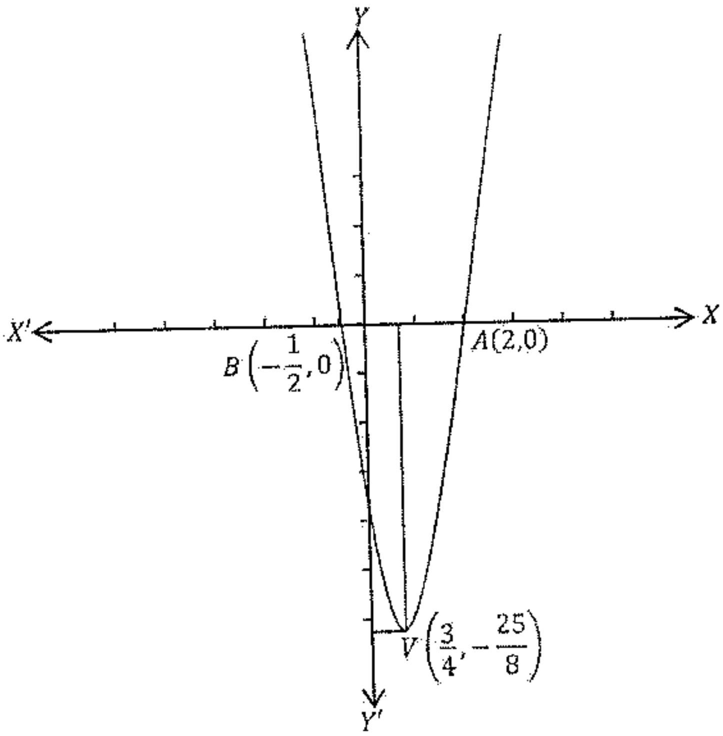
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0,-2)$

د تابع د ګراف د راس نقطه پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{4\times 2\times(-2)-(-3)^2}{4\times 2}=\frac{-16-9}{8}=-\frac{25}{8}\right)$$

$$V\left(\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$$



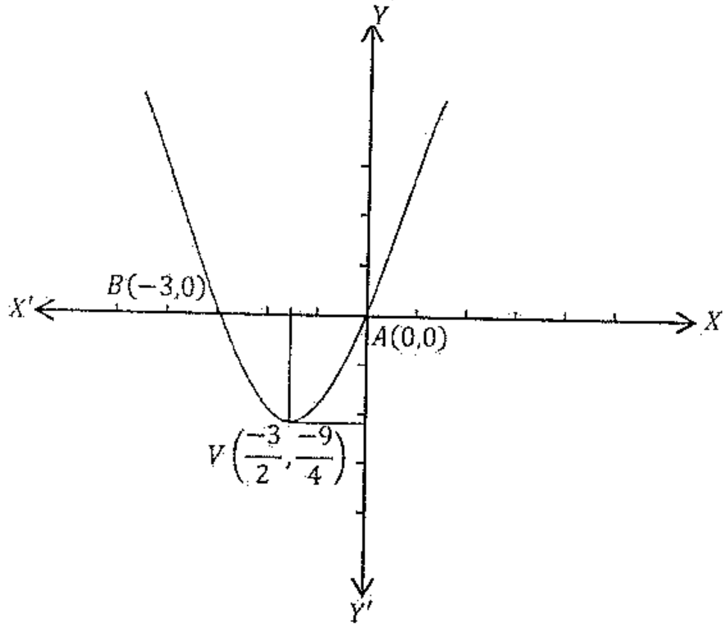
مثال: $y=x^2+3x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

$$y=0$$
$$x^2+3x=0$$
$$x(x+3)=0$$
$$x_1=0$$
$$x_2=-3$$
$A(0,0)$ $B(-3,0)$

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{4\times 1\times 0-3^2}{4\times 1}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-9}{4}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ گراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad : \quad x_1 = 1 \qquad A(1,0)$$

$$X_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad : \quad x_2 = 3 \qquad B(3,0)$$

2- $x = 0$ فرضوو نو:

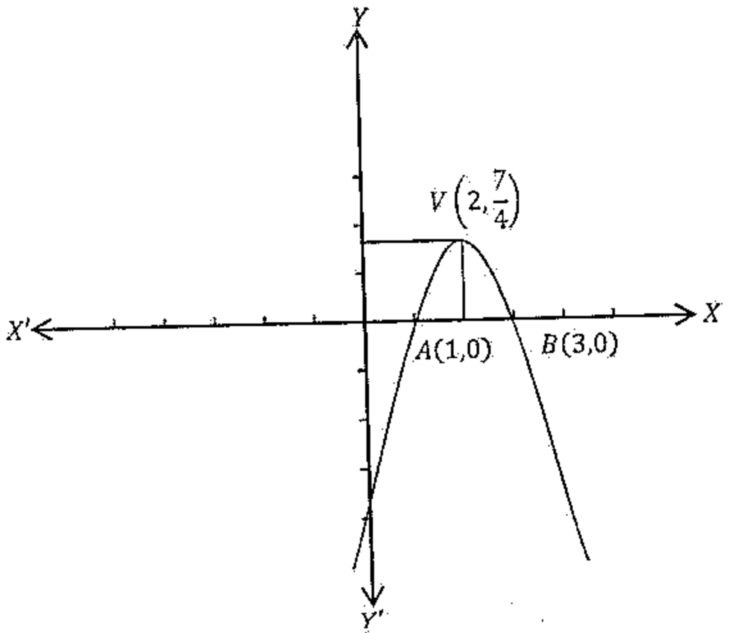
$$y = -3 \qquad C(0, -3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصغري او اعظمي ټکي يې پيدا کوو:

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-4}{-2},\frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right)=\left(2.\frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2,\frac{7}{4}\right)$$



مثال: $y = x^2 + 2x + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$A(-1,0)$$

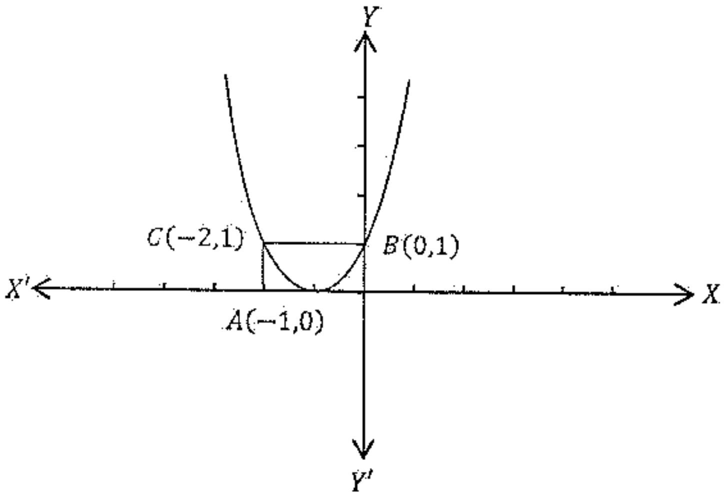
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- x = 0 فرضوو نو:

$$y = 1$$
$$B(0,1)$$

x	-2
y	4

$$C(-2,1)$$



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2 + 6x$
2- $5x^2 - 13x + 6$
3- $4x^2 - 4x + 1$
4- $-x^2 + 5x - 6$
5- $-2x^2 - 3x + 14$
6- $3x^2$
7- $4x^2 + 8x$
8- $6x^2 + x - 57$
9- $11x^2 - 13x - 18$
10- $2x^2 - 6x$
11- $2x^2 + x - 21$
12- $-x^2 + 4$
13- $11x^2 - 13x - 18$
14- $3x^2 - x - 10$
15- $5x^2 + 2x - 51$
16- $-9x^2 + 17x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموګرافيک تابع

هغه تابع ده چه د بېنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي. عمومي شکل يې دا دی.

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} \qquad \text{زوړ نصاب}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{نوی نصاب}$$

a، b، c او d ثابت عددونه دي (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

مجانب $Asymptotes$:

که د يو مستقيم او يوه منحني ترمنځ فاصله په لايتناهي(∞) کې صفرشي دا مستقيم د دی منحني مجانب دی.

مجانب په دری قسمه دی.

1- عمودي مجانب $Vertical\ Asymptotes$

2- افقي مجانب $Horizntil\ Asymptotes$

3- مايل مجانب $Slant\ or\ oblique\ Asymptotes$

1- عمودي مجانب:

هغه خط چه د (x) په فاصله باندی د $(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف عمودي مجانب بلل ميږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کووو عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$cx+d=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx = -d$$
$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال:- د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پيدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Longrightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب :

هغه خط چه د (y) په ترتيب د $(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف افقي مجانب دی.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرج ويشو خارج قسمت يي په (m) ښيو او باقي په (p) ښيو نو ليکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يي هم مساوي دي.

$$ax+b = mcx+md+p$$
$$a = mc \Longrightarrow m = \frac{a}{c}$$

دباقي د پيدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md+p = b \Longrightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc-ad}{c}$$
$$p = \frac{bc-ad}{c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $h(x)=\frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانده پيدا کړئ؟

حل:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{8}{4}=2$$
$$m=2$$
$$p=\frac{bc-ad}{c}=\frac{-3\times4-8(-9)}{4}=\frac{-12+72}{4}=\frac{60}{4}=15$$

3- مايل مجانب $Slant\ or\ Oblique\ Asymptotes$:

که د يوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زياته وي دغه ډول تابعګانې مايل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ويشو.

مثال: د $g(x)=\frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب ، افقي مجانب،مايل مجانب يې پيدا کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x=\frac{-d}{c}=\frac{-2}{1}=-2$$

افقي مجانب نلري، مايل مجانب معادله يې دا ده.

$$\frac{6x^2-24}{x+2}=6x-12$$

د هوموګرافيک تابع د ګراف ترسيم:

1- عمودي مجانب پيدا کوو او رسموويي.

2- افقي مجانب پيدا کوو او رسموو يي.

3- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف دتقاطع نقطه پيدا کوو.

4- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.

5- د ګراف د ښه دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمتونه پيدا کوو.

6- پيدا شوی نقطې دوضعيه کميتونو محورونو په مستوي کې پيدا کوو او وصلوو يې د راکړ شوی تابع ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x)=\frac{2x+4}{x-2}$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:عمودي مجانب:

$$x=-\frac{d}{c}=-\left(\frac{-2}{1}\right)=\frac{2}{1}=2$$

افقي مجانب:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$$

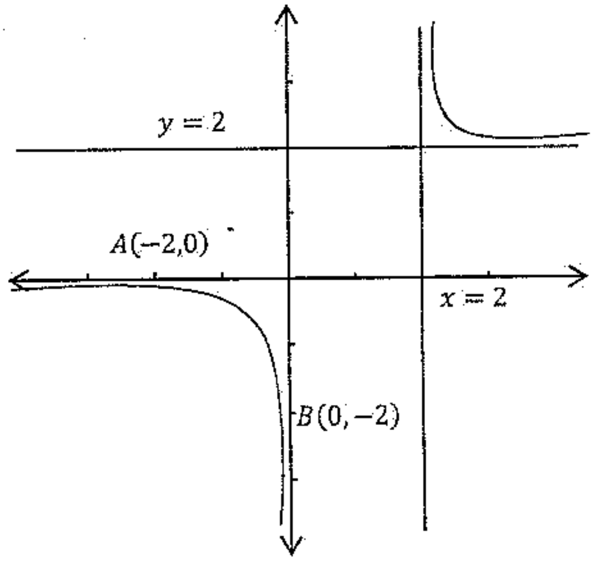
د $(X\acute{X})$ سره تقاطع پیدا کوونو $(y=0)$ فرضوو:

$$\frac{2x+4}{x-2}=0$$
$$(x-2)\left(\frac{2x+4}{x-2}\right)=0(x-2)$$
$$2x+4=0$$
$$2x=-4$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{-4}{2}$$
$$x=-2 \qquad \therefore \quad A(-2,0)$$

د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x=0$ فرضوو،

نو $y=-2$ کیږي او د تقاطع نقطه یې: $B(0,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

دلاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

$1: G(x) = \dfrac{4x-3}{2x+1}$ $\qquad$ $2: F(x) = \dfrac{2x-6}{3x+6}$ $\qquad$ $3: h(x) = \dfrac{3x+9}{x-6}$

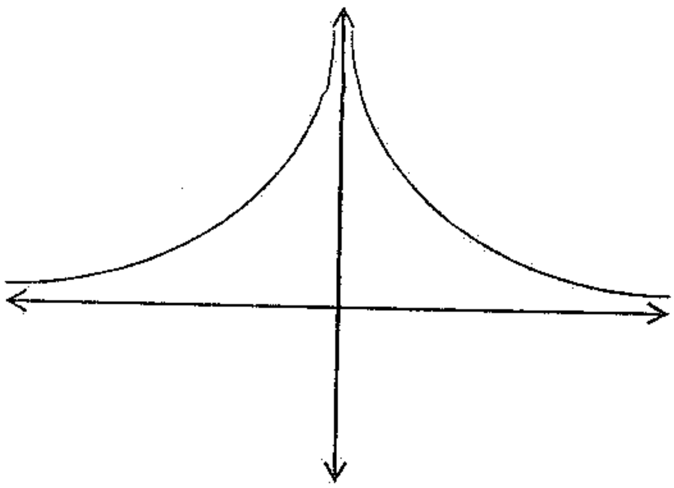
مثال: د $y = \frac{1}{x^2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $\quad B(-1,1)$ $\quad C(1,1)$ $\quad D\left(2,\frac{1}{4}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$
2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$
3) $h(x) = x^2 - 9$
4) $y = 6^x$
5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

اکسپوننشل تابع $Exponintiol\ function$:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یې په توان کې وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = a^x$$

a ثابت عدد دی (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

که $(a > 1)$ وي تابع متزایده ده او که $(a < 1)$ وي نوتابع متناقصه ده.

دتعریف ناحیه یې د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یې د مثبت اعدادو سیټ دی .د ګراف د ترسیم لپاره یې (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیتونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یې د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

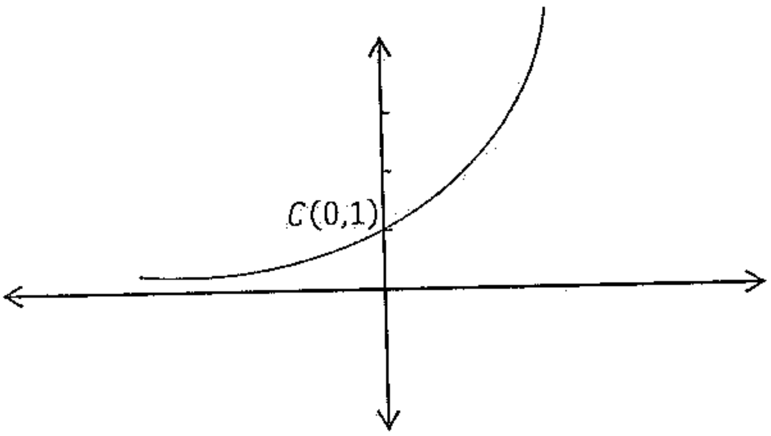
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $y = 2^x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ $C(0,1)$ $D(1,2)$ $E(2,4)$



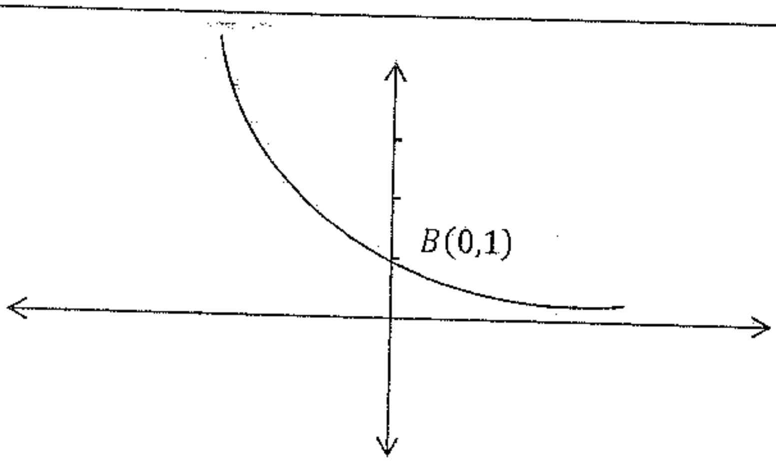
مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-1	0	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$A(-1,2)$ $B(0,1)$ $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $D\left(2,\frac{1}{4}\right)$ $E\left(3,\frac{1}{8}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

1- $y = 3^x$

2- $y = 5^x$

3- $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

4- $\left(\frac{1}{3}\right)^x$

5- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

6- $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$

7- $y = 5^x$

8- $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

لوګاريتمي تابع $Logarithmical\ functions$:

لوګاريتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعريف ناحيه يي د مکمل اعدادو سيټ دې او د تصويرونو سيټ يي د حقيقي اعدادو سيټ دی.ګراف يي په اوله او څلورمه ربعه کې رسميږي.

د ګراف د ترسيم لپاره x ته څو قيمتونه ورکوو او د y قيمت پيدا کوو.

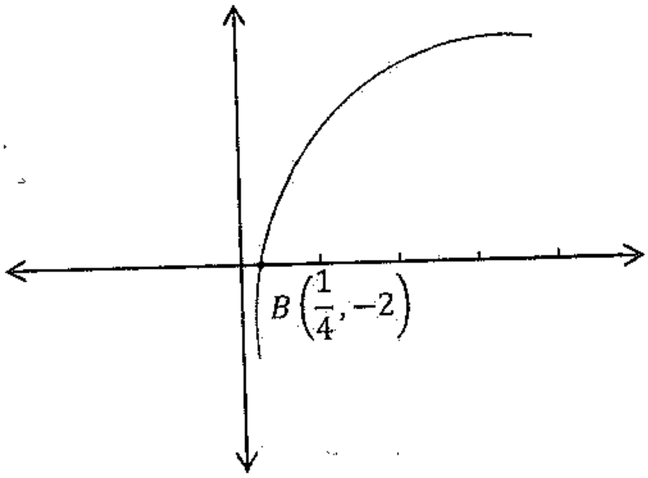
مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

$A\left(\frac{1}{8},-3\right)$ $B\left(\frac{1}{4},-2\right)$ $C\left(\frac{1}{2},-1\right)$ $D(1,0)$ $E(2.1)$ $F(4,2)$



تمرین

دلاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $\log_3 x = y$
y

2- $log_2 x = y$

3- $log_4 x =$

4- $\log_5 x = y$
y

5- $log_2 x = y$

6- $\log_8 x =$

7- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

8- $y = 3^{2x}$

9- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټرسایکل باندی یو په بل پسی سپرېدلو ته وایي.
او په اصطلاح کې د یوی قاعدی لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وایي.

لکه: 2,7,12,17,22

یا لکه: 5,15,75,375,1875

که د ردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7 , 21 , 63 ,189,567

او که د ردیف حدونه معلوم نه وي غېر معین ردیف ورته وائي. لکه:

1, 5, 9, 13, 17 ...

دغېر معین ردیف په اخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په درې قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونیکي ردیف *Harmonecal Sequences*

1- حسابي ردیف :

هغه ردیف دی چه هر وروستني حد یي د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه کې لاس ته راځي. او یا دا چه د دوه عددو تفاضل یي ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په (a_1) او مشترک تفاضل په (d) او دحدونو شمېر په (n) ښیو نو فارمول یي په لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ضریب ته متوجه شود (d) ضریب د حدو تر شمېر يو کم دي نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (d) ضریب به $(n-1)$ وي فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$a_1 , a_1+d , a_1+2d , a_1+3d , a_1+4d, \dots + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: د يوه حسابي رديف اول حد (30) دې مشترک تفاضل يې (17) دی (51) حد يې څو دی؟

$a_1 = 30$
$d = 17$
$n = 51$
$a_{51} = ؟$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{51} = 30 + (51-1)17 = 30 + 50 \times 17$$
$$a_{51} = 30 + 850 = 880$$
$$a_{51} = 880$$

د (d) ، (a_1) او (n) فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: ديوه حسابي رديف اول حد (15) دې (31) حد يې (585) دې مشترک تفاضل يې پيدا کړئ؟

$$d = \frac{585-15}{31-1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي رديف منځني حد دطرفينو اوسط دې.

مثال:- د يوه حسابي رديف (50)ام حد (1973) دی مشترک تفاضل يې (40) دی اول حد يې څو دې؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = 1973 - (50-1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$
$$a_1 = 13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د یوه حسابي ردیف اول حد (17)او اخري حدیي (2117) دی او مشترک تفاضل یي (21) دی د حدونو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوویعنی په $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ کی دداخل شوي حدونه په (m) ښیواودوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض یي لیکو د (d) قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \quad \Longrightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال:- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ.

حل :

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

$3 \ , \ 9.4 \ , \ 15.8 \ , \ 22.2 \ , \ 28.4 \ , \ 35$

تمرین:

لاندې عبارتي سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه یې منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي ردیف:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد یې د مخکیني حد سره د یوه ثابت عدد د ضربیدو په نتیجه کې په لاس راغلې وي یا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل یې ثابت وي. لکه :

$$2, 8, 32, 128, 512 \ \ldots$$

د هندسي ردیف اول حد (a_1) په مشترک نسبت یې په (r) ښیي.

د هندسي ردیف فارمول:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد یې د مخکیني حد سره د یوه ثابت عدد د ضربېدو په نتیجه کې لاس ته راغلی وي او یا دا چه د دوه حدو تفاضل یې ثابت وي. لکه:

$$3, 12, 48, 192, 768$$

$$5, 10, 20, 40, 80, 160 \cdots$$

د هندسي ردیف فامول:

اول حد یې په (a_1) او مشترک فصل په (r) او ورستنی حد په (a_n) ښیو نو .

$$a_1, a_x r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د (r) توان ته ځیر شو د (r) توان د حدو د شمېرڅخه یو کم دې نو که دحدونو شمېر (n)وي نو د (r) توان به $(n-1)$ وي نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \ldots \ldots a_1 r^{n-1}$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یي $r = 3$ دي اوم حد (a_7) یي څو دي؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د (a_1)او (r)قیمتونه د لاندی فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دي مشترک نسبت یي $(r = 2)$ دی اول حد یي څو دي؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دی اوم حد یي (5832) دی مشترک نسبت یي پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد$(a_1 = 10)$ دی (n) ام حد یي $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یي (2) دي د حدونو شمېر یي څو دی؟

حل:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Longrightarrow 128 = 2^{n-1} \Longrightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Longrightarrow n = 7 + 1 = 8 \Longrightarrow n = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د يوه هندسي رديف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څويم حد يي $\frac{1}{16}$ دي؟

$a_1 = 2$ $\qquad a_1 r^{n-1} = a_n$

$a_2 = 1$ $\qquad 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$

$r = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a_n = \frac{1}{16}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$n = ?$ $\qquad n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \quad \Rightarrow n = 6$

د هندسي رديف خصوصيات:

1- په هندسي رديف کې هر حد دطرفينو د حاصل ضرب جذر دي.

مثال: (3, 6,12,24,24) د يوه هندسي رديف حدونه دي نو ليکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \quad and \quad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په يوه هندسي رديف کې اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدو د شمېر په توان رفع شي او دويم جذر يي ونيول شي د رديف دټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال :-لکه (2, 6, 18, 54) يو هندسي رديف دی نو د دويم خاصيت سره سم ليکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$
$$11664 = 11664$$

3- که يو هندسي رديف طاق حدونه ولري نو د منځني حدمربع يي د اول او اخر حدو د حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) يو هندسي رديف دی نو د دريم خاصيت سره سم ليکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$
$$400 = 400$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي رديف کې د حدو داخلول:

که د يوه هندسي رديف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه يې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي رديف دفارمول څخه د (r) قيمت پيدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمېر (n) اوتر دخول وروسته د حدو شمېر $(m+2)$ دی نو د (n) په عوض په فارمول کې $(m+2)$ ليکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د يوه هندسي رديف دوه حدونه (3) او (96) دي څلور نور حدونه يې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \qquad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3,6, 12 ,24 , 48 , 96

مثال: درې داسې عددونه پيدا کړئ چه دويم حد يې د اول حد څخه د (3) په اندازه او دريم حد يې د دويم حد څخه د (6)په اندازه زيات وي او يو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x+9}{x+3} \Rightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9$$

$$9x = 6x + 9 \Rightarrow 9x - 6x = 9 \Rightarrow 3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

$$x = 3 \qquad x + 3 = 6 \qquad x + 6 = 9$$

3- هارمونيکي رديف:

د حسابي رديف معکوس ته هارمونيکي رديف وايي. مثلاً لاندې رديف يوحسابي رديف دی لکه:

(2,4,6,8 ,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دغه رديف معكوس رديف عبارت له $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ څخه دی دغه رديف ته هارمونيکي رديف وايي.

مثال: په يوه هارمونيکي رديف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d = -3$ دی ترادف يې جوړ کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{4}-3\ ,\frac{1}{4}-6\ ,\frac{1}{4}-9\ ,\frac{1}{4}-12\ ,\cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1-12}{4}\ ,\frac{1-24}{4}\ ,\frac{1-36}{4}\ \cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{-11}{4}\ ,\frac{-23}{4}\ ,\frac{-35}{4}\ \cdots$$

د هارمونيکي رديف حسابي اوسط:

$\frac{1}{a_{n+1}},\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n-1}}$ د هارمونيکي رديف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونيکي اوسط پيدا کړئ

حل: $a_n = \frac{2(2\times 8)}{2+8} = \frac{32}{10} = 3.2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سلسلی $Series$:

د ردیف د حدونو مجموعی ته سلسله وایي.

سلسلی په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله $Arithmetc\ Series$

2- هندسي سلسله $Geometric\ Series$

1- حسابي سلسله :

د حسابي ردیف د حدونو مجموعی ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلی فارمول:

د سلسلو مجموعه په S_n ښیي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسی لیکو چه اخر حد یې په سر کی راشي بیا یې د ولنی مجموعی سره جمع کوو.

$$S_n = \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \cdots + a_1$$
$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$
$$2S_n = \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$2S_n = n\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلی عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بېل، بېل ولیکو نو لاندی فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(d = 6)$ دی د (20) حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$
$$S_{20} = 10(128) = 1280$$
$$S_{20} = 1280$$

مثال: د يوه حسابي رديف اول حد $(a_1 = 11)$ او يوپنځوسم حد يې $(a_{51} = 10761)$ دی د (51) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{51} = \frac{51}{2}(11 + 311) = \frac{51}{2}(11 + 411) = \frac{51}{2}(422) = 51 \times 261 = 10761$$
$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کی $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قيمتونه دحسابي په عمومي فارمول کی وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په يوه ټولګي کی 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره يوه دويم شاګرد سره دوه په همدې ترتيب تر اخره روپۍ دي وواياست چه د ټولو سره څو روپۍ دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کی $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلی په عمومي فارمول کی وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n+2) = \frac{n}{2} \times 2(n+1)$$

$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدی ترتیب تر اخره مرسته کړی وي وواياست چه ټولو به څو روپۍ ورکړی وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$

$$S_{100} = 100(100+1) = 100 \times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کی اول حد (1) اومشترک تفاضل یي (2) دي دغه عددونه د حسابي سلسلی په عمومي فارمول کی وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$$

$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$

$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد یې د حدونو په شمېرکی ضرب شي دحدونو مجموعه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : د يوه حسابي رديف د حدونو شمېر 41 او منځني حد يې 145 دې د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او اخر حدو مجموعه د منځني حد د دوه چند سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

مثال: د يوه حسابي رديف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځني حد يې $a_5 = 27$ دی د اول اخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

دريمه تبصره:

کله، کله د څو اولو حدو او په همغه شمېر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او اخر حد معلوم نه وي. د اول او اخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m}$$

m_1 د شپږو اولوحدو مجموعه او m_2 د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او (m) د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي رديف n حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$S_{m_1} = 62$

$S_{m_2} = 482$

$m = 19$

$S_{19} = ?$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}(136) = 1292$$

$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله $Geometric\ Series$:

د هندسي ردیف د حدونو مجموعی هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلې فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

دواړه خواوی په (r) کی ضربوو اوبیا (I) رابطه ورڅخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \cdots + a_1r^n \ldots\ldots\ldots II$$

$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1r \pm a_1r^2 \pm a_1r^3 \pm \cdots \pm a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\frac{S_n(r-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$$

دغه سلسلې ته متزایده سلسله وايي.

مثال: د یوی هندسي سلسلې $a_1 = 5$ او مسترک نسبت يي $r = 3$ دي د $n = 7$ حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7-1)}{3-1} = \frac{5(2187-1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$S_7 = 5465$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او که د I رابطي څخه II رابطه منفي کړو نو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسلی ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي رديف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يي $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{32-1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$$S_5 = 15.5$$

مثال: د يوې هندسي سلسلی د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يي 5 دی مشترک نسبت يي څو دی؟

حل:

$a_1 = 8$ $\qquad 120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$

$S_8 = 120$ $\qquad r^3 + r^2 + r + 1 = 15$

$n = 4$ $\qquad r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$

$r = ?$

1	1	1	−14	2
	2	6	14	
1	3	7	0	

$$r = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي سلسلې پواسطه په عام کسر باندې د اعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلې فارمول لیکو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

په دغه فارمول کې $(r^n \to 0)$ صفر کیږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ کیږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چه اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\overline{3}$ اعشارکسردی . په عام کسر یې بدل کړئ؟

حل:

$a_1 = o.\overline{3} = \frac{3}{10}$

$r = \frac{1}{10}$

$n = \infty$ $\qquad S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10\times 3}{10\times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$S_n = ?$ $\qquad S_n = \frac{1}{3}$

مثال: $0.8\overline{3}$ اعشار کسر دی په عام کسر یې بدل کړئ؟

حل:

$a = \frac{8}{10}$

$a_1 = \frac{3}{100}$ $\qquad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10-1}{10}}$

$r = \frac{1}{10}$ $\qquad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10\times 3}{100\times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$

$S_n = ?$ $\qquad S_\infty = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین

1- د (20)او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پیدا کړئ چه لمړی رقم یي (3) وي؟

2- یو دیوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنګونه وهي وواياست چه په شواروز کی څو زنګونه وهي؟

3- د یوه حسابي ردیف ددری حدومجموعه (33) او د ضرب حاصل یي (1287) دی عددونه یي پیدا کړئ؟

4- د یوه حسابي ردیف د څلورو حدومجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه یي (214) ده عددونه پیدا کړئ؟

5- د یوه حسابي ردیف څلورو حدو دضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل یي (2) دی عددونه پیدا کړئ؟

6- (3003) کسان په یوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی یو نفربیا دوه بیا دری.......په همدی ترتیب تر اخره ولاړ دي وواياست چه څو قطارونه جوړوي؟

7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟

8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟

9- a , b او c په کوم شرط په یوه حسابي ردیف کی شامل دي؟

10- د یوه ردیف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنیو حدو د ضرب حاصل یي(285) دی عدونه پیدا کړئ؟

11- (3) او (243) د یوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟

12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دریم او اول حد تفاضل یي (136) وي؟

13- د یوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه یي(65) ده ابعاد یي پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځی (20) اجوره لري اوبل سړی اول ورځ یوه روپۍ په دویمه ورځ دوه روپۍ په همدی ترتیب تراخره روپۍ اخلي وواياست چه په څویمه ورځ به ددوی پیسی مساوي شي ؟

15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یي دشپږو اولنیو حدو د مجموعی دوچنده دي که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یي(126) وي تصاعد معین کړئ؟

16- $0.\overline{123}$ ، $0.\overline{925}$، $0.\overline{27}$ کسرونه په عام کسر بدل کړئ؟

17- $0.1\overline{36}$, $0.41\overline{6}$, $0.6\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د یوه قایم الزاویه مثلث زاویي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړئ؟

19- د یوی څلور ضلعي زاویي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمی زاویي (9) برابره وي د هری زاویي پراخوالی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیارلسم فصل

د رياضي استقراء *Induction of Math*

د ټولو طبعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي.

څرنګه چه د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د (n) لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n+1)$ لپاره فارمول ثبوتوو

مثال: ثبوت کړئ چه $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی

حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو.

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د (1) لپاره صحيح دی. د (n) لپاره يې صحيح فرضوو.

د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د (1)لپاره یې ثبوتوو.

$$1=\frac{1(3\times 1-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو، د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو:

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)+\{3(n+1)-2\}=\frac{n(3n-1)}{2}+\{3(n+1)-2\}$$

$$S_n=\frac{3n^2-n+6n+2}{2}=\frac{3n^2+5n+2}{2}=\frac{3n^2+3n+2n+2}{2}$$

$$S_n=\frac{3n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$

$$S_n=\frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$

مثال: ثابت کړئ چه لاندې مساوات د هر طبعي (n)لپاره صحیح دی.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنی رابطه صحیح ده ځکه چه:

$$1^2=\frac{1}{6}\times 1(1+1)(2\times 1+1)=\frac{1}{6}(2)(3)=\frac{1}{6}\times 6=\frac{6}{6}=1$$

د (n) لپاره یې صحیح فرضوو. او د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$

$$S_{n+1}=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}=\frac{2n^3+4n^2+5n^2+10n+3n+6}{6}$$

$$S_{n+1}=\frac{2n^2(n+2)+5n(n+2)+3(n+2)}{6}=\frac{(n+2)(2n^2+5n+3)}{6}$$

$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(2n^2+2n+3n+3)}{6}=\frac{(n+2)\{2n(n+1)+3(n+1)\}}{6}$$

$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6}=\frac{1}{6}(n+1)\{(n+1)+1\}\{2(n+1)+1\}$$

ثابته شوه چه پورتنی مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحیح دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: ثبوت کړئ چه لاندی فارمول د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) \quad , \quad a \neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يي ثبوتوو.

$$a = \frac{a}{a-1}(a^1 - 1) = \frac{a(a-1)}{a-1} = a$$

د لپاره يي صحيح فرضوو.

د لپاره يي ثبوتوو.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + a^{n+1} = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) + a^{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^n - 1) + a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1} - a + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2} - a}{a-1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^{n+1} - 1)}{a-1} = \frac{a}{a-1}(a^{n+1} - 1)$$

تمرين

لاندي فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$

4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (n)^2 = \frac{1}{3} + n(2n-1)(2n+1)$

5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

6) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

7) $4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$

8) $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

9) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$

10) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \cdots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

11) $2 + 5 + 10 + \cdots + (n^2 + 1) = \frac{n(2n^2+3n+7)}{6}$

12) $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوارلسم فصل

فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وايي.

د فکتوریل علامه دا (!) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$$

قضيه: $0! = 1$ کيږي

ثبوت: پوهيږو چه که يو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسيم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس ته راځي. لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضيه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

په دغه قضيه کې بايد $k < n$ د n څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\binom{n}{n} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n-1} = n$ کیږي؟

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,\{n-(n-1)\}!} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!\cdot 1} = n$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ کیږي؟

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ کیږي؟

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,\{(n+1)-(n+1)\}!} = \binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ کیږي؟

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,\{n-(k-1)\}!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(k-1)!\cdot k(k+1)!\cdots n}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{(n-k)!\,(n-k+1)\cdots n}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{k(k+1)\cdots n}{(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\cdots n}{k!}$$

$$= \frac{k!\,\{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{k!\cdot\{k(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot\{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n\}}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1)\cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

د بینوم قضیه $Binomial\ Theorem$:

که چیرته (a) او b حقیقي عددونه او (n) یو طبعي عدد وي نو

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n \cdots 1$$

د ریاضي د استقراء پواسطه د پورتني قضیي ثبوت پورتنی قضیه د (1) لپاره ثبوتوو.

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = 1\cdot a^1 + 1\cdot b^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$$

د (n) لپاره یي صحیح فرضوو.او د $(n+1)$ لپاره یي ثبوتوو.

د (1) مساوات دواړه خواوې په $(a+b)$ کې ضربوو.

$$(a+b)^n(a+b) = (a+b)\left\{\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right\}$$

$$= \binom{n}{0}(a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1}(a^n b + a^{n-1}b^2) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k}\left(a^{n-k+1}b^k + a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}(ab^n + b^{n+1})\right)$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}a^n b + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}a^{n-1}b^2 + \cdots + \left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

که دغه مجموعه په $\sum$ وښیونو لیکو چه

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د دوه جمله يي د دعوی په اساس انکشاف ورکړئ.

$(x+y)^5$

$$(x+y)^5 = \sum_{n=1}^{5} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ کیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځلسم فصل

لیمیټ limit

انټروال $Interval$:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلې ته انټروال وايي.

انټروال په درې قسمه دي.

1- تړلی انټروال $Closed\ Interval$:

هغه انټروال دی چه د دواړو انجامو نقطې پکی شاملی وي.

او په غټو قوسو ښودل کیږي. لکه:

$$A = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,]$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي.

$$A = [x \epsilon IR/1 < x < 10]$$

2- نیم کښن انټروال $Half\ Open\ Interval$:

هغه انټروال دی چه د یوه انجام نقطه پکی شامله او د بل انجام نقطه پکی شامله نه وي. لکه:

$$A = [4, 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي. $A = [x \epsilon IR/4 \leq x < 14]$

3- خلاص انټروال $Open\ Interval$:

هغه انټروال دې چه د دواړو انجامو نقطې پکی شاملی نه وي. لکه:

$$A = (4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16)$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي.

$$A = (x \epsilon IR/4 < x < 16)$$

مجاورت $Vicinity$:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که یوه نقطه د یوه انټروال په وسطي نقطه کی واقع وي نو دا انټروال ددی نقطی متناظر مجاورت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه (1)د (5)او (3) متناظر مجاورت دی. په یوه مجاورت کې هره نقطه زیات متناظر مجاورتونه لري.

د لیمیټ تعریف:

$Kart\ weierstras$ کارت ویرس ترس انګلیسي ریاضیدان چه په (1897 – 1815) م سنه کې اوسېده دلیمیټ تعریف داسی کړېدی.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی هغه عدد دی چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعریف په ناحیه یو داسی مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصویر د تابع د لیمیټ په مجاورت کی شامل وي.

یعنی د $F(x)$ دتابع لیمیټ د (a) په نقطه کی (b) دی په دی شرط چه د (b) دهر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کی د (D) یو داسی مجاورت موجود وي چه د(D) دهر عنصر تصویر په (N)کی شامل وي. او داسی لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع لیمیټ د $x \to 1$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x+3) = 5\cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د لیمیټ ثبوت په دوه طریقو کیږي.

1- د جدول پواسطه 2- د مجاورت په طریقه

1- د جدول په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

(x) ته د دواړه خواوڅخه قیمتونه ورکوواو د (y) قیمتونه پیدا کوو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-12	-7	-2	3	8	13	16	23	28

دپورته جدول څخه معلومیږي چه (x)ته په هره اندازه چه (1) ته نژدی قیمت ورکړشي په همغه اندازه د (y)قیمت (8) ته نژدی کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

د تابع لیمیټ (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N = (8-\varepsilon, 8+\varepsilon)$$

د (D) د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کې لیکو

$$8-\varepsilon < 5x+3 < 8+\varepsilon$$
$$8-\varepsilon-3 < 5x < 8+\varepsilon-3$$
$$5-\varepsilon < 5x < 5+\varepsilon$$
$$\frac{5}{5}-\frac{\varepsilon}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{5}{5}+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$1-\frac{\varepsilon}{5} < x < 1+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$D = \left(1-\frac{\varepsilon}{5}, 1+\frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5 = \frac{1}{2}\right)$ قیمت ورکوو.

$$N = \left(8-0.5, 8+0.5\right)$$
$$N = (7.5, 8.5)$$
$$D = \left(1-\frac{\frac{1}{2}}{5}, 1+\frac{\frac{1}{2}}{5}\right) = \left(1-\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}\right) = (0.9, 1.1)$$
$$D = (0.9, 1.1)$$
$$\lim_{x\to 0.9}(5x+3) = 5\times 0.9+3 = 7.5$$
$$\lim_{1.1}(5x+3) = 5.5+3 = 8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کې د تابع لیمیټ دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x\to 1}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 2$ کېږي؟

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$$
$$2-\varepsilon < 3-\frac{1}{x} < 2+\varepsilon$$
$$2-3-\varepsilon < -\frac{1}{x} < 2-3+\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1-\varepsilon<-\frac{1}{x}<-1+\varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)}>-x>\frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon}<x<\frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D=\left(\frac{1}{1+\varepsilon},\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon=\frac{1}{4}$$

$$N=(2-\varepsilon,2+\varepsilon)=\left(2-\frac{1}{4},2+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$$

$$D=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}},\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=\left(\frac{1}{\frac{5}{4}},\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)=\left(\frac{4}{5},\frac{4}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{5}}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3-\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{1}-\frac{5}{4}=\frac{12-5}{4}=\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3-\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{1}-\frac{3}{4}=\frac{12-3}{4}=\frac{9}{4}$$

د ليميټ د استعمال ځايونه *Utilization of limit*:

اسحق نیوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لايبنز (Leibniz) په (1646 -1716) م کالونو کې د ليميټ پواسطه د انتيګرال او ديفرينسيال مسايل حلول يعنی دليميټ داستعمال ډېر مهم ځايونه د ديفرينسيال اوانتيګرال د مسايلو حلول دي. او هم د مشتق تعريف دليميټ څخه په غير ناممکن دی.

ارشميدس د دايری دمحيط د اندازه کولو لپاره داسی محاطي مضلعګانی په دايره کی رسمولی چه ضلعی يي بی اندازه کوچنی وي په دی ترتيب يي د (2π) تقريبي قيمت پيداکړ نوموړي هم د ليميټ د استعمال څخه استفاده کړی وه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیټ پیدا کړو.نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ دتابع لیمیټ د $(x \to 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(5x-8) = 5\times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیټ $(x \to -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیټ په $x \to 3$ کی پیداکړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\left(4 - \frac{5}{x+2}\right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

دصفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیټ پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع دلیمیټ پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی يي لیمیټ همدغه ثابت عدد دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$

که په تابع کی ثابت عدد نه ؤ لیمیټ يي په صفر کی صفر دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیټ:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت اومخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیټ يي په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب: چه په صورت کې ثابت عدد وي او په مخرج کې نه وي لیمیټ یې په صفر کې لایتناهي دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-4x+7}{2x^2-3x}=\frac{7}{0}=\infty$$

ج: چه په صورت کې ثابت عدد نه وي او په مخرج کې وي لیمیټ یې په صفر کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{2x^2+7x-11}=\frac{0}{-11}=0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کې ثابت عدد نه وي دلته بیا څو حالتونه موجود دي.

a- چه دصورت اومخرج دټیټ حد درجې مساوي وي لیمیټ یې په صفر کې د کوچني توان حدو دضریبونسبت دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3-6x^2+12x}{5x^3+3x^2-6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2-6x+12)}{x(5x^2+3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2-6x+12}{5x^2+3x-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

b- چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج د ټیټ حد د درجې څخه ډیره وي لیمیټ یې په صفر کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^4+5x^3-4x^2}{8x^3-4x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(11x^3+5x^2-4x)}{x(8x^2-4x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^3+5x^2-4x}{8x^2-4x-3}=\frac{0}{-3}=0$$

چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج دټیټ حد د درجې څخه کمه وي لیمیټ یې په صفر کې (∞) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+5x^2-4x}{2x^4+2x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2+5x-4)}{x(2x^3+2x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+5x-4}{2x^3+2x^2+5x}$$

$$=\frac{-4}{0}=-\infty$$

په (∞) کې د يوی تابع ليميټ:

په (∞) د يوې تابع ليميټ په دوه حالته کې مطالعه کوو.

الف: په (∞) کی د تامی تابع ليميټ: د تامی تابع ليميټ په (∞) کی (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(3x^3-7x^2+7x-17)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}-\frac{17}{\infty^3}\right)=\lim_{x\to\infty}3x^3=3\cdot\infty^3=\infty$$

ب: په (∞) کی د کسري تابع ليميټ: د کسري تابع ليميټ په (∞) کی په دری حالته کی مطالعه کوو.

a- که دکسر د صورت درجه دمخرج د درجی څخه ډېره وه ليميټ يي په (∞) کې (∞)دي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x^2+6x-30}{2x^2+5x-21}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{21}{x^3}}=\frac{7-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{21}{\infty^3}}=\frac{7}{0}=\infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجی سره مساوي وي نوليمټ يي په (∞) کی د لوړ توان والاحدود ضريبو نسبت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-8x^2+6x-30}{2x^3+5x^2-21x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{8-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{2+\frac{5}{\infty}-\frac{21}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}=\frac{8}{2}=4$$

c- که د کسر دصورت درجه دمخرج د درجې څخه کمه وي لیمیټ یې په (∞) کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-8}{x^3+2x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

د لیمیټ قضیې *Theorms of limit*:

اوله قضیه:

د ثابتې تابع لیمیټ په یوه نقطه کې په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_{3}12=12$$

دویمه قضیه:

د یوه عدد او یوې تابع د حاصل ضرب لیمیټ د تابع د لیمیټ او ثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=kb$$

مثال:

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}6x^2=6\lim_{x\to2}x^2=6\times2^2=24$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریمه قضیه:

ددوه تابعګانو د مجموعی لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=b+c$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2+7x^3)=\lim_{x\to 2}5x^2+\lim_{x\to 2}7x^3$$
$$(5\cdot 2^2+7\cdot x^3)=5\cdot 2^2+7\cdot 2^3$$
$$(5\cdot 4+7\cdot 8)=5\cdot 4+7\cdot 8$$
$$(20+56)=20+56$$
$$(76)=76$$

 څلورمه قضیه:

ددوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot h(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}h(x)=b\cdot c$$

مثال:

$$\lim_{x\to -1}(x-1)^2=\lim_{x\to -1}(x-1)\cdot\lim_{x\to -1}(x-1)$$
$$=(-1-1)^2=(-1-1)\cdot(-1-1)$$
$$(-2)^2=(-2)(-2)\Rightarrow 4=4$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b}{c}$$

$$\left(\lim_{x\to a}g(x)=c\neq 0\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

شپږمه قضیه:

د یوی جذري تابع لیمیټ په یوه نقطه کی دتابع دلیمیټ دجذر سره مساوي دی په همغه نقطه کې:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^6}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}8x^6}=\sqrt[3]{8\cdot 2^6}=2\cdot 2^3=16$$

بې نهایت کوچنی تابع: که د یوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی صفر شي دی تابع ته بی نهایت کوچنی تابع وایي. لکه:

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

تبصره :

a- د بی نهایت کوچنی تابع ګانو مجموعه یوه بی نهایت کوچنی تابع ده.

b- د بی نهایت کوچنی تابعګانو دضرب حاصل هم یوه بی نهایت کوچنی تابع ده.

c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x\to a$ په صورت کی یوه بی نهایت کوچنی تابع وي نو:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$$

d- که چېرې $\varepsilon(x)$ یوه بی نهایت کوچنی تابع وي او $u(x)\neq 0$ وي نو $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یوه بې نهایت کوچنی تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کی د $\lim_{x\to 3}(x^2-9)$ تابع لیمیټ پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=3^2-9=9-9=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\varepsilon(x) = \frac{1}{2x}$ تابع لیمیټ په $x \to \infty$ کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\cdot\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

1- د $lim_{x\to a} f(x) = b$ ثبوت:

$\lim_{x\to a} f(x) = b + \varepsilon(x)$ فرضوو او دا چه $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ دي نو:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

2- د $\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x\to a} f(x_1) + \lim_{x\to a} f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x\to a} f(x_1) = b_1 + \varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} f(x_2) = b_2 + \varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = \lim_{x\to a} f(x_1) + \lim_{x\to a} f(x_2) = \{b_1 + \varepsilon_1\} + \{b_2 + \varepsilon_2\}$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2 + \{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\}$$
$$\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2\} = 0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1) + f(x_2)\} = b_1 + b_2$$

3- د دوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو دحاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = b_1 + \varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} g(x) = b_2 + \varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x) = (b_1 + \varepsilon_1)(b_2 + \varepsilon_2)$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = b_1 b_2 + b_1\varepsilon_2 + b_2\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_1\cdot\varepsilon_2 = 0 \quad \& \quad b_2\varepsilon_1 = 0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\} = b_1 b_2$$

4- د دوه تابعګانو د نسبت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټود نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g\,(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

ثبوت:

$$f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$=\frac{b_1b_2+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1+b_1b_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چه ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه دي نوصفر کيږي. نو ثابته شوه چه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د ساندويچ قضيه:

که $g(x), f(x)$ او $h(x)$ درې تابعګانې ولرو چه $f(x)\le g(x)\le h(x)$ وي که:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$$

نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ کيږي.

مثال: که $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\le u(x)\le\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو ؟ $=\lim_{x\to 0}u(x)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=1=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نودسانډويچ د قضيې سره سم د $u(x)$ قيمت پيدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to a} u(x)=1$$

تمرين:

لاندې ليميټونه حل کړئ؟

1- $\lim_{x\to0}(x^2-2x^2+5x+3)$

2- $\lim_{x\to-1}(x^2-2x-5)$

3- $\lim_{x\to0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4- $\lim_{x\to0}\frac{3x^3-4x^2+7x-14}{2x^2-11x+7}$

5- $\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^2-21x}{3x^3+5x^2+7x}$

6- $\lim_{x\to0}\frac{5x^3-4x^2}{7x^2-3x}$

7- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-3}{2x^2-3x+1}$

8- $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+5}{3x-1}$

9- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-11}{2x^3+3x^2-4x+7}$

10- $\lim_{x\to\infty}(4x^3-3x^2+4x-12)$

11- $\lim_{x\to3}\frac{3x^2-3x+7}{1+\frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x\to4}\left(\frac{x-3}{x-5}+\frac{x}{x+5}+\frac{x+4}{x}\right)$

اتمه قضيه:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

په داسې حال کې چه (n) يو طبيعي عدد او (a) يو حقيقي عدد دي.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}x^{n-1}+a\lim_{x\to a}x^{n-2}+a^2\lim_{x\to a}x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}\lim_{x\to a}x+\lim_{x\to a}a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه قضيه د ټولو جذري افادو د ليميټ د پيدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}{x-a}=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}a^{\frac{-(n-1)}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=?$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1-5}{5}}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x=y^6)$ او $a=b^6$ ښيو:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{y\to b}\frac{\sqrt[3]{y^6}-\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6}-\sqrt{b^6}}=\lim_{y\to b}\frac{y^2-b^2}{y^3-b^3}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{(y-b)(y+b)}{(y-b)(y^2+by+b^2)}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{y+b}{y^2+by+b^2}=\frac{b+b}{b^2+b^2+b^2}=\frac{2b}{3b^2}=\frac{2}{3b}$$

$$\therefore\quad b^6=a\quad\because\quad b=\sqrt[6]{a}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ابهام $Uncertainty$:

په اعدادو یا (∞) باندی دعملیو دنتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومي ته ابهام وائي.

مبهم اشکال په لاندی ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړیو شکلو یعنی $\left(\infty-\infty\ ,\ 0\cdot\infty\ ,\ \frac{0}{0}\ \frac{\infty}{\infty}\right)$ ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئي پواسطه

4- د لوهسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه دِ ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کی د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی ابهام منځ ته راشي صورت او مخرج په هغه متحول ویشو چه درجه یي لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{3}$$

2- د تجزیي پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی مبهم شکل غوره کړي او د تجزیي وړ وي تجزیه کوو یي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$
$$\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-6\cdot 2+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)-4(x-2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د یوی تابع ابهام د تقسیم او تجزيي پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی يي ضربوو.

مثال:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}^2-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2 - 4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)$$

$$= \sqrt{3+1}+2$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{10x-4x^2-4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+10x-4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+2x+8x-4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\{-2x(2x-1)+4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2\cdot 2-1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\left(1^{\infty}،\infty^{0}،0^{0}\right)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ کار اخيستل کيږي. چه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

د $e = 2.718281828$ عدد د يوه جرمني عالم ايولر $Euler$ پواسطه کشف شوېدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ايولر د فارمول شکل ته ورواړوؤ نو $\frac{1}{\alpha}$ په x ښيو:

$$x=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\because\ \ \alpha\to 0\quad\therefore\ \ x\to\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u=\frac{\alpha}{x}\quad\Rightarrow\ \therefore\ \ x\to\infty\quad\because\quad u\to 0\ \ \Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}}=\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u}=x\Rightarrow u=\frac{1}{x}\quad\therefore\ \ u\to 0\quad\because x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}ln(1+x)\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\frac{1}{x}=u\Rightarrow x=\frac{1}{u}\qquad \therefore\ x\to 0\quad \because\ u\longrightarrow\infty$$

$$=ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=ln\left\{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\}=lne=1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

د سوال د حل لپاره (e^x-1) په (y) ښیو:

$$e^x-1=y\Rightarrow e^x=1+y\Rightarrow \ln e^x=\ln(1+y)=x\ln e=\ln(1+y)$$

$$x=\ln(1+y)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=x\Rightarrow y=\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y\to 0\quad \because\ x\to\infty$$

$$=\frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$$

تبصره:

که یوه تابع د $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د لیمیټ د لاس ته راوړلو لپاره یې طبعي لوګاریتم نیسو او د پورتنیو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل یې لرلو د $(0\cdot\infty)$ شکل ته ئي را اړوو او د مخکینیو څلورو حالتو څخه چه په هر حالت ئي ابهام د منځه تللو ابهام ئي د منځه وړو.

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\ln\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}\{g(x)\ln f(x)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مبهم شکل عمومي حالت :-که $\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = 1^{\infty}$ وي په دې حالت کې (α) په $(u-1)$ ښیو:

$$(\alpha = u-1)$$

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}(1+u-1)^{\frac{v}{u-1}\cdot u-1} = \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\cdot\alpha}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چه $(\alpha = u-1)$ دی نو که $(u\to 1)$ وګړي په نتیجه کې $(\alpha\to 0)$ کوي په نتیجه کې لیکو چې:

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = \left\{\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)} = e^p$$

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = e^p \qquad , \qquad p = \lim_{x\to a}\{v(u-1)\}$$

1- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 1+\frac{2}{x} \quad , \quad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p \quad , \quad p = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left(1+\frac{2}{x}-1\right)\right\} = \lim_{x\to a} x\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p = e^2$$

2- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبه کړئ؟

حل: لمړی د لیمیټ بڼه لیکو:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p$$

$$p = \lim_{x\to a} v(u-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(1+\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}=e^{p}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{p}$$

$$p=\lim_{x\to 0}\{v(u-1)\}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}(\cos x-1)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=1\cdot\frac{0}{1}=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{p}=e^{0}=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{4}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{8}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{4}{1}=4$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cos 2x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x$$

$$=-2\cdot 1\cdot 0=0$$

مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=?$

حل:

$$x-1=y\Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=u\Rightarrow y=\frac{1}{u}\qquad\therefore\ y\to 0\quad\because\quad u\to\infty$$

$$\frac{1}{\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}=e$$

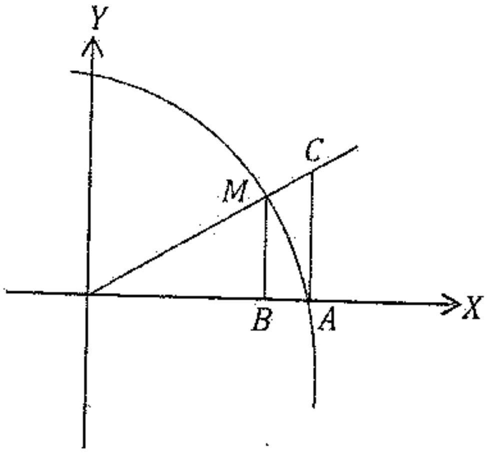
د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ *limit of Trigono metrical Functions*:

د يوې زاويې د ساين او هغه زاويې د نسبت لیمیټ په صفر کی (1) دې. يعنې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسموو اوهم ددی مثلثو تر منځ یوه قطاع په نظر کی نیسو. مساحتونه ئي پیدا کوو او مقایسه کوو یې.



$$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{MB} < \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\widehat{AM} < \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}$$

$$\overline{OB} = \cos x \quad , \quad \overline{MB} = \sin x \quad , \quad \overline{OA} = 1 \quad , \widehat{AM} = x$$

$$\sin x\cos x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x\to 0}\cos x$$

د سانډویچ د قضیې سره سم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=?$

حل:

$$2x=\alpha \Rightarrow x=\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore\ x\longrightarrow 0 \qquad \because\ \alpha\longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot1=2$$

2- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{5\tan 2x}{7x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{5\cdot 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

3- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2sin^2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-1+2sin^2x}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2sin^2x}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\sin x=2\cdot1\cdot0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{\frac{3x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to0}\cos 3x}}{5x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

5- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}$$

$$2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

6- مثال: $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-1-cosx+1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-cosx}$$

$$=\sqrt{2(1^2)-1}=\sqrt{2\cdot 1-1}=\sqrt{2-1}=1$$

د تابعګانو متماديت (اتصال):

د اتصال له مخې تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع 2- غیر متمادي تابع

1- متمادي تابع :

هغه تابع ده چه دګراف د ترسیم په وخت کې یې د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنی ګراف یې پریکړون نه لري.په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپوننشل تابع، لوګاریتمي تابع، د ساین او کوساین تابعګانې متمادي تابعګانی دي په دې شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلې نه وي .

2- غیر متمادي تابعګاني:

هغه تابعګانی دي چه ګراف یې څو توټې وي. لکه هوموګرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکېنټ او کوسیکېنټ تابعګانې.

کولای شو چې متمادي تابګانی په غیرمتمادي تابګانو بدلی کړو مګر نشو کولای چې غیر متمادي تابعګانی په متمادي تابعګانو بدلې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادیت شرطونه:

د متمادیت شرطونه دری دي ـ

1- د (a) نقطه باید په $\lim_{x\to a} f(x)$ کی شامل وي.

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیټ په یوه نقطه کی باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

که پورتني دری واړه شرطونه په یوه تابع کی موجود وه تابع متمادي ده او که د دغه دريو شرطو څخه یو یکی موجود نه و تابع متمادي نه ده غیرمتمادي ده.

1- مثال: وښیاست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \to 2$ په نقطه کی متمادي ده.

حل:

1- $2\epsilon dom f(x) \because 2 \in IR$

2- $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

3- $f(2) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادي ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $(x = -1)$ په ټکي کی وڅیړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په (-1) کې صفر کيږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفر کوي د تابع د تعریف په ناحیه کی شامل نه دی$(-1 \notin dom f(x))$ نو تابع متمادي نه ده

د تابع د لیمیټ شرطونه :که دیوی تابع د ښي لاس لیمیټ د تابع دچپ لاس د لیمیټ سره مساوي وي نوتابع لیمیټ لري. اوکه د ښي لاس لیمیټ د چپ لاس د لیمیټ سره مساوي نه ؤ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دښي لاس لیمیټ :

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د ښي لاس لیمیټ دې په دې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(a, a+\delta)$ یو خلاص انټروال موجود وي چه د دې انټروال د هر عنصر تصویرد (N) په مجاورت شامل وي او داسې لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to a+} f(x)$$

د چپ لاس لیمیټ:

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د چپ لاس لیمیټ دې پدې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(-\infty - a, a)$ یو انټروال موجود وي چه د دې مجاورت د هر عنصر تصویرد (N) په مجاورت کې شامل وي او داسې لیکل کیږي.

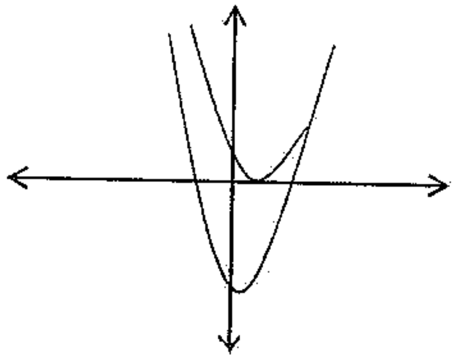
$$\lim_{x\to a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \quad x < 2 \\ x^2 - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x^2 - 3) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \exists$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; & x\geq 1\\ 1-x & ; & x<1\end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې يې متماديت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}(2x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x\to 1} f(x)=\nexists$ تابع ليميټ نه لري.

نو تابع د $(x=1)$ په نقطه کې غير متمادي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x=a)$ په نقطه کې متمادي وي او $f(x)$ په $(x=g(a))$ کې متمادي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x=a)$ کې متمادي ده.

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(g(a))$$

2- د يوې طاقت لرونکې تابع د ليميټ د پيدا کولو لپاره لمړی د تابع ليميټ پيدا کوو او بيا يې په همغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{a}=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^{a}$$

3- د اکسپونشل تابع د ليميټ د پيدا کولو لپاره قاعده د تابع د توان د ليميټ په توان ليکو.

$$\lim_{x\to a}(b)^{f(x)}=b^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

4- د لوګاريتمي تابع ليميټ په يوه نقطه کې د تابع د ليميټ د لوګاريتم سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\log_b f(x)=\log_b \lim_{x\to a} f(x)$$

5- د يوې مثلثاتي تابع ليميټ په يوه نقطه کې د هغه تابع د ليميټ د مثلثاتي نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin \lim_{x\to a} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابعګانو خواص:

که د دوه تابعګانو څخه هره یوه په یوه نقطه کی متمادي وي نو ددوی مجموعه ،تفاضل ، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کی متمادي دی.

مثال : که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعګاني متمادي وي نو ثبوت کړئ چې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$ هم متمادي دي.

حل:

$$1: Df(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$
$$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

$$1: Dg(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$$
$$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کی متمادي ده.

اوس د تابعګانو دمجموعی او حاصل ضرب متمادیت څېړو.

الف:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$
$$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$$
$$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$$
$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = f(1) + g(1) = 6$$

ب: د او تابعګانو دحاصل ضرب متمادیت وڅېړئ؟

$$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$$
$$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

د تابعګانو حاصل ضرب هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين

د لاندې تابعګانو ليميټ پيدا کړئ؟

1: $\lim_{x\to\infty}(x^2 - 2x + 17)$

2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 6x + 3}{x + 1}$

3: $\lim_{x\to 1}(x^3 + 5x^2 - 11x + 1)$

4: $\lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاړلسم فصل

مشتق

مشتق مفعوله صیغه ده د اشتقاق څخه اخیستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کی د مصدر څخه د نورو افعالو اواسماؤ اخیستلو ته اشتقاق وایي. د مشتق څخه مقصد د دوه یمی درجی ،دریمی درجی اوداسی نورو تابعګانو د میل پیدا کول دي.

د خطي تابع میل:

په خطي تابع کی د مستقیم خط میل د $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ پواسطه پیدا کیږي.

مثال: $A(3,7)$ او $B(5,9)$ د مستقیمی کرښی دوه نقطی دي میل یې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-7}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنګه چه په منحني خطو کی دوه نقطی په یوه استقامت واقع نه وي نو له همدی امله دمنحني خطو دمیل د پیدا کولو لپاره د مستقیم خط د میل څخه استفاده کوي.نو ځکه د منحني میل ته مشتق وایي.

مثلاً $f(x) = x^2$ یوه تابع راکړشوی ده د میل ددغه تابع د ګراف دوه نقطی په یوه استقامت وجود نلري نو په تقریبي ډول دوه نقطی پیداکواو میل یې لاسته راوړو فرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ دمنحني خط دوه نقطی دي نود مستقیم خط د میل څخه استفاده کوونو لیکو چه:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحني خط دهری اختیاري نقطی میل عبارت $\lim_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د ګراف میل د $P(3,-3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چې د $P(3,-3)$ په نقطه کې $x=3$ دی نو کولای شو چه د میل په فارمول کې د (x) په عوض (3) وضع کړو.

$$m=\lim_{x\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)-(3+h)^2-(2\cdot 3-3^2)}{h}$$
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{6+2h-(9+6h+h^2)-6+9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h-9-6h-h^2+9}{h}$$
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{h(-4-h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-4-h)=-4\Rightarrow m=-4$$

2- مثال: د $f(x)=x^3-1$ د تابع میل د $(x=-3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$m=\lim_{x\to -3}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h}=\lim_{x\to -3}\frac{\{(-3+h)^3-1\}-\{(-3)^3-1\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-27+27h-9h^2+h^3-1+27+1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^3-9h^2+27h}{h}$$
$$m=\lim_{h\to 0}\frac{h(h^2-9h+27)}{h}=\lim_{h\to 0}(h^2-9h+27)=27$$

منحني یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعني:

$$S=f(t)$$

د t_1 او t_2 په وختونو کې د وهل شوو فاصلود تفاضل او وختو د تفاض نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وایي. یاداچه دتابع اومتحول دزیادت نسبت ته متوسط سرعت وایي.

$$\acute{v}=\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیټ ته لحظوي سرعت وایي

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کې متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که (x) د (Δx) په اندازه زیادت وکړي نو (y) د (Δy) په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیټ ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنی تصور پییري فرماټ (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 – 1665)م کې کړی ؤ نوموړي خپلی لیکلنی د نړی ریاضیدانانو ته پېشنهاد کړلی. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 – 1727)م او جورج ویلیم لایبنز(1664 – 1715)م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کی ثابت او د ساینسدانانو کمیسون ته یي پېشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یي په ډېر ښه ډول وکړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق تعريف:

د صفر په نقطه کې د تابع اومتحول د زيادت دنسبت ليميټ ته مشتق وايي. لکه $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
او په $f'(x)$ يا y' ، $\frac{df}{dx},\frac{dy}{dx}$ ښودل کيږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

1- مثال: د $f(x)=2x$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

2- مثال: د $f(x)=x^3$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2\quad\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

3- مثال: د $f(x)=\sqrt{x}\,;\,x\geq 0$ مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق د تعریف په مرسته وڅېړئ؟

حل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(2x^2+x)}{\Delta x}$$

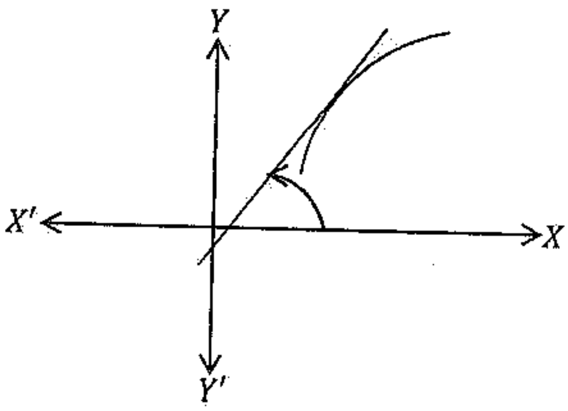
$$\lim_{\Delta\to x0}\frac{2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+x+\Delta x-2x^2-x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(4x+2\Delta x+1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x+1)=4x+1 \qquad \Rightarrow f'(x)=4x+1$$

د مشتق هندسي تعبير

په یوه نقطه کې د یوه منحني خط مېل دهغه زاویي تانجانت دی چه مستقیمه کرښه یي د (XX') د محور دمثبت جهت سره جوړوي.



1- مثال: د هغه مماس مېل او معادله پیدا کړئ چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني باندې د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمیږي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m = \acute{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{2(x+\Delta x)^3 - 1\} - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس مېل 6 $m = \acute{f}(x) = \acute{f}(1) = 6(1)^2 = 6 \cdot 1 = 6$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \quad \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس مېل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې اوخصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\acute{f}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع مشتق د (x_0) په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x_0)$$
$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{{x_0}^2} \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = -\frac{1}{{x_0}^2}$$

5- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\{4(x + \Delta x)^2 - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3 - 4x^2 + 3}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x}$$
$$\acute{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(8x + 4\Delta x) = 8x$$

تمرین:

د لاندې تابعگانو مشتق پیدا کړئ؟

1- $f(x) = \sqrt{x+1}$ 2- $f(x) = \frac{x^2-5}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$ 4- $f(x) = \frac{2}{x^2+5x-7}$

5- $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 6- $f(x) = 5x - 1$

د مشتق قوانين:

اوله قضيه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض: $y = c$ يوه تابع لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $\acute{y} = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \quad \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

د يوې طاقت لرونکی تابع مشتق:

مفروض: $y = f(x) = x^n$ يوه طاقت لرونکی تابع ده.

مطلوب: ثبوتوو چه $\acute{y} = \acute{f}(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\acute{y} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$
$$\acute{f}(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{f}(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{f}(x) = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3}\cdot x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3\cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعګانو د مجموعی مشتق د تابعګانو دمشتقو د مجموعی سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $\acute{y} = \acute{u} + \acute{v}$

ثبوت: د تابعګانو د جمع حاصل په (y) ښیو:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = \acute{u} + \acute{v}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق د تابعګانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$

ثبوت: د (u) او (v) تابعګانو تفاضل په (y) ښیو.

$$y = u - v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$
$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \qquad \& \qquad v = 1$$
$$\acute{u} = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$
$$\acute{v} = 0 \qquad \because\ \acute{y} = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2 \ , \quad v = -3x \ , \ w = 5$$
$$\acute{y} = \acute{u} + \acute{v} + \acute{w}$$
$$\acute{y} = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$
$$\acute{y} = 8x - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولی تابع مشتق ضرب دویمه تابع جمع د دویمې تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.او د حاصل ضرب تابع یي په (y) ښیو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب : ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$
$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = v\acute{u} + \acute{v}u + 0 \cdot \acute{v}$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \acute{u} = 3x^2$$
$$v = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3x$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$
$$\acute{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$
$$\acute{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$u = 2x^2 - 5x + 7 \quad \Rightarrow \acute{u} = 4x - 5$

$v = 3x - 15 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$

$\acute{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$

$\acute{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$

$\acute{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$

د حاصل تقسیم مشتق:

د دوه تابعگانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی دصورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندی.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعگانی لرود خارج قسمت تابع يې په (y) ښيو. نو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y = \frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$u = 2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{u} = 3$

$v = 1 - 2x \quad \Rightarrow \acute{v} = -2$

$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$

$$\acute{y} = \frac{3(1-2x) - \{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2} = \frac{3 - 6x + 4 + 6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x) = \frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$u = 7x - 15 \quad \Rightarrow \acute{u} = 7$

$v = 2x^2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{v} = 4x + 3$

$$\acute{f}(x) = \frac{7(2x^2+3x) - (4x+3)(7x-15)}{(2x^2+3x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{14x^2 + 21x - 28x^2 + 60x - 21x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$

$$\acute{f}(x) = \frac{-14x^2 + 60x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$

3- مثال: د $y = \frac{x^2}{3x+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$

$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$

$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}$$

$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$

$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$

$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

$$\acute{y} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه يې دوه وي. لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق يې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع .

فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ يوه تابع راکړ شوی ده.

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$
$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$
$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\acute{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال:- د $y = \sqrt{x}$ مشتق پيدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$\acute{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$
$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$
$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$
$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$
$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$
$$= \frac{\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}\right]\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}\right]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$
$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$
$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: د $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{6x^2-6x+4}{2\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}}$$

د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول يې د بل متحول تابع وي يا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وايي.لکه که د f تابع د $g(x)$ تابع وي او g د x تابع وي نودغه تابع ته مرکبه تابع وايي.

د مرکبې تابع د مشتق دفارمول د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

$$\Delta y=\Delta y\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\acute{y}_{(x)}\Rightarrow\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\acute{y}_{(u)}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\acute{u}_{(x)}$$

$$\acute{y}_{(x)}=\acute{y}_{(u)}\cdot\acute{u}_{(x)}$$

نو په دې اساس که $y=u^n$ وي مشتق يې $\acute{y}=nu^{n-1}\cdot\acute{u}$ دی.

او که $y=\sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$\acute{y}=\frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال :

$$y = (2x^2 - 1)^3$$
$$\acute{y} = 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x$$
$$= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x$$
$$\acute{y} = 48x^5 - 48x^3 + 12x$$

2- مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3- مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \acute{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

څلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$$\acute{y} = -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x$$
$$= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$$

نوټ:

که د (f) تابع د (x_0) په نقطه کې مشتق ولري نو $\acute{f}(x)$ دهغه مماس میل دی چه د $[x_0, f(x_0)]$ په نقطه په منحني باندې مماس وي.

مثال: د $f(x) = x^3$ دتابع میل د $x_0 = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کیږي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو مېل یې عبارت دی.

$$\acute{f}(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کی د مشتق وړ وي نو دا تابع په دی نقطه کی متمادي ده مګر ممکن یوه تابع په یوه نقطه کی متمادي وي مګر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ دتابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ

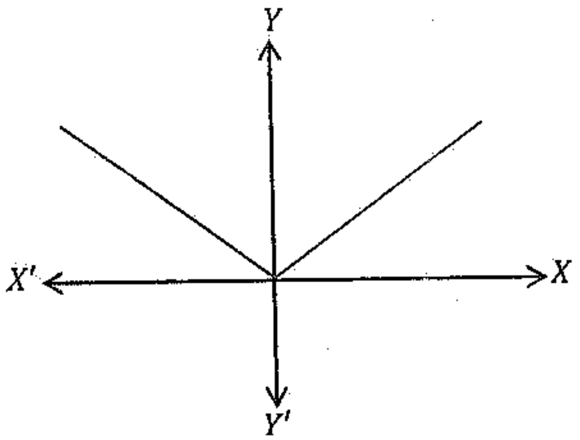
$$\acute{f}(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\acute{f}(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \neq \lim_{x\to 0-} f(x)$$

لیمیټ نلري نو مشتق هم نلري.

$f(x) = |x|$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$= 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$
$$\acute{y} = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او (u) د (x) تابع وي نو مشتق يي عبارت دی له:

$$\acute{f}(x) = \acute{u}\cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پيدا کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin 4x \\ u = 4x &\Rightarrow \acute{u} = 4 \\ \acute{f}(x) &= \acute{u}\cos u \end{aligned}\right| \qquad \acute{f}(x) = 4\cos 4x$$

2- مثال :- د $f(x) = x^3\csc x$ تابع مشتق پيدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$
$$g(x) = x^3 \Rightarrow \acute{g}(x) = 3x^2$$
$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \acute{h}(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x\csc x$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x\csc x)$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3\cot x\csc x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3-مثال: د $y=\frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u=\sin x \Rightarrow \acute{u}=\cos x$$
$$v=1+x \Rightarrow \acute{v}=1$$
$$\acute{y}=\frac{\cos x(1+x)-1\cdot\sin x}{(1+x)^2}$$

د $y=\cos x$ تابع مشتق:

د $y=\cos x$ تابع مشتق $\acute{y}=-\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y=\cos x$$
$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$
$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\Delta y=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$
$$y=\cos x\Rightarrow \acute{y}=-$$

پورتنی مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$sin^2x+cos^2x=1$$
$$\cos x=\sqrt{1-sin^2x}=(1-sin^2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\cos x)'=\frac{1}{2}(1-\sin^2x)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin x\cos x)=\frac{-2\sin x\cos x}{2(1-sin^2x)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{cos^2x}}$$
$$=-\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=-\sin x$$

1-مثال: $f(x)=\sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = \acute{u}v + \acute{v}u$

$\acute{f}(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$

$\acute{f}(x) = 2(cos^2x - sin^2x) = 2\cos 2x$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$y = x \Rightarrow \acute{y} = 1$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$

$\acute{f}(x) = 1 - (cos^2x - sin^2x) = 1 - \cos 2x$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$\acute{f}(x) = 2(2\sec 2x \tan 2x + 2sec^2 2x) = 4\sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$

د $y = \tan x$ تابع مشتق:

$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$

$\acute{y} = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$

څلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$u = \cos x \Rightarrow \acute{u} = -\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$v = \sin x \ \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{sin^2 x} = \frac{-(sin^2 x + cos^2 x)}{sin^2 x}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{sin^2 x} = -csc^2 x \qquad \therefore \quad co\acute{t}gx = -csc^2 x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$u = 1 \ \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \cos x \ \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{cos^2 x} = \frac{\sin x}{cos^2 x}$$

$$\acute{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$u = 1 \ \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \sin x \ \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{sin^2 x} = \frac{-\cos x}{sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x}$$

$$\acute{y} = -\cot x \csc x \ v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه تابع کی څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کی وي نو کله چه د دغه ډول تابعګانو مشتق پیدا کوو نو په نوبت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

لمړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کی پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $\acute{y}_{(x)} = \frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ رابطی څخه پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_{(x)} - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_x - (1)_x = 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = \acute{y}_y - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_y - (1)_y = 1 - \frac{x}{1}\cos\frac{x}{y} - 0 = 1 - x \cdot \cos\frac{x}{y}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کی د (x) او (y) قیمتونه وضع کووچه $\acute{y}(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$\acute{y}_{(\pi.1)} = \frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1 + \pi\cos\frac{\pi}{1}} = \frac{\cos\pi}{1 + \pi\cos\pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطی ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{f}_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$\acute{f}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = -2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دپورتني تابع ضمني مشتق په لاندې ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5\acute{y} - \acute{y} - 2x = 0$$

$$\acute{y}(6y^5 - 1) = 2x$$

$$\acute{y} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق:

که يوه دويمه درجه دوه مجهوله تابع راکړشوې وي او وغواړو چه دويم ضمني مشتق يي پيدا کړو نو اول ضمني مشتق يي د فارمول پواسطه پيدا کوو.او بيا د مشتق دفارمولو پواسطه دويم ضمني مشتق پيدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دويم ضمني مشتق پيدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\acute{f}_{(x)} = 2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = -2y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\acute{y}_{(x)}$ د رابطی $y''_{(x)}$ پیدا کوو

$$y''_{(x)} = \frac{\acute{x}y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = -\frac{1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کی د (y) مشتق نظر (x) ته د $(1,1)$ په ټکي کی پیدا کړئ او د منحني د مماس معادله پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = 2x + y$$
$$\acute{f}_{(y)} = x + 2y$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad \Rightarrow x + 2y \neq 0$$
$$\acute{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2\cdot 1 + 1}{1 + 2\cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1\cdot(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلی ضمني مشتق په لاندی ډول هم پیدا کولای شو.

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$
$$2x + y + x\acute{y} + 2y\acute{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\acute{y} = 0$$
$$\acute{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$
$$\acute{f}_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$
$$\acute{f}_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د يوی تابع دويم ،دريم، څلورم ··· او نور مشتقات ونيسو ترڅو چه مشتق يي صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دريم مشتق ونيسئ؟

حل:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$

$$f'_{(x)} = 3x^2 - 6x + 4$$

$$f''_{(x)} = 6x - 6$$

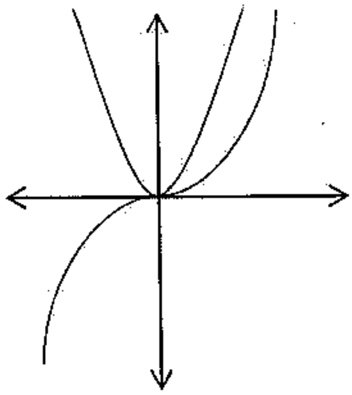
$$f'''_{(x)} = 6$$

دويم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پيدا کړئ؟ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

$$y' = x^2 \qquad y = \frac{1}{3}x^3$$

$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دويم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نود $\left(y^{(9)}\right)^2 + y^2$ قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$y = \sin x + \cos x$
$\acute{y}_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$
$y''_{(x)} = -\sin x - \cos x$
$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$
$\vdots$
$y'(9)_{(x)} = \cos x - \sin x$
$\left(y^{(9)}\right)^2_{(x)} + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$
$= cos^2x - 2\sin x \cos x + sin^2x + sin^2x + 2\sin x \cos x + cos^2x$
$= 2sin^2x + 2cos^2x = 2(sin^2x + cos^2x) = 2 \cdot 1 = 2$

د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو دتزاید او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو، اصغري نقطو، اعظمي حجم، د لنډې فاصلې، اعظمي مساحت او داسې نورو شیانو دپیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعګانو د ګراف د ترسیم لپاره.

4- د مبهمو اشکالو دلیمیټ د پیدا کولو لپاره.

لنډه دا چه د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه اونورو علومو کې زیات ګټور دی.

1- دتوابعو د تزاید او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a,b]$ په تړلي انټروال کې متمادي وي او په (a,b) انټروال کې مشتق ولري نو که $\acute{f}(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انټروال متزایده ده.او که $\acute{f}(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: وښیئ چه د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع ګراف متزاید دی؟

حل: ځرنګه چه تابع تامه ده نو $domf(x) = IR$ دي مشتق یې په لاندې ډول دي.

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په مشتق کې د (x) په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کيږي نو $f'(x) > 0$ دی په نتيجه کې تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده اومشتق لري د تناقص د انټروال د معلومولو لپاره $f'(x) < 0$ پيدا کوو.

$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدی انټروال $(-1,1)$کې متناقصه ده.

دريم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅيړئ؟

حل:

$D_{f(x)} = IR$
$f(x) = 5x - 4$
$f'(x) = 5 > 0$

تابع متزايده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انټروال کې متزايده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: که $y' < 0$ وي تابع متناقصه ده او که $y' > 0$ وي تابع متزايده ده.

$y = x^2$
$y' = 2x$
$y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$ د تناقص شرط
$y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ د تزايد شرط

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+2$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$ ↘	4 ↘	1 ↘	0	1 ↗	4 ↗	$+\infty$ ↗

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې تابع بحراني ټکي

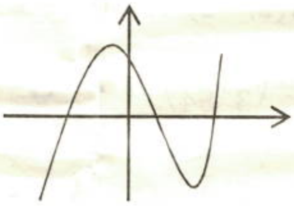
د يوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه *Maximum point*:

د تابع د ګراف تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه *Minimum point*:

د تابع دګراف تر ټولو ټيټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



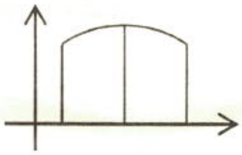
ثابته تابع:

هغه تابع ده چې مشتق يې صفر وي.

$y' > 0 \quad y' < 0$

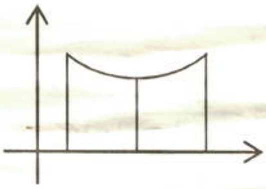
متزايده تابع:

که د (a, b) په فاصله کې $\acute{y} > 0$ وي، تابع متزايده ده.



متناقصه تابع :- که د (a, b) په فاصله کې $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده.

$\acute{y} < 0 \quad \acute{y} > 0$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دی نقطه کی د تابع گراف خپل جهت ته تغیرورکوي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ یوه تابع راکړ شوی ده ووایاست چه ددی تابع گراف څو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پیدا کوو اود (x) قیمتونه پیدا کوو.

$$f'(x) = 3x^2 - 7x + 2$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$
$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore \quad A(2,-2)$ اصغري نقطه ده

$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad B\left(\frac{1}{3}, \frac{17}{54}\right)$ اعظمي نقطه ده

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		$\frac{17}{54}$		-2		-2		$+\infty$

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه یا نسبتي نقطه پیدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پیدا اوعلامی یي مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$
$$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$
$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

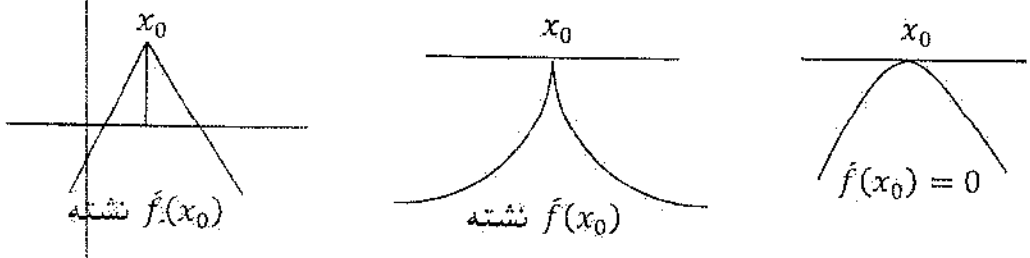
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftarrow f(x) = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2 = 4 + 8 = 12$$
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2+\sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{-2} = -2.73$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2-\sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{-2} = 0.73$$

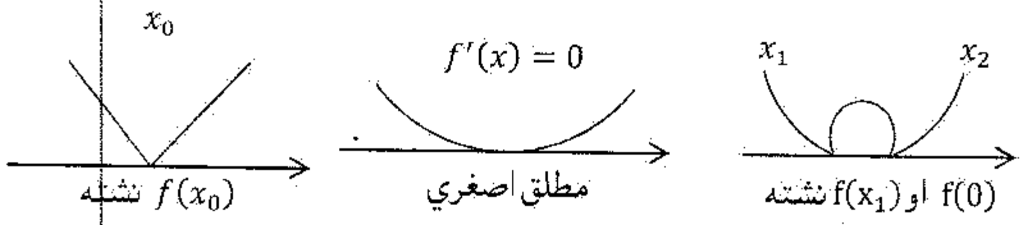
x		-3		-2.73		-1		0.73			
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↘	$\frac{2}{15}$	↘	min	↗	0	↗	max	↘	-2	↘

د کسر اشاره دجذرو منځ کې مثبت او په خارج منفي ده.

مطلق اعظمي $Maximum$ د $f(x)$ په تابع کې که د هر (x) لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي نو $\left(x_0, f(x_0)\right)$ ټکي ته مطلق اعظمي وايي.



مطلق اصغري $Minimum$: که د $f(x)$ د تابع دتعریف د ناحیې د هر (x) لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي نو $\left(x_0, f(x_0)\right)$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

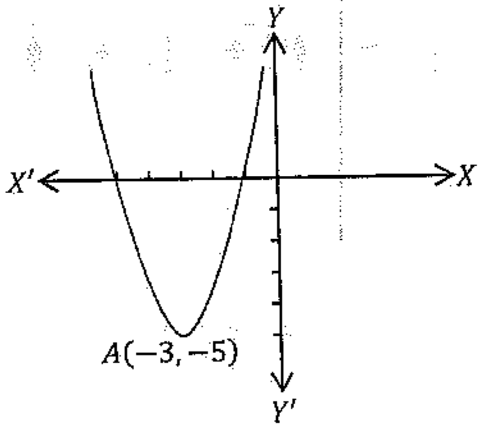
لمړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = x + 3 \quad \because \acute{f}(x) = 0 \quad \therefore \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$$

$A(-3,-5)$



دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ د تابع اعظمي او اصغري نقطې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3$$

په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

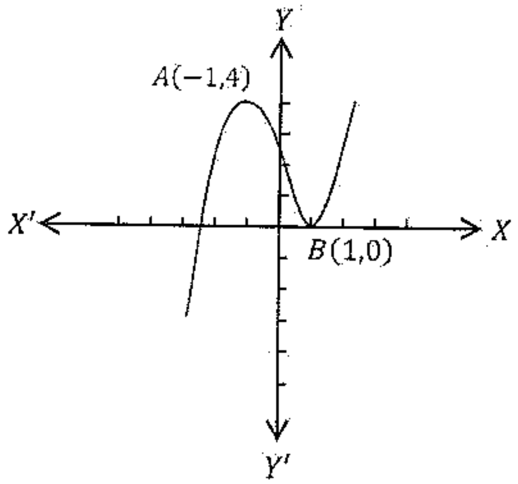
$\acute{f}(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$

$x_1 = 1 \quad \Rightarrow A(1,0)$ اصغري ده

$x_2 = -1 \quad \Rightarrow B(-1,4)$ اعظمي ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د ګراف د ترسیم طریقه:

1- د تابع اتصال مطالعه کوو.

2- د محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیدا کوو.

3- د تزاید او تناقص د انټروال د معلومولو لپاره د مشتق اشارې مطالعه کوو.

4- د ګراف مجانبونه معلوموو.

5- د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

6- په جدول کې د تابع د ګراف وضعیت مطالعه کوو.

7- پیدا شوې نقطې د وضعیه کمیتونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو يې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \ \& \ x_2 = \frac{-1 - 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د $(X\bar{X})$ د محورسره د تابع دګراف د تقاطع نقطې $A(-1,0)$ او $B(2,0)$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تابع دګراف اعظمي یا اصغري نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$\acute{y} = 1 - 2x$$
$$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \ \Rightarrow -2x = -1 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د (x) دغه قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راوړو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه یا اعظمي ده یا اصغري ده.د تابع دویم مشتق پیدا کووکه $y'' > 0$ وي اصغري نقطه ده اوکه $y'' < 0$ ؤ نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنګه چه همېشه منفي دې نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پیدا کول:

د تابع دویم مشتق نیسو او قیمت یې پیدا کوو بیا یې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعیه کمیات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{y} = 3x^2 + 18x - 6$$
$$y'' = 6x + 18$$
$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$
$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3,73)$ انعطاف نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویمه درجه تابع ګراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

ډومېن يې د حقيقي اعدادو سيټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کې تابع متمادي ده. د تناظر محور يې د اول مشتق پواسطه پيدا کيږي.

$$\acute{f}(x) = 2ax + b$$
$$\acute{f}(x) = 0$$
$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محور دی.

د راس د نقطې د پيدا کولو لپاره د تناظر په محور کې د x قيمت په تابع کې وضع کوو دراس د نقطېوضعيه کميتونه لاس ته راځي.

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه يې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وي د تابع ګراف مقعر دی يعنی ګراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وي د تابع ګراف محدب دي يعنی ګراف اعظمي نقطه لري.

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

2- د $X\acute{X}$ د محور سره د تقاطع نقطه پيدا کوو:

$$y = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

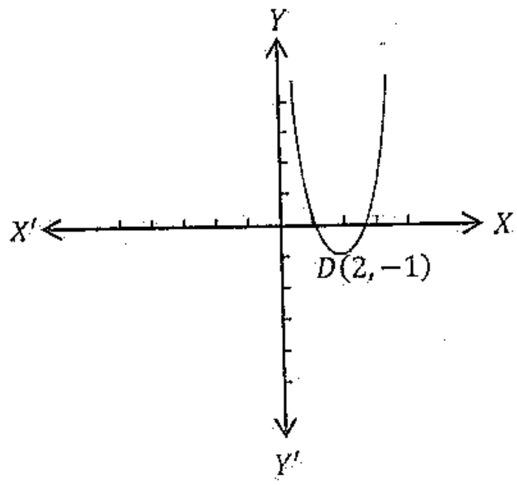
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$A(1,0)\ ,\qquad B(3,0)$$

3- د $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع د تقاطع نقطه پيدا کوو.

$x = 0$
$y = 0 - 4 \cdot 0 + 3$
$y = 3$
$C(0,3)$

4- د بحراني نقطى دپيدا کولو لپاره د تابع مشتق نيسو.او د (x) قيمت پيدا کوودا قيمت په تابع کې وضع کوو.د (y) قيمت لاس ته راځي د (x) او (y) يوه جوړه قيمتونه بحراني نقطه تعينوي.بيا يي دويم مشتق پيدا کوو که $y'' > 0$ ؤ بحراني نقطه اصغري ده.او که $y'' < 0$ ؤ نوبحراني نقطه اعظمي ده.

$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow D(2,-1)$



دويم مثال: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ د تابع تحولات مطالعه اوګراف يي رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د XX́ سره تقاطع:

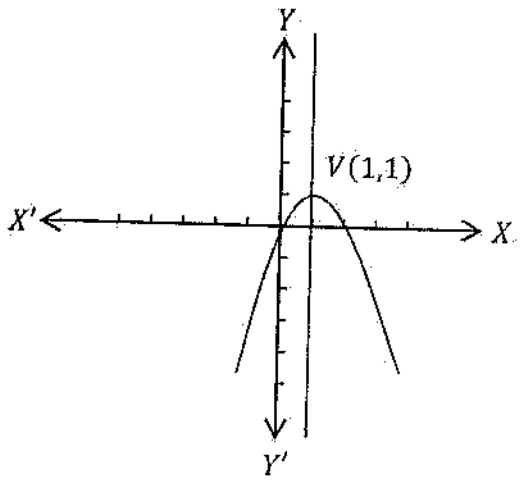
$f(x) = 0$
$-x^2 + 2x = 0$
$x(-x + 2) = 0$
$x_1 = 0$
$-x + 2 = 0$
$-x = -2 \Rightarrow x = 2$
$A(0,0)$ & $B(2,0)$

3- د YY′ سره تقاطع:

$x = 0$
$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
$C(0,0)$

4- بحراني نقطه يې پيدا کوو. لومړی مشتق يې نيسو.

$f'(x) = -2x + 2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$
$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$
$V(1,1)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموګرافيک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي.عمومي شکل يې دادی

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجانب:- $Asymptote$: که د يوه مستقيم او يوه منحني تر منځ فاصله په لايتناهي کې صفر شي دا مستقيم د دې منحني مجانب دی.

مجانب د منحني لپاره لاربښود دی.

مجانب په درې قسمه دی.

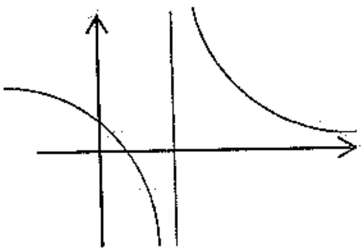
1- عمودي مجانب $(Vertical\ Asymptote)$

2- افقي مجانب $(Horizontal\ asymptote)$

3- مايل مجانب(Slant Asymptote)

1- عمودي مجانب :

که په يوه ثابت عدد کې د تابع ليميټ (∞) شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندې د $Y\acute{Y}$ د محور سره موازي رسميږي د تابع ګراف عمودي مجانب دی. يعنې که $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.



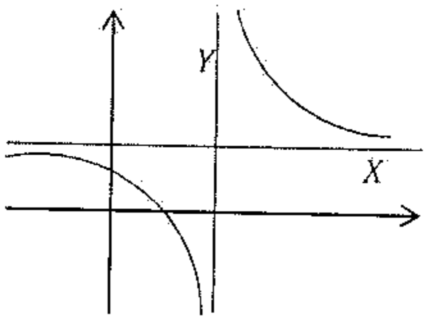
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- افقي مجانب:

که په لایتناهي کی دیوی تابع لیمیټ یو ثابت عدد ؤ نو هغه خط چه ددی ثابت عدد په ترتیب د YY' د محور سره موازي رسمیږي د راکړشوي تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

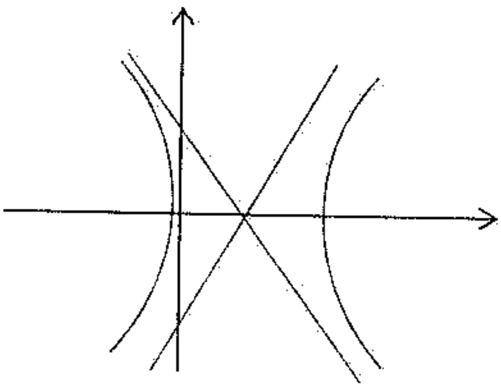
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د ګراف افقي مجانب دي.



3- مایل مجانب $Slant\ Asymptote$:

په کسري تابعګانو کی که دصورت درجه د مخرج د درجي څخه د واحد په اندازه ډېره وه نو دغه ډول تابعګانی مایل مجانب لري دمایل مجانب دترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

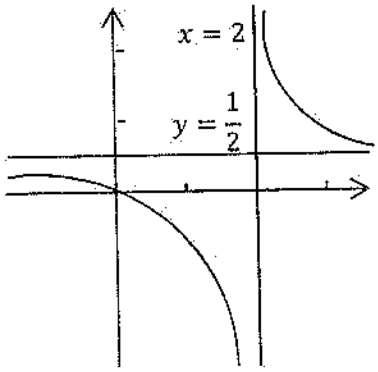
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2\cdot 2-4} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ عمودي مجانب دی.

مایل مجانب یې پیدا کوؤ.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}} = \frac{1+0}{2-0}\frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ افقي مجانب دی.



دویم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ؟

حل: مایل مجانب:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{2} \Rightarrow y = x+2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري ځکه د هری تابع ګراف چه مایل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

دریم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

عمودي مجانب

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

بالاخره $x=-1$ او $x=2$ عمودي مجانبونه دي.

مایل مجانب نلري.

د مجانب د ټاکلو عمومي لار:

1- که د $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموګرافیک تابع کې (m) دصورت درجه او (n) دمخرج درجه وي نو

الف: که $m<n$ وي نو د (x) محورافقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي نو $y=b$ افقي مجانب دی (b) د صورت اومخرج دمساوي درجووالا حدودضریبونو نسبت دې.

ج: که $m>n$ وي افقي مجانب نلري د مایل مجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج ددرجې څخه د واحد په اندازه ډېره وي مايل مجانب لري او افقي مجانب نلري.

مثال: $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزاید او تناقص په باب خپل نظر ولیکئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{2\cdot x-1(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}=\frac{5}{x^2}$$
$$\acute{f}(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

تابع متزايده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انعطاف نقطه يې داسې پيدا کيږي.

$\acute{f}(x) = 0$

$3ax^2 + 2bx + c = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0$

$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$

$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$

$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$

$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$

1- مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$

$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$\acute{f}(x) = 3x^2 + 6x$

$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$

$A(0,-4)$ اصغري نقطه ده.

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$

$y_2 = 0$

$B(-2,0)$ اعظمي نقطه ده.

انعطاف نقطه پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0$

$6x + 6 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$

$C(-1,-2)$ انعطاف نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$y = 0$

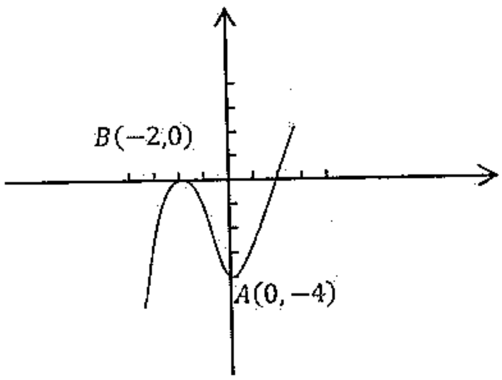
$(x-1)(x+2)^2 = 0$

$$\left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \\ C(1,0) \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x=-2 \\ D(-2,0) \end{matrix}\right\}$$

د $Y\acute{Y}$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو $x = 0$ فرضوو.

$y = 0^3 + 3 \cdot x^2 - 4 = -4$

$E(0,-4)$



دويم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = -x^3 + 3x^2$

$\acute{f}(x) = -3x^2 + 6x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 6x = 0 \;\Rightarrow -3x(x-2)$

$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \;\Rightarrow x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

$f(x) = 0$

$-x^3 + 3x^2 = 0 \;\Rightarrow -x^2(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

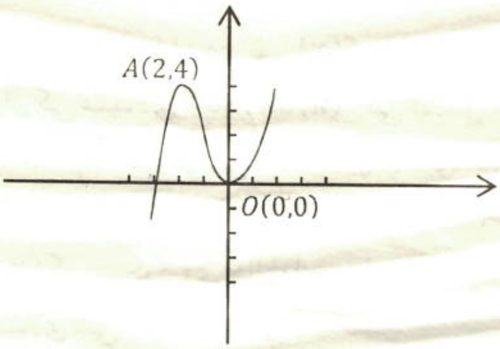
$$O(0,0) \;\Rightarrow B(3,0)$$

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3\cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$$

انعطاف نقطه پیدا کوو دویم جذر یي پیدا کوو.

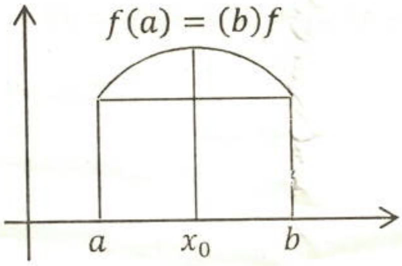
$$f''(x) = -6x + 6$$
$$x = 1$$
$$f(1) = 2$$
$$C(1,2)$$



د رول قضیه: *Theorem of Rolle*:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ انتروال کی متمادي وي او د $a < x < b$ په انتروال کی د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نود $a < x < b$ په انتروال کی $(x_0, f(x_0))$ یو تکی شته چه $f'(x) = 0$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي.نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- كه تابع ثابته وي نو $\acute{f}(x) = 0$ دی.

2- كه $f(x)$ تابع ثابته نه وي او $x_2, x_1 \in (a, b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نوتابع په $x_0 \in [a, b]$ نقطه كې $Maximum$ لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع يوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو كې $\acute{f}(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د $[a, b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د $Rolle$ قضيه پرى تطبيق كړئ؟

حل: پوهيږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر (x) لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي اوپه $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نود $Rolle$ د قضيي سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلاً د (x_0) يوه نقطه بايد موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنگه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلی اقلاً يو حل بايد په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی درې ځله دا قيمتونه اخيستلای شي.

دويم مثال: د $[a, b] = [-1,1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ په تابع باندی د $Rolle$ قضيه تطبيق كړئ؟

حل: دانټروال د پيل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذيره نده مگرد رول قضيه پرى دتطبيق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ متمادي ده او د $[-1,1]$ په انټروال کی د (x_0) يو عدد شته چه $\acute{f}(x_0) = 0$ شي اوهغه $x_0 = 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y}(x) = \frac{\acute{u}(x)}{2\sqrt{u}}$ څخه استفاده کوو.

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \acute{f}(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د (a,b) په انټروال کې دمشتق وړ وي نو د (a,b) په انټروال کې د (c) یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي.
$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$ یعنی $\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت :- $f(x) - \acute{f}(x) \cdot x$ په $g(x)$ بنیو:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \ldots\ldots\ldots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \ldots\ldots\ldots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرګندیږي چه $g(a) = g(b)$ دی نو د رول د قضیې سره سم د $[a,b]$ په انټروال کې د (c) یوداسې عدد شته چه $\acute{g}(c) = 0$ دی نو لیکو چه

$$\acute{g}(x) = \acute{f}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \acute{g}(c) = \acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\acute{g}(c) = 0$$

$$\acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې دمتوسط قیمت قضیه د $[a,b] = [1,3]$ په انټروال کې وڅېړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کې متمادي ده او د $(1,3)$په انټروال کې د مشتق وړ ده نو د متوسط قيمت د قضيي سره سم د $(1,3)$په انټروال کې يو (x_0) شته چه

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

د (c) دپيدا کولو لپاره د تابع مشتق نيسو.

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 + 8 = 26 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{6}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{26}{6}} = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x = +\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کې شامل دی نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مگر $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کې شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کيږي.

د لوهپيتال قاعده:

که د کسري تابعگانو ليميټ د $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوپيتال په طريقه کولای شو چه ليميټ يې پيدا کړو.

ديوی تابع ليميټ په يوه نقطه کې د تابع د مشتق دليميټ سره مساوي دی په همغه نقطه کې .که تر اول مشتق وروسته بيا هم ابهام موجود ؤ دويم مشتق يي نيسو په همدی ترتيب عمليه تر هغه وخته اجراء کووتر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots\cdots$$

مثال:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \frac{2 \cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{8 + 2 - 10}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 4x + 5x - 10}{x^2 - 2^2} = \lim_{x \to 2} \frac{2x(x - 2) + 5(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(2x + 5)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x + 5}{x + 2} = \frac{2 \cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لمړی مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x+\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

دویم مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=4\cdot 3^3=4\cdot 27=108$$

دریم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

دبحراني ټکو تطبيق:

1- داسې دوه عددونه پيدا کړئ چه د جمع حاصل يي (20) اود ضرب حاصل يي اعظمي وي؟

حل:

$x =$ اول عدد

$= 20 - x$ دویم عدد

$= f(x) = x(20-x) = 20x - x^2$ د ضرب حاصل

$f'(x) = 20 - 2x$
$f'(x) = 0$
$20 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow x = 10$
$f(10) = 20\cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$
$f(0) = 20\cdot 0 - 0^2 = 0$
$f(20) = 20\cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي نقطه $[10،100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يي (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t-2)(t-3)$ ده متوسط سرعت يي د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځني سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4-3} = \frac{2-0}{4-3} = 2$$

3- د کرې دحجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{د کرې مساحت} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{sphere}}{A_{Sphere}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ رابطه موجود ده د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم ليکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د يوې مستطيلي ځمکې محيط (200) دی اعظمي مساحت يي پيدا کړئ؟

حل:

$\text{د مستطيل طول} = x$

$\text{د مستطيل عرض} = y$

$\text{د مستطيل مساحت} = S$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$محیط = 2x + 2y = 200$

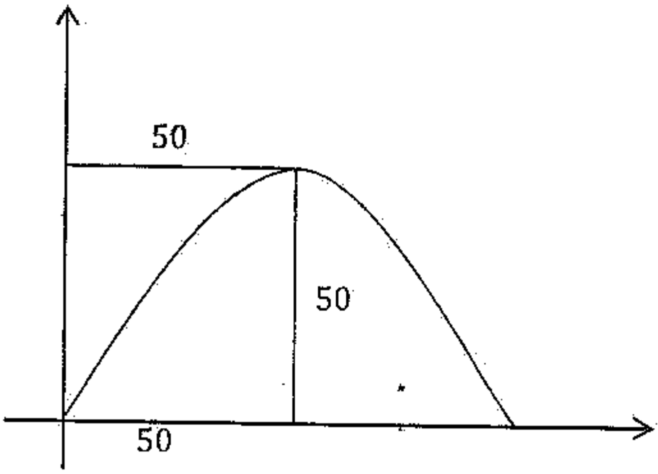
$محیط = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2 \quad ,D_f = IR$

د $[0.100]$ په انټروال کې دتابع اعظمي مساحت پیدا کوو.

$\acute{S} = 100 - 2x$

$\acute{S} = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$



6- د (A) ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحني دپاسه حرکت کوي ووایاست چه څه وخت به د (A) او مبداء تر منځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$

$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$

$\acute{d}_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$

$\acute{d}_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2x^4}{2} = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow x^4 = 4 \quad \Rightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

یو مربع القاعده مکعب مستطیل لروچه د دری واړه بعدونو مجموعه یي (24)ده اعظمي حجم یي پیدا کړئ؟

حل: دقاعدی اوږدوالی په (x)او ارتفاع په (y) ښیو.

$$x + x + y = 24 \;\Rightarrow y = 24 - 2x$$
$$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$$
$$V = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$
$$\acute{V}(x) = 48x - 6x^2 \quad \because \acute{V}(x) = 0 \quad \therefore \quad 48x - 6x^2 = 0$$
$$x(48 - 6x) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \;\; \& \;\; x_2 = 8$$
$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$$
$$V(8) = 24 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3 = 1536 - 1024 = 512$$
$$V(12) = 24 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 = 3456 - 3456 = 0$$

د مکعب مستطیل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه یي $(8cm)$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اولسم فصل

انتیګرال Integral

انتیګرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي.

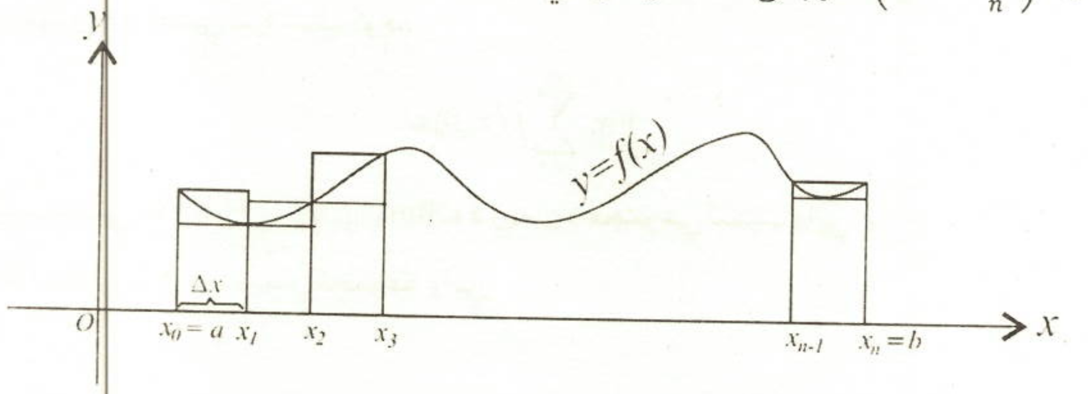
اوپه اصطلاح کی د مشتق دعملیي معکوسی عملیي ته انتیګرال وائي.یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقی ته انتیګرال وایي.

ارشیمیدس چه په (287 – 212)ق م کی یي ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او دجامداتو دحجمودمحاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنومورړي انتیګرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه.ریمان (1866 – 1826) اولایبنز (1941 – 1875) معین انتیګرال کشف کړ.

دانتیګرال علامه لایبنز(∫) لیکلی ده. چه د ریمان دمجموعی (sum)د لمړي توري غزېدلی شکل دی.غیر معین انتیګرال لیووبل (1882 – 1809)کشف کړی دي. ګانوس (1855 – 1777) دانتیګرال اولین جدول ترتیب کړي دي.د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیګرال په باب زیات پرمختګ وشو.

د ریمان مجموعه Riemann's sum:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده.دهغه سطحی د مساحت دپیدا کولو لپاره چه د $X\acute{X}$دمحور او $y = f(x)$ تابع دګراف تر منځ واقع دي که منظم هندسي شکل یي لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یي مساحت پیدا کیږي.او هندسي شکل یي نه لرلو نو د $[a\ ,b]$ ترلی انټروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $\left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$ رابطی څخه لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د هرمستطیل دهر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ لپاره په لاندې ډول دی.

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \cdots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1]\ , [x_1, x_2]\ , [x_2, x_3], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کې د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1})\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښیو نو لیکو چه:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونه مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په A وښیونو:

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

د رابطې د اطراف لیمیټ نیسو.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{N\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\,\Delta x$$

د سانډویچ د قضیې سره سم لیکوچه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

لیمیټ یعني $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وایي.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $[0.2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحني او
(xx') د محور تر منځ دسطحې مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $[0.2]$ انټروال په څلورو برابرو برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

دمستطیل دهر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1] \; , \quad [x_1, x_2] \; , \quad [x_2, x_3] \; , \quad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \; , \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \; , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \; , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

دګراف دترسیم لپاره د (x) قیمتونه په تابع کې وضع کوو اود (y) قیمتونه پیدا کوو.

$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 \quad , \quad A(0,1)$$

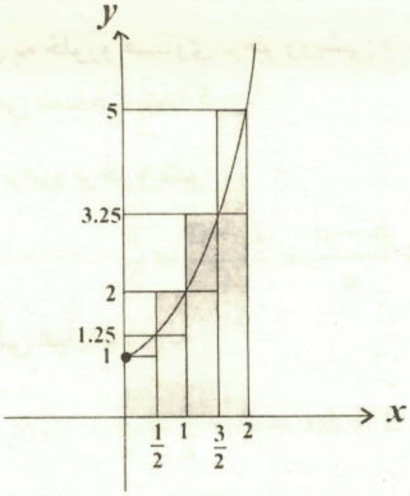
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25 \quad , \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad , \quad C(1,2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25 \quad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \quad E(2,5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2} = 3.75$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2} = 5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ریمان د مجموعی لیمیټ د $[1،10]$ په انټروال کی پیدا کړئ؟

حل: پوهیږو چه:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0,1,2,3,4,5 \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} (1 + x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^{n} (1 + x_i)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\Delta x \sum_{i=1}^{n} 1 + \Delta x \sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} (a + x_i)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{9}{n} i\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{9}{n} \sum_{i=1}^{n} i\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{9}{n} \cdot n + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[9 + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9n^2 + 9n}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{11n^2 + 9n}{2n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}\right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دویم مثال: د $[0,3]$ انټروال په شپږو مساوي برخو وویشئ او $y = 3x$ د مستقیم خط او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$x_0 = 0 \quad , x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad , x_2 = 3\Delta x = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}$

$x_3 = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \quad , x_4 = 0 + 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$

$x_5 = 0 + 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3 \quad , x_6 = 0 + 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$

$[x_0, x_1] \quad , [x_1, x_2] \quad , [x_2, x_3] \quad , [x_3, x_4] \quad , [x_4, x_5] \quad , [x_5, x_6]$

$[0,1] \quad , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad , \quad \left[2, \frac{5}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right] \quad , \left[3, \frac{7}{2}\right]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(0) = 0\,, \qquad A(0,0), \qquad f(1) = 3(1) = 3 \qquad B(1,3)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right) \quad , f(2) = 3\cdot 2 = 6 \;\Rightarrow D(2,6)$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{2} \;\Rightarrow E\left(\frac{5}{2},\frac{15}{2}\right) , f(3) = 3\cdot 3 = 9 \;\Rightarrow F(3,9)$$

د انتیګرال مفهوم *Concept of Integral*:

انتیګرال دهغه تابع پیدا کول دي چه مشتق يي موجود وي يا د ريمان د مجموعي ليميټ ته انتیګرال وايي. د انتیګرال علامه دا (∫)ده چه د ريمان دمجموعي Sum د لمړي توري غزېدلې شکل دی. لکه:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)\,dx$$

چه دلته $f(x)$ دانتیګرال تابع ده او dx نظر (x) ته د $f(x)$ دتابع د انتیګرال متحول دی.

د انتیګرال اقسام:

انتیګرال په دوه قسمه دی.

1- غیرمعین انتیګرال

2- معین انتیګرال

1- غیرمعین انتیګرال *Indefinite Integral*:

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انتروال کی تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع يوه لمړنی تابع وي نود $F(x)+c$ دتابعګانو سيټ د $f(x)$ دتابع غيرمعين انتیګرال دی. اوداسی ليکل کيږي.

$$\int f(x)dx = \quad F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int xdx$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx = \int x^{-\frac{3}{7}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot xdx = \int \sqrt[8]{x^6}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c$$

$$= \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^8} + c$$

د غیر معین انتیګرال خواص:

لکه څرنګه چه د تابعګانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیرمعین انتیګرال هم ځانګړي خواص لري چه بې د ثبوته منل شوي دي.

1- که (k) یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیګرال یي داسی پیدا کیږي.

$$\int kdx = k\int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که a یو ثابت عدد او $f(x)$ یوه تابع وي نو:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\cdot\frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي دتابعګانو دمجموعې اوتفاضل انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې اوتفاضل سره مساوي دی.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال:

$$\int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي نو انتیګرال يې د ټولو حدونو د انتیګرالونو مجموعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]\,dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\cdots+\int f_n(x)\,dx$$

مثال:

$$\int(x^3-6x^2+9x+1)dx=\int x^3dx-\int 6x^2+\int 9xdx+\int dx$$
$$\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}+x+c$$

6- د دوه تابعګانو دحاصل ضرب انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx\neq\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$$

مثال: که چیرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي

الف: لمړی یې ضربوو بیایې انتیګرال نیسو

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx=\int[(x+1)(x-2)]dx$$
$$=\int(x^2-x-2)dx=\int x^2dx-\int xdx-2\int dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c$$

ب: د هرې تابع انتیګرال پیدا او بیا یې ضربوو

$$\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx=\int(x+1)dx\cdot\int(x-2)dx$$
$$=\left[\int xdx+\int dx\right]\left[\int xdx-2\int dx\right]$$
$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+c=\left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\left(\frac{x^2-4x}{2}\right)+c$$
$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c\neq\left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\left(\frac{x^2-4x}{2}\right)+c$$

7- د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعګانې راکړشوي دي.

ثبوتوو چې د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

$$\int (x^2 + 2x + 1)dx = \int x^2dx + \int 2xdx + \int dx$$

$$= \int x^2dx + 2\int xdx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$\int (1 + x)dx = \int dx + \int xdx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^2m + dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعګانو د انتیګرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5 dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2\int (1-2x)^{-\frac{1}{5}}dx = 2 \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2\left(-\frac{1}{5}+1\right)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^x dx = e^x + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

مثال: $\int 4e^x dx = 4e^x + c$

د $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\int 7^{4x-3}dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3}dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3}dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

معین انتیګرال *Definite Integral*

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $f(x)$ د تابع ریمان د مجموعي لیمیټ ته کله چه $n \to \infty$ او د فرعي انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \to 0$ نه وکړي نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې انتیګرال ته معین انتیګرال وایي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]\,_a^b = F(b) - F(a)$$

(a) ته د انتیګرال لاندیني سرحد او (b) ته د انتیګرال پورتني سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2 dx$ معین انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثال : د $y = 3$ مستقیم او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

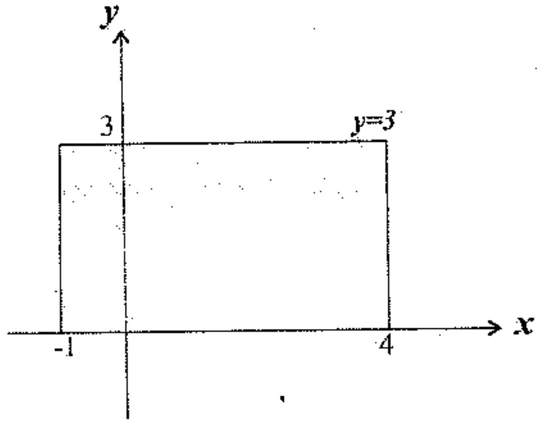
$\int_{-1}^{3} 3dx$ د مستطیل مساحت رابښیي.

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$

د انتیګرال پواسطه یې مساحت په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^{3} 3dx = [3x]\,_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقيم او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کی جوړيږي محاسبه کړئ

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$
$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال : د هغه سطحی مساحت پيدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د $[1,2]$ په انټروال کی محصور وي؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$
$$A_2 = 1(-1) = -1$$
$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$
$$\int_1^2 (-2x+1)dx = \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2$$
$$= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص $Properties\ of\ definite\ integral$:

1- د $[a,b]$ په انټروال کې د ثابتې تابع انتیګرال یعنې $\int_a^b cdx$ عبارت دی.

$$\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په (n) مساوي برخو ویشویعنې $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر (x_i) لپاره د $i-$ ام انټروال ځخه لرو.

$$f(x_i) = c \qquad , \qquad i = 1,2,3,\cdots n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد اویوی تابع د حاصل ضرب انتیګرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیګرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که د $[a,b]$ انټروال د x_i چه $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ وي په (n) مساوي برخو وویشونو د ریمان دمجموعې او انتیګرال دتعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = k \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4dx$ انتيګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^{2} 4dx = 4 \int_{-2}^{2} dx = 4[2-(-2)] = 4\cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع يوه لمړنۍ تابع او په $[a,b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = -\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$ انتيګرالونو مساوات پيدا کړئ؟

$$\int_2^3 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{2}^{3} 2xdx = -\int_{3}^{2} 2xdx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $a = b$ وي نوانتیګرال يې صفر دی.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{3}^{3} 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعګانو د مجموعی او تفاضل انتیګرال په یوه انټروال کی د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعی او تفاضل د انتیګرالو سره مساوي دی په همغه انټروال کی.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانو انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کی نیول شوی دي نو:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) \pm g(x_i)\}\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x_i)dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx$$

$$= 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1 = 5$$

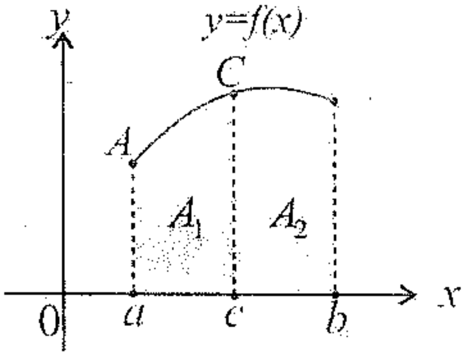
$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6- که چیرته د $f(x)$ یوه تابع چه په یوه تړلي انټروال چه د a , b او (c) ټکي پکی شامل وي او انټیګرال منونکي وي. نود ټول انټروال انټیګرال دانټروال دټوټو د انټیګرالو د مجموعی سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال د $[a,c]$ او $[b,c]$ په دوه انټروالو ویشو.



$A = \int_a^b f(x)dx$ د هغې سطحی مساحت دی چه د $f(x)$ دتابع د ګراف او $(X\acute{X})$ دمحور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کی واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1 = \int_a^c f(x)dx \quad \text{او} \quad A_2 \int_c^b f(x)dx$$

د تابع د ګراف د توټو مساحت دی. نو لیکو چه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال: که $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x)dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \le g(x)$ تابعګانی په $[a, b]$ کی انتیګرال منونکي وي او $g(x) \ge f(x)$ او $\Delta x \ge 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دې پس لیمیټ یې هم مثبت وي.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \ge 0$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0 \quad \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښیاست چه

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \le \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}dx \le \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

$$(b - a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \le (b - a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اطراف په $(b-a)$ ویشو.

$$1-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\leq 1+\frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\leq\frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6}\quad\Rightarrow -1<2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او (m) اصغري نقطه او (M) اعظمي نقطه وي نو

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

ثبوت :

$$\int_a^b m dx\leq\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b M dx$$
$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

دغه قضیه د انتیګرال د تخمیني قضیې په نوم یادیږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}$ انتیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ؟

څرنګه چه د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=$ $e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو لیکو چه:

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$
$$e^{-1}(1-0)\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\leq 1(1-0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

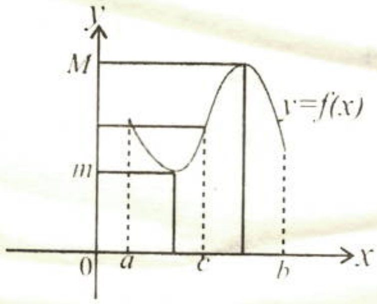
$$e^{-1} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \le \int_0^1 f(x)dx \le 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a,b]$ کې متمادي وي نو د (c) يو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره د (m) او (M) قيمتونه په ترتيب سره د $[a,b]$ په انټروال کې د تابع اصغري او اعظمي نقطې دي او $c \in [a,b]$ دی

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دی نو $m \le k \le M$ دی او د هر (c) حقيقي عدد لپاره $a \le c \le b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته رابطه د متوسط قیمت درابطی په نوم یادیږي.$f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي.او حاصل ضرب يي د مستطيل مساحت دی. يعنی:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1,4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د (c)قیمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{64-1}{3}\right] = \frac{63}{3} = 21$$

د (x)په عوض (c) وضع کوواو د متوسط قیمت د قضيي څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

دانتیګرال او مشتق اساسي قضيي:

اوله قضیه :

که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي وي او(x) په دی انټروال شامل وي که $x \in [a,b]$ نولیکلای شو چه:

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(a) - F(x) - F(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x)|_a^{x+h} - F(x)|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بنییو:

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F\left(t|_a^{x+h} - F(t)|_a^x\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیي څخه لیکو چه:

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$\acute{F}(x) = f(g(x)) \cdot \acute{g}(x)$$

$$\acute{F}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$\acute{F}(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

دویمه قضیه:

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ دتابع اولنی تابع اود $[a, b]$ په انټروال کی متمادي وي پدی صورت کی لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: که $F(x)=\int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $\acute{F}(x)=f(x)$ دی د تابعگانو تفاضل په (k) ښيو:

$$f(x)-F(x)=k\Rightarrow f(x)=F(x)+k$$

$$\acute{F}(x)=\int_a^b f(t)dt=f(x)=F(x)+k$$

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=k\cdots 1$$

د (x) په عوض (a) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt-F(a)=k\Rightarrow 0-F(a)=k\Rightarrow k=-F(a)$$

د k قیمت په (1) رابطه کی وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=-F(a)$$

د (x) په عوض (b) وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

اخري رابطه د $\int_a^b f(t)dt=[F(x)]_a^b$ شکل ښودل کیږي. دغه رابطه د اولنی تابع او انتیگرال تر منځ رابطه ښیي چه د نیوټن (لایبنز) په نوم یادیږي.

مثال: $\int_0^1 x^2dx$ انتیگرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2\,dx=F(1)-F(0)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول:

... انتیګرال دلاس ته راوړلو لپاره يي

$u = g(x)$ او $\acute{F}(x) = f(x)$ بنیو $\frac{du}{dx} = \acute{g}(x)$ او $du = \acute{g}(x)dx$ بنیو:

$$\int_a^b f\{g(x)\}\,\acute{g}(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x \quad , \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right)du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{2-7}{14}\right] = -\frac{1}{5}\left[\frac{-5}{14}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3(1+2x^3)^5dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad , \quad x^2dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5dx = \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729-1}{6}\right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\bar{2}$$

پورته فارمول په غیر معین انتیګرال کې هم د تطبیق وړ دي.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = 1 - 4x^2 \quad , \frac{du}{dx} = -8x \quad , \quad xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot xdx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}du\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دويم مثال: $\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx$ انتيګرال حساب کړئ؟

$$u = x^4 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 \quad , \quad x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3 \cos((x^4+2)dx) = \int cosux^3dx = \int cosu \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int cosudu = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

قسمي انتيګرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتيګرال کې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ نبيو او د حاصل ضرب مشتق يي پيدا کوو.

$$(u \cdot v)' = \acute{u}v + \acute{v}u \quad \Rightarrow \acute{v}u = (u \cdot v)' - \acute{u}v$$

$$\int \acute{v}\,udx = u \cdot v - \int \acute{u}\,vdx$$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

پورته رابطه په قسمي طريقه د غير معين انتيګرال فارمول دی.

که (u) او (v) تابعګانې د $[a,b]$ په انتروال کې تعريف شوی وي نود معين انتيګرال فارمول په قسمي طريقه په لاندی ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b \acute{v}\, u\, dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx \quad \text{V} \quad \int_a^b u dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

لمړی مثال: د $\int x \sin x dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$v = -\cos x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow dv = \sin x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = -x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x dx$$

$$h\int_a^b \acute{v}\, u\, dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx$$

$$\int_0^1 -xe^x\, dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

دلوګاریتمي او اکسپوننشل تابعګانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$\acute{f}(x) = (\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln\left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او څرنګه چه $h \to 0$ تقرب وکړي نو $u \to \infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

2- که $g(x) = a^x$ وي نومشتق يې دلاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي

$$\acute{g}(x) = a^x \ln a$$
$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$
$$(\ln y)' = (x \ln a)'$$
$$\frac{\acute{y}}{y} = 1\cdot \ln a + x\cdot 0 = \ln a$$
$$\acute{y} = y \ln a = a^x \ln a$$

د اعشاري لوګاريتم مشتق:

د $f(x) = \log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له :

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\acute{f}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او کله چه $h \to 0$ تقرب وکړي نو $u \to \infty$ تقرب کوي.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$
$$\acute{f}(x) = \{\log_a g(x)\}' = \{\log_a g(x)\}'\cdot \acute{g}(x)$$
$$= \frac{1}{g(x)}\log_a e\cdot \acute{g}(x) = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = \acute{x} \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 1 \Rightarrow \acute{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \acute{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\acute{y} = \acute{u} \cdot a^u \ln a$$

3- که په لوګاریتمي تابعګانو کی د لوګاریتم قاعده د طبعي لوګاریتم څخه اعشاري لوګاریتم ته بدله شي ټول لوګاریتمي عددونه دصورت څخه مخرج ته اویا د مخرج څخه صورت ته ځي لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u} \log_a e = \frac{\acute{u}}{u \log_e a} = \frac{\acute{u}}{u \ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \acute{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دویم مثال:

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال:

$$f(x)=\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1)\}$$
$$f'(x)=\left(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1)\}'$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_a e\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right\}$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$$
$$=x\log_a e\left(\frac{x^2-1-x^2-1}{x^4-1}\right)=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\}$$

$$f'(x)=\left(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\}'$$

$$=\frac{1}{2}[\{\ln(x^2+1)\}'-\{\ln(x^2-1)\}']$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y=e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y'=(x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y=\sqrt[x]{2}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y=\sqrt[x]{2}$$
$$\ln y=\ln\sqrt[x]{2}=\ln 2^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x}\ln 2\right)'$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x}\cdot(\ln 2)' = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2}\cdot \ln 2 + \frac{1}{x}\cdot 0 = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln 2 \Rightarrow \acute{y} = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln 2\cdot y = -\frac{1}{x^2}\cdot \sqrt[x]{2}\cdot \ln 2$$

شپږم مثال: د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x\ln x$$

$$(\ln y)' = (2x\cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2\cdot \ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} = 2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1)\cdot y \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1)\cdot x^{2x}$$

اووم مثال:

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4+1}\log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\frac{1}{x}\log_2 e}{\log_2 x}\log_3 e = \frac{1}{x\log_2 x\ln 2\ln 3} = \frac{1}{x\frac{\log_e x}{\log_e 2}\cdot \ln 2\ln 3}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{x\frac{\ln x}{\ln 2}\ln 2\ln 3} = \frac{1}{x\ln x\ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2+1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y} = ?$

$x^2 + 1 = u$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{2x}{x^2+1}\log_{(x^2-1)} e$$

د معکوسو تابعګانو مشتق:

که دوه تابعګانی یو د بل معکوس وي نو مشتقونه یې هم یو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

یا:

$$\acute{y}_{(x)} = \frac{1}{\acute{x}_{(y)}}$$

نو د ضمني تابعګانو د مشتق له مخی لیکو.

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = \acute{y}_y \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = 1 \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسی تابع له مخی پیدا کړئ؟

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\ln a = a^x \ln a$$

د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعګانو مشتق دلاندی رابطو پواسطه پیدا کیږي.

1- $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2- $(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3- $(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 4- $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-1

$y = arc\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$(arc\sin x)' = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-2

$y = arc\cos x \Leftrightarrow x = \cos y$

$(arc\cos x)' = ?$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2y}} \Rightarrow (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-3

$$y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (arc\tan x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}}$$

$$= cos^2y = \frac{cos^2y}{1} = \frac{cos^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

$$= \frac{\frac{cos^2y}{cos^2y}}{\frac{sin^2y}{cos^2y} + \frac{cos^2y}{cos^2y}} = \frac{1}{tan^2y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

-4

$y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$

$(arc\cot x)' = ?$

$$(arc\cot x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{sin^2y}}$$

$$= -sin^2y = \frac{-sin^2y}{1} = \frac{-sin^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\frac{-\sin^2 y}{\sin^2 y}}{\frac{\sin^2 y}{\sin^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{-1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

لمړی مثال:- د $y = (arc\tan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = 5(arctanx)^4 \frac{1}{1 + x^2}$$

دویم مثال:- د $y = \log_5(arc\tan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \{\log_5(arc\tan x)\}' = \log_5 u = \frac{\acute{u}}{u \ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 + x^2}}{arc\tan x \ln 5} = \frac{1}{(1 + x^2)(arc\tan x \ln 5)}$$

دریم مثال:- د $y = arctane^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (arc\tan e^x)' = (arc\tan u)' = \frac{\acute{u}}{1 + u^2} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$\acute{y}(0) = \frac{e^0}{1 + e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د یوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی دمجموعی څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي.دواقعي کسرد قسمي کسرو پیدا کول دری حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسرد مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بېنومونه وي.لکه

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

$$= \frac{A(x^2 + x - 2) + B(x^2 - 3x - 10) + C(x^2 - 6x + 5)}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$4x^2-x-39=(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C$$

$A+B+C=4$

$A-3B-6C=-1$

$-2A-10B+5C=-39$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم حالت :

چه دکسر د مخرج په ضربي عواملو کې تکراري بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$3x^2-6x+2=A(x^2-2x+1)+B(x^2-3x+2)+C(x-2)$$

$$3x^2-6x+2=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-2C$$

$$3x^2-6x+2=(A+B)x^2-(2A+3B-C)x+A+2B-2C$$

$A+B=3$

$-2A-3B$

$+C=-6$

$A+2B-2C=2$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

چه د کسرد مخرج ضربي عوامل غیرتکراري ترینومونه وي،په صورت کې یې بېنوم لیکل کیږي.

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$= 5x^2+8x+9 = (A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C$$

$A+C=5$

$A+B+2C=8$

$B+4C=9$

$A=3 \quad , \ B=1 \quad , \ C=1$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3X+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه:

د $f(x)=e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرورچه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \ a \neq 1 \ \ \& \ a \in IR$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$u=1 \quad , \ \frac{du}{dx}=0 \quad , \ du = 0\cdot dx$

$v=a^x \quad , \ \frac{dv}{dx}=\frac{a^x}{\ln a} \quad , \ dv=\frac{a^x}{\ln a}dx$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a}\cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لمړی مثال: د $f(x)=2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8}\cdot 2^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}\cdot 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1}dx = ?$$

$$\int 3^{x+1}dx = \int 3^x\cdot 3dx = 3\int 3^x dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال:

که $(x \in IR^+)$ $\quad f(x) = \ln x$ وي نو انتیګرال یې په لاندې ډول دی.

$$\int \ln dx = x\ln x - x + C$$

که $(x, a \in IR^+)$ $f(x) = \log_a x$ وي نو انتیګرال یې داسې پیدا کوو.

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\,dx = \int \ln x dx = x\log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x\ ,\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e\ \ ,du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$v = x\ \ ,\ \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\cdot\frac{1}{x}\log_a e\,dx = x\log_a x - \log_a e\int dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_A x dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3dx + \ln x dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

په تعویضي طریقه هم کولای شوچه د غیرمعین انتیګرال قیمت پیدا کړو.

لمړی مثال:

$$\int \frac{1}{2} e^{-2x-3}\, dx = ?$$

$$u = -2x - 3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -2 \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{1}{2} e^u \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4}e^u + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x + 2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دریم مثال: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int f(xdx) = \int e^{2x} dx = ?$$

$$2x = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x)dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + C$$

څلورم مثال: د $f(x) = x \cdot \ln x^2$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)dx = \int (x \ln x^2)dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int f(x)dx = \int x \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2}u \cdot \ln u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

معين انتيګرالونه هم په تعويضي طريقه حلولای شو.

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = ?$$

$$u = 2x \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = -1 \quad , \quad u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1 \quad , \quad u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}du = \frac{1}{2}[e^{u}]_{-2}^{2} = 3.627$$

دويم مثال:

$$\int_{1}^{2} 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$x = 1 \quad , \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2 \quad \quad u = x^2 = 4$$

$$\int_{1}^{2} 2x \ln x^2 dx = \int_{1}^{4} 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \int_{1}^{4} \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_{1}^{4} = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسروپواسطه دواقعي کسرد انتیګرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د یوه واقعي کسر انتیګرال پیدا کړو نو لمړی یې قسمي کسرونه پیدا کوو بیا د قسمي کسرو انتیګرالونه پیدا کوو او جمع کوو یې.

لمړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

$$=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$

$$7x-12=(A+B)x-4A-2B$$

$$A+B=7$$

$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \cdots\cdots\cdots 1$$

$$A=7-B \Longrightarrow 4(7-B)+2B=12$$

$$28-4B+2B=12$$

$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$

$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int \frac{-1}{x-2}dx+\int \frac{8}{x-4}dx$$

$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int \frac{1}{x-2}dx+8\int \frac{1}{x-4}dx$$

$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$

$$=\ln\{(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\}=\ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني سطحی د مساحت پیدا کول

Acconting area of curve plane

هغه مستوي چه د $(X\acute{X})$ د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د ګراف او $x = a$ او $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت یې دلاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کې مثبت او متمادي وي یعنې $y = f(x) \geq 0$ وي پدې صورت کې د $f(x)$ دتابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه پورتني طرف کې پروت دی او که $y = f(x) \leq 0$ وي پدې صورت کې د $f(x)$ تابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه کښتني طرف کې پروت دی.

لمړی مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د ګراف او د $(Y\acute{Y})$ د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د ګراف بحراني ټکی او د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$x = 4 - y^2$

$\acute{x} = 0 - 2y = -2y$

په بحراني نقطه دتابع مشتق صفر وي نو $\acute{x} = 0$ نو:

$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

د (y) قیمت په اوله معادله کې وضع کوود (x) قیمت لاس ته راځي

$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$
$x = 4$

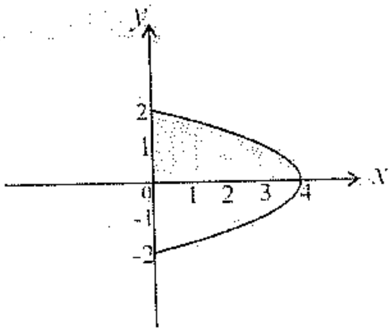
$A(4,0)$ نقطه بحراني نقطه ده.د $Y\acute{Y}$ دمحور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو او د yقیمت لاس ته راځي

$x = 0$

$4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$B(0,2) \qquad C(0,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \int_{-2}^{2} (4 - Y^2) dy = 2 \int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$A = 2\left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - 0\right] = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\frac{24-8}{3}\right) = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

دویم مثال: د $(X\acute{X})$ دمحور او $Y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ دتابع دګراف پواسطه د محصورې سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$\acute{y} = -x$

$\acute{y} = 0 \qquad x = 0$

$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. $Y = 0$ فرضوو.

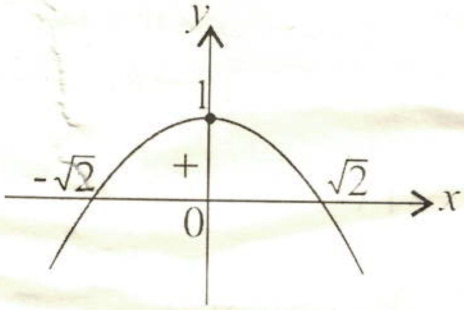
$y = 0$

$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \qquad \Rightarrow x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}, 0) \qquad\qquad C(-\sqrt{2}, 0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left(\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_{0}^{\sqrt{2}}\right)$$

$$A=2\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}^3}{6}-0\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6}\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

دریم مثال: د هغه سطحې مساحت پیدا کړئ چه د $y=x^2-3$ د تابع دګراف او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ محصوروي.

حل:

$y=x^2-3 \quad , \quad \acute{y}=2x$

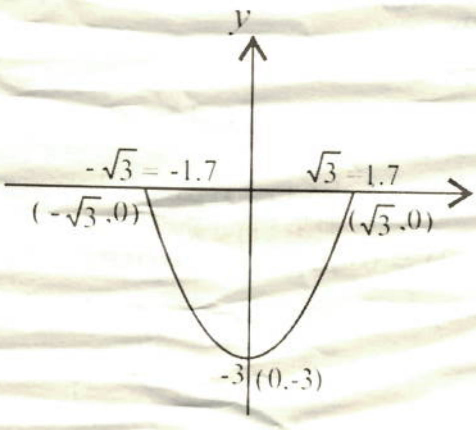
$\acute{y}=0 \quad \therefore \; x=0$

$y=0^2-3=-3 \quad , \quad A(0,-3)$

$y=0$

$$x^2-3=0\Rightarrow x^2=3\Longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$B(\sqrt{3},0) \qquad C(-\sqrt{3},0)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چه ګراف يې د $y = x^2 - 3$ د محور لاندې واقع دی نو انتيګرال يې منفي دی. او څرنګه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت يې د سر حداتو دنيمايي څخه پيدا کوو.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = -2\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)$$

$$= -2\left(\int_0^{\sqrt{3}} x^2dx - 3\int_0^{\sqrt{3}} dx\right) = -2\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\left[\sqrt{3}^3 - 0\right] - 3[\sqrt{3} - 0]\right) = -2\left(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7)$$

$$= -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع ګراف رسم کړئ او د منحني او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ فاصله پيدا کړئ؟

$$y = x^2 - 3x$$
$$\acute{y} = 2x - 3 \Rightarrow \acute{y} = 0$$
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$
$$y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4}$$

$A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ بحراني نقطه

څرنګه چه $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع د نقطې د پيدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \quad, x_1 = 0 \quad, O(0,0)$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad, \quad B(3,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4}$$

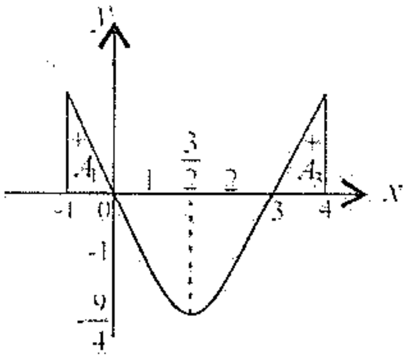
$$A = \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right) - \left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2\right\}\right] - \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right)\right] + \left[\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 - \left\{\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right\}\right]$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right) + \left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$



پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ د منحني او $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = 2$ او $x = -1$ تر منځ واقع وي.

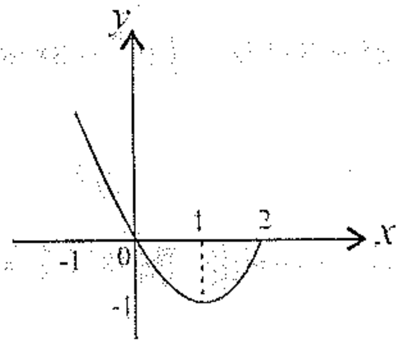
$\acute{y} = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$

$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2\cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$A(-1,1)$ بحراني نقطه

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$
$x_1 = 0 \qquad , \quad O(0,0)$
$X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2 \quad , B(2,0)$

منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې د مبداء څخه تیریږي یوه برخه یې د $[-1,0]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال یې مثبت دي، بله برخه یې د $[0,2]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ دمحور په لاندینۍ برخه کې واقع دی او انټروال یې منفي دي.

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\right\} - \left\{\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)$$
$$= -\left(\frac{-1-3}{3}\right) - \left(\frac{8-12}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{-4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

د هغه سطحو دمساحت محاسبه چه دمنحني خطو پواسطه محاصره وي:

Accounting of area bounded by tow curves

د $y_1 = f(x)$ او $g(x)$ $y_2 =$ دوه منحنيګانو پواسطه د محصور شوی سطحی دمحاسبی لپاره که $f(x) > g(x)$ وي يعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ دتابع د پاسه واقع وي د پاسنی تابع د انتیګرال څخه د لاندینۍ تابع انتیګرال منفي کوو د محصور شوي سطحی مساحت لاس ته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]d = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

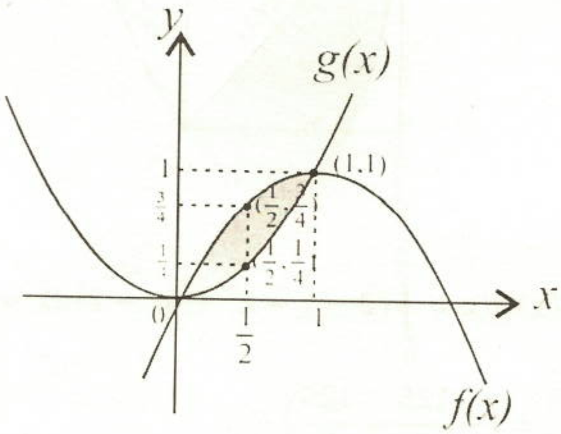
که د $G(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیګانو د ګرافونو تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل:- اول د منحنیګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$f(x) = 2x - x^2$
$g(x) = x^2$
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow$
$2x - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0$
$2x(1 - x) = 0$
$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$1 - x = 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1$



د منحنیګانو د تقاطع نقطی عبارت دي $A(1,1)$ او $O(0,0)$ دي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx =$$

$$\left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال :د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 2 \\ g(x) &= 2 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

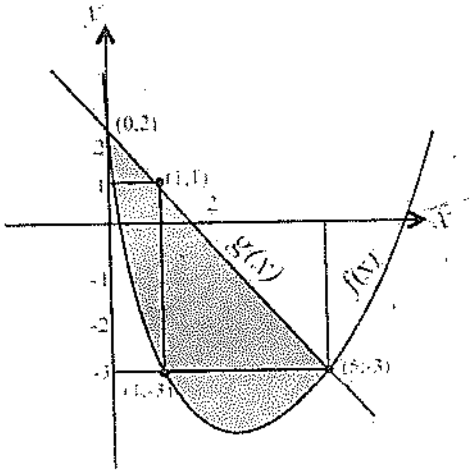
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0,2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5,-3)$$



$$A = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دريم مثال:- د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$

$-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$

$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$

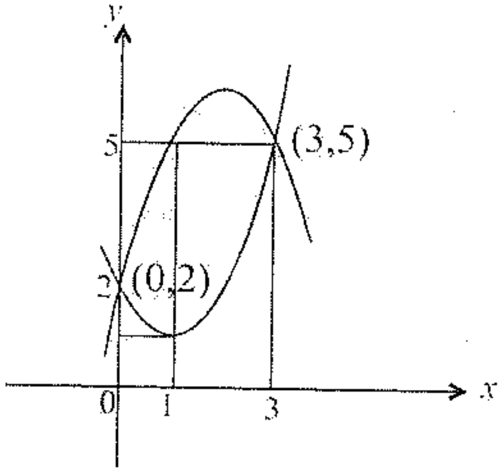
د منحنيګانو تقاطع نقطې عبارت دي $B(3,5)$, $A(0.2)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^3$$

$$= -\frac{27}{3} + 18 + 6 - 0 - \frac{27}{3} + 9 - 6 + 0 = 9$$

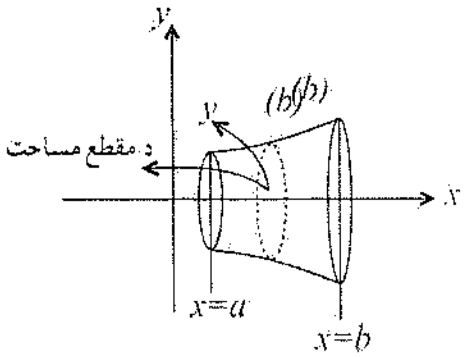


(c) ketabton.com: The Digital Library

دکروي اجسامو دحجمو محاسبه:

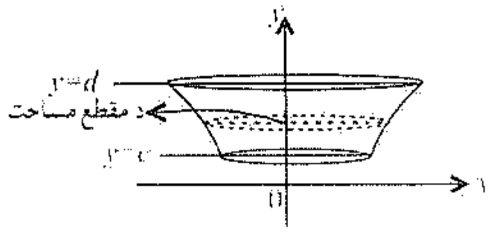
Accounting volume of Spherical things

که د $y = f(x)$ دتابع ګراف منحني وي او د $x = a$ او $x = b$ دخطو منځ کی محصوروي د منحني خط د دوران په نتیجه کی استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع یي $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دایروي سطحی دي چه مساحتونه یي $A_{(x)} = \pi r^2$ دي او د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي دي شعاع یي $y = r$ ده د حجم فارمول یي د ریمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(x)}\Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع دمنحني ګراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور وي مساحت یي نظر د $(Y\acute{Y})$ محور ته د $A_{(Y)} = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع یي $\Delta y = d - c$ ده او شعاع یي $y = r$ ده حجم یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.



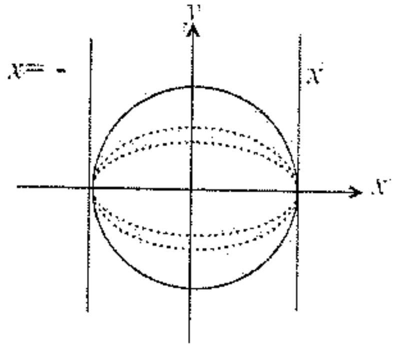
$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(y)}\Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi\{f(y)\}^2 dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال پواسطه د کری د حجم پیدا کول

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخیږي کره لاس ته راځي. د دایرې معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمی کری حجم د دایری د معادلی څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو یې د کری حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

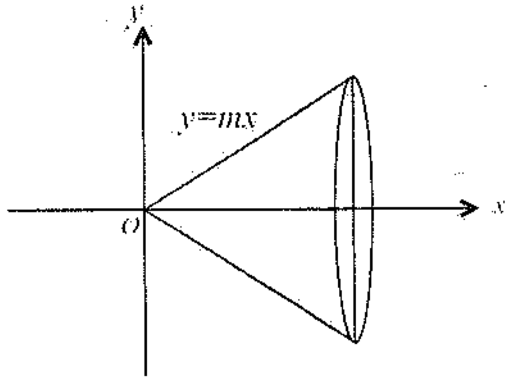
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

د انتیګرال پواسطه د مخروط دحجم پیدا کول

که د مستقیم د یوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط دهمدغه ثابتی نقطی په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_{a}^{b} \pi y^2 dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$$y = mx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

د مخروط حجم $= V = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$

د پورته شکل څخه معلومیږي چه د مخروط قاعده دایروي ده او شعاع یي د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي ده یعنی $y//r$ اود مخروط ارتفاع (h) ده چه د (x) په محور باندی منطبق ده یعنی $(x = h)$نود $y = mx$په رابطه کی یي قیمت لیکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

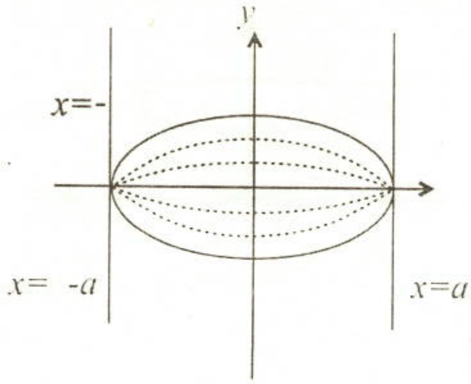
د انتیګرال پواسطه دبیضوي دحجم پیدا کول:

هغه بیضوي چه مرکز یي د وضعیه کمیتونو په مبداء واقع وي معادله یي عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

دنیمی بیضوي حجم پیدا کوو او دوه چنده کوو یي د ټولی بیضوي حجم لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{b^2}\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx=2\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=2\pi\left[\left(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right)-0\right]=2\pi\left[b^2a-\frac{b^2a}{3}\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{3ab^2-ab^2}{3}\right]=2\pi\left[\frac{2ab^2}{3}\right]$$

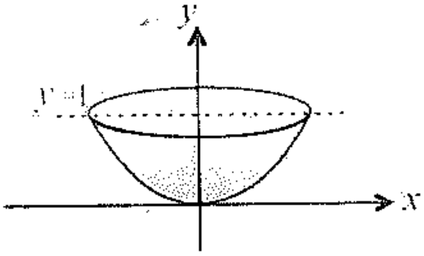
$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

که چېرته د الپس محراقونه د $(Y\acute{Y})$ د محور پر مخ پراته وي حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y=x^2$ او $y=1$ کرښی تر منځ پروت وي او د $(Y\acute{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پيدا کړئ؟

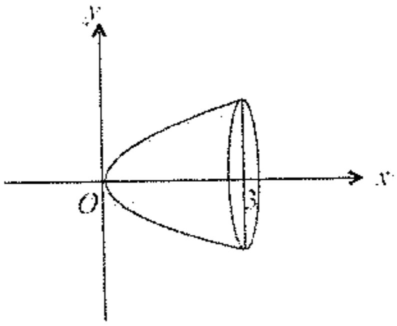
(c) ketabton.com: The Digital Library



$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy$

$= \frac{1}{2}\pi y^2 |_0^1 = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$

دويم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ او $y = 3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پيدا کړئ؟



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9\pi$$

تبصره:

که $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابعګانې $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنيګانو او د $x = a$ او $x = b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

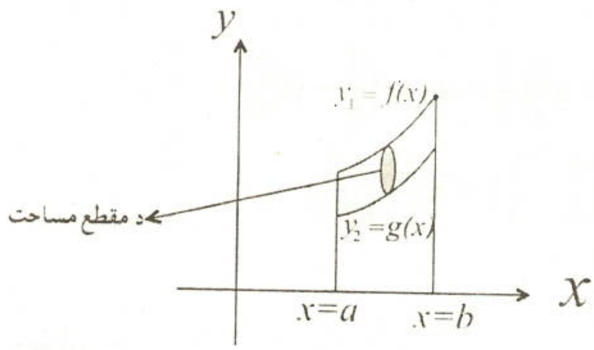
$\Delta x =$ د استوانې ارتفاع

$A(x) = \left(\text{استوانې د مقطع مساحت}\right) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه استوانی د جحم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ دتابع گراف د $g(x)$ د تابع د گراف

څخه پورته پروت وي

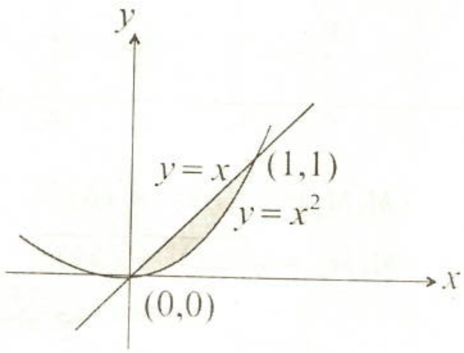


$$V = \int_a^b \pi({y_1}^2 - {y_2}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_1}^2 - {y_2}^2)dx$$

د هغه استوانی دحجم دفارمول پیدا کول چه د $g(x)$ دتابع گراف د $f(x)$ دتابع د گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_2}^2 - {y_1}^2)dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحني او $y = x$ د کرښی تر منځ د (x) د محور په شاوخوا تر منځ د دوران څخه لاس ته راځي.



$$\left.\begin{aligned} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \quad , \quad g(x) > f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

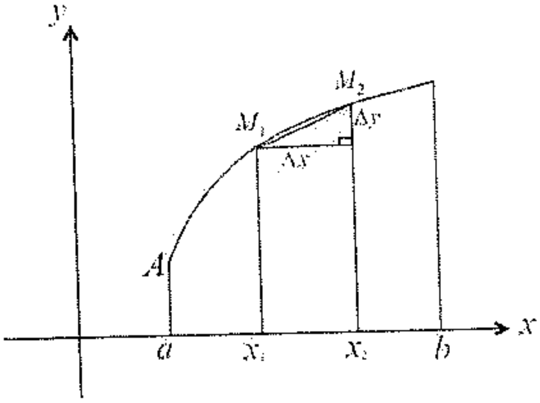
$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi \left(\frac{5-3}{15}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د AM_1 او M_1M_2 او M_2B په درې ټوټو ويشو د A, M_1, M_2 او د B د نقطو څخه په $(X\acute{X})$ عمودونه رسموو بيا M_1 د M_2 سره په يوه روښانه خط نښلوود M_1 څخه په M_2X_2 عمود رسمووا و دتقاطع نقطه په H ښيو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوود فيثاغورث دقضيي سره ليکو



$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم ليکو چه:

$$\acute{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \acute{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \acute{f}(x)\Delta t \qquad \Delta y = \acute{g}(x)\Delta t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\acute{f}(t)\Delta t\right)^2 + (\acute{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\left[\acute{f}(t)\right]^2 + [\acute{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعې څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\acute{f}(t)\right)^2 + \left(\acute{f}(t)\right)^2} \cdot \Delta t$$

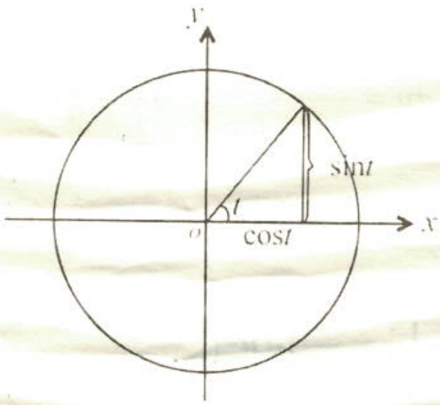
لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایرې محیط محاسبه کړئ؟

د دایرې پارامتریک معادله په لاندې ډول ده.

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

که $0 \le t \le \pi$ نو د دایرې نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2} \cdot dt$$



$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} \cdot dt = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2} \cdot dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r$ د دايرې نيمايي محيط

$2\pi r =$ د دايرې مکمل محيط

تبصره :

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \le x \le b$ انټروال کی راکړشوی ده د (x) دپارامتر په پام کی نيولو سره د منحني د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ دمنحني دقوس اوږدوالی په $0 \le x \le 4$ انټروال کی پيدا کړئ؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad , \quad \acute{f}(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \acute{f}^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad , du = \frac{9}{4dx} \qquad , \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\frac{4}{9}du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړ شوی دي د (y) دپارامتر په پام کې نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ دمنحني د قوس اوږدوالي د $[1,4]$ په انټروال کې حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4} y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \quad , \quad u = \frac{9}{4} y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4} y + 1\right)^3}\right]_1^4 \quad , \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}}\right]$$

تفاضلي معادلې *(Differential Equations)*:

هر هغه مساوات چه د یوی تابع مشتق او یو یاڅو مستقل او غیرمستقل متحوله پکې موجود وي تفاضلي معادلې بلل کیږي. لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه تفاضلي معادلى ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.
که په يوه تفاضلي معادله کی ديوه غېرمستقل متحول معمولي مشتق نظرمستقل متحول ته
ونيول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \quad , \ (4x+y)dx + xdy = 0 \quad , \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زياتومستقلومتحولو ته ونيول شي دغسی ډيفرينشيال
معادلی ته جزئي يا يوطرفه ډيفرينشيال معادلې وايي. لکه:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5\frac{\partial u}{\partial y}$$

د ديفرينشيال ترتيب:

ديوی افادی دمشتق نيولو شمېرې ته د ديفرينشيال معادلی ترتيب وايي.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 4x$$

څرنګه چه دافادی څلورم مشتق نيول شوی دی نو د ديفرينشيال ترتيب (4) ده مشتق نيول د
(d) دتوان څخه معلومېږي

د ديفرينشيال معادلی درجه :

د مشتق دلوړ ترتيب توان ته د ديفرينشيال معادلی درجه وايي.
که د ديفرينشيال معادلی توان کسري وي. توان يې بايد په صحيح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{(y''')^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (4+y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4+y')^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني معادلې درجه (2) ده.

د $y'''' = \sqrt{4+y'}$ یا $y''' = \sqrt{5x+3y}$ معادلو درجه یوه ده.

کله کله یوه دیفرینشیال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x)\frac{d^2y}{dx^3} - \cos xy = 0$$

دپورته معادلې درجه معلومه نه ده.ځکه چه د (y) نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کې ده نو نه شو کولای چه دپولینوم په شکل یې ولیکواو نه یې مشتق پیدا کیږي.

خطي دیفرینشیال معادلې *Linear Differential equation*

هغه دیفرینشیال معادله ده چه د (y)اول مشتق یې موجود وي او د (y) او (y') دضرب حاصل یې معدوم وي. لکه:

$$2\frac{d^2y}{dx} + 5\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - x^2y = 3x$$

هغه دیفرینشیال معادلې چه خطي نه وي د غیرخطي معادلو یا $(non-linear\ equation)$ په نوم یادیږي. لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4y^2 = 0 \qquad (\text{د } y \text{ توان} \neq 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\cdot\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin xy = 0$$

$$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = 0$$

څرنګه چه د دغه معادلو پروګرام د لیسې د سویئې څخه لوړ دی د عالي ریاضیاتو په مستقل کتاب کې د دیفریشیال معادلو د تفصیل تصمیم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفیق غواړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتلسم فصل

احصائیه

احصائیه په لغت کی سرشماری ته وایي.

او په اصطلاح احصائیه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي کوي قاعده يي داده چه نفوس ، حاصلات،او نور شیان محاسبه کوي او بیایي د عددو په شکل لیکي.

احصائیه ډېر قسمونه لري لکه اقتصادي احصائیه ،اخلاقي احصائیه ،سیاسي احصائیه ،د نفوسو احصائیه او داسی نور.

داتا $Data$:

راټول شوو معلوماتو ته داتا وایي.

د اطلاعاتو د راټولو طریقه:

اطلاعات معمولاًپه څلورو طریقو راټولیږي

1- د پوښتنو پواسطه

2-دلیکنو پواسطه

3- د لیدنی پواسطه

4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

که وغواړو چه د یوی کورنی د عایداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو که عایدات لږ وي کولای شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د لیکنی پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که د یوی کورنی عایدات زیات وي په ذهن کی يي حفظ مشکل وي نودلیک پواسطه يي دعایداتو اطلاعات راټولوو اوپه راجستر کی يي لیکو.چه د عایداتو اطلاعات وساتل شي او د منځه لاړ نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د لیدنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د یوه شاګرد نمرو په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طریقه داده چه نتایج یا اطلاعنامه وکتل شي او دنوموړي د نمرو په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربې پواسطه داطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً دیوه مرکب جسم داجزاؤ د ښه معلومات لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتیا وړ اطلاعات ترې لاس ته راځي.جامعه بلل کیږي.

پوښتنه: د جامعې د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وایي.

نمونه: دجامعې هغه برخه ده چه د جامعې د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره ترې پوښتنې کیږي او د جامعې خواص پکې موجود وي .لکه یو موټې وریجې د یو ګدام وریجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

دیه یوه صفت موصوف شیانو څخه د یوې برخې ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه باید لاندې درې صفات ولري.

1- د نمونې دغړي په توګه د یوه شي یا یوه کس ټاکل باید امکان ولري.

2- تر ټاکنې د مخه باید د نمونې د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونې ټول غړي باید په نمونه کې برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي اوکه نه. مثلاً که د دولت په مامورینو کې د ښوونکو معاش دوه چنده شي نودا پېښه یوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه یې:

که په یوه ټولنه کې د یوې موضوع په باب راټول شوي معلومات یا اطلاعات د یوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع یوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- کیفي تصادفي متحول
2- مقداري تصادفي متحول

1- کیفي تصادفي متحول:

چه معلومات یي په توصیفي ډول بیانیږي عدد ته ضرورت نه لري.لکه د کارګرانو د سواد اندازه ، یا د یوه کلي دینداره خلک

2- مقداري تصادفي متحول :

هغه متحول دی چه د اطلاعاتو معلومات یي په شمېر سره کیږي. او په دوه ډوله دی.

الف. متصل مقداري تصادفي متحول ب. منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول :چه معلومات یي په عدد سره کیږي او د پرلپسی عددو تر منځ یي عدد پیدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسی عددو تر منځ یي عدد موجود وي.

دفریکونسي جدول *Table of frequncy*:

هغه جدول دی چه د داتاګانو معلومات پکي ترتیب شوی وي.که جدول په عمودي ډول ترتیب شوې وي دجدول د چپ طرف ستون داتاګاني یا معلومات ښیي او دښي طرف ستون یي د داتاګانو فریکونسي ښیي.لکه درنګونوجدول چه چپ طرف رنګونه یا داتا ښیي اوښې طرف فریکونسي ښیي.او که جدول په افقي ډول ترتیب شوی وي اول سطر د داتاګانو نمایندګي کوي اودویم سطر د هری داتا فریکونسي ښیي.

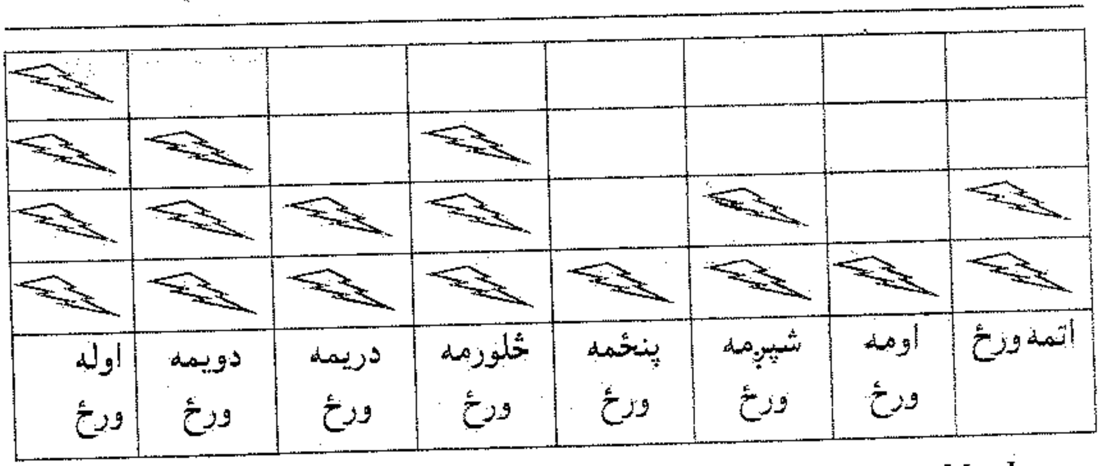
مجموعه	8	7	6	5	4	3	2	1	دکورنی غړي
40	1	3	2	6	8	9	7	4	دکورني شمېر

انځوریز ګراف یا تصویري ګراف

که په راکړشوو معلوماتو باندی د ښې پېژندګلوی لپاره شکلونه یا سمبولونه په یوه جدول کی استعمال شي دغه ګراف د انځوریز ګراف په نوم یادیږي.

دشکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زیاتی اری خرڅی کړي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



موډ $Mode$:

د راټول شوو معلوماتو زیاتې فریکونسۍ ته موډ وايي.

موډ د مالونو په خرڅولو کې ، د رایو په اچولو کې ، د امتحان په نمرو او داسې نورو شیانو کې استعمالیږي.

اوسط $Mean$:

د اعدادو د مجموعې او شمېر نسبت ته اوسط وايي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

مثال: یو دکاندار په اوله ورځ څلور کتونه په دویمه ورځ پنځه کتونه په دریمه ورځ شپږ کتونه خرڅ کړي دي وواياست چه په اوسط ډول يې د ورځې څو کتونه خرڅ کړیدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{4 + 5 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول:

هغه جدول دي چه په هره طبقه کی د داتاګانوشمېر راښيي.

مثلاً د یوه ټولګي د شاګردانو د ریاضي دمضمون نمرې په یوه جدول کی لیکل شوې دي دا نمرې په ګروپو ویشو او په هرګروپ کی دشاملو نمرو شمېرلیکو په دغه شمېرکی زیات عدد ته د داتا کثرت وایي . اودی جدول ته د داتاګانو دکثرت جدول وایي که په جدول کی د داتاګانو دکثرت عدد کوچنی یا صفر وي. دجدول جوړول فایده نه کوي.

42	25	30	35	48	67	59	51	58	78
62	77	48	56	75	78	72	71	56	43
54	53	57	63	72	70	42	55	47	20
59	40	62	12	75	26	76	72	63	56

جدول یي داسی جوړیږي:

نمرې	شمېر
0 - 9	0
10 – 19	1
20 - 29	3
30 -39	2
40 -49	7
50 -59	11
60 -69	5
70 -79	11

د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه:

په یوه طبقه کی کوچني عدد ته ټیټ سرحد اوغټ عدد ته لوړسرحد وایي.هغه داتاګانی چه په یوه طبقه کی راځي د طبقې د وسعت په نوم یادیږي.د یوې طبقې د وسعت دپیدا کولو دطبقې سرحدات یو دبل څخه منفي کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$50 - 0 = 50$	د لمړۍ طبقې وسعت
$60 - 50 = 10$	د دویمې طبقې وسعت

ډله ایز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هرې میاشتې د رخصتی ورځو ته کثرت ووایو نود ټول کال د رخصتیو مجموعه ډله ایز کثرت یا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو کثرت}}$$

مثال: په یوه ازموینه کی د دوه ټولګیو نمرې په لاندې جدول کی راوړل شوي دي دا ټولګي د نمرو په لحاظ پرتله کړئ؟

مطلق کثرت	د الف ټولګی
6	10-30 ضعیف
10	50- 30 متوسط
4	70- 50 ښه

مطلق کثرت	د ب ټولګی
19	30- 10 ضعیف
25	50- 30 متوسط
16	70- 50 ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د دواړو ټولګیو نسبي کثرت پیدا کوو

د الف ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10- 30	6	$\frac{6}{20}$	30%
30-50	10	$\frac{10}{20}$	50%
50- 70	4	$\frac{4}{20}$	20%

د ب ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10-30	19	$\frac{19}{60}$	31.6%
30-50	25	$\frac{25}{60}$	41.6%
50=70	16	$\frac{16}{60}$	26.6%

میله اي ګراف

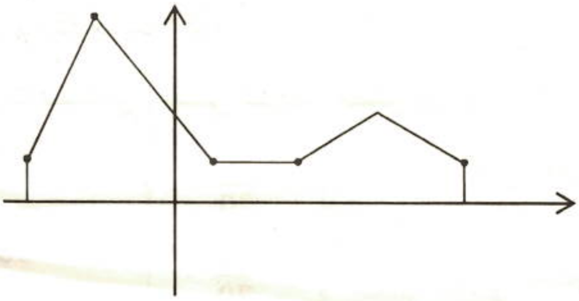
که د هری طبقی ګراف داسې رسم شي چه هر واحد يي یوه مربع وښودل شي اومربعګانی یو پر بل کېښودل شي دغه ګراف ته میله يي ګراف وايي.

مثلاً دخو کلونو دپنبی د حاصلاتو ګراف یا درنګونو ګراف چه هره مربع په یوه رنګ خوښوونکي دلالت وکړي.

دمنکسری کرښی ګراف:

داتا ګانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیتونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل يي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه ګراف ته د منکسری کرښی ګراف وايي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د گسسته یا غیر متصلو داتا گانو اوسط:

داتاگانی جمع کوو اود داتاگانو په شمېر يي ويشود داتاگانو اوسط په لاس راځي.د داتاگانو دتکرار په صورت کی د مکرری داتاگانی په فریکونسي کی ضربوو او جمع کوو يي د داتاگانو په شمېر يي ويشود داتاگانو اوسط په لاس راځي.که د داتاگانولمړی گروپ په x_1 او فریکونسي يي په f_1 وښيو او اوسط په $\acute{x}$ وښيو نود اوسط فارمول په لاندی ډول دی

$$\acute{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{n}$$

مثال :د یوه شرکت دعایداتو اندازه په لاندی ډول ده.

دنده	د افغانیو په حساب میاشتنی عاید
رئیس	50000
دوه مرستیالان	40000
منشي	20000
دری متخصصان	30000
پنځه مامورین	25000
دوه خانه سامانه	10000

د شرکت مدیر وايي چه بايداوسط عايدبايد 30000 وي ووایاست چه دادعا درسته ده

job	f	x	$f\times x$
رئیس	1	50000	$1\times 50000=50000$
مرستیال	2	40000	$2\times 40000=80000$

(c) ketabton.com: The Digital Library

منشي	1	20000	$1 \times 20000 = 20000$
متخصصین	3	30000	$3 \times 30000 = 90000$
مامورین	5	25000	$5 \times 25000 = 125000$
خانه سامان	2	10000	$2 \times 10000 = 20000$

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\acute{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده .

د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاګانو ته نښتې داتاګانې وایي.که د دغه داتاګانو فریکونسیانې مختلفې وي.هغه داتاګانې چه فریکونسیانې یې نژدې وي په یوه ګروپ کې لیکواو د ګسسته داتاګانو د فارمول په څېر یي اوسط پیداکوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بوریو کې واچول اوویي ویل چه د بوریو وزن په اوسط ډول اوه منه دي.د ښاروالۍ له خوا بورۍ بیا وتلل شولې چه نتیجه یي په لاندې جدول کې درج ده.

د هرې بورۍ وزن	د بوریو شمېر
6 - 6.5	11
6.5 - 7	14
7 - 7.5	12
7.5 - 8	8

د هر ګروپ اوسط د بوریو په شمېر کې ضربوو.اوسط یي پیدا کوو.

دبوریو وزن	دبوریو شمېر
6.25	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.75	14
7.25	12
7.75	8

$x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8$ د بوريووزن

$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$

$n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45$ د بوريو شمېر

$\acute{x} = \frac{312.25}{45} = 6.93\overline{8}$ په اوسط ډول د بوريو وزن

د داتاګانو د ګېډۍ کولو طريقه

که د داتاګانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې ؤ کولای شو چه د داتاګانو څخه ګېډۍ جوړه کړو.

لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127

115 − 120

120 − 128

128 − 143

وسعت:

د لوئي داتا او کوچنۍ داتا تر منځ فاصلې ته وسعت وايي.

د ګېډۍ اوږدوالی:

که د داتاګانو وسعت د ګېډيو په شمېر ووېشل شي د ګېډۍ طول يااوږدوالی لاس ته راځي.

ميله ئي ګراف:

که مربعګانی يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي .ميله ئي ګراف لاس ته راځي.

د متصلو داتاګانو دسته بندي:

هم جنسه داتاګانو ته متصلې داتاګانی وايي . د دسته بندۍ لپاره يي هغه داتاګانی چه د واحداتو اندازه يي نژدې وي په يوه ګېډۍ کی ليکو.

د (15) ذده کوونکواوږدوالی په لاندې ډول ليکل شوی دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	.132	146

پورته داتاګانو څخه ګېډۍ جوړې کړئ.

دذده کوونکو شمېر	د ذده کوونکو دونی اوږدوالی
6	130 – 140
5	140 – 150
4	150 – 160

وزني اوسط یا منځنۍ قیمت:

وزني اوسط یا منځنۍ قیمت. هره داتا په مربوطه ضریب کې ضربوو او د داتاګانو په مجموعه يې ويشو.

$\bar{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ وزني اوسط

مثال : د ځینو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي .لکه A, B. C, D, F چه $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري يو محصل لاندې لمبرې اخيستې دي.

مضمون	نمرې	د کریدیتونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	D	3
ژبه	F	1

د محصل د نمرو اوسط څو دې؟

حل:

مضمون	حرفي نمرې	د کریدیتوشمېر $= x$	عددي لمبرې $= w$	$w \cdot x$
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيميا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بيولوژي	D	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	F	1	4	$4 \times 1 = 4$

د کريډيټونو شمېر $= n = 12$

$$\text{د نمرو اوسط} = \bar{x} = \frac{9 + 12 + 4 + 9 + 4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

مستطيلي ګراف

په مستطيلي ګراف کې د مستطيل قاعده د ډاټاګانو اتصال يا پيوستون راښيي. مساحت د ګېډۍ کثرت راښيي. که دګېډيو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت ليکو په دې حالت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور دی.

مثال : په يوه ټولګي کې د ذده کوونکو وزن په لاندې ډول دی.

د ذده کوونکو وزن په کيلوګرام	40 – 45	45 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 90
دذده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

وزن د $(X\acute{X})$ په محور ښيو او څرنګه چه $5kg$ د ټولو منځ کې مشترک دي نو د $(X\acute{X})$ په محورټول وزنونه په يوه واحد اندازه کوو. $(40 - 45)$ په يوواحدښيو. د مستطيلو د ارتفاعګانو پيداکولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو.

$$40 - 50 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

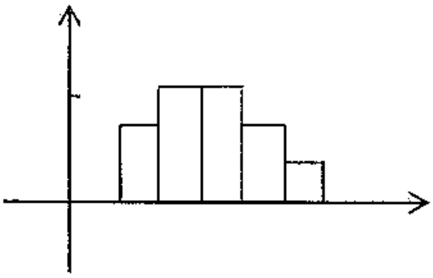
$$45 - 50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50 - 60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \rightarrow 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \rightarrow 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دايروي ګراف:

د دايرې په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاګانو ښودلو ته دايروي ګراف وايي.

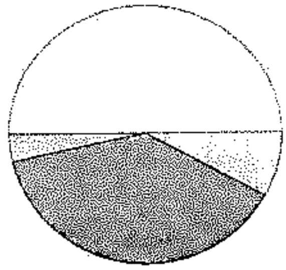
د کثرت ددرجې دلاس ته راوړلو لپاره د داتاګانو کثرت د ټولو داتاګانو په شمېر لیکواو په (°360) کې يې ضربوو دهرې ګڼې ي مرکزي زاويه لاس ته راځي.

$$\text{کثرت د درجې له جنسه} = \frac{\text{د داتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال:-د يوې مؤسسې دکارکوونکو شمېر (200) کسه دي وظيفې يې د تحصيل د د جې له جنسه وېشلې دي.

د تحصيل درجه	کثرت	مرکزي زاويه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$
ماشټر	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$
ليسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$

(c) ketabton.com: The Digital Library



میانه $Median$:

د داتاګانو د تحول وسطي عدد ته میانه وايي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سیټ په څېر یي ترتیبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد یي (3) دي.که د داتاګانو شمېر جفت وي.د منځنیو دوه داتاګانواوسط د داتاګانو میانه ده.لکه (10 4 3 9 6 2) چه میانه یي داسې پیدا کیږي.(10 9 [6 4] 3 2) چه $\frac{4+6}{2}=5$ یعنی میانه یي (5) ده.

د تحول ساحه $Evolution\ of\ field$:

که د متحول د اوږدوالي تغیر په یوه ساحه کی ممکن وي دغه ساحی ته د تحول ساحه وايي.

په ټولنه کی د ساحی وسعت د ټولنې پراګنده ګي ښيي.په هره اندازه چه دا توپیر کم وي پراګنده ګي کمه ده او دټولنې د وګړو تر منځ نژدېکت زیات دي. که د تحول ساحه صفر وه نودټولنې د څېړنې ځانګړتیاوې برابرې دي اوټولنه متجانسه ده.

مثال : په څلور میاشتنې ازموینه کې د دوه ذده کوونکو لمبرې په لاندې ډول دي.

39 38 37 36 35 33 32 25 21 20
39 35 34 34 35 35 35 34 33 20

د دواړو سیټونو د تحول ساحه پیدا کړئ او ووایاست چه په کومه ګېډه کی پراګنده ګي زیاته ده؟

حل:- د لوړو سرحدو څخه ټیټ سرحدونه منفي کوو.

$$39-20=19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مګر په اول ګروپ کی پراګنده ګي زیاته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انحراف اوسط *Average deviation*

د داتاګانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وایي

د داتاګانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدی امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کی د هغوی مطلقه قیمتونه جمع کوي.او په لاندی ډول جمع کیږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1-\acute{x}|+|x_2-\acute{x}|+\cdots+|x_n-\acute{x}|}{n}$$

مثال : د (40) تنو شاګردانو لمبری په لاندی جدول کی راکړشوي دي.

نمری	کثرت
$0-10$	2
$10-20$	7
$20-30$	4
$30-40$	5
$40-50$	10
$50-60$	12

د انحراف اوسط یي پیدا کړئ؟

$$\acute{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

f = کثرت	د داتاګانو اوسط	$f\cdot x$	$x-\acute{x}$	$f(x-\acute{x})$
2	5	10	$5-37.5=-32.5$	$2\times(-32.5)=-65$
7	15	105	$15-37.5=-22.5$	$7(-22.5)=-157.5$
4	25	100	$25-37.5=-12.5$	$4\times(-12.5)=-50$
5	35	175	$35-37.5=-2.5$	$5\times(-2.5)=-12.5$
10	45	450	$45-37.5=7.5$	$10\times 7.5=75$
12	55	660	$55-37.5=17.5$	$12\times 17.5=210$
$\frac{1}{n=40}$		1500		

$$f(x-\acute{x}) = -65-157.5-50-12.5+75+210=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل كيږي چه د جمع حاصل يي صفر دې نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کی نيسو.

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

د څوضلعي فريکونسي ګراف

د څوضلعي فريکونسي ګراف د متصلو داتاګانو د پاره استعماليږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه ګراف يي رسم کړو د هرکلاس مرکز (منحنی نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښيو

د کلاس مرکزاوفريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کی يوه نقطه تعينوي دغه نقطي وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کی $(x_1 - c, 0)$نقطه او کلاسونو په اخر کی $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو دڅو ضلعي فريکونسي ګراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندی جدول کی د داتا څو ضلعي او مستطيلي ګراف رسم کړئ.

cl =د کلاسونو حدود	$11 - 16$	$16 - 21$	$21 - 26$	$26 - 31$	$31 - 36$
f_i = مطلقه فريکونسي	3	5	8	7	2
x_i =د کلاسونو مرکز	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

$c = 5$ دی نو د دوه اختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندی ډول اجرائت کوو.

$(x_1 - 5,0) = (13.5 - 5,0) = (8.5,0)$

$(x_2 + 5,0) = (33.5 + 5,0) = (38.5,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داتا په صعودي ډول ترتيبوو. او د يو څخه تر (n) پورې کود ورکوو د $(p = 1,2,3)$ موقعیت دلاندی رابطی پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیتا کی داولی ربعی او دریمی ربعومقادیر پیدا کړئ؟

حل:

د دیتا شمېره	6	5	4	3	2	1
	140	120	100	90	85	80

د لمړۍ اودریمی ربعو ځایونه عبارت دي.

$$c_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$c_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

$q_1 = 85$ & $q_2 = 120$

صندوقچه يي ګراف:

صندوقچه يي ګراف هغه ګراف دي چه د نورو ګرافونو په نسبت د ډېټا تیت والي زيات روښانه ؛ کوي د ډېټا ګراف د لاندی اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنۍ ډېټا

ب- لمړۍ څلورمه

ج- میانه

د - دریمه څلورمه

ج- لويه ډېټا

مثال : په یوه ښارکی په (15) ورځو کی د ترافیکي پېښو شمېر په لاندی ډول دي صندوقچه يي ګراف ئي رسم کړئ.

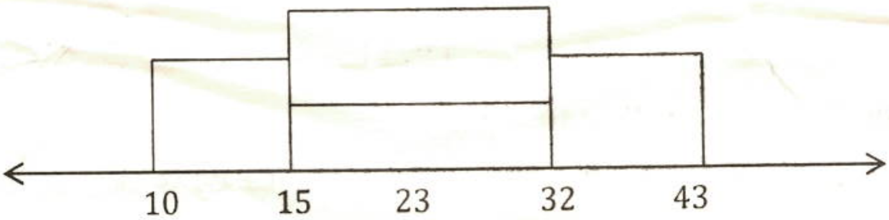
(c) ketabton.com: The Digital Library

12	10	15	23	14	27	16
34	41	43	32	18	25	31

پورتنی داتا په ترتیب لیکو.

10	12	14	15	16	18	23
25	27	31	32	34	41	43

تر ټولو کوچنی داتا $(q_1 = 10)$ ده اوتر ټولولویه داتا$(q_n = 43)$ ده میانه $(med = 23)$ده لمړی ربعه $q_1 = 15$

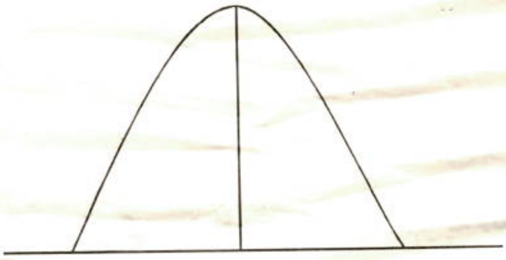


پورتنی ګراف صندوقچه یي ګراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده دلمړی او څلورمی ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 ترمنځ ده.

د نارمل منحني د مرکزي تاکونکو پرتله کول:

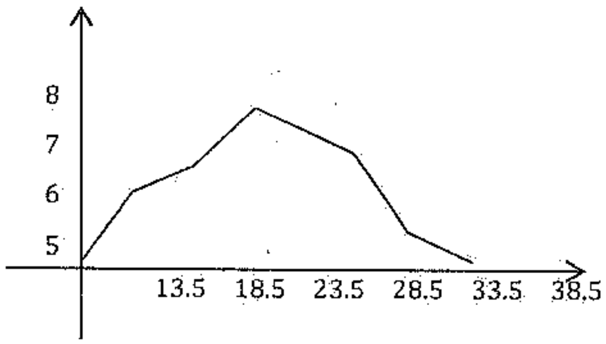
نارمل منحني یو متناظر منحني دې چه دیوه زنګ په ډول شکل لري او زیاتی طبعي پېښی د همدغه منحني په واسطه ښودل کیږي.اوسط ، میانه او موډ يي په مرکزي برخه کی قرار لري نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

که منحني متناظر وي نواوسط په میانه منطبق دی اوځرنګه چه یوه اعظمي نقطه لري نو ځکه يي موډ هم د اوسط اومیانې سره مساوي دی.

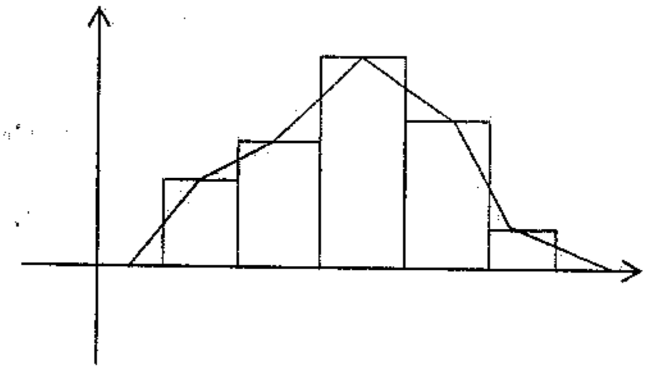


$\acute{X} = mod = med$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مستطیلي ګراف اود فریکونسي څو ضلعي ګراف:



د فریکونسي څو ضلعي دګراف راسونه د فریکونسي داړونده جدول د مستطیلو د پورتنی ضلعی په نیمایي منطبق دي دفریکونسي څو ضلعي مساحت دمستطیلو د مساحت سره مساوي دي.

د ساقی او پاڼی ګراف :*Grph of stem and wrench*

په دوه رقمي عدد کی د لسیز رقم ساقه او د یویز رقم پاڼه ده.

مثال : د سانتي متر په حساب د شل نوو پیدا شوو ماشومانود تنی اوږدوال په لاندی ډول انتخاب شوی دي.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

پورتنی داتاګانی په صعودي ډول ترتیب کړئ او څرنګه چه د(4) رقم یعنی دلسیز رقم یکی مشترک دی نو داتاګانی په لاندي ډول ترتیبوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$4 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9) \cdots\cdots\cdots 1$

د صفر څخه تر (9) پوري د رقمو تکرار دپاڼو شمېر ښيي.پورتني رقمونه په لاندې ډول هم ليکلای شو.

0			
2			
3	3	3	3
5	5	5	
6	6		
8	8		9
9	9	9	

که د (1) شمارې د جدول څخه ګراف جوړ کړو د ساقې او پاڼې ګراف لاس ته راځي چه (4) به يې قاعده او دقوس په منځ کې رقمونه به يې پاڼې وي.که پورتني جدول ته د 90° په اندازه دوران ورکړو. ميله يې ګراف لاس ته راځي.

3					9		
3	5		7		9		
3	5	6	7	8	9		
0	2	3	5	6	7	8	9

ربعي $Quarters$:

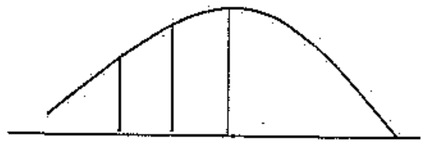
د يوه شي څلورمې برخې ته ربع وايي.

يعنې که يو شی په څلورو برابرو برخو وويشو برخې يي د اولی ربعي،دويمی ربعي، دريمی ربعي او څلورمی ربعي په نوم يادېږي.

اوله ربعه د شي 25% دويمه ربعه دشي 50% اودريمه ربعه دشي 75% وي.که داتا په صعودي ډول ترتيب شي د داتا ميانه د(Q_2)سره مساوي ده د داتا داولی نيمايي ميانه (Q_1)ده او د دويمی نيمايي ميانه (Q_3) ده.

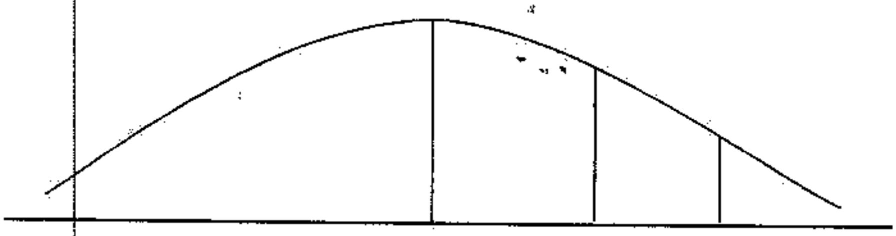
(c) ketabton.com: The Digital Library

که اوسط اومیانه مساوي وي نو تر اوسط او میانی د مخه داتاګانی اوداوسط او میانی د وروسته دېتاګانو سره مساوي دي.اوکه اوسط د میانی کینې خواته پروت وي نو دهغه داتاګانو شمېر چه داوسط ښی خواته پرتی دي زیات دی تر هغه دېتاګانو دشمېر څخه چه د اوسط چپی خواته پرتی دي.



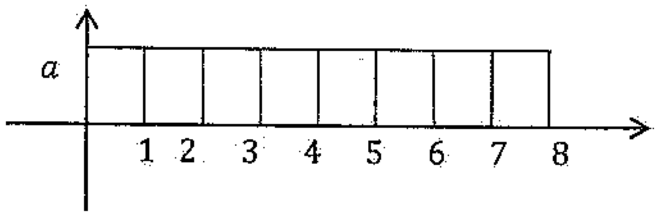
$$\acute{X} = mod = med$$

او که اوسط دمیانی ښی خواته پروت وي نود هغه داتاګانوشمېر چه د اوسط چپی خواته پرتی دي زیات دېد هغه داتاګانوتر شمېر چه د اوسط ښی خواته پرتی دي.



$$mod > med > \acute{x}$$

مثال: په لاندی ګراف کی اوسط او میانه پیدا کړئ؟



$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\acute{x} = \frac{a\cdot 1 + a\cdot 2 + a\cdot 3 + a\cdot 4 + a\cdot 5 + a\cdot 6 + a\cdot 7 + a\cdot 8}{a+a+a+a+a+a+a+a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\acute{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي انحراف

ربعي انحراف يو له هغه ټاکونکو څخه دی چه د دېټا تیت والی ښکاره کوي.

مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لږ وي په همغه اندازه دېټا نژدی وي یعنی تیتوالی يې کم وي.

کله کله دڅلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښيي چه دی ته د څلورمی د نیمايي لمن وايي.

مثال: د لاندی عددونو د څلورمو انحراف پیدا کړئ.

20 22 22 23 24 25 29 30 31 35 36

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واریانس *(Variance)*:

واریانس په لغت کی اختلاف ته وايي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاګانی ولرو دهری داتا اوسط پیدا کړود داتاګانواو دهغوی د اوسطونودتفاضل د مربعګانود مجموعی اوسط ته واریانس وایي.

د انحرافونو د مربعګانو مجموعه عبارت ده.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2 = (x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتنی مجموعه په (n) ویشواو په (s^2) یي ښیو واریانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2}{n}$$

د واریانس د پیدا کولو لپاره د لاندی فارمول څخه هم کټه اخلي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}.^2$$

مثال: دلاندی دېټا وریانس د دواړو فارمولو په مرسته پیدا کړئ

1 5 6 7 9

الف: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ دفارمول پواسطه:

$$x' = \frac{1+5+6+7+9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2}{5} - \acute{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

يادونه:

که دځو کلاسو د ښتاګانی $x_1, x_2, \ x_3, \cdots x_n$ وي او فريکونسي ګانې يې په لاندې ډول وي. $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ واريانس يې د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_1 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی

د متحول دمربع واحد د واريانس واحد دی.

معياري انحراف (مطلق تيتوالی):

د واريانس مربع جذر ته معياري انحراف وايي په (s) سره يې ښيي او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \acute{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

واحد يې د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 - 2\acute{x} x_i + \acute{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2n\acute{x}^2 + n\acute{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\acute{x}^2 \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right\} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

مثال:- د (5) ناروغانو د بدن دحرارت درجه په لاندی ډول راکړشوی ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف یې پیدا کړئ.

حل:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38 + 39 + 39 + 40 + 41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (39 - 39.4)^2 + (40 - 39.4)^2 + (41 - 39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \quad \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندی ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \acute{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \acute{x}^2}$$

چه $\acute{x}$ د ډېټا اوسط ، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبدلون ضريب يا نسبي پراګنده ګي:

د بدلون يا تغير ضريب د معياري انحراف او مطلق اوسط نسبت دى مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{د بدلونونو يا تغيراتو ضريب} = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\acute{x}}$$

که د تغيراتو ضريب په 100 کې ضرب کړو دتحول ضريب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\acute{x}}$$

د بدلون ضريب دمثبتو دېټاګانو لپاره دی.که دېټاګانی مساوي وي د بدلون ضريب صفر دی.که ټولی دېټاګانی په يوه مثبت عدد کی ضرب شي د بدلون ضريب تغير نه کوي.

که دهری دېټاسره يو مثبت عدد ورزيات شي د بدلون ضريب کوچنی کيږي.

مثال: د $(1.3.5)$ دېټا د بدلون ضريب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دويم مثال: د تلويزون د تصويري لامپونو توليدوونکې د(A) او (B) دوه ډوله لامپونه توليدوي د (A) متوسط عمر (1495) ساعته او د (B) متوسط عمر (1875) ساعته دې معياري انحرافونه يي په ترتيب سره (280) او (310) دي دکوم لامپ دضريب بدلون زيات دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنګه چه $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامپ ډېره پراګنده ګي لري ولی تینګښت یي کم دي.

په نورمال منحني کی تیتوالی:

د نورمال منحني په دواړو خواو کی د $(\acute{x} - s, \acute{x} + s)$ اویاد $(\acute{x} - 2s, \acute{x} + 2s)$ پواسطه پراګنده ګي یا تیتوالی پیدا کیږي.

مثال: د یوی موسسی د معاش اوسط (12500) او معیاري انحراف یي (700) دی.

الف: په نورماله توزیع کي د فیصدی په نظر کی نیولو سره د معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: ایا ویلای شئ چه (14000) افغانی معاش غیر عادي معاش دی؟

حل: لمړي $\acute{x} \pm s$ او $\acute{x} \pm 2s$ او $\acute{x} \pm 3s$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د (s) له مخی	فاصله د افغانیو له مخی	فیصدي
$\acute{x} \pm s$	11800 − 13200	68%
$\acute{x} \pm 2s$	11100 − 13900	96%
$\acute{x} \pm 3s$	10400 − 14600	99.6%

$$\acute{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \acute{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو (14000) افغانی معاش غیرعادي معاش دی ځکه چه د $(2S)$ داندازی څخه زیات اوهم د $(\acute{x})$ داندازی څخه ډېر دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورماله توزیع مشخصات:

د نورمال په دواړو خواو کې د نورمال په نسبت د منحنی د ټيټوالي، جګوالي او نژدېکت عامل ته شاخص وايي. شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص *Skewness*:

هغه توزیع چه د اوسط په دواړو خواو کې متناظره نه وي خلمېدل نومیږي. د لاندې دوو ضریبونو پواسطه ښودل کیږي.

الف- د خلمېدلو ضریب: د خلمېدلوضریب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره استعمالیږي. فارمول یې په لاندې ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \acute{x})^2}{s^2}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نوتوزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحني د توزیع خلمېدل مثبت دي *Possitive Skewness* یعنی خمېدل یې ښۍ خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحني دتوزیع خلمېدل منفي *Negative Skewness* دي یعنی چپې خواته خلمیږي. که چېرته دکثرت جدول موجود وي خلمیدلو(عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^3}{\sum s^a}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

ب- د پیرسون دخلمیدو ضریب: د پیرسون د خمېده ګۍ ضریب په لاندې ډول دی.

$$sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پړسوب *kurtosis* شاخص:

دا شاخص ښیي چه څه وخت منحني جګوالی اوڅه وخت ټیټوالی لري فارمول یې په لاندې ډول دی‌ یک

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

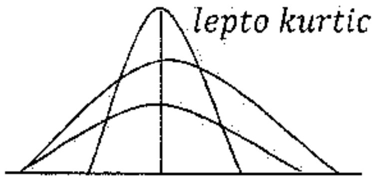
(c) ketabton.com: The Digital Library

که دکثرت جدول موجود وي نو دپرسوب فارمول په لاندې ډول دی.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دې فارمول کې (s) معیاري انحراف دی.دغه شاخص دپرتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراګنده ګۍ پورې اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.د ضریب دری ډوله خلمېدل او پرسوب ښیي.



حل : په نورمالي توزیع کې $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پرسوب یي د نورمال منحني څخه ډېرېږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پرسوب یي کم دی.

څومتحوله تولنې:

که په یوه کلاس کې یوازې دشاګردانو دونې په باب خبرې کیږي نو په دغه ځای کې متحول یو دی.او که دشاګردانو د چاغښت په باب هم خبرې وشي نو په دې صورت کې متحولونه دوه کیږي.د دغسې متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکي د قایمو مختصاتو په سیستم کې جوړیږي.لمړی د متحولونو معادلې جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کې په نخښه کووا و وصلوو یې.

مثال: یو متخصص د غذائي موادو تاثیر په یو شمېر موږکانو باندې وڅېړل دغذاء تر تطبیق دمخه یې د هر موږک وزن اندازه کړ او بیا یې د عملیې تر تطبیق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړاو لاندې دېټا ګانې یې په لاس راوړلې.

$$(1.8).\ (2.3).\ (1.7).\ (3.5).\ (2.4)$$

په هره جوړه کې لمړی مختصه د موږکانو د غذاء ترتطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذائي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موږکانو شمېر	1	2	3	4	5
د موږکانو لمړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذائي موادو تر تطبیق وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

پورتنی جدول په ستوني ډول جوړ کړئ.

دموږکانوشمېر	د موږکانولمړنی وزن	دغذائي رژیم ترتطبیق وروسته د موږکانووزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پورتنی دېټاګانی دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

دپراګنده ګی ګراف Scatter Diagram:

د دېټا داندازه کولولپاره په یوه مستوي کی پاشل شوی نقطی د پراګنده ګراف په نوم یادیږي.

لاندي مرتبې جوړي راکړشوي دي .

$$(1,2) , (2,3) , (3,4) , (4,5)$$

پورته دېټا د شېر او خط دېټا ده.که سکه پورته خواته وغورزول شي او دشېر مخ کښته خواته وي نود (y) په محور یو ډېریږي.

د موږکانو د غذائي رژیم دېټا په لاندی ډول ده.

$$(2,4) , (1,8) , (2,3) , (3,5) , (1,7)$$

په دغه دېټا کی د هری نقطی تابع بېله ده. نو له همدغه جهته ځو متحوله ټولنه ورته وائي.

پېوستون او دپېوستون ضریب:

د یوه مستقیم او نقطو تر منځ دفاصلی د پیدا کولو فارمول ته دپېوستون ضریب وائي او په (r) سره یې ښیي .او د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندې د ډېټا د موږکانو د غذائي رژیم ډېټا ده.

د موږکانو شمېر	لمړنی وزن (x)	وروستنی وزن (y)	xy
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

د موږکانو د غذائي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په (x) او وروستني وزنونه په (y) ښیو د موږکانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad , \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x{}^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y{}^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}} = \frac{\sum x + \sum y}{n}$$

$$= \frac{(1\cdot 8) + (2\cdot 3) + (1\cdot 7) + (3\cdot 5) + (2\cdot 4)}{5}$$

$$= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته راځي.

$$\text{د پیوستون ضریب} = r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

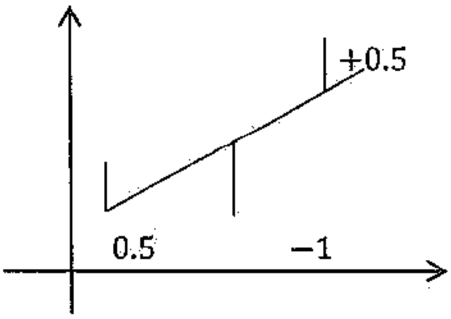
د خطي مېلان معادله:

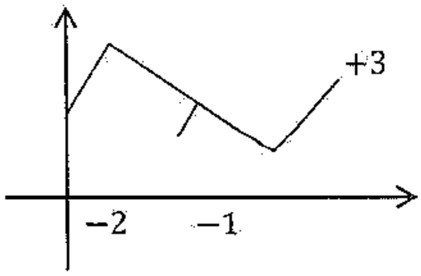
$y = ax + b$ د مستقيم خط معادله ده. چه دمستقيم خط مېلان دی که $a > 0$ وي کرښه متزايده ده. اوکه $a < 0$ وي نوکرښه متناقصه ده که (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کی صدق وکړي.

نونقطه په خط پرته ده . که دنقطی په مستوي داسی پاشلی وي چه کرښی ته نژدی وي نود پيوستون ضريب به (-1) او$(+1)$ ته نژدی وي که يوه داسی کرښه چه معادله يي $y = ax + b$ وي د ټکو له منځه داسی تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدی وي نو د دغه کرښی د ترسيم لپاره بايد يوه داسی معادله جوړه کړو دفارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کی نيسو.

x	1	5	9
y	6	5	7

د دغه دېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوی يي دمشاهدی څخه معلوموو.





په پورته دواړو حالتونو کی د کرښو د خطاګانو الجبري مجموعه صفر ده .

د الف حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ دکرښی د خطاګانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښی دخطاګانو الجبري مجموعه

څرنګه چه په دواړو حالتو د جمعی حاصل صفر دی نومناسبه کرښه نه معلومېږي.نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامی يو اوبل دمنځه يونسي نووروسته تر مربع کولو يي جمع کوو.

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ د خطاګانو ددويم توان جمع

(c) ketabton.com: The Digital Library

دخطاګانو د دویم توان جمع $= (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$

هغه کرښه چه د مربعګانو مجموعه یي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریګریشن کرښی وایي.د رګریشن اومشاهداتوتوپیرپه وښیو نو د دویم توانونو دلاکوچني والي په خاطر لیکو.

د خطاګانو ددویمو توانونو مجموعه $= \sum(y-\bar{y})^2 = \sum\{y-(ax+b)\}^2$

$$= \sum(y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2$$

په دې حالت کی (x) او (y) ثابت عددونه دي (a) او (b) متحولین دي

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د (a) او (b) دمحاسبی دغه لارد لږکیو مربعګانو دتګلاری په نوم یادیږي.

نتیجه :-د ریګریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار دمعلومولو دبل متحول د مقدار څخه استفاده کیږي.

مثال :- لاندی دېتاپه نظر کی ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ریګریشن کرښه نظر ته پیدا کړئ؟

حل : څرنګه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_x{}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{{s_x}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum (y_1 - \bar{y})^2}{\,}$$

$$= \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5}$$

$$= \frac{\mathbf{4 + 1 + 0 + 1 + 4}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} = \mathbf{2}$$

$${s_y}^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{{s_y}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4 + 6 + 6 + 4 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r\frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی څېړل کیږي عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یي نمونه یي فضاء او د قیمتونو سیټ یي د حقیقي اعدادو سیټ وي. که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,..}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \cdots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي اوپیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي په دی صورت کی د دی احتمال چه (x) د (k_1) او (k_2) په منځ کی وي دلاندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$

که چېرې (x) پیوسته ناځاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چېرې ناځاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط $(Expected\ Value)$ د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي. د لاندی رابطی سره برابر دي.

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots\cdots\cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د (x) اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که (x) تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د (x) وریانس چه د (s^2) په شکل ښودل کیږید لاندی رابطی سره برابر دی.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

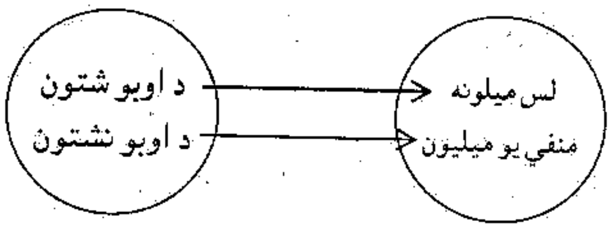
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوی غونډۍ په سر یوه څاه وکني د اوبو څاه په یومیلون افغانۍ تمامیږي . که څاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس میلونه افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي یو میلون تاوان ورکوي.

الف :-دا موضوع د یوی تابع په شکل وښییئ.

ب:- که د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال (0.8) وي په دی صورت کی د احتمال تابع ،اوسط (*Expected Value*) ، وریانس او د تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ؟

د الف حل:



د ب حل: تصادفي متحول، داحتمال تابع ،اوسط ،وریانس، او معیاري انحراف په لاندی جدول کی ښودل شوي دي.

معیاري انحراف	واریانس	دتصادفي متحول دمربعاتوانحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	اوسط	د تابع احتمال	تصادفي متحول
s	$s^2=[x_i-E(x)]^2f(x_i)$	$[x_i-E(x)]^2$	$E(x)=\sum x_i f(x_i)$	$f(x_i)$	x_i
4.4	$4.84\cdot 0.8=3.872$ $77.44\cdot 0.2=15.488$	$(-1-1.2)^2=4.84$ $(10-1.2)^2=77.44$	$-1\cdot 0.8=-0.8$ $10\cdot 0.2=2$	0.8 0.2	−1 10
	$\sum s^2=19.360$		1.2	0.1	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت:

د احتمال دوه جمله يي توزيع يوه مجزا (گسسته) توزيع ده چه د مختلفو پېښود توصيف لپاره استعماليږي.

د برنولي ناڅاپي ازمايښت په برياليتوب او نابرياليتوب په دوه دستودسته بندي کيږي.

د برنولي توزيع کولای شوچه په $P(x = m) = P^m(1-P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$ بڼه وښيو.
(P) د برياليتوب او $q = I - P$ دنابرياليتوب احتمال دی.

که يو ازمايښت (n) ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي.چه دهرازمايښت دبرياليتوب احتمال په (P) او دنابرياليتوب احتمال په (q)ښيو (n) ځله ازمايښت څخه د (m) ځلي برياليتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x \le m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \qquad ,0 \le m \le n$$

د دوه جمله يي دتوزيع اوسط په $\bar{x} = np$ اومعياري انحراف يي په $s = \sqrt{npq}$ ښودل کيږي.

مثال: د شکرې د مرض څخه د يوه مريض د جوړېدلو احتمال(0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي ځومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او يا د (3) څخه تر (4) تنو پوری جوړشي.

حل:

$n = 15 \quad , \quad m = 5 \quad , \quad P = 0.4 \quad . q = 0.6$

$P(m=5) = \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5}(0.4)^5 \cdot (0.6)^{15-5}$

$= \dfrac{15!}{5!\,(15-5)!} \times 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \dfrac{360360}{120} \cdot 0.00006191$

$= \dfrac{22.3098876}{120} = 0.1859$

$P(3 \le m \le 4) = \sum_{i=3}^{4} \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i}$

$= (3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3} + (4)^{15}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{15!}{3!\,(15-3)!} \cdot (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!\,(15-4)!} \cdot (0.0256)(0.6)^{11}$$

$$= \frac{2730}{6}(0.000139264) + \frac{3270}{24}(0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24}$$

$$= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601$$

د پواسن داحتمال توزيع:

د پواسن د احتمال دتوزيع فارمول دا $P(x = m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$

او $e = 2.718281 \cdots$ دی.

مثال: (200) كسانو دطياري ټيکټ اخيستی دی كه د مسافرينود نه راتګ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) كسه رانشي څو دي؟

حل:

$$n = 200 \quad , \quad P = 0.01$$

$$P(x - m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad , \lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{8}{7.389046158}}{\frac{6}{1}}$$

$$P(3) = \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه كوو.

$$P(x = m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ P = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.09$$

$$P(x - m) = P(3) = \binom{200}{3}(0.01)^3(0.09)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!\,(200-3)!}(0.01)^3(0.09)^{197} = 0.1814$$

د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

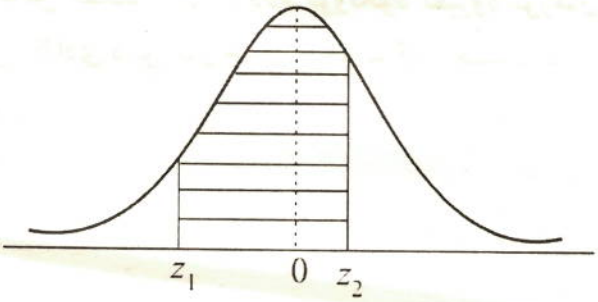
(c) ketabton.com: The Digital Library

د جدول دجوړولو شکل د احصائیوي دېټا د ستېنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

$z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ چه (z) د ستېنډرډ نورمال متحول او منحني ته دستېنډرډ نورمال منحني يا د نورمال احتمال منحني په نوم یادیږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندې مساحت د منحني د يوې برخې مساحت دی او $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ سره يې تر بدلولو وروسته په لاندې ډول وښيو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z, 0,1)\, dz$$



د ستېنډرډ نورمال د توزيع احتمال دجدول د استعمال له لارې کولای شو. د جدول په عمودي ستون د (z) د مقدا ردوه لمړي رقمونه د اعشاريي دعلامی دواړو خواوته رقمونه د منحني ارتفاع راښئي اوپورتنی سطرد اعشاريي دعلامی سلیز رقم د منحني دواحد قاعده راښئي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پیدا کړئ؟

حل: د (z)په ستون کی (1.5) او په سطر کی (0.06) پیدا کوو ګوروچه د(1.5) دعددپه کرښه او د (0.06) دعدد په ستون کی واقع دی (0.9406) دی چه همدغه دمنحني مساحت دي.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستګاه داسی تنظیم شوی ده چه که(952)ملي لېتره مايع په بوتل کی واچوي معیاري انحرا ف يي (4) ملي لېتره کيږي که مايع د (952) او (956) ملي ېترو تر منځ وي معیاري انحراف يي څو دی؟

حل : لمړۍ د له جنسه پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاداشت:

که د پواسن په فارمول کې د (λ) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال رابنیي.

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددې احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره وي؟

حل:

$$\lambda=60 \qquad , \qquad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \qquad , \qquad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}\cdot 3^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}\cdot 3^4}{4!}$$

$$=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\frac{81}{20.0854}}{\frac{24}{1}}=\frac{1\cdot 81}{24\cdot 20.0854}=\frac{27}{8\cdot 20.0854}$$

$$=\frac{27}{160.6832}=0.168032$$

د نورمال توزیع:

دنورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندې ډول ده.

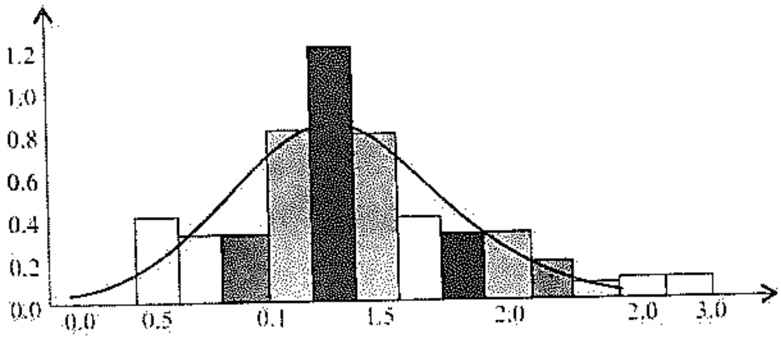
$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

x پېوسته تصادفي مقدار (s) معیاري انحراف او $f(x)$ د منحني جګوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعګانو څخه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټر ماشین دتېلو دسوځولو په وخت کې یوه اندازه مضرلوګی خارجوي د هغه مضر لوګي مقدارچه د (46) موټرانو څخه تولیدیږي په (1980) میلادي کې دیوه فزیکدان پواسطه چه لورنزن نومېده وڅېړل شو. لوګی یوه اندازه N_2 او (O_2) لري لاندې مستطیلي ګراف د N_2 او O_2 اندازه چه واحد یې $gr/_{mil}$ دي او په(46) موټرانوکې دتېلو د سوځېدوڅخه تولیدیږي ددغه موټرانو نورمال احتمال توزیع ، اوسط او وریانس رابنئي د هرمستطیل مساحت د مستطیل دقاعدې او ارتفاع دحاصل ضرب څخه لاس ته راځي.مثلاً په څلورم ستون کې چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پورې یې د قاعدې طول دی مساحت یې په لاندې ډول لاس ته راځي $\frac{4}{46}\times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

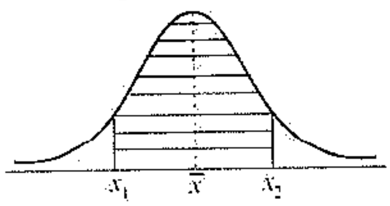


د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت اود هغه ستېنډرډ کول:

کله چه (x)پیوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ قیمت واخلي نوباید د (x) داحتمال دتوزیع له تابع څخه انتیګرال ونیول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \overline{x, s})dx$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z_1 = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{952-952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956-952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د ښخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر ښخه تر (1) پوری ده. د جدول ښخه معلومیږي چه $P(0 \le z \le 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%) ډک شوي وي د (952) ښخه تر (956) پوری مایع لري.

دویم مثال : په یوه خاص مضمون کی د ذده کوونکود نمبرود نورمال توزیع اوسط (70) اومعیاري انحراف یې (8)دی د نورمال جدول ښخه په ګټه اخیستوسره د (54) ښخه تر (84) پوری فیصدي پیدا کړئ؟

حل:

$$z_1 = \frac{54-70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

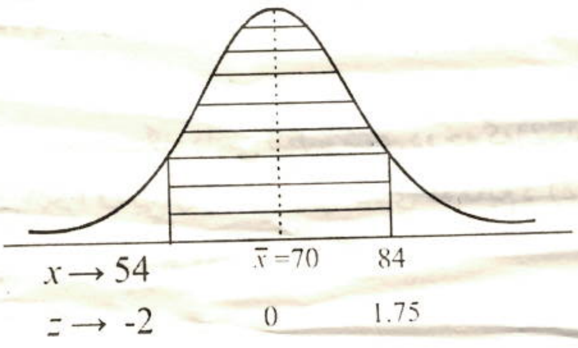
$$z_2 = \frac{84-70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$

$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخیستنل

ناڅاپه نمونه اخیستنه:

که دټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدلو کې هم چانسه وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنې په ټولوعناصرباندې یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه یي نمونه اخیستنه:

په دې نمونه اخیستنه کې ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوې وي.

خوشه یي نمونه اخیستنه:-که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بیلابیلو ځانګو ویشواو له هرې ځانګې څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهرې ټولنې عددي خصوصیاتو (اوسط ، معیاري انحراف)ته د ټولنې پارامتر وائي.

د هرې ټولنې د عددي نمونه ګیرې خصوصیاتو(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

د $(x_1, x_2, x_{3,} \dots x_n)$ ناڅاپه متحولونو ته د (x) یوه ناڅاپي نمونه وایي.که چېرته یي تابع په دې ډول تعریف شوې وي.

$$f(x_1, x_2, \dots\dots x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطۍ (5) سپینې او(7) تورې ګلولې شته د قطۍ د منځ څخه (5) ګلولې یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي.د ټاکل شوو ناڅاپه نمونو د تصادفي متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد دتورې ګلولې لپاره اود (1) عدد د سپینې ګلولې لپاره انتخابوو.

د (x_1, x_2, x_3) ناڅاپه متحولونه د برنولي نا خاپه متحولین دي. د $P = \frac{5}{12}$ او د $i = 1,2,3$ د مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(0)=\left(\frac{5}{12}\right)^{0}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-0}=1\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{12}$$

$$f(1)=\left(\frac{5}{12}\right)^{1}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-1}=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{144}$$

$$f(2)=\left(\frac{5}{12}\right)^{2}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-2}=\frac{25}{144}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{-1}=\frac{25}{144}\cdot\frac{12}{7}=\frac{25}{84}$$

$$f(3)=\left(\frac{5}{12}\right)^{3}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{-2}=\frac{\frac{125}{1728}}{\left(\frac{7}{12}\right)^{2}}=\frac{144\cdot 125}{1728\cdot 49}=\frac{125}{12\cdot 49}=\frac{125}{588}$$

$$f(4)=\left(\frac{5}{12}\right)^{4}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-4}=\frac{\frac{5^4}{12^4}}{\frac{7^3}{12^3}}=\frac{12^3\cdot 5^4}{12^4\cdot 7^3}=\frac{5^4}{12\cdot 343}$$

$f(5)=?$

د نمونې د اوسط توزيع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ناځاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناځاپه نمونې د احتمال توزيع عبارت ده.

x	x_1	x_2	$\cdots x_n$
(x)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots\ \frac{1}{n}$

د $\bar{x}$ دمتحول اوسط $E(\bar{x}_n)=\mu$

د $\bar{x}_n$ دمتحول وريانس $U(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$

د نمونه يي وريانس $s_n^2=s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

د نمونه يي وريانس اوسط $E(S^2)=\delta^2$

په داسې حال کې چه $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ نمونه يي اوسط μ دټولنې اوسط δ^2 د ټولنې ريانس وي او s^2 دنمونې وريانس وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

نولسم فصل

احتمالات Probability:

که د یوی پېښی وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښی یا احتمال په نوم یادیږي. د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دي.

مثلاً دمعارف رئیس بی سواده دې نو احتمال يي صفر دی.

لمر د ختیځ له خوا راخیژي احتمال يي یو دي.

چانس:

که دیوی پېښی دوړاندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغی پېښی ته چانس وايي.

په چانس کی دممکن ، ناممکن، خامخا او داسی نوری کلیمی استعمالیږي.

تصادفي پېښه :

هغه پېښه چه نتیجه یي معلومه وي. تصادفي پېښه، نا خاپي ازمایښت یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمدد بامه راولویدلو پښه یي ماته شوله.

تجربوي احتمال:

هغه احتمال چه د یوی تجربی په سرته رسولو کی په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وايي.

لکه د (Cl_2) او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو دشمېر نسبت ته نظري احتمال وايي.

$$\text{تصادفي پېښی احتمال} = \frac{\text{د تصادفي پېښو دحالتونوشمېر}}{\text{د تجربی دټولوحالتونوشمېر}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبي كثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندیز ته ویل کیږي. مګر نسبي کثرت د ازمایښت تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابیږي په ناڅاپي پېښو کې دتجربي احتمال د پېښې دنسبي کثرت سره مساوي وي دنسبي کثرت مجموعه (1) ده.

مثال: تېرکال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوریدلو.

الف: اورښت او د وریځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

الف: $30\% = \frac{1}{3} = \frac{10}{03} =$ نسبي كثرت

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

په نمونه یي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددې امکان شته چه هر ممکن حالت منځ ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي یا اتفاقي پېښه وایي.

احتمال په (P) او $P(A)$ د (A) د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه یي فضا (n) غړي ولري په دې صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسې سکه په نظرکې نیسو چه دواړه مخونه یي شېر وي.لاندې سوالونو ته جوابونه ووایي.

الف: چه پېسه شېر راشي.

ب: چه پېسه خط راشي.

ج: ایا دشېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

الف: $P\left(\text{شمېر}\right) = \frac{1}{1} = 1$

ب: $P\left(\text{خط}\right) = \frac{0}{1} = 0$

ج: $0 \neq 1$

مثال: د یوه نورمال رمل اچول په نظر کې نیسو څرنګه چه د نمونې فضا $S = (1,2,3,4,5,6)$ ده نو له همدې کبله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(=) = P\left(1 = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%\right)$$

د یوې نمونه یي فضا ناڅاپي پېښه:

د (S) د نمونه یي فضا هرفرعي سیټ یوه اتفاقي پېښه ده چه په (E) سره ښودل کیږي. که د غړو شمېر یي (n) وي د اتفاقي پېښو ټول شمېر (2^n) دی.

د ښار په ګڼه ګوڼه کې د ورځې د (10) او (12) بجو په شاوخوا کې د احمد د جېب څخه یوه غلا شوې ده د پولیسو تر پلټنې وروسته معلومه شوله چه دري ګڼکپان په دغه سیمه کې لیدل شوي دي دپېښې نمونه یي فضاده د احتمالاتو له مخې د غلو په باب څېل معلومات ولیکئ؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونه یي فضا $S = (x, y, z)$ ده کلي سیټ یي پیدا کړئ؟

$E_1 = (x)$ یوازې غل دی.

$E_2 = (y)$ یوازې غل دی.

$E_3 = (z)$ یوازې غل دی.

$E_4 = (x, y)$ (x, y) دواړه غله دي.

$E_5 = (x, z)$ (x, z) دواړه غله دي.

$E_6 = (y, z)$ (y, z) دواړه غله دي.

$E_7 = (x, y, z)$ (x, y, z) دري واړه غله دي.

$E_8 = \{\ \} = \phi$ یو هم غل نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال قاعدې:

1- د يوې اتفاقي پېښې احتمال تل د (0) او (1) تر منځ وي که اتفاقي پېښه (E) وي نو:

$$0 \le P(E) \le 1$$

2- که چېرې (S) د يوه ازمايښت نمونه يي فضا وي نو $P(S) = 1$ د (S) ناڅاپي پېښه د واقع‌منې پېښې په نوم يادېږي.

3- د ناشونې پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو د اچولو نمونه يي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده $T =$ خط او شېر $= S$ دي لاندېني احتمالات پېدا کړئ؟

الف: دواړه سکې شېر دي.

ب: لږ ترلږه يوه سکه شېر ده.

ج: دواړه سکې يو شان دي.

د: دواړه سکې يو شان نه دي.

ها: د سکو يوه هم خط نه دي.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \qquad \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ونه ایز دیاګرام

کولای شو چه هر ناڅاپي ازمایښت د ونه ایز دیا ګرام پواسطه رسم کړو طریقه یي داسی ده چه د ازمایښت دپېل څخه دیاګرام پېل کووبیا د هری نتیجی څخه ځانګی شروع کوویه هره ځانګه کی نتیجی د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول ګراف ته ونه ایز دیاګرام وایي د احتمالونو د جمع حاصل د هري ځانګی د نشرېدو په ټکي کی د (1) سره مساوي دي همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوي دي.

مثال: په یوه کڅوره کی څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنګ(r) دری توپونه په شنه رنګ (g) او یو توپ په تور رنګ (b) رنګ شوي دي توپونه د لیدو لپاره راایستل کیږي او بیا بېرته اېښودل کیږي مربوطه احتمالات یي پیدا کړئ؟

حل:-

w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
$P(w)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

په پورته جدول کی ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرګندیږي

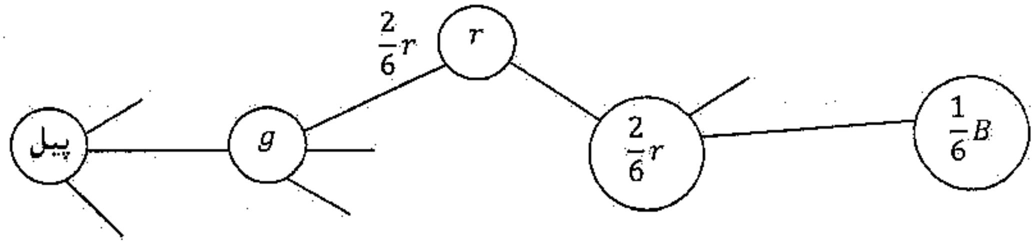
د ضرب د حاصل لومړی قاعده:

د یوې لومړنی پېښي احتمالات عبارت دي د پېښی د پېل څخه د پېښی تراخره پوری داحتمالاتو د ضرب د حاصل څخه. په دغه موضوع باندی د ښه پوهېدلو لپاره د یوی کورنی شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کوو یي د ټولی کورنی د غړو شمېر لاس ته راځي.

مثال:- په یوه کڅوره کی سري مري دری شنی مری او یوه توره مری ایښودل شوي دي مری د کڅوری څخه داسی راوباسو چه ترکتلو وروسته بیاکڅوری ته اچول کیږي اوپېل (شنې ،سرې، تورې) څخه وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$$

یعنی د (شنی، سري ،توري)مریو د وتلو احتمال 0.92% دی

د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- که د (S)په یوه نمونه یي فضا کی د (A) او (B) دوه داسې ناڅاپي پېښې وي چه $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- که د(S) په نمونه یي فضا کی (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښې یود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: که د(S) په نمونه یي فضا کی د(A) یا(B) یوه پېښه رامنځ ته شي نو د $(A \cup B)$ پېښه هم را منځ ته شوی ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{او} B \subseteq A \cup B$$

4-که د (A) پېښه د (S) په نمونه یي فضا کی پېښه شوی وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښه په دی معنی ده چه اقلاً د (A) یا (B) پېښه، پېښه شوی ده.

مثال: که د (C) پېښه د (A) او (B) دوه بیلا بیلی پېښی په ځان کی ولري نو په دې صورت کی د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه هم په ځان کی لري.

حل:فرضاً $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3\}$ وي او $C = \{1,2,3,4\}$ وي لیدل کیږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$دي ځکه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دناخاپي پېښو تقاطع

1- په یوه نمونه یي فضا کې د دوه یا څو ناڅاپي پېښو تقاطع د تبدیلي د قانون پیروي کوي.

فرضاً د (A)او (B) او (C) ناڅاپي پېښې دي نو $A\cap B=B\cap A$ رابطه صحیح ده.

2- که په یوه نمونه یي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې واقع شي نود دوی تقاطع دهری ناڅاپي پېښې فرعي سيټ دی.

فرضاً د (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښې دي نو $A\cap B\subseteq A$ او $A\cap B\subseteq B$

3- که د (S) په یوه نمونه یي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A\cap S=A, A\cap\phi=\phi$$

4- که A او B دوه ناڅاپي پېښې وي او $A\subseteq B$ وي نود دواړو پېښو تقاطع کوچنۍ پېښه ده.

$$A\cap B=A$$

مثال: دیوه ښوونځي دفوټبال دټیم څخه دری تنه د والیبال په ټیم کې هم شامل دي که دفوټبال دټیم غړي په (A) اود والیبال د ټیم غړي په (B) وښیو او ددواړو ټیمونو ګډ غړي په (C) وښیو نو دټیمونو تر منځ اړیکه د سیټ تیوري په شکل ولیکئ:

حل:

$$A\cap B=C\Rightarrow A\cap B\subseteq A\ \&\ A\cap B\subseteq B$$

کلي او مکمله سيټ

د څو فرعي سیټونو مجموعي سيټ ته کلي سيټ وایي. که په یوه کلي سيټ کې دوه سیټونه موجود وي نودا سیټونه یو د بل مکمله سیټونه دي.

که (S) یوه نمونه یي فضا وي او (A) یوه ناڅاپي پېښه وي او $(\acute{A})$ یوه بله ناڅاپي پېښه وي چه د (A) سره په یوه وخت کې پېښه شوی نه وي. (S) د دغه دواړه سیټونو کلي سيټ دي او $(\acute{A})$ د (A) مکمله سيټ دی.

الف: $A\cup\acute{A}=S$

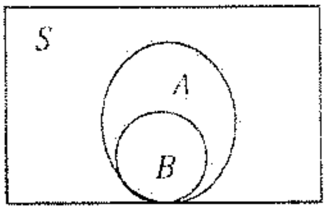
ب: $P(A\cup\acute{A})=P(S)=1$

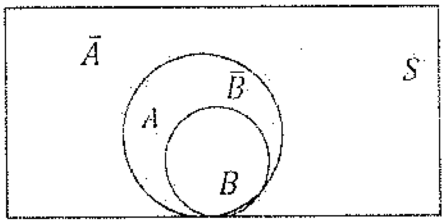
(c) ketabton.com: The Digital Library

ج: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

که د (S) په يوه نمونه يي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه د (B) ناڅاپي پېښه په بر کې ولري په ګرافيکي ډول وښيي چه د $(\bar{A})$ ناڅاپي د $(\bar{B})$ يوه ناڅاپي پېښه په بر کې لري

حل: ځرنګه چه $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلوميږي چه:





د سيټونو او ماډل جوړونه:

د سيټ تيوري په واسطه د احتمالاتو مسايل حليږي يعنې د ناڅاپي پېښو د پېښېدو د مسايلو حل اوس د سيټ تيوري په واسطه حليږي چه په دې اساس د سيټ تيوري د فعاليت ساحه نوره هم پراخه شوه

مثال د په نمونه يي فضا کې د او ناڅاپي پېښې په لاندې دياګرام کې راکړشوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی

a: د دې احتمال چه د (A) يا (B) حادثه ناڅاپي پېښه شي.

b: د دې احتمال چه د (A) پېښه ،پېښه شي.

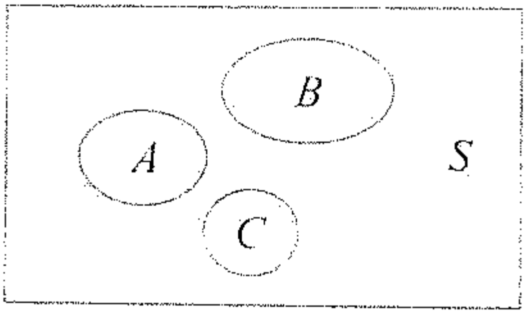
c: د دې احتمال چه د (C) پېښه پېښه نه شي

حل:

a: د (A) يا (B) احتمال په حقيقت کې د $A \cup B$ احتمال دی ځرنګه چه دا پېښې يو د بل څخه بېلې دي نو يعنې $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



b. د دی احتمال چه د(A) پېښه ناڅاپه پېښه شي د $(\acute{A})$ د پېښې څخه عبارت دی چه د $(\acute{A})$پېښه نه ده پېښه شوی د $(\acute{A})$ پېښه د (B) او (C) د پېښو اتحاد دې یعنی دغه دواړه پېښې نه دي پېښې شوي نو $P(\tilde{A}) = P(C \cup B)$ څرنګه $P(A) = 1 - P(\acute{A})$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره ددی چه د (C) پېښه ناڅاپه پېښه نه شي هغه پېښې دپېښېدلو د احتمال سره برابره ده چه د (A) او (B) پېښې. پېښې شي یعنی$(A \cup B)$ دپېښې د پېښېدلو څخه عبارت دی نو.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

د شمېرنې اصل:

د دوه سیټونو د شمېرنې اصل په ترکیب او ترتیب پورې اړه لري

1- د دوه سیټونو دعناصرو دشمېرنې لپاره عناصر سره ضربوو مجموعه یې د سیټونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده.

2- که د یوه سیټ عناصر(m) اودبل سیټ عناصر(n) وي نو $(m \times n)$ یې د حاصل ضرب مجموعه ده.

مثال د$(0.1.2.3.4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړیږي. او څو عددونه په (2) پوره وېشل کیږي

حل $(4 \times 5 = 20)$ دوه رقمي عددونه وز څخه جوړیږي او $(3 \times 4 = 12)$ عددونه په (2) پوره وېشل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرموټيشن(ترتيب) $Permotaion$:

که څو شيان ولرو او ددې شيانو څخه جوړې جوړې کړوپه دغه جوړو کې د شيانو بدلولو ته ترتيب وايي.

(a, b, c, d) څلور حروف راکړشوي دي غواړو چه دوه ،دوه يې جوړه کړو نو په لاندې ډول يې جوړه کوو.

(ab, ac, ad, bc, bd, cd) نو که څلور شيان دوه،دوه جوړه کړو نو شپږ جوړې ورڅخه جوړيږي.

فکتوريل:

د مثبتو مسلسلو عددونوضربولوته فکتوريل وايي. او په (!) سره ښودل کيږي.

$0! = 1$ او همدا ډول $1! = 1$ دی. ثبوت يې په (277) صفحه کې وګورئ.

(n) مسلسل عددونه په(P_n) ښيي $(P_n = n!)$ دی.

ترکيب $(Combinatuin)$:

هغه روش چه د هغه پواسطه د بينوم ضريبونه پيدا کيږي د ترکيب په نوم ياديږي. اوپه لاندې ډول ليکل کيږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$0 \le k \le n$ او $\binom{n}{k}$ داسې ويل کيږي. (k)دپاسه (n)

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبينيشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قيمت پيدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1\cdot 2\cdot 3)} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وریښن(تبدیل) *Variation*:

په تبدیل اوترتیب کی د جوړو شمېر ته تبدیل وایي.

وریښن یا تبدیل په (V_k^n) ښیي. د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V_k^n = k!C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کی (4) کسه یو ځان د ریاست لپاره دویم ځان داول معاونیت لپاره دریم ځان د دویم معاونیت لپاره او څلورم د منشي په توګه ځان کاندیدوي. د امکاناتو شمېر يي پیدا کړئ؟

حل:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{26!}$$
$$= 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

د ټاکنو ډول k غړي د n غړو څخه	دامکاناتو شمېر	
	پرته له تکرار څخه $k \le n$	سره له تکراره $k \le n$
ترتیب یا پرموتېشن	$P(n,k) = n!\,, n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبېمیشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریښن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

مثال: د یوی سکي په اچولو کی چه د راتګ امکان یي په یا خط کی ممکن دی او د هری خوا دراتګ احتمال یي د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي، (3) ځلي، (6) ځلي، (8) ځلي، (16) ځليوغورځول شي د هم چانسو لمرنیوپیښو په نمونه یي فضا کی یو ونه ایزګراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتني مثال کې د شېر او خط د راتګ احتمال په یو ،دوه،درې،څلور خلي غورځولو کې په لاندې جدول کې را ټول شوي دي

څلور خله		درې خله		دوه خله		یو خل		هیڅ خل		د سکې غورځول
احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	
$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	
$\frac{4}{16}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1			
$\frac{6}{16}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{1}{4}$	2					
$\frac{4}{16}$	3	$\frac{1}{8}$	3							
$\frac{1}{16}$	4									

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وارد احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کې د حدونو ضریبونه دي . دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په یوه جدول کې ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کې تری استفاده وکړو

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$

$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

$$(a+b)^5 = \textcircled{1}a^5 + \textcircled{5}a^4b + \textcircled{10}a^3b^2 + \textcircled{10}a^2b^3 + \textcircled{5}ab^4 + \textcircled{1}b^5$$

$$(a+b)^6 = \textcircled{1}a^6 + \textcircled{6}a^5b + \textcircled{15}a^4b^2 + \textcircled{20}a^3b^3 + \textcircled{15}a^2b^4 + \textcircled{6}ab^5 + \textcircled{1}b^6$$

عمومي شکل یې دا دی.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د خط راتلو احتمال په مرتبه کې عبارت دی

$$P\left(\text{د خط راتک}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بینوم قضیه:

د بینوم قضیه مخکې ویل شوې ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره.

که د یوې ناڅاپي پېښې پېښېدلو ته (1) او نه پېښېدلو ته یې (0) ووایو لاندې جدول د $n=2$ لپاره بشپړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

k	ممکنی پایلی	احتمال	د بینوم د ضریبونو ارایه
0		$(1-P)^2$	$\binom{2}{0}P^0(1-P)^2$
1	10	$2P(1-P)$	
2	11		$\binom{2}{2}P^2(1-P)^2$
		$\{P+(1-P)\}^2$	$\sum\binom{n}{k}P^{k(1-P)^{n-k}}=?$

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په (n) ځله تکرار کی د بینوم دانکشاف (k). ام حد لاندی احتمال لري.

$$\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کیږي او د برنولي د پرابلم د احتمال په نوم یادیږي.اوداسې لیکل کیږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-kb}$$

د دوه جمله يي احتمال:

که یوه نمونه يي فضا دوه غږي ولري نو که د یوه غړي احتمال يي (P) وي نو دبل حالت احتمال يي $(1-P)$ دی چه بایلل ورته وایي.که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کی او د بایللو احتمال په ښودل کیږي.

$$k-\text{ام ځلي وړل په n ځلي تکرار کی}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

مثال: که په یوه تجربه کی د وړلو احتمال$\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بایللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه يي په لاندی ډول کیږي.

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کی ددی احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتی انجونې دي څو دي؟

حل:

$$P = \frac{1}{2}$$

نو

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}}{2^5} = \frac{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}}{32} = \frac{10}{32} = 0.3125 = 31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځوددی احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کی راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل ورل وګنیو نو

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$
$$Q = 1 - P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$
$$= \binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{4}{9} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2}\cdot\frac{4}{729} = \frac{60}{729}$$
$$= 0.0823 = 8.23\%$$

څلورم مثال: د یوی سکی د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دي که څلور واره وغورځول شي د دی احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1 - P = \frac{1}{3}P$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P = \frac{3}{4} \qquad , \quad Q = \frac{1}{4}$$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: يوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ ترلږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زيات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دې ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \qquad \text{so} \qquad 2^n > 100 \quad \Rightarrow n \geq 7$$

متمادي او غير متمادي فضاګانې:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يي فضايو معين يا غير معين سيټ دی. يعنې که د فضا عناصر معين $(Countable)$وي نمونه يي فضا معينه ده. چه پرېکړې فضا هم ورته وايي او که د فضا عناصر معين نه‌وي نو فضا غير معينه ده چه نښتې يا متمادي فضا هم ورته وايي

مثال: د لاندې فضاګانو څخه کومه يوه متصله او کوم يوه پرېکړې ده؟

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل

ج: د (30) ذده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د يوې د کرې د حرارت د درجې لوړېدل د (100) درجو د سانتي ګيريډ څخه تر (1000) درجو د سانتي ګيريډ پورې.

هـ: د (30°) او (45°) درجو ترمنځ د يوې زاويې ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل. څرنګه چه د (الف او ج) نمونه يي فضاګانی دمحدودو عناصرو د شمیر شحخه جوړی شوي دي نو پربکړی فضاګانی دي او(ب ، د او ها) فضاګانی دنامحدودوعددونوڅخه جوړی شوي دي نو نښتی یامتمادي فضاګانی

ورته وايي.

دویم مثال. عبداله د خپل کور دګلانو د اوبولو لپاره یو واترپمپ وا خیستلو د واتر پمپ عمر د ساعت له مخې پیدا کړئ؟

حل . { } خالي سیټ د واتر پمپ د ورانېدو وخت دی او $S = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0$ د واتر پمپ د عمر اوږد والي دی.

هم چانسه پېښې

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په یوه تجربه کې برابر وي د هم چانسه پېښو په نوم یادیږي

که چېرې $S = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ یوه نمونه يي فضا وي نو (e_i) د هر $i = 1,2,3,\cdots n$ لپاره یوه ناځاپه لمړنی پېښه ده په دې شرط چه $0 \leq P(e_i) \leq 1$ وي

د لمړنیو پېښو داحتمالاتو مجموعه دیوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

مثال. څلور کسه په یوه لوبه کې اشتراک کوي د هر یوه نمونه يي فضا هم چانسه ده د هر یوه د ګټلو احتمال پیدا کړئ؟

حل. که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو دهرې ناځاپه لومړنی پېښې احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دې نو لیکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنی پېښی هم چانسه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال:

پیوسته نمونه يي فضا ګانې د لايتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل يي د اعدادو په محور، سطحه او د اجسامو په حجمونو کې ليدل کيږي. د دغه ډول ټکو ښودنه ممکنه نه ده مګر د احتمال د نسبت لپاره يي خطونه ،سطحې او حجمونه په توټو وېشو. د اعدادو د محور څخه د يوه حرف لکه (x) او په سطحو کې د دوه تورو لکه (x, y) څخه او په احجامو کې د درې تورو څخه لکه (x, y, z) څخه استفاده کوو

لومړی مثال: د اعدادو په محور د (0.3) په انټروال کې د يو ټکې وټاکئ چه:

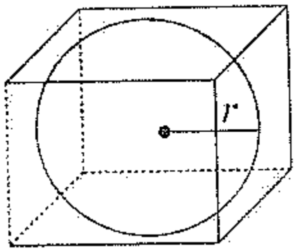
$$1 < x < 2.5$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دویم مثال: يوه کره په يوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې يوه نقطه ټاکو ايا ددې احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$ دکرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$



مشروط احتمال:

که S نمونه يي فضا او (A) او (B) په دغه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې وي په داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ يعنې د (A) د پېښې احتمال نظر د (B) ناڅاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فارمول څخه لیکو چه:

1-

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$
$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

2-

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عمومیت ورکړو نو لیکو چه:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) + \cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_n}(A)}$$

لومړی مثال: یو شاګرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ د ګاډی څخه ګټه اخلي چه (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیری پېښې:

1- د ګاډی پواسطه راتلل

2- په ټاکلي وخت رسیدل اوپه دې صورت کې د (A) مشروط احتمال نظر (B) ته $P_B(A)$ مطلوب دې ؟

حل:

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\bar{3} = 58.33\%$$

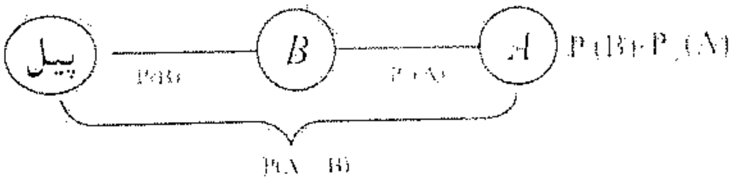
(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د په نمونه يي فضا کی د او د دوه ناځاپي پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعريف سره سم ليکو چه:

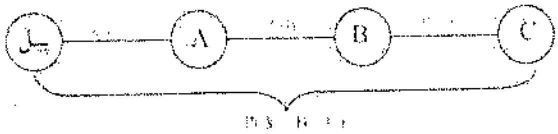
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ايز دياګرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د او او دري پېښو لپاره هم د تطبيق وړ دی

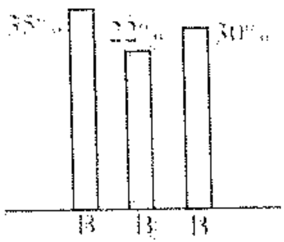


$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A\cap B}(C)$$

مثال - د B_1، B_2 او B_3 په دري ولايتونو کی په پارلماني ټاکنو کی د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند فيصدي برخه ورکړشوی ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او يا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي.

ناځاپي په لاندی ډول تعريفوو



V: هغه رايي ورکوونکي چه جمهوري ګوند يي ټاکلی وي.

B_i د ولايت رايي ورکوونکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ولایت	درایو ورکوونکو فیصدي	جمهوري ګوند ته رای ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

1- B_i دوه په دوه یو دبل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د (S) نمونه يي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \cup_{i=1}^{3} B_i$ دی نو:

$B_i \cap \mathbb{V}(i = 1,2,3,)$ یو له بل سره مستقل صورت نیسي.

$$V = \bigcup_{i=1}^{3} (B_1 \cap V)$$

د دوارو خواو د احتمال لپاره لیکو.

$$P(V) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{3} (B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P_{B_i}(V)$$
$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V)$$
$$= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3$$
$$= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794$$
$$P(V) = 27.94\%$$

تعریف:

که چیرې د $B_1, B_2 \cdots, B_n$ رای ورکوونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1 \cdots n$ پېښو عمومي حالت د (S) په نمونه يي فضا کې یوه پېښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم یادیږي او د (A) اختیاري ناڅاپي پېښې لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د B_i چه $i = 1 \cdots n$ د (S) نمونه يي فضا د یوې پېښې لپاره چه $P(B_i) \neq 0$ د (A) ناڅاپي پېښې احتمال چه $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayex)$ بائیزفارمول پواسطه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i-1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بائيز فارمول زيات استعمال لري لکه $n = 2$ لپاره $B_2 = \bar{B}$ ، $B_1 = \bar{B}$ په پام کې ونيسو په حقيقت کې B_1 او B_2 د (S) دنمونه يي فضا پيښې دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

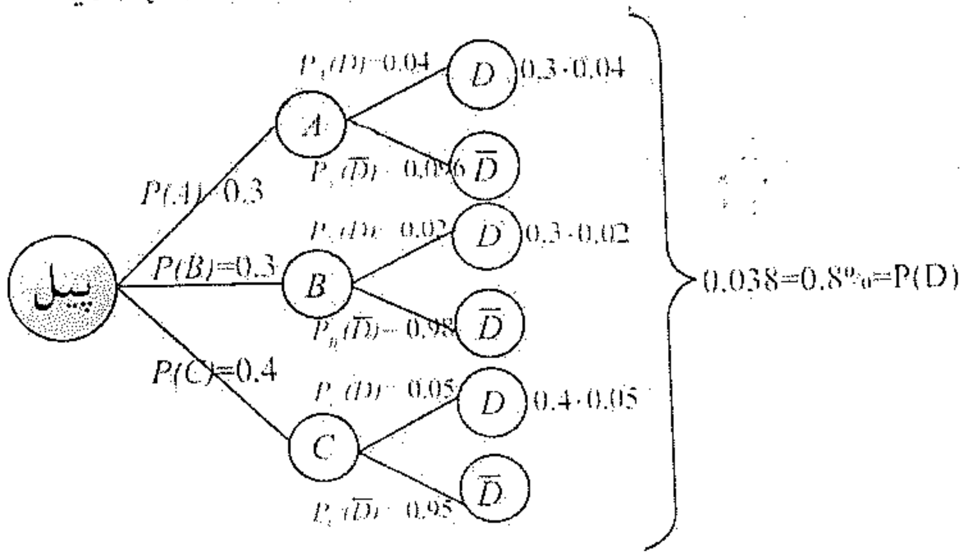
پورتنی فارمول د لپاره د بائيز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال:په يوه فابريکه کې د A ، B او C ذری ماشينونه په ترتيب سره 30%، 30% او 40% د برق ګروپونه توليدوي که چېرته په ماشينونو کې دګروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره 4% ، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: ددې احتمال چه يو اخيستل شوی ګروپ وران دی.

b: په کوم احتمال خراب شوی ګروپ د C په ماشين پوری اړه لري.

c: يو نوی توليد شوی ګروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشين پوری اړه ولري.



د b جز حل:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د C جزء:

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

د ناڅاپه پېښو استقلالیت:

د ناڅاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیټ سره مساوي وي نو دغه دوه ناڅاپي پېښو ته مستقلې پېښې وايي يعنی پېښې استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د A او B پېښې ګډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د یوه ښوونځي ذده کوونکي د سترګو رنګ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ور کړئ.

الف: ټاکل شوی ذده کوونکی یو هوښیار ذده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی ذده کوونکی توری سترګې لري

حل: څرنګه چه $P_B(H) = P(H)$ اوسربېره پردی $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ناڅاپي پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعدة صدق وکړي پرته له هغې پېښې یو له له بلې سره تړلې دي.

نتیجه:

1- $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{B} \cap \bar{A}$, $\bar{B} \cap A$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پیدا کولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap \bar{B})=a(1-b)$	a
$\bar{A}$	$P(A\cap B)=b(1-a)$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2- د A ، B او C دري ناخاپه پېښې چه يو د بل څخه مستقلي دي نولرو چه:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دويم مثال: د لاندي متقاطع جدول خالي ځايونه ډک کړئ؟

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A\cap \bar{B})=$?	?
$\bar{A}$	$P(\bar{A}\cap B)=?$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})=$?	?
	?	0.6	

حل: ځرنګه چه $P(\bar{B})=0.6$ نو $P(B)$ داسې پيدا کوو

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$
$$P(\bar{A})=1-P(A=1-0.3=0.7)$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چه:

$$P(A\cap \bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$
$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

که پيدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځايو کې وليکو جدول تکميلېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شلم فصل

موهومي عددونه Imaginary Numbers

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدی کبله کله چه په دویمه درجه معادلو کی $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترځو چه په (1795) میلادي کال یوجرمني ساینسدان چه Friedrich Gouss نومېدلو $(-1 = i^2)$ وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلود حل لپاره لاره خلاصه شوه چه $(\Delta < 0)$ وه.

موهومي عدد (Imaginary Numbers) یو عدد دی چه په روزمره ژوند کی په راکړه ورکړه کی نه استعمالیږي. مگر دعلمي مسایلو د حل لپاره د زیات اهمیت وړ دی لمړی حرف یي د ایوتا (iota) یوناني کلمی څخه اخیستل شوی دی

مثال:- $\sqrt{-36}$ جذر پیدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دویم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$
$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنګه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کیږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مګر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

1: $i = \sqrt{-1}$ 2: $i^2 = -1$ 3: $i^3 = -i$ 4: $i^4 = 1$
5: $i^5 = i$ 6: $i^6 = -1$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i \ , i^{4n+2} = -1 \ , i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه یي منفي وي د پورته جدول پواسطه حلیږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$
$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$
$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$
$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$

لاندې موهومي عددونه د طاقت څخه وباسئ:

$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$

د اعدادو سیټونه:

1- د طبعي اعدادو سیټ $Set\ of\ Natural\ Numbers$:

د(1) څخه تر لايتناهي (∞) پورې د اعدادو سیټ ته د طبعي اعدادو سیټ وايي په (IN) سره يې ښيي.

$$IN = (1،2،3،4،5 \cdots \infty)$$

2- د مکمل اعدادو سیټ $Set\ of\ Whole\ Numbers$:

د (0) څخه تر (∞) پورې داعدادو سیټ ته د مکمل اعدادو سیټ وايي په (w) سره يې ښيي.

$$w = (0،1،2،3،4، \cdots \infty)$$

3- د تام اعدادو سیټ $Set\ of\ Integer\ Numbers$:

د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د تام اعدادو سیټ وايي او په (I) سره يې ښيي.

$$I = (-\infty، \cdots ، -3،2،1،0،1،2،3 \cdots \infty)$$

4- د دناطق اعدادو سیټ $Set\ Of\ Rational\ Numbers$:

صحيح عدد، مختوم کسر، غېر مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي او په (Q) سره يې ښيي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \left(1،2،15،109،\frac{4}{5}،\frac{2}{3}\cdots\right)$$

5- د غیرناطق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*:

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناطق عدد بلل کیږي او په $(\bar{Q})$ سره ښودل کیږي

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47}\ ,\ \frac{13}{49}\ ,\ \sqrt[3]{2}\ ,\sqrt{3}\right)$$

[illegible] حقیقي اعدادو د سیټ په نوم یادیږي او په (IR) سره یي ښیي

$$\mathrm{IR} = (\mathrm{Q} + \overline{\mathrm{Q}}) = \left(-\infty،-3،+6،\sqrt{2}،\frac{2}{5}،\frac{5}{6}،\frac{13}{49}\cdots\infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*:

هغه عددونه چه یوازی د (i) حرف پکی موجود وي او د حقیقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کی نه وي موهومي عددونه بلل کیږي. لکه $\left(-i\ ,11i,\ \ \frac{2}{3}i\ ,\ \sqrt{5i^3},\right)$

دموهومي عددونو څلورګوني عملیي:

1- د موهومي عددونو جمع اوتفریق:

هم علامه عددونه جمع کووعلامه یي شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه عددونه یو دبل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$1:\ 15i - 31i = 16i$ $\qquad$ $2:\ 14i - i = 13i$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کی ،عدد په عدد کی ضربوو. توانونه یي جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33\cdot i^2\cdot i = -33(-1)i = 33i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عددپه عدد ویشو او توانونه يو دبل څخه منفي کوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه *Complex Numbers*.

هغه عددونه دي چه د حقيقي عدد او موهومي عدد د مجموعې يا تفاضل څخه لاس ته راغلې وي لکه ($5 + 11i$, $8 - 20i$) او داسې نور. مختلط عدد په (z) سره ښيي $z = 3 \pm 21i$ او داسې نور.

صفري مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفر وي.

مثال:- که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کيږي دغه عدد ته صفري مختلط عدد وايي.

مثال: لاندي ($i - 3$,4 ,$2i$, $2i - 3$) عددونه په معياري شکل وليکئ؟

مختلط عددونه	معياري شكل $(z = a + bi)$
$i - 3$	$-3 + i$
4	$4 + 0i$
$2i$	$0 + 2i$
$2i - 3$	$-3 + 2i$

د مختلطو عددونو څلورګونی عملیې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقيقي عدد د حقيقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بيا هم يو موهومي عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 17 + 45i \\ \underline{28 - 106i} \\ 45 - 61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ کیږي

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$Z_1 + Z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3i + 4i) = 5 + i$$

د مختلط عددونو د جمعی دعملیي خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقیقي عدد د حقیقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} 29 - 18i \\ \underline{\pm 35 \pm 67i} \\ 64 + 49i \end{array}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

د مختلط عددونو ضرب:

علامه په علامه کی عدد په عدد کی ضربوو او توانونه یي سره جمع کوو.

مثال:- $z_2 = c + di\,,\ z_1 = a + bi$ دوه مختلط عددونه راکړشوي دي دضرب حاصل یي پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$
$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

اول مثال: $z_2 = 8 + 5i, z_1 = 3 - 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1.z_2$ پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 5i)(8 + 5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2$$
$$= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25$$
$$z_1 \cdot z_2 = 49 - 25i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلط عدد مزدوج $(Cnjugate\ of\ Complex\ Number)$:

د یوه مختلط عدد مزدوج د بینوم د مزدوج په څېر دی .او په $\bar{z}$ سره يې ښيي .مثلاً که (z) يو مختلط عدد وي نو مزدوج يې $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ يو مختلط عدد دې او مزدوج يې $\bar{z} = x - yi$ دې.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$
$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم , $Norm$ (میزان، ماخذ ،هنجار، نمونه) وايي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \qquad ,2xRel(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \qquad 2yiIm(z)$$

د مختلط عدد ضري معکوس:

فرضاً $a + bi$ يو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره يي د $\frac{1}{a+bi}$ صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کی ضربووك

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$
$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ د $\frac{1}{a^2+b^2}$ ضربي معکوس دې.

مثال: د $2 - 3i$ ضربي معکوس پيدا کړئ؟

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزيه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

د دوو مختلطو عددونو وېش:

په یوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم علیه دواړه د مقسوم علیه په مزدوج کی ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2}$$
$$=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}=\frac{8-14i+15}{4+25}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعی مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعی سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو دتفاضل سره مساوي دي او هم د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقیقي برخې دوه چند دی.

$$z+\bar{z}=2x$$

6- د یوه مختلط عدد اود هغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخې دوه چند دی.

$$z-\bar{z}=2yi$$

7- د یوه مختلط عدد دمزدوج ،مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}}=z$$

مثال: که $z_1=4+5i$ او $z_2=-3+2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ او $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ کیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \quad \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$

$z_1 + z_2 = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$

ثابته شوه چه:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i)(-3 + 2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$
$= -12 - 7i + 10(-1)$
$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i)(-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$
$= -12 + 7i + 10(-1)$
$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

په نتيجه کې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$$

د مختلطو عددونو په ساحه کی د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

د دويمی درجی معادلی عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه ډول معادلی د حقيقي اعدادو په سيټ کی حل نلري مګر په موهومي اعدادو کی حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \dfrac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \dfrac{10 \pm 2i}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$

$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

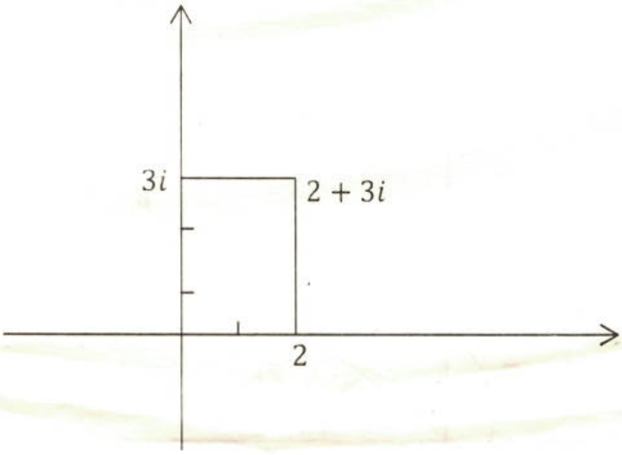
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240$$
$$= 16(-1) - 240 = -16 - 240 =$$
$$\Delta = -256$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2 \cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

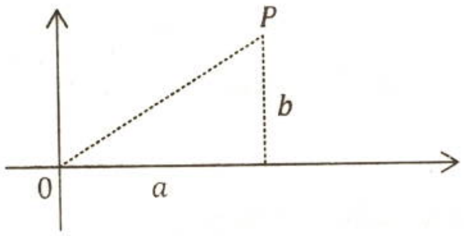
په مختلط عددونو کی حقیقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کیږي.په دی ترتیب کولای شو چه دګوس داعدادو په مستوي کی مطلوب نقاط پیدا کړو د نقطو دوصلېدو څخه خط لاس ته راځي.او د خطودترسیم په نتیجه کی مختلف اشکال رسمولای شو.

مثال:- د $(2 + 3i)$ نقطه پیدا کړئ



که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یي مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یي فاصله کړو نونقطه د مبداء سره وصلوو.مطلقه قیمت یي د مبداء څخه فاصله ده .چه د فیثاغورث د قضیي سره سم یي هم فاصله پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



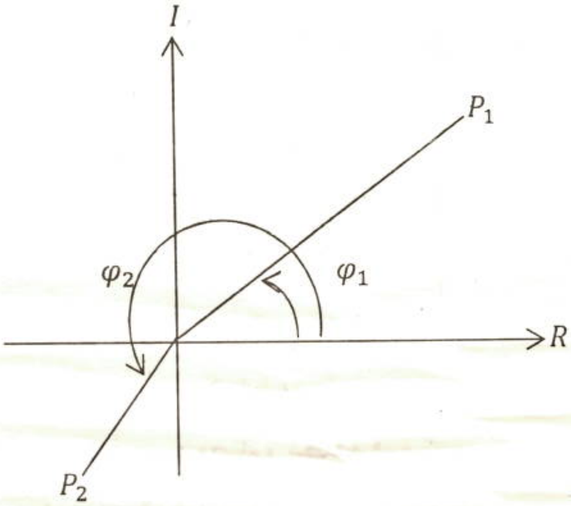
مثال: د (P) د نقطی وضعیه کمیت $(4+3I)$ دی مطلقه قیمت یي د مبداء څخه څو دی؟

$$4+3i=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله یي د محورونو د مبداء څخه مساوي ده .

$-5+12i$	$-5-12i$
$=\sqrt{(-5)^2+12^2}$	$=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}$
$=\sqrt{169}$	$=\sqrt{169}$
$=13$	$=13$

د (φ) هغه زاویه چه د $(\overline{OP})$ خط یي د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم یادیږي حرکت یي د ساعت د عقربی خلاف وي یعنی دا زاویه همېشه مثبت وي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

يوويشتم فصل

د رياضي منطق

د رياضي استدلال:

د رياضيكي بيان د سمون لپاره چه كومې علامې اوطريقې استعماليږي د رياضي د استدلال په نوم يادېږي.

شهودي درک يا مشاهدات:-هغه مفاهيم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلېدل يي استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات يا شهودي درک ورته وايي.

لکه موازي خطونه، نه قطع كوي. متقابل براس زاويي مساوي وي.او داسې نور.

تمثيلي استدلال:

هغه استدلال دې چه د يورياضيكي بيان د وضاحت لپاره مثالونه وويل شي او د هغوی د ورته والي له كبله نتايج لاس ته راوړل شي.

لكه په عاميانه ډول [مار خوړلی د پړي نه ډارېږي] دا يو قياسي استدلال دی.

استقرائي استدلال :

استقراء كلي په كلي گرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح كې د ټولو طبعي عددونو ،ټولو جفتو عددونو يا ټولو طاقو عددونو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته استقراء يا استقرائي استدلال وايي.

د ټولو طاقوعددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پيدا كيږي.

د ټولو جفتوعددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پيدا كيږي.

د ټولو مسلسلوعددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پيدا كيږي.

داستقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د رياضي په استقراء كې ثبوت شوي دي.

لاندې جدول كې خالي ځايونه ډک كړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمجموعې فارمول	دمکعبونومجموعه	دمتوالي طبعي عددونومکعبونه	د متوالي عددونو شمېر
1^2		1^3	1
		1^3+2^3	2
	36	$1^3+2^3+3^3$	3
10^2		$1^3+2^3+3^3+4^3$	4
$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$		$1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$	n

مثال: ثبوت کړئ چه $P(n)=4^{2n}-1$ په (5) باندی د وېش وړ دې؟

حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو.

$$P(1)=4^{2\cdot 1}-1=16-1=15$$

(15) په (5) باندی وېشل کيږي.

په (n)باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چه په $(n+1)$ باندی هم د وېش وړ دی.

ثبوت:

$$P(n)=4^{2n}-1=5r$$
$$4^2\cdot(4^{2n}-1)=5r\cdot 4^2 \Rightarrow 4^{2n+2}-4^2=5r\cdot 16$$
$$4^{2(n+1)}-1=15+16\cdot 5r=5(3+16r)$$

د مساوات ښی خوا په (5) وېشل کيږي. نو چپ طرف يې هم وېشل کيږي.نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1)=4^{2(n+1)}-1$$

ثابته شوه چه که په راکړ شوي فارمول کی د (n) په عوض هر طبعي عدد وضع شي په (5) وېشل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجي استدلال

که د یوې عملیې نتیجه همېشه ثابته وي او بنه په ډاډ سره یې په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وايي.لاندې جدول ته وګورئ

8	12	19	23
15	19	26	30
30	38	52	[illegible]
18	26	40	48
9	13	20	24
1	1	1	1

په پورته جدول کې د عدد سره (7) جمع شوي دي.دجمع حاصل یې دوه چند شوی دې.بیا بېرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل یې نیمایي شوی دې په دغه عددو کې هرعدد د اولني عدد څخه د(1) په اندازه زیات شوی دې.چه دغسې عمل ته استنتاجي استدلال وايي.

دحکم د نفې کولو استدلال:

دغېرناطقو عددونو د جمع حاصل یو غېر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحیح دی. نو(x) او(y) دوه مجهول عددونه په نظر کې نیسو چه دجمع حاصل یې $(x+y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x=1+\sqrt{2}$ او $y=1-\sqrt{2}$ دې دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x+y=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$$

ګورو چه $(x+y=2)$ یو ناطق عدد دې.غېر ناطق عدد نه دې.نو ثابته شوه چه د دوه غېرناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غېرناطق عدد نه وي.

د خلف برهان یا غېر مستقیم ثبوت:

دقضیې د عکس ثبوت ته غېر مستقیم ثبوت وايي.

قضیه: که د یوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که n^2 جفت وي .

مطلوب: ثبوتوو چه (n) هم جفت دې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو ليکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطی څخه څرګنده شوه چه (n^2) طاق دی او دا د فرضيي خلاف ده نو داچه (n) يو جفت عدد دی صحيح نه دی.

د رياضي منطق او د بيان استنتاج:

بيان يوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بيان په (P) او د بيان صحت په (T) او غلطي يي په (F) وښيو او(~P) د (P) دبيان نفی وي نو د صحت جدول يي په لاندی ډول جوړيږي.

P	$\sim P$
T	P
F	T

د بيانونو ترکيب:

1- $P \wedge Q$ کی $(\wedge)$ د (او) معنی ورکوي.

2- $P \vee Q$ کی $(\vee)$ د (يا) معنی ورکوي.

3- $P \Rightarrow Q$ کی $(\Rightarrow)$ د (په نتيجه کې) معنی ورکوي.

4- $P \Leftrightarrow Q$ کې $(\Leftrightarrow)$ د دوه ارتباط معنی ورکوي

مثال: د ثحت په جدول کی وښياست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بيان په کوم وخت کی صحيح دی.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Longrightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

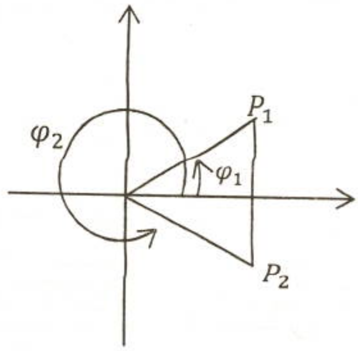
تمت بالخير

په 1394/4/23 نيته چه د روژی د مبارکی مياشتی د اوه ويشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کی د تالاشی چوک د حاجي زرخان په پلازه کی پای ته ورسېدلو .

سردار محمد (خوږيانی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مزدوجو مختلطو عددونو د ارگومینتنونو د جمع حاصل مکمل دوران (360°) وي.



دمختلطو عددونود دویم جذر پیدا کول:

دمختلط عدد دویم جذر د لاندی فارمول په واسطه پیدا کیږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

ثبوت:

$$\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2 = a+bi+2\sqrt{a+bi}\cdot\sqrt{a-bi}+a-bi \ldots\ldots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2}+2a$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 2$$

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 3$$

$$\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(-\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} = i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \ldots\ldots 4$$

دریمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a+bi}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2} \ldots\ldots 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\ \dots\dots\dots 6$$

$$\sqrt{a-bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\ \dots\dots 7$$

اول مثال: د $\sqrt{-5+12i}$ دویم جذر پیدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i}=\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}=3+2i$$

دویم مثال:

$$\sqrt{-2i}=\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځینو کاشفینو انځورونه

بینارډ ریمان

کارل فریډ ریچ

اریتوستنس

جورج کانتور

اسحاق نیوټن

ارشمیدس

محمد بن موسی

پیرک اندرویس

(c) ketabton.com: The Digital Library

فارما

وین ستهندریو

لایبنیز

کووشی

وایرس ترس

هرمت

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپ شوي کتابونه

- عمومي رياضي (نوى نصاب)
- عمومي فزيک (نوى نصاب)
- ابتدائيه رياضي او هندسه (نوى نصاب)

تر چاپ لاندې کتابونه

- د فزيک د تمريناتو حل (نوى نصاب)
- د رياضي د تمريناتو حل (نوى نصاب)
- د عمومي رياضي (فارسي ترجمه)
- عمومي هندسه
- د عمومي هندسې (فارسي ترجمه)
- عمومي مثلثات
- عمومي رياضي (فارسي ژباړه)
- عمومي فزيک (فارسي ژباړه)

سپين غر تعليمي مرکز

ميهن خپرندويه ټولنه

0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library