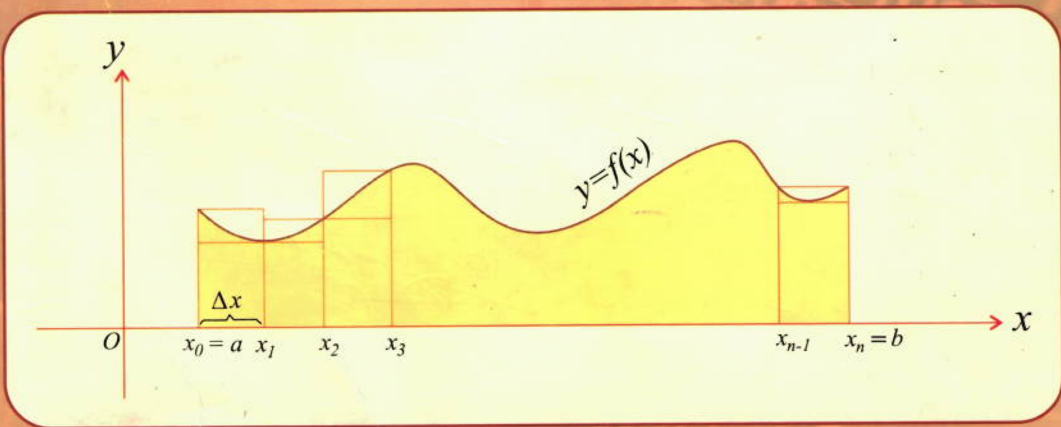
(نوی نصاب)

# عمومي رياضي

## له اووم ټولګي څخه تر دولسم ټولګي پورې



ارشمیدس

اراتوستنس

محمد بن موسی

اسحاق نیوټن

کوشي

Ketabton.com

مؤلف: استاد سردار محمد (خوږیانی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

# عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږياڼی)

0700202080
0700203080

(c) ketabton.com: The Digital Library

# کتاب پېژندنه

د کتاب نوم/

**عمومي رياضي (نوی نصاب)**

**مؤلف/**

سردار محمد (خوږياني)

**ډيزاين/**

الله يار تسل

**خپرندوی/**

ميهن خپرندويه ټولنه

**چاپکال/**

۱۳۹۵ل

**چاپشمېر/**

۱۰۰۰ټوکه

**آدرس**

ميهن خپرندويه ټولنه پېښور- جلال آباد

**جلال آباد:** اسحاقزی مارکيټ لاندې پوړ، لومړی دوکان

Email: Khorshidhimat@yahoo.com

Abdurashid.himat@gmail.com

Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱

۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

**د چاپ حقوق له ميهن خپرندويې ټولنې سره خوندي دي.**

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

# مقدمه

الحمد لله الذی فهمنا بعلوم الاشیاء والحوادث و علمنا بزیادات هم و النواقص و الصلوة و سلام علی رسوله بفهم الانسان باشرع فی الاعمال و المباحث.

اما بعد!

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهرباني باندې قادر شوم. د نصاب د اول ځخه شوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لندیز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی د غه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب ځخه تر انتیګرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توګه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شویدي ځو ځو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غواړي که ځه هم مونږ دا کتاب ځو ځو واره په غور سره کتلي او کمی او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود ؤ، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار. تالاشي چوک د حاجي زرخان پلازه

سردار محمد خوږیانی

د نصرت عالي لیسې د ریاضاتو استاد

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

# لیک لړ

## حساب

### اول فصل


حساب........ 1
د حساب د علم موضوع........ 1
د مکمل اعدادو سیټ........ 1
د طبیعي اعدادو سیټ........ 2
د حساب د علم د زده کړې غرض........ 2
د حساب اصطلاحات........ 2
واحد........ 2
عدد........ 2
ارقام........ 4
طبقې........ 5
د صحیح عددونو څلور ګوني عملیې........ 6
1- د صحیح عددونو جمع........ 6
2- د صحیح عددونو تفریق........ 8
3- د صحیح عددونو ضرب........ 10
اضافي معلومات........ 12
4- د صحیح عددونو تقسیم........ 16


### دویم فصل


کسر........ 21
اعشار کسر........ 21
د اعشار کسر څلور ګوني عملیې........ 21
عام کسر........ 24
د کسرونو مقایسه........ 26
تجنیس........ 26
د کسرونو اختصار........ 27
د عام کسر څلور ګوني عملیې........ 33

(c) ketabton.com: The Digital Library

کسر الکسر.......... 37
د کسرونو تبادله.......... 39
**دریم فصل**
طاقت لرونکی عددونه.......... 42
تجزیه.......... 44
جذر.......... 49
د اعدادو سیستمونه.......... 59
د 2 په قاعده د اعدادو سیستم.......... 60
د 5 په قاعده د اعدادو سیستم.......... 61
**څلورم فصل**
نسبت.......... 63
تناسب.......... 83
**پنځم فصل**
فیصد.......... 72
تخفیف.......... 73
احدیت.......... 75
ربحه.......... 76
تنزیل.......... 79
مشارکت.......... 80
**شپږم فصل**
سیټ.......... 84
د سیټ د لیکلو طریقې.......... 84
د سیټ اقسام.......... 86
د روابطو له مخې د سیټونو اقسام.......... 86
د سیټونو عملیې.......... 89
**الجبر**
**اول فصل**
الجبر.......... 93
د الجبر اصطلاحات.......... 94

(c) ketabton.com: The Digital Library


پولینوم 95
د الجبري عددونو څلور ګوني عملیې 97
د پولینومونو څلور ګونې عملیې 100
د باقي مانده دعوه 102
ترکیبي تقسیم 104
**دویم فصل**
مساوات 106
مطابقت 106
تجزیه 110
الجبري کسرونه 116
د الجبري کسرو خواص 116
د الجبري کسرونو جمع 117
د الجبرى کسرونو تفریق 117
د الجبري کسرونو اختصار 118
د الجبري کسرونو تقسیم 118
د کسرونو ګویا کول 119
قسمي کسرونه 122
**دریم فصل**
معادله یا شرطیه مساوات 127
د معادلې اقسام 127
یو مجهوله اوله درجه معادله 127
د معادلې خواص 128
جذري معادلى 129
**څلورم فصل**
دوه مجهوله معادلى 133
د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل 133
متریکس 138
د متریکس ډولونه 139
د متریکسونو جمع 141

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متريکس تفريق......141
د دوه متريکسونو ضرب......143
د يوه متريکس ترانسپوز متريکس......144
ديترمينانت......145
د ديترمينانت د حل طريقه......145
د ديترمينانت خواص......147
الحاقي متريکس......148

**پنځم فصل**

دويمه درجه يومجهوله معادلې......151
د دويمه درجه يو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طريقې......152
دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول......161
د دويمه درجه يومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول......162
دديکارت قاعده......163

**شپږم فصل**

غيرمساوات......173
د غيرمساوات خواص......173
دغيرمساوات اقسام......175
مطلقه قيمت......177
دبينوم داشارې څېړل......177
د يو مجهوله غيرمساوات سيستم......183
دوه مجهوله غيرمساوات......184
ددوه مجهوله غيرمساوات سيستم......185
ددوه مجهوله غيرمساوات د سيستم د حل طريقه......185
يو مجهوله دويمه درجه غير مساوات......186
ددويمه درجه غيرمساوات دحل طريقه......187

**اووم فصل**

پارامتريک معادلې......190

**اتم فصل**

اکسپونتشل (نمائي) معادلې......199

(c) ketabton.com: The Digital Library

**نهم فصل**

لوګاریتمي معادلې.......203
دقاعدې د بدلولو فارمول.......206
د لوګاریتم اقسام.......207
دیوه عدد د لوګاریتم پیداکول.......208
د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم.......209
انتي لوګاریتم.......210
انترپولېشن.......211
کولوګاریتم.......212
د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه.......213

**لسم فصل**

توابع.......220
د تابع اقسام.......221
ناطقه تابع.......221
خطي تابع.......221
دخطي تابع د تعریف ناحیه.......222
د مستقیمې کرښې مېل.......224
دمېل معادله.......225
محوري معادله.......227
پولینومي تابعګانې.......231

**یوولسم فصل**

دویمه درجه تابع.......233
د دویمه درجه تابع ګراف.......233
د دویمه درجه تابع د ګراف ترسیم.......233
د ګراف انتقال.......235
هوموګرافیک تابع.......248
مجانب.......248
د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم.......250
اکسپونټشل تابع.......253
لوګاریتمي تابع.......255

(c) ketabton.com: The Digital Library

**دولسم فصل**

ردیف یا تصاعد........ 257
حسابي ردیف........ 257
د حسابي ردیف فارمول........ 257
حسابي ردیف ته د حدونو داخلول........ 259
هندسي ردیف........ 260
د هندسي ردیف فارمول........ 260
د هندسي ردیف خصوصیات........ 262
هارمونیکي ردیف........ 263
سلسلې........ 265
حسابي سلسله........ 265
د حسابي سلسلې فارمول........ 265
د مسلسلو عددونو فارمول........ 266
دجفتو عددو فارمول........ 267
د طاق عددونو فارمول........ 267
هندسي سلسله........ 269
د هندسي سلسلې فارمول........ 269

**دیارلسم فصل**

د ریاضي استقراء........ 274

**څوارلسم فصل**

فکتوریل........ 277
د بینوم قضیه........ 279

**پنځلسم فصل**

لیمیټ ........ 281
انټروال........ 281
د لیمیټ تعریف........ 288
د لیمیټ د استعمال ځایونه........ 284
د لیمیټ پیدا کول........ 285
په (∞) کې د یوې تابع لیمیټ ........ 287

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ قضیې........................288
ابهام........................295
د ابهام رفع کول........................295
د مثلثاتي تابعګانو لیمیټ........................302
د تابعګانو متمادیت (اتصال)........................305
متمادي تابع........................305
غیر متمادي تابعګانې........................305
د متمادیت شرطونه........................306
د ښي لاس لیمیټ........................307
د چپ لاس لیمیټ........................307
د متمادي تابعګانو خواص........................309

**شپاړلسم فصل**

مشتق........................311
منحنی یا وسطي تعبیر........................312
د یوې تابع مشتق........................313
د مشتق تعریف........................314
د مشتق هندسي تعبیر........................315
د مشتق قوانین........................318
د یوې طاقت لرونکې تابع مشتق........................318
د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق........................319
د دوه تابعګانو د تفاضل مشتق........................320
د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق........................321
د دوه تابعګانو د حاصل تقسیم مشتق........................322
د جذري تابع مشتق........................324
د مرکبې تابع مشتق........................326
د مثلثاتي تابعګانو مشتق........................329
ضمني مشتقات........................333
د تابع دویم ضمني مشتق........................334
متوالي مشتقات........................336

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د استعمال ځایونه........................................ 337
د یوې تابع بحراني ټکي........................................ 339
د انعطاف نقطه........................................ 340
د تابع د ګراف د ترسیم طریقه........................................ 343
د انعطاف د نقطې پیدا کول........................................ 344
د دویمه درجه تابع ګراف........................................ 345
هوموګرافیک تابع........................................ 348
د مجانب د ټاکلو عمومي لار........................................ 351
د دریمه درجه یو مجهوله تابع ګراف........................................ 352
د رول قضیه........................................ 355
د متوسط قیمت قضیه........................................ 357
د لوهپیتال قاعده........................................ 358
دبحراني ټکو تطبیق........................................ 359

**اولسم فصل**

انتیګرال........................................ 363
د ریمان مجموعه........................................ 363
د انتیګرال مفهوم........................................ 368
د انتیګرال اقسام........................................ 368
غیرمعین انتیګرال........................................ 368
د غیر معین انتیګرال خواص........................................ 369
معین انتیګرال........................................ 373
د معین انتیګرال خواص........................................ 375
دانتیګرال او مشتق اساسي قضیې........................................ 382
په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول........................................ 385
قسمي انتیګرالونه........................................ 386
دلوګاریتمي او اکسپونتشل تابعګانو مشتق........................................ 387
د اعشاري لوګاریتم مشتق........................................ 388
د معکوسو تابعګانو مشتق........................................ 392
د معکوسو مثلثاتي تابعګانو مشتق........................................ 392

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه........ 394
د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه........ 396
د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال........ 397
د منحني سطحې د مساحت پیدا کول........ 401
د کروي اجسامو د حجمو محاسبه........ 410
د انتیګرال پواسطه د کرې د حجم پیدا کول........ 411
د انتیګرال پواسطه د مخروط د حجم پیدا کول........ 411
د انتیګرال پواسطه د بیضوي د حجم پیدا کول........ 412
د قوس د اوږدوالي محاسبه........ 416
تفاضلي معادلې........ 419
د دیفرینشیال ترتیب........ 420
د دیفرینشیال معادلې درجه........ 420
خطي دیفرینشیال معادلې........ 421

**احصائیه**

**اتلسم فصل**

احصائیه........ 425
د اطلاعاتو د راټولو طریقه........ 425
ټولنه او جامعه........ 426
تصادفي نمونه........ 426
تصادفي متحول او د ولونه یي........ 426
د فریکوئنسي جدول........ 427
انځوریز ګراف یا تصویري ګراف........ 427
موډ........ 428
اوسط........ 428
د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول........ 429
د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه........ 429
ډله ایز (تجمعي) کثرت........ 430
نسبي کثرت........ 430
میله اي ګراف........ 431

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منکسري کرښي ګراف......431
د ګسسته یا غیر متصلو داتا ګانو اوسط......432
د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط......433
د داتاګانو د ګېډۍ کولو طریقه......434
وسعت......434
د ګېډۍ اوږدوالی......434
میله ئي ګراف......434
د متصلو داتاګانو دسته بندي......434
وزني اوسط یا منځنی قیمت......435
مستطیلي ګراف......436
دایروي ګراف......437
میانه......438
د تحول ساحه......438
د انحراف اوسط......439
د څوضلعي فریکونسي ګراف......440
د ساقې او پاڼې ګراف......441
ربعي......442
صندوقچه یي ګراف......443
ربعي انحراف......446
واریانس......446
معیاري انحراف (مطلق تیتوالی)......448
دبدلون ضریب یانسبي پراګنده ګي......450
په نورمال منحني کې تیتوالی......451
د نورماله توزیع مشخصات......452
څومتحوله تړلنې......453
دپراګنده ګۍ ګراف......454
پېوستون او دپېوستون ضریب......454
د خطي مېلان معادله......456
د احتمال د تابع توزیع......459

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله یي توزیع او د برنولي ازمایښت ........ 461
د پواسن داحتمال توزیع ........ 462
د نورمال توزیع ........ 463
نمونه اخیستل ........ 467
د نمونې د اوسط توزیع ........ 468

**احتمالات**

**نوولسم فصل**

احتمالات ........ 471
چانس ........ 471
تصادفي پېښه ........ 471
تجربوي احتمال ........ 471
نظري احتمال ........ 471
نسبي کثرت او احتمال ........ 472
په نمونه یي فضا کې برابر او نابرابر چانس ........ 472
د یوې نمونه یي فضا ناڅاپي پېښه ........ 472
د احتمال قاعدې ........ 474
ونه ایز دیاګرام ........ 475
د ضرب د حاصل لومړۍ قاعده ........ 475
د ناڅاپي پېښو اتحاد ........ 476
د ناڅاپي پېښو تقاطع ........ 477
د سیټونو او مډل جوړونه ........ 478
د شمېرنې اصل ........ 479
ترتیب (پرموټېشن) ........ 480
ترکیب ........ 480
وریشن (تبدیل) ........ 481
د بینوم قضیه ........ 483
د دوه جمله یي احتمال ........ 484
متمادي او غېر متمادي فضاګانې ........ 486
هم چانسه پېښې ........ 487

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال........................................................................488
مشروط احتمال........................................................................488
د ناخاپه پېښو استقلالیت........................................................................493

**شلم فصل**

موهومي عددونه........................................................................495
د اعدادو سیټونه........................................................................496
دموهومي عددونو څلورګوني عملیې........................................................................497
صفري مختلط عدد........................................................................498
د مختلطو عددونو څلورګونی عملیې........................................................................498
د مختلط عدد مزدوج........................................................................500
د مختلط عدد ضربي معکوس........................................................................500
دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت........................................................................501
دمختلطو عددونود دویم جذر پیدا کول........................................................................505

**یوویشتم فصل**

د ریاضي منطق........................................................................507
د ریاضي استدلال........................................................................507
تمثیلي استدلال........................................................................507
استقرائي استدلال........................................................................507
استنتاجي استدلال........................................................................509
دحکم د نفی کولو استدلال........................................................................509
د ریاضي منطق او د بیان استنتاج........................................................................510
د بیانونو ترکیب........................................................................510

(c) ketabton.com: The Digital Library

# حساب

(c) ketabton.com: The Digital Library

[illegible]

(c) ketabton.com: The Digital Library

# اول فصل

## رياضي

رياضي د رياض څخه اخيستل شويده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتي ده رياض د روضة مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه يا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کيفيتو ، کميتو ، تغيراتو ، ارتباطاتو او تاثيراتو څخه بحث کوي.

رياضي ډېرې څانګې لري لکه :

1- حساب　　2- الجبر　　3- نجوم
4- هندسه　　5- مثلثات　　6- علم هيئت

او داسې نور.

څرنګه چې زمونږ د وطن په تعليمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول ليکل شوي دي نو مونږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شيان په دی کتاب کې ليکو.

### 1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايې او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې يوه عمليه اجراء کوي او مجهول عدد پيدا کوي.

### د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سيټ دی .

### د مکمل اعدادو سيټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايې.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.

$$1 \longrightarrow \infty$$

## د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخيستل ، خرڅول ، په صحيح ډول د دوا ګانو ترکيب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غير په فزيک ، کيميا ، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

## د حساب اصطلاحات:

**واحد:**

د هر شي يوې دانې ته واحد وايي. لکه يو موټر ، يوه طياره يوه کښتۍ او داسې نور.

**عدد:**

واحد يا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي . لکه (1) ، 13 ، 159 او داسې نور.

عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د يوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه ، 107 شاګردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180 ، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسيميږي جفت عددونه دي لکه 170 ، 532 ، 714 ، 326 ، 748 او داسې نور ،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ويشل کيږي لکه : 3 ، 41 ، 587 او داسې نور.

5- لمړني عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ويشل کيږي په نورو عددو پوره نه ويشل کيږي. لکه 2 ، 3، 5 ، 7 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library


د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دی. دا عددونه یو یوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273 -192 ) ق م کی یي یونان کی ژوند کاوه په یوه جدول کې پیدا کړی ؤ.

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه یې په یوه مربعي جدول کې ولیکل بیا یې (2) پریښودل او هغه عددونه چې په (2) ویشل کیدل حذف کړل. بیا یې (3) پریښودل او هغه عددونه چې په (3) ویشل کیدل حذف کړل په همدې ترتیب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ویشل کیدل حذف یې کړل په اخر کې یې په جدول کی پاتی شوي عددونه چې 25 عددونه وه په یوه پاڼه کې ولیکل او لمړني عددونه یې وبلل. عددونه دا دي.

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47 ، 53 ، 59 ، 61 ، 67، 71، 73، 79، 83 ، 89 ، 97

6- مرکب عددونه : هغه عددونه چې له ځان او یوه څخه په غیر په نورو عددو هم ویشل کیږي مرکب عددونه بلل کیږي. لکه 4 ، 6 ، 8 ، 9 ، 10 او داسې نور .

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د یوه عدد ټول واحدادت پوره وي دغه عدد ته تام عدد وایې لکه 12 هنداونې ، 15 روپۍ.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې یو واحد یې نیم ګړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هندوانې، $17\frac{1}{2}$ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج وویشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وایې لکه $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، چې $0.75 = \frac{3}{4}$ او $0.4 = \frac{2}{5}$ کیږي.

b- غیر مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي مګر د خارج قسمت رقمونه یې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ او داسې نور .

چې $0.33\overline{3} = \frac{1}{3}$ کیږي او $0.166\overline{6} = \frac{1}{6}$ کیږی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



c- غير مختوم غير متوالي كسر: كه د يوه كسر صورت په مخرج پوره تقسيم نه شي او دخارج قسمت رقمونه يې هم تكراري نه وي دې كسر ته غير مختوم غير متوالي كسر وايې لكه $\frac{13}{47}$ چې ... $0.27659574468085 = \frac{13}{47}$ كيږي.

9- ناطق عدد: صحيح عدد، متوالي كسر او مختوم كسر ناطق عددونه دي. لكه 15 ، 28 ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غير ناطق عدد: غير مختوم غير متوالي كسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غير ناطق عددونه دي لكه $\frac{13}{49}$ ، $\frac{11}{47}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

ارقام:

د اعدادو د ليكنې سمبول ته رقم وايي.

په ډېرو ممالكو كې د اعدادو د ليكنې لپاره سمبولونه ټاكل شوي دي چې په همغه ممالكو كې استعماليږي. مگر هغه رقمونه چې د نړۍ په زياتو ممالكو كې استعماليږي درې دي.

1- رومي رقمونه 2- هندو عربي رقمونه 3- اريك رقمونه.

1- رومي رقمونه:

د هندو عربيک رقمو تر ليكنې د مخه رومي رقمونه زيات استعماليدل. اوس رومي رقمونه په كتابونو كې د مختلفو مقاصدو لپاره استعماليږي. خو په حسابي او الجبري عمليو كې نه استعماليږي $I$ د يو لپاره $V$ د 5 لپاره $X$ د 10 لپاره $L$ د 50 لپاره $C$ د 100 لپاره $D$ د 500 لپاره او $M$ د 1000 لپاره په سمبوليک ډول استعماليږي.

كه يو رقم درې واره څنگ په څنگ وليكل شي جمع كيږي لكه $II$ دوه دي $III$ درې دي كه $X$ درې واره وليكل شي (30) كيږي كه $L$ درې واره وليكل شي 150 كيږي كه دوه مختلف عددونه څنگ په څنگ وليكل شي كه د ښي خوا عدد زيات ؤ د چپې خوا عدد ور څخه منفي كيږي $IV$ چې څلور دي $IX$ نه دي $XL = 40$ دي $XC = 90$ دي او كه د چپې خوا عدد زيات ؤ د ښې خوا عدد ور سره جمع كيږي.

$VI = 6$ ، $VII = 7$ او $VIII = 8$ دي $XIX = 19$ او $CX = 110$ ، $LX = 60$ دي $CXXX = 130$ او $MDCXIX = 1619$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي. دې رقمو ته شرقي رقمونه هم وایي. اریک رقمونه په لاندې ډول دي. ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹

ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربیک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصریانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هندیانو لیکل دي دغه رقمو ته غربي رقمونه هم وایي دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شویدي.

1- معنی دار رقمونه      2- بې معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمو ته معنی دار رقمونه وایي .

2- بې معنی رقم : صفر بې معنی رقم دې ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه . 0000000

او که د عدد چپې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیریږي او نه کمیږي .

لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقې : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلي دي چې هره طبقه درې مرتبې ده هره طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شویدي.

| | | |
|---|---|---|
| 1- احادو طبقه | 9- کوادریلیون | 17- اوکتیلیون |
| 2- زرو طبقه | 10- کوادریلیارد | 18- اوکتیلیارد |
| 3- میلیون طبقه | 11 - کوینتیلیون | 19- نونیلیون |
| 4- میلیاردو طبقه | 12- کوینتیلیارد | 20- نونیلیارد |
| 5- بیلیون طبقه | 13- سکستیلیون | 21- د سیلیون |
| 6- بیلیاردو طبقه | 14- سکستیلیارد | 22- دسیلیارد |
| 7- تریلون طبقه | 15- سپتیلیون | |
| 8- تریلیارد طبقه | 16- سپتیلیارد | |

(c) ketabton.com: The Digital Library



چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شويدي يعنې تر ترليارد پورې طبقې استعمال شويدي.

د عدد لوستل : عدد د ښۍ خوا څخه په طبقو ويشو او د چپې خوا څخه يې لولو اول د طبقې عدد لولو بيا دطبقې نوم اخلو. كه طبقه يا مرتبه صفر وه نوم يې نه اخيستل كيږي. لكه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ويل كيږي څلورسوه اوپنځوس ترليارده دري سوه اواوه څلويښت ترلونه اته سوه اوپنځه ويشت بيليارده شپږسوه اويوبيلونه دوه سوه اوڅلوردېرش ميليارده څلورميلونه اواته سوه اويو.

د عددو ليكل : عدد د چپې خوا څخه ليكل كيږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه كې ليكل كيږي كه د كومې طبقې يا مرتبې نوم وانه خيستل شي پر ځاى صفرونه ليكل كيږي لكه.

درې سوه څوارلس ترليارده اوه تريليونه نه ويشت بيلونه يو سل او دولس ميلياردده نه څلويښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

## د صحيح عددونو څلور ګونې عمليې:

### 1- د صحيح عددونو جمع:

جمع په لغت كې يو ځاى كولو ته وايې.

او په اصطلاح كې د هم جنسو شيانو يو ځاى كولو ته جمع وايې.

هغه عددونه چې جمع كيږي د جمع عوامل ورته وايې او هر عدد ته عامل وايې او هغه عدد چې د عواملو د جمع كېدو په نتيجه كې لاس ته راځي. د جمع حاصل ورته وايې.

### د جمع د عمليې طريقه :

د جمع عوامل داسې يو تر بل لاندې ليكو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د يويز مرتبو رقمونه جمع كوو كه دجمع حاصل يې دوه رقمي شو لمړى رقم يې ليكو او دويم رقم يې دلسيز مرتبې د رقمو سره جمع كوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت كوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


```
+456783456
  789432187
-----------
1246215643
```

## د جمع د عمليې ميزان:

### 1- د جمع ميزان په جمع :

عوامل د لاندې خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحيح حل شويدی.

```
 12349391
---------
+7894321
 2578092
 1876978
---------
 12349391
```

### 2- د جمع ميزان په تفريق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه يو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحيح حل شويدی.

```
+ 489785        −1165759
  675974          675974
---------       ---------
 1165759          489785
```

### 3- د جمع ميزان په طرح نه :

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو . بيا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحيح حل شويدی.

```
+ 5689247
  7563785
----------
 13253032

   1 X 1
```

(c) ketabton.com: The Digital Library



دجمع دعمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلۍ د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.

لکه:

| | |
|---|---|
| $+451$<br>$238$<br>$689$ | $+238$<br>$451$<br>$689$ |

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په ګروپو ويشو د هر ګروپ د جمع حاصل پيد اکوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.

4- د جمع دعمليې خنثی عنصر صفر دی.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقې ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچنی عدد ته مفروق وايي د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.

د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يويز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يويز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې دلسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ 14987675 \\ \hline 63414463 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د تفریق د عملیې میزان:

### 1- د تفریق میزان په جمع :

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شوېدی.

```
+30368784        −48356782
 17987998          17987998
 48356782          30368784
```

### 2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغي سوال صحیح حل شویدی.

```
−7854321546
 1789756798
 6064564748
```

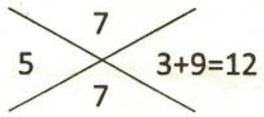
میزان

```
−7854321546
 6064564748
 1789756798
```

### 3- د تفریق میزان په طرح نه :

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل يط مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو . او منفي کوو يې او په دريم طرف کې يې ليکو بيا د تفريق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو د دريم او څلوزم عددونه مساوي وه سوال صحيح حل شويدی.

```
−43756832109
 12898098734
 30858733375
```



(c) ketabton.com: The Digital Library



که د مفروق منه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم ؤ د مفروق منه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بیا دمفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.

د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق منه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 250 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

2- که مفروق منه ثابت وي مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 150 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منه زیات شي د تفریق حاصل ډیریږي.

$$\begin{array}{r} -500 \\ 200 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منه کم شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کې تغیز نه راځي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ 250 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د مساوي عددونو د جمع لنډې طریقې ته ضرب وایي. د ضرب په عملیه کې اول عدد ته مضروب فیه او د دویم عدد ته مضروب وایي. په مضروب فیه کې د مضروب د ضرب په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


د ضرب د عمليې طريقه:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو. بيا د مضروف دويم رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

$$
\begin{array}{r}
\times\ 4587 \\
896 \\
\hline
27522 \\
41283\phantom{0} \\
36696\phantom{00} \\
\hline
4109952
\end{array}
$$

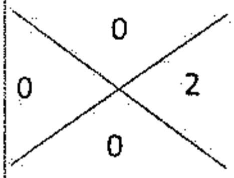
د ضرب د عمليې ميزان:

1- د ضرب ميزان په تقسيم:

د ضرب حاصل په مضروب فيه ويشو که مضروب لاس ته راغی سوال صحيح حل شوی دی او يا د ضرب حاصل په مضورب ويشو که مضروف فيه لاس ته راغي سوال حل شوی دې.

2- د ضرب ميزان په طرح نه :

مضروب فيه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د مضروب فيه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو او ضربوو يې که د ضرب حاصل يې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو يې په دريم طرف کې يې ليکو بيا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو که د دريم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحيح دی.




$$
\begin{array}{r}
\times\ 56783 \\
5238 \\
\hline
454264 \\
170349\phantom{0} \\
113566\phantom{00} \\
283915\phantom{000} \\
\hline
297429354
\end{array}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ضرب د عمليې اساسي اصول:

1- د اعدادو سيټ د ضرب د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.
2- د ضرب عمليه د تبديلی د قانون پيروي کوي.
3- د ضرب عمليه د اتحادي قانون پيروي کوی.
4- د ضرب عمليه د توزيعي خاصيت پيروي کوي.
5- د ضرب دعمليې خنثی عنصر (1) دی.

## اضافي معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصة الحساب کې ليکلې دي. مونږ د شاګردانو د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدين محمد بن الحسين چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زيږيدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شويدی اصلاً د لبنان ؤ عامل په لبنان کې يو غر دی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده :

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

يو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفريق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$
$$10 - 9 = 1$$
$$1 \times 7 = 7$$
$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$
$$10 \times 4 = 40$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$40 + 8 = 48$$

دریمه قاعده:

د یو رقمي او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه یې په 10 کې ضربوو یو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې یې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه یې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$
$$16 \times 10 = 160$$
$$10 - 7 = 3$$
$$3 \times 9 = 27$$
$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$
$$15 \times 10 = 150$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$150 - 14 = 136$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څلورمه قاعده:

د 10 او 20 تر منځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د یوه عدد د یویز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د د یویز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$18 + 3 = 21$$
$$21 \times 10 = 210$$
$$3 \times 8 = 24$$
$$210 + 24 = 234$$

پنځمه قاعده :

په 5 ، 50 او 500 کې د یوه عدد ضربول:

د عدد نیمایي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نیمایي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نیمایي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه :

$$5 \times 28 = 10 \times 14 = 140$$
$$50 \times 36 = 100 \times 18 = 1800$$
$$500 \times 32 = 1000 \times 16 = 16000$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پیدا کول چې یو یې د 10 او 20 تر منځ وي.

د کوچني عدد یویز د لوي عدد په لسیز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو یې او د یویز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$7 \times 5 = 35$$
$$35 + 59 = 94$$
$$94 \times 10 = 940$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$940 + 63 = 1003$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


اوومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسيز يې مساوي وي.

د يوه عدد يويز د بل عدد سره جمع کوو او په لسيز رقم کې يې ضربوو او 10 چنده کوو يې او د يويز رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$68 + 3 = 71$$
$$71 \times 6 = 426$$
$$426 \times 10 = 4260$$
$$4260 + 24 = 4284$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسيز مرتبې يې مختلفې وي.

د کوچني عدد لسيز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د يويزمرتبې او دلوی عدد د لسيز مرتبې د ضرب حاصل ور سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$69 \times 2 = 138$$
$$7 \times 6 = 42$$
$$138 + 42 = 180$$
$$180 \times 10 = 1800$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$1800 + 63 = 1863$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$87 \times 3 = 261$$
$$5 \times 8 = 40$$
$$261 + 40 = 301$$
$$301 \times 10 = 3010$$
$$5 \times 7 = 35$$
$$3010 + 35 = 3045$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: 47او 95 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$380 + 63 = 443$$
$$443 \times 10 = 4430$$
$$7 \times 5 = 35$$
$$4430 + 35 = 4465$$

4- د صحيح عددونو تقسيم:

تقسيم په لغت کې ويشلو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه عدد څخه د مساوي عددونو دتفريقولو لنډې طريقې ته تقسيم وايي.

هغه عدد چه ويشل کيږي مقسوم بلل کيږي هغه عدد چې مقسوم پرې ويشل کيږي مقسوم عليه بلل کيږي په مقسوم عليه باندې د مقسوم د تقسيميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کيږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم عليه څخه کمه شي او په مقسوم عليه نه ويشل کيږي باقي بلل کيږي.

د تقسيم د عمليې طريقه:

د مقسوم عليه مرتبې شمېرو د مقسوم د چپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوؤ د مقسوم عليه سره يې مقايسه کوو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ويشو يې حاصل يې په خارج قسمت کې ليکو په مقسوم عليه کې يې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې ليکو او منفي کوو يې. د تفريق د حاصل مخې ته د مقسوم يو رقم راکښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم عليه زيات و پرې ويشو يې او که کم ؤ خارج قمست ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه يو بل رقم راکښته کوو په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او يا د مقسوم عليه څخه کم شي دغی کمی شوی برخې ته باقي وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | |
|---|---|
| 456340189 | 56342 |
| 450736 | 8099 |
| 560418 | |
| 507078 | |
| 533409 | |
| 507078 | |
| 26331 | |

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم دعملیې میزان په ضرب:

خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال صحیح دی.

× 56342
8099
507078
507078
00000
450736
45631385 8

+456313858
26331
456340189

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه :

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم علیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي د طرح نه حاصل ور سره جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا مقسوم طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شوی دی.

7+6=13

4
8 ╳ 2
4

(c) ketabton.com: The Digital Library



نوټ: که د تقسیم عملیې باقي نه لرل او یا یې باقي تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

| | |
|---|---|
| 893001 | 197 |
| 788 | 4534 |
| 1050 | |
| 985 | |
| 650 | |
| 591 | |
| 591 | |
| 394 | |
| 197 | |

| | |
|---|---|
| 893001 | 4532 |
| 4532 | 197 |
| 44980 | |
| 40788 | |
| 39214 | |
| 31724 | |
| 197 | |

د تقسیم د عملیې اساسي اصول :

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په همغه عدد کې ضربیږي . لکه :

| | |
|---|---|
| 60 | 8 |
| 56 | 7 |
| 4 | |

| | |
|---|---|
| 300 | 50 |
| 280 | 7 |
| 20 | |

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په هغه عدد تقسیمیږي. مثال:

| | |
|---|---|
| 25 | 2 |
| 2 | 12 |
| 5 | |
| 4 | |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 250 | 20 |
| 20 | 12 |
| 50 | |
| 40 | |
| 10 | |

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده .

مثال:

```
1280 | 80
 80  | 16
----
 480
 480
----
 xxx

2000 | 80
 160 | 25
----
 400
 400
----
 xxx

3280 | 80
 320 | 41
----
  80
  80
----
 xxx
```

```
+1280
 2000
-----
 3280
```

4- که د دوو عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

```
-2000
 1280
-----
  720
```

```
720 | 80
720 | 9
---
xxx
```

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مگر 50 په 6 نه ویشل کیږي مگر $2400 = 48 \times 50$ په 6 ویشل کیږي.

```
2400 | 6
24   | 400
----
  00
```

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

1- د دري عددو مجموعه 180 ده د اول او دويم مجموعه 105 ده د دويم او دريم مجموعه 135 ده عددونه پيدا کړئ؟

2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.

3- د دوه ښارو تر منځ فاصله $900km$ ده يو موټر د يو ښار څخه د $85km$ په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانيږي او دويم موټر د دويم ښار څخه د $95km$ په سرعت اول ښار ته روانيږي ووايياست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.

4- عبدالوهاب دوه تانه رخت له يوه جنسه يو په $9000Rs$ او بل په $10500Rs$ واخيستل د تانونو فرق 5 متره دی ووايياست چې هر تان څو متره دی.

5- يو سړي دوه بوجۍ مميز له يوه جنسه يو په 37800 روپۍ او بل بوجۍ يې په $31500Rs$ واخيستل که د بوجيو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پيدا کړئ؟

6- دوه طياري له يوه ميدان څخه په يوه وخت کې پرواز کوي د يوې سرعت $500km/_h$ او د بلې سرعت $750km/_h$ دی يوه د شرق او بله د غرب خواته ځي پس له 2 ساعتو به يې په منځ کې فاصله څومره شي؟

7- يو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي يو د شمال خواته او بل جنوب خواته ځي د يوه سرعت $70km/_h$ او د بلې سرعت $90km/_h$ دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله $960km$ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# دویم فصل

## کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وايي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وويشل شي دي عمليې ته کسر وايي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر　　　2- عام کسر

## 1- اعشار کسر:

که واحد په 10 یا د 10 په طاقت وويشل شي دی کسر ته اعشار کسر وايي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ويشل شويدی او 3 برخې ور څخه اخيستل شويدی.

0.13 واحد په 100 برخو ويشل شويدی او 13 برخې ترې اخيستل شويدي. 0.007 واحد په 1000 برخو ويشل شويدی او 7 برخې ور څخه اخيستل شويدی.

## د اعشار کسر څلور ګونې عمليې:

### 1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې یو تر بل لاندې ليکو چې صحيح عدد د صحيح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بيا يې د صحيح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +87965.38 \\ 32887.45 \\ \hline 120852.83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +7678.3 \\ 6845.83 \\ \hline 14524.13 \end{array}$$

ميزان يې د صحيح عددونو د جمع د ميزان غوندې دي.

### 2- د اعشار کسر تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې صحيح عدد د صحيح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بيا يې د صحيح عددو د تفريق په شان تفريقوو.

$$\begin{array}{r} -5345.870 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.87 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1467.23 \\ 894.85 \\ \hline 572.38 \end{array}$$

ميزان يې د صحيح عددونو د تفريق د ميزان غوندې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو. د صحیح عددونو د ضرب په شان یې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بیلوو د راکړ شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

```
      4563.85
       3278.3
     --------
      1369155
     3651080
    3194695
   912770
  1369155
 ------------
  14961669.455
```

میزان یې د صحیح عددونو د ضرب د میزان غوندې دی.

4- د اعشار کسر تقسیم:

د اعشار کسر تقسیم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاریه وي او په مقسوم علیه کې نه وي.

لکه

```
4587.5 | 345
       |------
       |
```

د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو کله چې اعشاریې ته ورسیږو اعشاریه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کښته کوو عملیې ته تر درې اعشاري رقمو پورې ادامه ورکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

```
4587.5 | 345
345    | 13.297
1137
1035
1025
 690
 3350
 3105
  2450
  2415
    35
```

2- حالت: چې په مقسوم علیه کې اعشاریه وي په مقسوم کې نه وي.

لکه:

7562 | 34.2

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو او د صحیح عدد د تقسیم په شان یې تقسیموو که باقي وکړل باقي ته صفر ږدو او خارج قسمت کې اعشاریه ږدو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

756920 | 347

3- چې په مقسوم او مقسوم علیه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته درې حالته موجود دي.

الف: چې د مقسوم او مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وی لکه:

7843.82 | 9.23

د مقسوم او مقسوم علیه دواړو څخه اعشاریه حذفوو د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو که عملیې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ږدو او په خارج قسمت کې اعشاریه لیکو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

784382 | 923

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زیات او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

845.234 | 85.7

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاريه مخ ته ورو بيا يې د اعشار كسر د تقسيم د اول حالت په څير تقسيموو.

8452.34 | 857

ج: چې د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زيات وي لكه .

87635.3 | 0.456

د مقسوم او مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

87635300 | 456

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو.

ميزان يې د صحيح عددونو د تقسيم د ميزان غوندې دى.

## 2- عام كسر:

كه واحد د 10 او او 10 د طاقت څخه په غېر په نورو عددو وويشل شي دى كسر ته عام كسر وايي لكه $\frac{2}{3}$، $\frac{5}{11}$، $\frac{7}{99}$، $\frac{4}{101}$، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام كسر په څلور قسمه دى.

| | |
|---|---|
| 1- اصل كسر يا واقعي كسر | 2- واحد كسر |
| 3- غېر واجب كسر | 4- واجب كسر يا كسري عدد يا مخلوط كسر |

1- واقعي كسر: هغه كسر دى چې صورت يې لږ مخرج يې ډېر وي.

لكه $\frac{5}{13}$، $\frac{7}{19}$، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد كسر : هغه كسر دى چې صورت او مخرج يې مساوي وي لكه $\frac{8}{8}$، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library


3- غیر واجب کسر : هغه کسر دی چې صورت یې ډېر او مخرج یې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې دیوه صحیح عدداو یوه اصل کسرڅخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.

غیر واجبول:

په غیر واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غیر واجبول وايي.

طریقه یې داسې ده چې مخرج په صحیح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرج یې لیکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غیر واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7} = \frac{7 \times 9 + 1}{7} = \frac{63 + 1}{7} = \frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غیر واجب یې کړئ؟

$$8\frac{3}{5} = \frac{5 \times 8 + 3}{5} = \frac{40 + 3}{5} = \frac{43}{5}$$

تصحیح:

په واجب کسر باندې د غیر واجب کسر بدلولو ته تصحیح وايي .

طریقه یې داسې ده چې صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غیر واجب کسر دی واجب یې کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \underline{25} & 5 \\ 2 & \end{array}$$

$$\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

1- غير واجب یې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$  2- $11\frac{6}{7}$  3- $8\frac{2}{5}$  4 – $9\frac{1}{8}$

2- تصحيح یې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$  2- $\frac{48}{5}$  3- $\frac{77}{8}$  4- $\frac{46}{11}$  5- $\frac{117}{11}$

## د کسرونو مقایسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرجونه یې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرج یې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرجونه یې مساوي وي.

لکه:

$$\frac{4}{7} ، \frac{3}{7} ، \frac{2}{7} ، \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت یې ډېر وي.

$$\frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرجونه مختلف وي د دې کسرو د مقایسې لپاره کسرونه تجنیسوؤ.

تجنیس :

تجنیس په لغت کې هم جنس کولو ته وایې.

او په اصطلاح کې که د یوه کسر صورت او مخرج د بل کسر په مخرج کې ضرب شي دې عملیې ته تجنیس وایې.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقایسه کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{4}{7}=\frac{4\times 9}{7\times 9}=\frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5\times 7}{9\times 7}=\frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63}>\frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$$

تمرین :

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

1- $\frac{6}{11}$ او $\frac{9}{16}$ 2- $\frac{7}{9}$ او $\frac{8}{11}$ 3- $\frac{2}{5}$ او $\frac{3}{7}$ 4- $\frac{5}{7}$ او $\frac{7}{9}$ او $\frac{9}{11}$

**د کسرونو اختصار :**

اختصار په لغت کې لنډولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرج په یوه عدد ویشلو ته اختصار وایي.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرج په (3) ویشو .

$$\frac{\overset{4}{\cancel{12}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}=\frac{4}{5}$$

صورت او مخرج په 7 ویشو.

$$\frac{\overset{5}{\cancel{35}}}{\underset{9}{\cancel{63}}}=\frac{5}{9}$$

صورت او مخرج په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{\overset{\overset{5}{\cancel{20}}}{\cancel{120}}}{\underset{\underset{6}{\cancel{24}}}{\cancel{144}}}=\frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



صورت او مخرج په 12 ويشو او بيا يې په (2) ويشو.

$$\frac{\frac{10}{\frac{120}{144}}}{12} = \frac{\frac{5}{\frac{10}{12}}}{6} = \frac{5}{6}$$

د كسر د اختصار لپاره د تقسيم د قابليتونو زده كړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ويش قابليت: كه د يوه عدد لمړى رقم صفر يا جفت وي په (2) ويشل كيږي لكه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ويش قابليت: كه د يوه عدد رقمو مجموعه په 3 ويشل كيدله دا عدد په (3) ويشل كيږي.

لكه 11124 ، 1032 ، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ويش قابليت: كه د يوه عدد لمړى رقمونه صفرونه وه يا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ويشل كيږي نو دا ټول په څلور ويشل كيږي . لكه 300 ، 712 ، 520 ، 316 ، 316 ، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ويش قابليت: كه د يوه عدد لمړى رقم صفر يا 5 وي دا عدد په 5 ويشل كيږي لكه 310 ، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ويش قابليت :كه يو عدد په 2 او 3 ويشل كيدلو دا عدد په (6) هم ويشل كيږي لكه 312 ، 414 ، 276 ، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ويش قابليت: لمړى رقم حذفوو د حذف شوى دوه چنده د متباقي عدد څخه منفي كوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه وركوؤ كه په اخر كې صفر يا داسې عدد پلاس راغى چې په (7) ويشل كيدلو نو دا ټول عدد په (7) ويشل كيږي.

لكه: 359156 په 7 ويشل كيږي او كه نه:

$$\begin{array}{r} 359156 \\ \underline{12} \\ 35903 \\ \underline{6} \\ 3584 \\ \underline{8} \\ 350 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې 350 په 7 ویشل کیږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ویشل کیږي.

7- په (8) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه یا داسې درې عددونه وه چې په 8 ویشل کیدل نو دا ټول عدد په (8) ویشل کیږي.

لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.

8- په (9) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ویشل کیداله نو دا عدد په 9 ویشل کیږي.

لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.

9- په 10 باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد لمړی صفر وي په (10) ویشل کیږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.

10- په 11 باندې د ویش قابلیت: د طاق مرتبو رقمونه بیل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بیل جمع کوو یو دبل څخه یې منفي کوو که د تفریق حاصل صفر یا داسې عدد شو چې په 11 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 11 ویشل کیږي.

لکه : 558998

11- په 12 باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 3 او 4 ویش کیدلو دا عدد په 12 هم ویشل کیږي لکه 8016

12- په 13 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده یې د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ویشل کیږي.

لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.

13- په 17 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب تر اخره عملیې ته ادامه ورکوو که په اخرکی صفر یا داسې یو عدد لاس ته راغی چې په 17 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 17 ویشل کیږي.

لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library



14- په 19 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغی چې په 19 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 19 ويشل کيږي لکه (871701) اوداسې نور.

15- په 23 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متباقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ويشل کيږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو حذف شوي درې چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ويشل کيدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ويشل کيږي.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ويشل کيږي لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغی په 37 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 37 ويشل کيږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ويشل کيږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کیږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخرني عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کیږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کیږي لکه 24220311 ، 13383825 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتې عدد سره جمع کوو که اخرې عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کیږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کیږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتې عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر ؤ نو دا عدد په 67 ویشل کیږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library



26- په 71 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو حذف شوي اوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که د عملیې په اخر کې که صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ویشل کیږي نو دا ټول په 71 ویشل کیږي.

لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 22 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که د عملیې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ویشل کیږي.

لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 8 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که د عملیې په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 79 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 79 ویشل کیږي.

20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 25 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو عملیه تر اخره اجراء کوو که اخرني عدد په 83 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 83 ویشل کیږي.

لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ویش قابلیت : لمړی رقم حذفوو د حذف شوي (9) چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ویشل کیږي.

لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسیم قابلیت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 29 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عملیه تر اجره اجراء کوو که اخرني عدد صفر شو او یا داسې یو عدد شو چې په 97 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ویشل کیږي.

لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library


## د عام کسر څلور ګوني عملیې

### 1- د عام کسر جمع او تفریق :

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرج مشترک پیدا کوو مخرج مشترک د هر کسر په مخرج ویشو د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو د مخرج مشترک پر سر یې لیکو د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو .او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي.

خو د مخرج مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرجو پیژندل ضرور دي.

مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه : مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وايي.

$$4\frac{5}{9}+3\frac{7}{9}+8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9}+\frac{34}{9}+\frac{80}{9}=\frac{41+34+80}{9}=\frac{155}{9}=17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r|l} 155 & 9 \\ \underline{9} & 17 \\ 65 & \\ \underline{63} & \\ 2 & \end{array}$$

$$19\frac{3}{5}-8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5}-\frac{44}{5}=\frac{98-44}{5}=\frac{54}{5}=10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \underline{5} & 10 \\ 4 & \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې لوي مخرج په کوچني مخرج پوره تقسیم شي لکه:

$$5\frac{7}{12}+8\frac{3}{4}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مخرج مشترک يې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12}+\frac{35}{4}+\frac{47}{6}+\frac{17}{2}=\frac{67+105+94+102}{12}=\frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12}=30\frac{2}{3}$$

| | |
|---|---|
| 368 | 12 |
| 36 | 30 |
| 8 | |

$$11\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8}-\frac{19}{4}=\frac{93-38}{8}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$$

| | |
|---|---|
| 55 | 8 |
| 48 | 6 |
| 7 | |

3- **متوافق مخرجونه** : **هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي** لکه $8\frac{5}{9}+7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک يې په ذو اضعاف اقل پيدا کيږي.

$$15\frac{5}{6}-7\frac{3}{4}$$

| | |
|---|---|
| 97 | 12 |
| 96 | 8 |
| 1 | |

$$2\;\frac{95}{6}+\frac{31}{4}=\frac{190-93}{12}=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}$$

3 2

4- **متباين مخرجونه** : **هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي** لکه

$$9\frac{2}{3}+7\frac{3}{4}+7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک يې په حاصل ضرب پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{29}{3}+\frac{31}{4}+\frac{37}{5}=\frac{580+456+444}{60}=\frac{1480}{60}=24\frac{40}{60}=24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 1480 & 60 \\ \underline{120} & 24 \\ 280 & \\ \underline{240} & \\ 40 & \end{array}$$

$$19\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2}-\frac{26}{3}=\frac{117-52}{6}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 6 \\ \underline{6} & 10 \\ 5 & \end{array}$$

تمرین:

لاندې سوالونه حل کړئ

1. $9\frac{4}{11}+8\frac{5}{11}+4\frac{7}{11}$
2. $12\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
3. $9\frac{5}{6}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
4. $14\frac{5}{8}-7\frac{1}{2}$
5. $6\frac{2}{9}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
6. $8\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}$

2- د عام کسر ضرب:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو يې بیا صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

$-9\frac{2}{3}\times 5\frac{1}{4}$ I

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{29}{3}\times\frac{21}{4}=\frac{29\times 21}{3\times 4}=\frac{609}{12}=50\frac{9}{12}=50\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 609 & 12 \\ \underline{60} & 50 \\ 9 & \end{array}$$

تمرین:

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1- $12\frac{3}{4}\times 8\frac{7}{9}$

2- $6\frac{1}{8}\times\frac{11}{13}$

3- $2\times 4\frac{3}{4}$

4- $6\frac{1}{8}\times 7$

3- د عام کسرتقسیم:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو يې . بيا د تقسيم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوؤ.

1- $19\frac{1}{2}\div 3\frac{1}{8}$

$$\frac{39}{2}\div\frac{25}{8}=\frac{39}{2}\times\frac{8}{25}=\frac{312}{50}=6\frac{12}{50}=6\frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r|l} 312 & 50 \\ \underline{300} & 6 \\ 12 & \end{array}$$

2- $8\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}$

$$\frac{33}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{99}{8}=12\frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 8 \\ \underline{8} & 12 \\ 19 & \\ \underline{16} & \\ 3 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$15\frac{4}{9} \div 3$ -3

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 27 \\ \underline{135} & 5 \\ 4 & \end{array}$$

$8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$ -4

تمرین:

$20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6}$ -1

$41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5}$ -2

$16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ -3

$111 \div 1\frac{1}{2}$ -4

$14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$ -5

کسر الکسر یا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي.

لکه:

$\frac{\frac{2}{3}}{7}$ یا $\frac{5}{\frac{3}{4}}$ ، $\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفینو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطینو حاصل ضرب په مخرج کې لیکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}=\frac{1\times 2}{3\times 7}=\frac{2}{21}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times 5}{3\times 1}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}=\frac{7\times 13}{8\times 11}=\frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسر ورته وايي.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرین: لاندې کسرونه ساده کړئ؟

1- $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$

2- $\frac{9\frac{1}{8}+5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$

3- $\frac{11\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$

4- $\frac{4\frac{1}{2}\times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4}\div 2\frac{1}{3}}$

5- $\frac{6+7\frac{1}{2}}{9-3\frac{1}{4}}$

6- $\frac{\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library


د کسرونو تبادله:

1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \underline{40} & 0.8 \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \underline{6} & 0.16 \\ 40 & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \underline{24} & 0.375 \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ xx & \end{array}$$

2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندې خط کشوو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندې صفرونه ږدو او د اعشاريي د علامې په عوض یو لیکو او اختصار وؤ یې.

(c) ketabton.com: The Digital Library



1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ.

$$\frac{0.375}{1000} = \frac{\cancel{375}}{\cancel{1000}} = \frac{3}{8}$$

(375 → 75 → 15 → 3 ؛ 1000 → 200 → 40 → 8)

2- مثال: $0.\overline{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شویدی د 0.3 لاندې خط کشوو بیا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10} = \frac{3 \times 3 + 1}{10 \times 3} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال: $0.1\overline{6}$ عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100} = \frac{16 \times 6 + 4}{100 \times 6} = \frac{96 + 4}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$ 2- $\frac{3}{5}$ 3- $\frac{7}{8}$ 4- $\frac{5}{6}$ 5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$ 2- $0.7\overline{3}$ 3- $0.95\overline{45}$ 4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$ 6- $0.4\overline{16}$ 7- $0.9\overline{1}$ 8- $0.\overline{814}$

(c) ketabton.com: The Digital Library


عبارتي سوالونه:

1- احمد د یوې هنداونې $\frac{3}{7}$ برخه واخیسته پاتې شوې برخه یې پیدا کړئ؟

2- د تیلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د $200li$ ګنجایش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تیل څومره وي؟

3- د غوړیو د بیلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړیو څخه ډکه ده د ډکې برخې دریمه برخه یې $30kg$ ده د بیلر ګنجایش څو دی؟

4- احمد د $200\frac{1}{2}$ روپو بوره د $300\frac{1}{4}$ روپۍ یې چای د $700\frac{3}{4}$ روپۍ غوښه $30\frac{1}{2}$ روپۍ یې مالګه او اورلګیت واخیست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟

5- امین $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخیسته که غوښه کیلو ګرام په $300\frac{1}{4}$ روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخیستي دي؟

6- چای خرڅوونکی د چایو یو پیټی چې $50kg$ چای پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چای عمود ته یې $3\frac{1}{4}kg$ چای او یو دکاندار ورڅخه $20\frac{1}{4}$ کیلو ګارم چای واخیستی ووست چې په پیټي کې څومره چای پاتې دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



# دريم فصل

## طاقت، تجزيه او جذر

### طاقت لرونکی عددونه :

هغه عددونه دي چې څو واره په خپل ځان کې ضرب شوي وي.

لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربيږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وايې او د ضربيدو کرتو ته توان وايې.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

### د طاقت قوانين:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي . د قاعدوڅخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لروکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې سره ضربوو او د توانو څخه يو توان راخلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي د قاعدو څخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې يې يو پر بل ليکو او د توانو څخه يو توان راخلو.

1- $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $\frac{16^7}{12^7} = (\frac{16}{12})^7 = (\frac{4}{3})^7$

3- $\frac{5^8}{3^8} = (\frac{5}{3})^8$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه يې ضربيږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر يو کيږي.

$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$

$5^0 = 1$

$\frac{5^3}{5^3} = 1 \ldots\ldots\ldots I$

$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \ldots\ldots\ldots II$

د $I$ او $II$ رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه يې هم مساوي دي. يعني $5^0 = 1$ کيږي.

2- که يو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرج ته يا د مخرج څخه صورت ته ويوړل شي د توان علامه يې تغير خوري.

$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$

$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## تجزیه :

تجزیه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه مرکب عدد د ضربي عواملو د پیدا کولو طریقې ته تجزیه وایي.

## د تجزیې طریقه:

عدد لیکو خط یې لاندې کشوو چپې خواته یې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د راکړ شوي عدد په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راکړ شوی پدې لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو په همدې ترتیب عملیې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوؤ تر څو چې د عدد په ستون کې یو لاس ته راشي. د عمودي خط د چپې خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربي عوامل دي.

| | |
|---|---|
| 2 | 450 |
| 3 | 225 |
| 3 | 75 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزیه کړئ؟

| | |
|---|---|
| 3 | 55125 |
| 3 | 18375 |
| 5 | 6125 |
| 5 | 1225 |
| 5 | 245 |
| 7 | 49 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

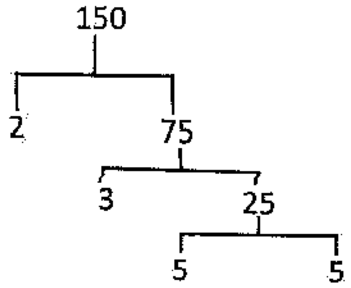
$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دیا ګرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسی ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول دمرکب عدد ضربي عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاګرام په طریقه تجزیه کړئ؟




$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

## د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم:دڅوعددولوی مشتر ک قاسم هغه عدد دی چې ترهغه په بل لوی عددباندې دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچني مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندې تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی . ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندې وویشل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه تجزیه کوو په ضربي عواملو کې يې مشترک او غير مشترک پيدا کوو په مشترکو ضربي عواملو کې د کوچني توان والاضربي عوامل راخلو ضربوويې لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربي عواملو کې د لوړ توان والاضربي او غير مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پيدا کړئ؟

| | |
|---|---|
| 2 | 150 |
| 3 | 75 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 210 |
| 3 | 105 |
| 5 | 35 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پيدا کړئ؟

| | |
|---|---|
| 2 | 660 |
| 2 | 330 |
| 3 | 165 |
| 5 | 55 |
| 11 | 11 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 840 |
| 2 | 420 |
| 2 | 210 |
| 3 | 105 |
| 5 | 35 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$
$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین :

د لاندې عددونو ا ، مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 630 او 450

2- 780 او 540

3- 960 او 660

5- 1440 او 1260

## د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچني عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقي وکړي مقسوم علیه په باقي ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقي صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دی

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قسام او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس به طریقه پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 1080 & 780 \\ 780 & 1 \\ \hline 300 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 780 & 300 \\ 600 & 2 \\ \hline 180 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 180 \\ 180 & 1 \\ \hline 120 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 120 \\ 120 & 1 \\ \hline 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 60 \\ 120 & 2 \\ \hline & \end{array}$$

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پيدا کوو.

$$L.C.M = \frac{\overset{13}{780} \times 1080}{\underset{1}{60}} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

## په يوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پيدا کول:

عددونه په يوه کرښه کې ليکو خط ور لاندې کشوو چپې خواته يې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد ليکو چې د دوي په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې ليکو تر هغو پورې عمليې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي د عمليې په اخر کې که د عمودي خط د چپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پيدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 780 | 1080 |
| 2 | 390 | 540 |
| 3 | 195 | 270 |
| 5 | 65 | 90 |
| | 13 | 18 |

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرين:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقليدس په طريقه پيدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې عددونو کوچنی مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 960 او 1530

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر :

جذر په لغت کې ولی، ریښه یا جرړې ته وایې.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کیږي.

د یو عدد دویم جذر : هغه عدد دی چې د (2)په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي . لکه:

1- $\sqrt{64} = 8$
$8^2 = 64$
2- $\sqrt{169} = 13$
$13^2 = 169$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د دریم په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

نو $64 = 4^3$ کیږي.

ددویم جذرپیدا کول:

دیوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د تجزیې پواسطه          2- په عمومي طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library



## 1- د تجزيي پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا کول:

عدد تجزيه کوو په مساوي ضربي عواملو کې دوه ، دوه جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو او ضربوو يې د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 324 |
| | 2 | 162 |
| 3 | 3 | 81 |
| | 3 | 27 |
| 3 | 3 | 9 |
| | 3 | 3 |
| | | 1 |

$$324 = 2 \times 3^{2}$$

دیوه عدد د دریم جذر پیداکول په

عدد تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل ئي درې،درې جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو ضربوو يې د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 1000 |
| | 2 | 500 |
| | 2 | 250 |
| 5 | 5 | 125 |
| | 5 | 25 |
| | 5 | 5 |
| | | 1 |

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

### د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوؤ، د هرې جوړې څخه یو عدد راخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي.

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 1296 |
| | 2 | 648 |
| | 2 | 324 |
| | 2 | 162 |
| 3 | 3 | 81 |
| | 3 | 27 |
| | 3 | 9 |
| | 3 | 3 |
| | | 1 |

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزیې پواسطه ، پنځم ، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

### 2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو ښي خواته یې د تقسیم علامه او چپې خواته یې یو عمودي خط رسموؤ بیا د عدد د ښي خوا څخه دوه ، دوه مرتبې جوړه کوؤ اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتي شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چپې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخرني جوړې یا اخرنی عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څیر یې استعمالوو د عمودي خط د چپې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ور څخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکینې عدد مخې ته او د عمودي خط د چپې د خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چپې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

(c) ketabton.com: The Digital Library



تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکښته کوو د عمودي خط د چپې نوی رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عملیې باقي ونکړل د تقسیم د عملیې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عملیې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$\sqrt{209764} = 458$

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 20 97 64 | 458 |
| 85 | 16 | |
| 805 | 497 | |
| | 425 | |
| | 7264 | |
| | 7264 | |
| | xxxx | |

$\sqrt{502681} = 709$

| | | |
|---|---|---|
| 7 | 50 26 81 | 709 |
| 1409 | 49 | |
| | 12681 | |
| | 12681 | |
| | xxxx | |

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$

2- $\sqrt{318096} = ?$

3- $\sqrt{734449} = ?$

4- $\sqrt{2047.5625} = ?$

5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

## تقریبي جذر :

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شویدی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایې د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه 2- د اوسط په طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library


1- په عمومي طريقه :

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوؤ که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلي جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 128968 | 359.1 |
| 65 | 9 | |
| 709 | 389 | |
| 7169 | 325 | |
| | 6468 | |
| | 6381 | |
| | 8600 | |
| | 7169 | |
| | باقي 1431 | |

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه :

د کوچنيو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچنی عدد ته نژدې ؤ نو جذر يې د کوچنی عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راکړ شوي عددتقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيداکوو $2.5 = \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2}$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{2.5+2}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$$

2.25 د 5 تقریبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقریبي 2.25جذر دی د 7 او 8 تقریبي جذر 2.75 دی.

## د اعشاري عدد دویم جذر پیدا کول:

صحیح عدد یې د ښې خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه یې د چپې خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه یې طاق وي مخې ته یو صفر ږدو. کله چې د اعشار یې د علامې څخه اوړو اعشاریه خارج قسمت ته وړو.

مثال: 903.6036 دویم جذر پیدا کړئ؟

```
   3  |  9 03.6036   | 30.06
6006  |  9           |
      | ---------
      |  036036
      |   36036
        ---------
          xxxxx
```

تمرین:

لاندې عددو تقریبي جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

4716 -1　　35811 -2　　7504-3　　9814 -4　　6763 -5

-2 د لاندې عددو تقریبي جذر د اوسط په طریقه پیدا کړئ؟

11 -1　　13 -2　　19 -3　　29 -4　　34-5

-3 د لاندې اعشاري عدد دویم جذرپیدا کړئ؟

457.96 -1　　1229.9049 -2　　337444.81 -3　　48830.25 -4

2605.0816 -5　　64.048009 -6　　2711.2849 -7

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د جذر قوانین:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفي وي. که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددو یې بدلووو طاقت قوانین پرې تطبیقوو اخرې عدد بیرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{31}}$$
$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{15+10+6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوي وي. د طاقت د قوانینو سره سم کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو.

$$\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5} = \sqrt[7]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[7]{30}$$
$$2^{\frac{1}{7}} \times 3^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{1}{7}} = (2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{7}} = 30^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{30}$$

3-که دوه جذري عددونه د تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مساوي او د جذر درجې یې مختلفې وي د طاقت د قوانینو په اساس کولای شو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[35]{5^4}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}} = 5^{\frac{7-3}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسیم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه یې مختلف او د جذر درجې یې مساوي وي د طاقت د قوانینو سر سم یې تر یوه جذر لاندې لیکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = (\frac{5}{6})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندې عدد لاس ته راځي

$$(\sqrt[7]{5})^7 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7=\left(5^{\frac{1}{7}}\right)^7=5^{\frac{1}{7}\times\frac{7}{1}}=5^{\frac{7}{7}}=5^1=5$$

6- که يو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانينو سره سم يې تر يوه جذر لاندې کوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}=\sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}=\left\{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{30}}=\sqrt[30]{2}$$

تمرين:

تر يوه جذر يې لاندې کړئ؟

1- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[5]{3}$ 2- $\sqrt[7]{2}\times\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{5}$ 3- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2}}$

4- $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{7}}$ 5- $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}$

## د حسابي افادو د قيمت پيدا کول:

حسابي افاده: که په يوه حسابي جمله کې څو عمليې (جمع ، تفريق ، ضرب ، تقسيم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قيمت د پيدا کولو لپاره لمړی طاقت او جذر د منځه وړو بيا قوسونه خلاصوو دريم قدم کې د ضرب او تقسيم عمليې او په اخر د جمع او تفريق عمليې اجراء کوو.

قوس: يو سمبول دی چې څو عددونه تر يوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي.

1- کوچنې قوسونه چې شکل يې ( ) دی.

2- منځنی قوسونه چې شکل يې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل يې [ ] دی.

مثال:

$$(8-11)(4-5)+8-2\div2-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3(-1)+8-1-11$$
$$3+8-12$$
$$11-12=-1$$

## هم درجه کول:

که څو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندې عددونه مختلفي او درجې یې هم مختلفې وي که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو لمړی یې هم درجه کوو.
طریقه یې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د همغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt[5]{3}\times\sqrt{2}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل : لمړی یې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5}\times\sqrt[10]{3^2}=\sqrt[10]{2^5\times 3^2}=\sqrt[10]{32\times 9}=\sqrt[10]{288}$$

2- $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt{3}}$ هم درجه یې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}}=\sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین : هم درجه یې کړئ؟

1- $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{2}$  2- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}$  3- $\sqrt[3]{4\times\sqrt[4]{5}}$  4- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

5- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}}$  6- $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{6}}$  7- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

## د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

همغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوی وي او د جذر درجې یې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt[3]{2}+11\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$(7+11+6)\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$24\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$(24-15)\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$

2- $5\sqrt{32}+7\sqrt{128}+5\sqrt{8}-20\sqrt{2}$ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟

$5\sqrt{16\times 2}+7\sqrt{64\times 2}+5\sqrt{4\times 2}-20\sqrt{2}$

$5\times 4\sqrt{2}+7\times 8\sqrt{2}+5\times 2\sqrt{2}-20\sqrt{2}$

$(20+56+10-20)\sqrt{2}=66\sqrt{2}$

تمرین:

لاندې جذري عددونه جمع او تفریق کړئ؟

1- $11\sqrt{5}+19\sqrt{5}+8\sqrt{5}-25\sqrt{5}$

2- $\sqrt{128}+3\sqrt{8}-5\sqrt{32}$

3- $13\sqrt{27}+5\sqrt{243}-20\sqrt{3}$

ګویا کول:

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې جذري حد یا عدد موجود وي کولای شو چې ګویا یې کړو. مګر مشهور په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي د کسر د مخرج ګویا کول په حساب کې دوه حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه یې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$. صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو.

$$\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}=\frac{5\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

2- چې د کسر په مخرج کې یو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{3}{\sqrt[5]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د ګویا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر د درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جواب

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{2}{\sqrt[5]{12}\times\sqrt[5]{12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12\times 12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرین : ګویا یې کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 2- $\frac{3}{\sqrt{12}}$ 3- $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 4- $\frac{15}{\sqrt{5}}$ 5- $\frac{2}{\sqrt{2}}$

6- $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}}$ 8- $\frac{12}{\sqrt[5]{3}}$ 9- $\frac{14}{\sqrt[5]{7}}$ 10- $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

## د اعدادو سیستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه لیکل شویدی نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعمالیږي د 10 په قاعده د اعدادو سیستم او یا اعشاري سیستم بلل کیږي.

مثلاً 5918 یو عدد راکړ شویدی د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چه رقمونه یې څلور دي نو راکړ شوي عدد څلور ځایه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې لیکو.

$$5918 = 5000 + 900 + 10 + 8$$
$$= 5\times 10^3 + 9\times 10^2 + 1\times 10^1 + 8\times 10^0$$

که ضریبونه څنګ په ترتیب سره ولیکل شي نو بیرته لمړنی عدد لاس ته راځي.

همدغه ډول که راکړ شوی عدد په مسلسله توګه په 10 وویشو او باقیات د تقسیم په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته ولیکو. او بیا دباقیاتو د ستون رقمونه په افقي کرښه کې داسې ولیکو چې د ستون د سر رقم یې په سر کې راشي. او نور رقمونه یې په ترتیب سره وروسته ولیکل شي بیرته راکړ شوی عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


| | | |
|---|---|---|
| 10 | 5918 | |
| 10 | 591 | 8 |
| 10 | 59 | 1 |
| 10 | 5 | 9 |
| | 0 | 5 |

$5918_{10} = 5918$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپیوتري معایناتو کې د امراضو د تشخیص لپاره دوه نور سیستمونه هم لیکل شویدي چې د 2 په قاعده د اعدادو سیستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سیستم دی.

1- د 2 په قاعده د اعدادو سیستم:

که وغواړو چې یو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ویشو باقیات یې د تقسیم د عملیې په مقابل کې دپاس څخه کښته خواته لیکو که د باقیاتو د ستون رقمونه په افقي ډول ولیکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 31 | |
| 2 | 15 | 1 |
| 2 | 7 | 1 |
| 2 | 3 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 |

$31_{10} = 11111_2$

یا دا چې د طاقت د قوانینو څخه استفاده کوو.

$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$

$31_{10} = 11111_2$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2)دي چې عبارت له (0,1) څخه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوئ؟

حل:

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 251 | |
| 5 | 50 | 1 |
| 5 | 10 | 0 |
| 5 | 2 | 0 |
| | 0 | 2 |

$$251_{10} = 2001_5$$

$$251 = 2 \times 125 + 1$$
$$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$
$$251 = 2001_5$$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

33-1 47 -2 65 -3

77-4 71-5 97-6

لاندې عددونه د 5 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

211-1 314 -2 97 -3

86 -4 98 -5 101 -6

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: $111011_2$ د 10 قاعدې ته واړوئ

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59$$
$$59_{10} = 111011_2$$

## د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمړی رقم په $5^0$کې دریم رقم $5^1$ کې ...... په همدې ترتیب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه یې جمع کوؤ د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: $32104_5$ د 10 قاعدې ته واړو.

$$3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$
$$3 \times 625 + 2 \times 125 + 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$
$$1875 + 250 + 25 + 0 + 4 = 2154$$

تمرین:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- $101111_2$ 2- $111011_2$ 3- $111111_2$

4- $1010001_2$ 5- $100011_2$

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- $231_5$ 2- $341_5$ 3- $423_5$ 4- $143_5$ 5- $234_5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# څلورم فصل

## نسبت او تناسب

**نسبت:**

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

$a$ ته اول حد یا صورت یا مقدم وايي $b$ ته دويم حد یا مخرج یا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فيصد په شکل او د اعشار کسر په شکل هم ليکلای شو.

اوله قاعده - د نسبت پیداکول: که دوه عددونه راکړ شوي وي او وغواړو چې نسبت یې پيدا کړو يو پر بل یې ليکو او اختصاروؤ يې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دويم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت یې پيدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دويمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او اول حد معلوم وي دويم حد معلوم نه وي. دويم حد په لاندې ډول پيدا کوو.

$$\text{دويم حد} = \text{اول حد} \div \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{د محمود روپۍ} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$

$\text{احمد روپۍ} = 430$ $\text{د محمود روپۍ} = 688Rs$

$\text{د محمود روپۍ} = ?$

دريمه قاده: چې د دوه کميتو نسبت او دويم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

$$\text{اول حد} = \text{دويم حد} \times \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپۍ 688 دي د احمد روپۍ څو دي؟

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{احمد روپۍ} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$

$\text{محمود روپۍ} = 688$ $\text{احمد روپۍ} = 430Rs$

$\text{احمد روپۍ} = ?$

څلورمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کميتونه معلوم نه وي د کميتو د لاس ته راوړلو لپاره د کميتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ويشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې يې ضرب کړو دويم حد لاس ته راځي.

مثال:- د اکرم او انور د پيسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پيسو مجموعه 4080 ده د هر يوه روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپۍ}}{\text{د انور روپۍ}} = \frac{3}{5}$$

$\text{مجموعه} = 4080$ $\text{اکرم روپۍ} = \frac{3\times4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$

$\text{د اکرم روپۍ} = ?$ $\text{انور روپۍ} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$

$\text{د انور روپۍ} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library


پنځمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او تفاضل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پیسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پیسو فرق یې 750 دی د هر یوه پیسې څو دي؟

$\frac{6}{11}=$ نسبت

$750=$ تفاضل

عبدالهادي روپۍ $=?$

عبدالباري $=?$

$$\text{عبدالهادي روپۍ} = \frac{6\times 750}{11-6} = \frac{4500}{5} = 900$$

$$\text{عبدالباري روپۍ} = \frac{11\times 750}{11-6} = \frac{8250}{5} = 1650$$

شپږمه قاعده : چې د دوه کمیتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ویشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال:- د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل یې 2240 دی د هر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

$\frac{5}{7}=$ نسبت

$2240=$ د ضرب حاصل

$$\text{د احمد روپۍ} = 5\sqrt{\frac{2240}{5\times 7}} = 5\sqrt{64} = 5\times 8 = 40$$

$$\text{د محمد روپۍ} = 7\sqrt{\frac{2240}{5\times 7}} = 7\sqrt{64} = 7\times 8 = 56$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه یا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرج د دویم کسر صورت په همدې ترتیب اخره وي دی کسروته معکوس نسبت وایي لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتو د ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{\cancel{b}}\times\frac{\cancel{b}}{\cancel{c}}\times\frac{\cancel{c}}{\cancel{d}}\times\frac{\cancel{d}}{e}=\frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پیسو نسبت $\frac{3}{4}$ دی د محمود او حامد د پیسو نسبت $\frac{5}{7}$ دی که د احمد روپی 300 وي د حامد روپی څو دی؟

$$\text{نسبت}=\frac{\text{د احمد روپی}}{\text{دمحمودروپی}}=\frac{3}{4}$$

$$\text{نسبت}=\frac{\text{محمود روپی}}{\text{حامد روپی}}=\frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\cancel{\text{محمود}}}\times\frac{\cancel{\text{محمود}}}{\text{حامد}}=\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}}=\frac{15}{28}$$

$\text{احمد روپی}=300Rs$ $\quad$ $\text{نسبت}=\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}}=\frac{15}{28}$ $\quad$ $\text{د حامد روپی}=300\div\frac{15}{28}$

$\text{حامد روپی}=?$

$\text{دحامد روپی}=300\times\frac{28}{15}=20\times28=560$

(c) ketabton.com: The Digital Library


تمرین:

1- یو سړي 42 منه ممیز د 70 منه نخودو سره ګډوي نسبت یې پیدا کړئ؟

2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟

3- یو دکاندار دوه قسمه چای سره ګډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که دګډ شوي چای تفاضل 50 منه وي د چای د هر قسم مقدار پیدا کړئ؟

4- د میو او وریجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وریجې 50 منه وي مې به څومره وي او څومره مې زیاتې شي چې نسبت یې $\frac{3}{8}$ شي؟

5- د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل یې 36000 دی د هر یوه روپۍ څو دي؟

6- د بادامو او پستې د قیمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پیستې د یومن قیمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟

7- د احمد او اکرم د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپۍ 3000 وي د انور روپۍ به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

لکه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يا $a:b::c:d$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدوته وسطين وايي.

$a$ او $d$ طرفين دي $b$ او $c$ وسطين دي.

د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$$

$$2\times 24=3\times 16$$

$$48=48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نوی نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي دتناسب خواص تغير نه خوري .

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په دري حالتو کې مطالعه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب          b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر یې دوه وي لکه $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زیات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وایي.

لکه ......... $\frac{5}{8} = \frac{35}{56} = \frac{45}{72}$

2- د حدو د ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب          b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په ډېریدو د بل نسبت مربوطه حد ډېریدلو او په کمیدلو سره یې کمیدلو دی تناسب ته مستقیم تناسب وایي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12} = \frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمیدو سره د بل نسبت مربوطه حد ډېریدولو او په ډېریدو سره یې کمیدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وایي.

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي

$$\frac{12}{6} = \frac{18}{36}$$

3- د حدو د ورکیدو له کبله دتناسب اقسام:

د حدو د ورکېدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف- څلورم تناسب: که په یوه تناسب کې یوه حد ورک ؤ دی تناسب ته څلورم تناسب وايي لکه:

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصيت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دريم تناسب: که په یوه تناسب کې وسطين مساوي وي دی تناسب ته دريم تناسب وايي.

مثال: د 5 او 30 دريم تناسب پيدا کړئ؟

$$\frac{5}{30}=\frac{30}{x}$$

$$x=\frac{30\times 30}{5}=\frac{900}{5}=180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په يو تناسب کې طرفين معلوم او وسطين معلوم نه وي دې تناسب ته هندسي وسط وايي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پيدا کړئ؟

$$\frac{5}{x}=\frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5 \times 180 \qquad x^2 = 900 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{900}$$

$$x = 30$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی وواياست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟

2- اته کسه یو کار په 20 ورځو کوي وواياست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

3- احمد يو کار په 4 ورځو او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې دواړه به يې په شريکه په څو ورځو کې وکړي؟

4- احمد او محمود په شريکه يو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد يې يوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به يې په څو ورځو کې وکړي؟

5-احمد يو کار په 6 ورځو کې محمود يې په 9 ورځو کې او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې ټول به يې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟

6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او يو کار په 15 ورځو کې خلاصوي وواياست چې 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟

7- د 8 او 12 دريم تناسب پيدا کړئ؟

8- د 8 او 18 هندسي وسط څو دي؟

9- د 20 او 80 هندسي وسط پيدا کړئ؟

10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او يوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي. وواياست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او يوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



# پنځم فصل

فیصد:

د 100 له قراره د یوې تجارتي معاملې د ګټې یا تاوان معلومولو ته فیصد وایي.

یا داچه په یوه مرکبه ماده، مخلوط یا محلول کې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فیصد وایي.

د فیصد فارمولونه دا دي.

$$ګټه = \frac{سرمایه \times نرخ}{100}$$

په مرکبه ماده یا مخلوط یا محلول کې د هغوي مقدار د سرمایې حیثیت لري د اجزاو فیصدي نرخ دی او په ټوله ماده کې د هغه جز مقدار د ګټې حیثیت لري.

$$نرخ = \frac{100 \times ګټه}{سرمایه}$$

$$سرمایه = \frac{100 \times ګټه}{نرخ}$$

مثال: 8000 روپۍ ګټه د 3 فیصد په نرخ پیدا کړئ؟

$$ګټه = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: یو سړي په 12000 روپیو کی 960 روپۍ وګټلې نرخ کې څو دی؟

$$نرخ = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

$سرمایه = 12000Rs$

$ګټه = 960Rs$

$نرخ = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library



3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 6% په نرخ ګټلي سرمایه یې پیدا کړئ؟

ګټه = 15000

نرخ = 6

سرمایه =?

$$\text{سرمایه} = \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$$

$$\text{سرمایه} = 250000$$

4- د یوه سړي د ګټې او سرمایې مجموعه $28000Rs$ ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او ګټه یې معلومه کړئ؟

حل:

ګټه او سرمایه $= 28000Rs$

نرخ = 12

سرمایه =?

ګټه =?

$$100 + 12 = 112$$

$$\frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$$

$$x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$$

$$\text{سرمایه} = x = 250000Rs$$

$$\text{ګټه} = 28000 - 25000 = 3000$$

$$\text{ګټه} = 3000$$

پوښتنه:- په $40kg$ مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پریږدي. تخفیف بلل کیږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د ګټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\text{تخفيف} = \frac{\text{نرخ} \times \text{اصلي قيمت}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times \text{تخفيف}}{\text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{100 \times \text{تخفيف}}{\text{نرخ}}$$

اصلي قيمت −
تخفيف
―――――
فعلي قيمت

مثال: د يوه موټر اصلي قيمت $300000Rs$ دی خرڅوونکی اخيستونکی ته په 100 کې 8 روپۍ پرېښودی تخفيف او اصلي قيمت يې پيدا کړئ؟

اصلي قيمت $= 300000$

نرخ $= 8\%$

تخفيف $=?$

فعلي قيمت $=?$

$$\text{تخفيف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

تخفيف $= 24000$

فعلي قيمت $= 300000 - 24000 = 276000Rs$

2- د يوه اس اصلي قيمت $240000Rs$ دي که تخفيف يې $16800Rs$ وي نرخ يې پيدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7$$

نرخ $= 7$

3- د يوه موټر تخفيف $80000Rs$ دی نرخ يې 8 دی اصلي قيمت يې څو دی؟

تخفيف $= 80000R_s$

نرخ $= 8$

اصلي قيمت $= ?$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{100 \times \text{تخفيف}}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000\mathrm{R_s}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

احدیت:

په لغت کې تنهايي او يوازي والي ته وايي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شيانو د مجموعي قيمت څخه د يوه شي د قيمت پيدا کولو ته احديت وايي.

طريقه يې داسې ده چې مجموعي قيمت د شيانو په شمېر ويشو.

$$\text{احديت} = \frac{\text{مجموعي قيمت}}{\text{د شيانو شمېر}}$$

مثال: يو خياط په څلور ورځو کې 28 کميسونه وګنډل ووایاست چې په يوه ورځ کې به يې څو کميسونه ګنډلي وي؟

| ورځې | کميسونه |
|---|---|
| 4 | 28 |
| 1 | x |

$$\frac{4}{1} = \frac{28}{x}$$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په يوه ورځ کې يې 7 کميسونه ګنډلي دي.

2- يو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په $240Rs$ کيږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنګه سوالونه په تناسب کې ډېر اسنه حل کيږي خو د احديت په طريقه داسې حليږي اول د يو پنسل قيمت پيدا کوو بيا يې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قيمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$\text{د 7 پنسلو قيمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قيمت 360 روپۍ وي د يو متر رخت قيمت څو دی او بيا د 5 مترو قيمت يې پيدا کړئ؟

$$\text{د يوه متر قيمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$\text{د 5 مترو قيمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ربحه يا ربح:

ربح په لغت کې سود يا ګټې ته وايي.

او په اصطلاح کې په يوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د يوې سرمايې د ګټې د پيدا کولو طريقې ته ربح وايي. ربح په دوه ډوله ده.

1- ساده ربح          2- مرکبه ربحه

1- ساده ربحه:

هغه ربحه ده چه د مودې تر رسيدلو وروسته ګټه اخيستل کيږي او سرمايه بيا په ربحه اچول کيږي

د ساده ربحې فارمولونه څلور دي.

$$ربح = \frac{سرمايه \times موده \times نرخ}{12 \times 100}$$

$$نرخ = \frac{1200 \times ربح}{موده \times سرمايه}$$

$$موده = \frac{1200 \times ربحه}{سرمايه \times نرخ}$$

$$سرمايه = \frac{1200 \times ربحه}{موده \times نرخ}$$

مثال: د 20000 روپيو ربحه د ٪15 په نرخ په 8 مياشتو کې پيدا کړئ؟

$$ربحه = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000 \qquad ربحه = 2000Rs$$

مثال: يو سړی د 8 مياشتو لپاره $20000Rs$ په مرابحه واچوي پس له 8 مياشتو يې ربحه $2000Rs$ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

$$نرخ = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15 \qquad نرخ = 15\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 20000 روپیو ربحه د 15٪ په نرخ 2000 روپی. ده موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \qquad \text{8 میاشتې} = \text{موده}$$

مثال: یو سړي یوه سرمایه په مراجعه واچوله پس له 8 میاشتو یې د 15٪ په نرخ 2000 روپۍ ربحه واخیسته سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$\text{سرمایه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمایه} = 20000\text{Rs}$$

2- مرکبه ربحه:

که د مرابحې د وخت تر را رسیدلو وروسته ربحه او سرمایه بیا په ربحه واچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وایي.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1+r)^n$$

$A$ د سرمایې او ربحې مجموعه ده $C$ اولنی سرمایه ده $r$ نرخ دی او $n$ د کلونو شمیر دی.

$C$ سرمایه او $Cr$ گټه او $A$ د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$
$$A_1 = C(1+r)$$
$$A_2 = C(1+r) + C(1+r)r$$
$$A_2 = C(1+r)(1+r) = c(1+r)^2$$
$$A_3 = C(1+r)^2 + C(1+r)^2 r$$
$$A_3 = C(1+r)^2(1+r) = C(1+r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د $n$ کلو د سرمایې او ربحې مجموعه پیدا کړو.

په عمومي صورت لیکو چې:

$$A = C(1+r)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: يو سړي $50000Rs$ د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ربحه واچولې ګټه او سرمايه يې پيدا کړئ؟

$$A = 50000(1 + \frac{5}{100})^3$$

$$A = 50000(\frac{100 + 5}{100})^3$$

$$A = 50000\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000\left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5 \times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرين:

1- د 10000 روپيو ربحه 8٪ په نرخ په 9 مياشتو کې څو ده ؟

2- د 50000 روپيو ګټه په 6 مياشتو کې 5250 روپۍ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

3- د 20000 روپيو ګټه د اوه مياشتو په موده کې 1750 روپۍ ده نرخ يې څو دی؟

4- د 18000 او ګټې د 18٪ په نرخ 1750 روپۍ ده موده يې پيدا کړئ؟

5- لوی سرمايې په 8 مياشتو کې د 15٪ په نرخ 3000 ګټې سرمايه څو ده ؟

6- احمد 5000 روپۍ د 20٪ په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ربحه واچولې ګټه او سرمايه يې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library


## تنزیل:

تنزیل په لغت کې کښته کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې سند خرڅوونکي یې سند اخیستونکي ته په یوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې پرېږدي تنزیل بلل کېږي.

د تنزیل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزیل} = \frac{\text{اصلي قیمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قیمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{اصلي قیمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{1200 \times \text{تنزیل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزیل} - \text{اصلي قیمت} = \text{فعلي قیمت}$$

مثال: د سند اصلي قیمت $300000Rs$ دی مودې ته یې 9 میاشتې دي نرخ یې 15٪ دي تنزیل یې څو دي؟

$$\text{تنزیل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قیمت 50000 دی په 9 میاشتو کې یې تنزیل $3000Rs$ دی نرخ یې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8 \qquad \text{نرخ} = 8$$

3- د 20000 د تنزیل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6 \qquad \text{شپږ میاشتې} = \text{موده}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



4- د يوه سند تنزيل د 15% په نرخ چې مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قيمت څو دی؟

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قيمت} = 45000Rs$$

تمرين:

1- د يوه سند اصلي قيمت $450000Rs$ مودې ته يې 6 مياشتې پاتې دي د 15% په نرخ يې تنزيل څو دی؟

2- د يوه سند اصلي قيمت $75000Rs$ دی د 4% په نرخ يې تنزيل $2250Rs$ شو مودې ته يې څومره وخت پاتې دی.

3- د يو سند اصلي قيمت $90000Rs$ دی مودې ته يې 8 مياشتې دی که تنزيل $3000Rs$ وي نرخ يې پيدا کړئ؟

4- د يوه سند تنزيل په 8 مياشتو کې د 7% په نرخ $5600Rs$ شوي اصلي قيمت يې څو دي.

## مشارکت:

که څو کسه په يوه تجارتي معامله لاس پورې کړي ګټه او تاوان يې سره شريک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وايي.

د شراکت د ګټې تقسيم په څلور حالتو کې مطالعه کوو.

اول حالت:

چې سرمايې او مودې يې مساوي وی. ګټه په نفرو ويشل کيږي.

مثال: احمد ، محمود او حامد هر يوه $500000Rs$لري د جمل په اول يې په تجارت پيل وکړ د کال تر اخره پورې $900000Rs$ روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه څو ده.

حل:

$$\text{د هر يوه ګټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

چې مودې یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي ګټه د سرمایو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد $60000Rs$ لري په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې $300000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ.

د احمد سرمایه $= 40000Rs$     1/حمل

د محمود سرمایه $= 50000Rs$     1/حمل

د حامد سرمایه $= 60000Rs$     1/حمل

ګټه $= 300000Rs$

د هر یوه ګټه $=?$     $4 + 5 + 6 = 15$

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

د احمد ګټه $= 4 \times 20000Rs = 80000Rs$

د محمود ګټه $= 5 \times 20000Rs = 100000Rs$

د حامد ګټه $= 6 \times 20000Rs = 120000Rs$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي ګټه د مودو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد $150000Rs$ لرلې د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د $150000Rs$ په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د $150000Rs$ په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library -



حل:

| | | | |
|---|---|---|---|
| احمد | 150000 | 1/ حمل/ | 12 |
| محمود | 150000 | 1/ اسد/ | 8 |
| حامد | 150000 | 1/عقرب/ | $\frac{5}{25}$ |

گټه = 500000

د هر يوه گټه =?

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

$$\text{د احمد گټه} = 12 \times 20000 = 240000$$

$$\text{د محمود گټه} = 8 \times 20000 = 16000$$

$$\text{د حامد گټه} = 5 \times 20000 = 100000$$

## څلورم حالت:

چې مودې او سرمايې مختلفې وي.

د هر سړي موده د هغه په سرمايه کې ضربيږي د ضرب حاصلونه يې جمع کيږي گټه په دغه مجموعه ويشل کيږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايې په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لرلې د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وگټلې د هر يوه گټه څو ده؟

| | | |
|---|---|---|
| احمد | = 50000 | 1/حمل/ |
| محمود | = 80000 | 1/ميزان/ |
| گټه | = 216000 | |

د هر يوه گټه =?

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد ګټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود ګټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرين:

1- څلور کسان هر يو 200000 روپۍ لرلې. په اول د حمل يې تجارت شروع کړ د کال تر اخره يې [illegible] روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه څو ده؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلې د حمل په اول يې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپيو په سرمايه په اول دسنبله ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 120000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلې په اول د ثور يې تجارت شروع کړ د کال تر اخره يې 150000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلې په اول د جوزا يې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپيو په سرمايه په اول د ميزان ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 112000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



# شپږم فصل

سيټ (Set):

سيټ يو انګليسي لفظ دی چې مفهوم يې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

په اصطلاح کې سيټ د هغو شيانو مجموعه يا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخيص وړ وي.

سيټ د الفباء د غټو تورو پواسطه ښودل کيږي لکه A ، B ، C ، M ، .......... او داسې نور.

د سيټ نظريه د Gorge cantor (1845 – 1919) م پواسطه په رياضي کې داخل او معرفي شوه.

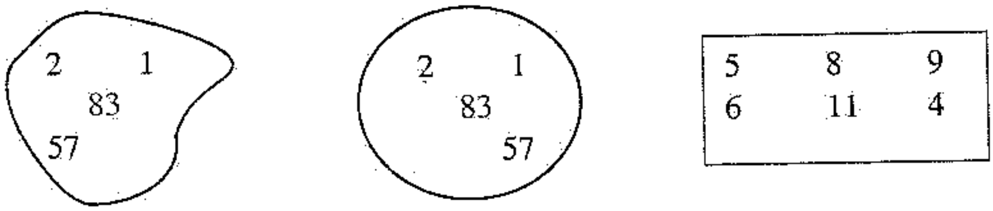
د سيټ عناصر Element of set:

په سيټ کې شاملو شيانو ته د سيټ عناصر وايي. مثلاً $A = \{2,3,a,b\}$

چې 2، 3، a او b د سيټ عناصر دي.

د سيټ نمايش:

Venn برطانوي عالم سيټ د هندسي او غير هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې دسيټ دغه نمايش Venn diagram وايي.




د سيټ د ليکلو طريقې:

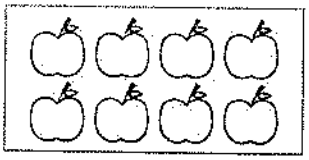
د سيټ د ليکلو طريقې څلور دي.

1- Picture Method:

پدې ميتود کې د سيټ د عناصرو شکلونه رسموي دا ميتود په کښته ټولګيو کې استعماليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:



2- د Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفي میتود پواسطه لیکل کیږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کیږي

د $E$ ژبې د بې اوازه تورو سیټ په $A$ ښیو.

$$A = \{\text{د } E \text{ بې اوازه توری}\}$$

$$B = \{\text{حسابي ارقام}\}$$

3- د Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي.

لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په $(x)$ ښیي فرضاً د $A$ د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو $x$ د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کیږي چې د $A$ د سیټ عناصر $x$ دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


## د سيټ اقسام:

سيټ په څلور قسمه دي.

1- خالي سيټ
2- يو عنصره سيټ
3- معين سيټ
4- غير معين سيټ

1- خالي سيټ: هغه سيټ چه عناصر نلري د خالي سيټ په نوم يادېږي لکه $A = \{\ \}$ خالي سيټ د $\phi$ د علامې پواسطه ښودل کېږي.

2- يو عنصره سيټ: که کوم سيټ يو عنصر ولري دې سيټ ته يو عنصره سيټ وايي. لکه $A = \{\text{لمر}\}$ يا $B = \{3\}$

3- معين سيټ: هغه سيټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سيټ.

$$A = \{0,1,2,3,,4,5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غير معين سيټ:

هغه سيټ چې عناصرئي د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبعي اعدادو سيټ

$$A = \{IN \text{ د طبيعي اعدادو سيټ}\}$$
$$B = \{IR\}$$

## د روابطو له مخې د سيټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سيټونه په 8 اته قسمه دي.

1- فرعي سيټ 2- کلي سيټ 3- مکمله سيټ
4- طاقت لرونکي سيټ 5- مساوي سيټونه 6- معادل سيټونه
7- منفصل سيټونه 8- غير منفصل سيټونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- فرعي سيټ: که د $A$ او $B$ دوه داسې سيټونه ولرو چې د $B$ د سيټ هر عنصر د $A$ په سيټ کې شامل وي نو د $B$ سيټ د $A$ د سيټ فرعي سيټ بلل کيږي لکه

$B = \{4,6,8,10\}$ او د $A = \{x\epsilon IR/1 < x < 12\}$

څرنګه چې د $B$ د سيټ هر عنصر په $A$ کې شامل دی نو د $B$ سيټ د $A$ د سيټ فرعي سيټ دی او داسې ليکل کيږي. $B \subset A$

فرعي سيټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعي سيټ  b- غير واقعي فرعي سيټ

a- واقعي فرعي سيټ: که ديوه سيټ ټول عناصر په بل سيټ کې شامل وي او په دويم سيټ کې داسې عناصر وي چې په لمړی سيټ کې نه وي. لکه:

$B \subset A$ نو $B = \{3,4,5,6\}$ او د $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

b- غير واقعي فرعي سيټ: که دوه داسې سيټونه ولرو چې د اول سيټ ټول عناصر په دويم سيټ کې او د دويم سيټ هر عنصر په اول سيټ کې شامل وي دغه سيټونه يو دبل غير واقعي فرعي سيټونه دي. لکه:

$B \subseteq A$ او $A \subseteq B$ نو $B = \{10,8,2,6,4\}$ او $A = \{2,4,6,8,10\}$.

2- کلي سيټ: که يو سيټ څو فرعي سيټونه ولري دې سيټ ته کلي سيټ وايي لکه $D = \{8,9,10\}$ او د $C = \{5,6,7\}$ او $B = \{3,4\}$ چې $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ فرعي سيټونه دي نو د $A$ سيټ کلي سيټ وي.

3- مکمله سيټ: که يو کلي سيټ يو واقعي سيټ ولري نو د کلي سيټ د پاتې عناصرو سيټ د فرعي سيټ مکمله سيټ دی.

مثلاً $B \subset A$ چې $B = \{2,3,4,5,6\}$ او $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ دوه ستونه لرو چې $B' = \{7,8,9,10,11,12\}$ دی نو د $B$ د سيټ مکمله سيټ چې په د $B'$ ښودل کيږي عبارت $\{7,8,9,10,11,12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سيټونه: هر کلي سيټ د خپلو فرعي سيټونو طاقت لرونکي سيټ يا *Power Set* دی لکه $A_1 = \{\Delta\}$ او $A = \{\Delta, \odot, \boxdot\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$A_2 = \{\odot\}$ ، $A_3 = \{\boxdot\}$ ، $A_4 = \{\Delta, \odot\}$ ، $A_5 = \{\Delta, \boxdot\}$ ، $A_6 = \{\odot, \boxdot\}$ ،
$A_7 = \{\Delta, \odot, \boxdot\}$ او $A_8 = \{\}$

ستونه لرو چې $A$ سيټ ئې کلي سيټ او نور يې فرعي سيټونه دي.

يعني $P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

د يوه سيټ د فرعي سيټونو شمېر د $2^n$ پواسطه پيدا کيږي $n$ د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د $B$ د سيټ عناصر څلور دي د فرعي سيټونو شمېر يې پيدا کړئ؟

$n = 4$
$P(B) = ?$

$P(B) = 2^n$
$P(B) = 2^4 = 16$
$P(B) = 16$

5- مساوي سيټونه: که د $A$ او $B$ دوه داسې سيټونه ولرو چې د A د سيټ هر عنصر د $B$ په سيټ کې او د $B$ دسيټ هر عنصر د $A$ په سيټ کې شامل وي . نو دې سيټونو ته مساوي سيټونه وايي.

يعني که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

6- معادل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4,5,8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

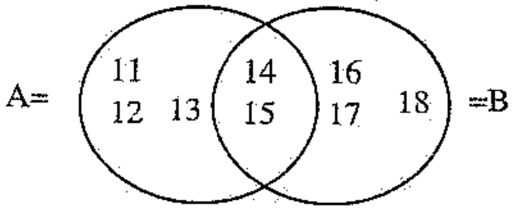
7- منفصل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د هر سيټ هيڅ عنصر په بل سيټ کې نه وي.

لکه $A = \{1,3,5,7,99,11,13\}$ او $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

8- غير منفصل سيټونه: که د دوه يا څو سيټونو يو يا څو عناصر سره شريک وي دې سيټونو ته غير منفصل سيټونه وايي.

لکه $A = \{11,12,13,14,15\}$ او $B = \{14,15,16,17,18\}$ چې $\{14,15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د $A$ او $B$ سيټونه غير منفصل دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library




## د سیټونو عملیې:

په حساب کې د سیټونو عملیې درې دي.

1- د سیټونو اتحاد　　2- د سیټونو تقاطع　　3- د سیټونو تفاضل

### 1- دسیټونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیټونو اتحاد د هغه عناصرو سیټ دی چې اقلاً هغه عناصر په دغه سیټونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضې په دوه یا درې سیټونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$B = \{8,9,10,11,12,13\}$ او $A = \{4,5,6,7,8,9\}$

$A \cup B = \{4,5,6,7,8,9\} \cup \{8,9,10,11,12,13\} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

### 2- د سیټونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په دوه یا څو سیټونو کې شامل وي. لکه $A = \{3,4,5,6,7\}$ او $B = \{6,7,8,9,10\}$

$$A \cap B = \{6,7\}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

### 3- د سیټونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$B = \{4,5,6,7,8,9\}$ او $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3\}$$

$$A - B = \{1,2,3\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

# الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


# اول فصل

## الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شویدی چې جبر د مات هډوکي ترلو ته وایي.

او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

### د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په $IR$ سره ښودل کیږي.

### د حقیقي اعدادو سیټ $IR$:

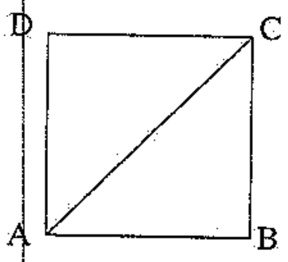
د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وایي.

$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وایي که ناطق عدد په $Q$ او غیر ناطق په $Q'$ وښیو نو $IR = [Q \cup Q']$

صحیح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوی چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقې څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبداء واقع وي د دې مربع مساحت $1cm^2$ دي که د $A$ نقطه د $C$ سره وصل کړو نو $AC$ د مربع وتر لاس ته راځي چې.




$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1r$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پیدا کولو لپاره د $A$ نقطه مرکز نیسو او د $\overline{AC}=\sqrt{2}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او یوه دایره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړي دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتیب کولای شو چې دغیر ناطقو عدد و نقطې د عددو په کرښه پیدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غیر ناطق عدد نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤد پرکارخوله په همدغه شعاع خلاصووأو قوس وهو د $XX'$ د محور سره یې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د $XX'$ د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

## د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه لیکل کیږي مګر په الجبر کې عدد او علامه دواړه یو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مګر 19− او 19+ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعمالیږي مګر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړیږي.

لکه $4x-5$ ، $7x^2+6x+7=0$ ، $y=3x-4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانین بشپړ شویدي زیادت نه قبلوي مګر الجبر د تمدن تابع دي د تخنیک او تکنالوژۍ د پرمختګ سره سم یې قوانین او فارمولونه دېریږي او انکشاف کوي.

## د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب ، تقسیم ، جذر او طاقت حالتو ته حد وایي.

لکه: 3− ، $x$ ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، $x^3$ ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{-5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عين حروفو توانونه يې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ يا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ يا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفريق حالتو ته افاده وايي لکه $11x - 8$

يو حده افادې ته مونوم وايي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بينوم وايي. لکه $19x - 20$

درې حده افدې ته ترينوم وايي.لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دريو زيات حدونه ولري کثير الحده افاده ورته وايي. لکه
$$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$$
په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولينوم وايي.

پولينوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه يې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل يې دا دی.
$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$
د پولينوم د هر حد ضريب د همغه پولينوم د توان په نوم يادېږي.

لکه:
$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$
$$a_5 = 7 \quad , a_4 = -12 \quad , \quad a_3 = 13 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , a_1 = -2 \quad , \quad a_0 = 15$$
پولينوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې موجود وي لکه $7x - 20x^3 + 8x^2 - 8x^4 + 7$ پدې پولينوم کې کوچني توان صفر دی او لوړ توان يې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1 ، 2 ، 3 دي چې درې واړه پکې موجود دي نو پورتنۍ پولينوم کامل پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library


2- ناقص پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه پکې موجود نه وي لکه .

$$7x^3-4x+9$$

3- تام پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې يې حرف موجود نه وي. لکه:

$$7x^3+4x^2+11x+8$$

$$\frac{3x^2+11x^2-20x+17}{5}$$

4- کسري پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه :

$$\frac{8}{x^2+3x-1},\frac{2x^2+41x+1}{x+3},\frac{4x-1}{x}$$

5- منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس په صعودي يا نزولي ډول ترتيب شوي وي.

لکه $2-4x+11x^2+8x^3+8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4-16x^3+8x^2-12x+5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غير منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس ترتيب شوي نه وي.

لکه: $3x-8x^3+7+3x^2$

7- ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2+8x-5$ او $7x^2-31x+\sqrt{2}$.

8- غير ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي. لکه :

$$7\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه يې کسري کيږي.

$$7x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-6$$

غير ناطق پولينوم ته ملتي نوم هم وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف يې ترجذر لاندې وي که دطاقت په شکل وليکل شي توانونه يې کسري کيږي.

د مونوم درجه: د يو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دريمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله يا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ يو $3 + 2 = 5$ درجه مونوم دی.

د پولينوم درجه: *Degree of a Polynome* د پولينوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولينوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2 + 5x^2y^3 + 8x^3y^4$ چې اومه درجه پولينوم دی. $8x^3 + 5x^2 - 4x + 2$ يو دريمه درجه پولينوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې يې مساوي وي. لکه $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$

که په يوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قيمت د هغه حد د توان څخه پيدا کوو چې توان يې معلوم وي.

لکه $x^3 + x^my + x^ny^2 + y^3$

حل:

$m + 1 = 3 \qquad m = 3 - 1 \qquad m = 2$

$n + 2 = 3 \qquad n = 3 - 2 \qquad n = 1$

## د الجبري عددونو څلور ګوني عمليې

### د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو . هم علامه عددونه جمع کيږي او علامه يې شريکه علامه ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} -435 \\ -387 \\ \hline -822 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +215 \\ +416 \\ \hline +631 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مختلف العلامه عددونه یو د بل څخه منفي کیږي او علامه د لوی عدد لیکل کیږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ \underline{-416} \\ -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ \underline{-168} \\ +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بيا د مفروق علامو ته تغير ورکوو. او د جمعې عمليه پرې اجراء کوؤ.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \underline{\pm 263} \\ +468 \end{array} \quad \begin{array}{r} -216 \\ \underline{\mp 418} \\ +202 \end{array} \quad \begin{array}{r} -485 \\ \underline{\pm 316} \\ -801 \end{array} \quad \begin{array}{r} +465 \\ \underline{\mp 317} \\ +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو.

د علامو ضربول په یوه جدول کې مطالعه کوو.

| | |
|---|---|
| د عين علامو د ضرب حاصل مثبت دی. | $+\times+=+$ <br> $-\times-=+$ |
| او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی. | $+\times-=-$ <br> $-\times+=-$ |

د $+ = - \times -$ ثبوت:

اول د $+ = - \times -$ ثبوت په عدد:

$$5 \times 8 = 40$$
$$(6-1)(9-1) = 40$$
$$54 - 6 - 9 \boxdot 1 = 40$$
$$54 - 15 \boxdot 1 = 40$$
$$39 \boxdot 1 = 40$$

که په خالي خانه کې + علامه وليکل شي د مساوات دواړه خواوي مساوي کيږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1) = +1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم د + =− × − ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$
$$(-a)(-b) = x \ldots\ldots\ldots\ldots I$$
$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$
$$-a(-b + b) = x - ab$$
$$-a(0) = x - ab$$
$$0 = x - ab$$
$$ab = x$$

په $I$ رابطه کې د $x$ په عوض $ab$ وضع کوو.

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې + =− × − کیږي.

د − =− × + ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$
$$(+3)(+3) = 9$$
$$(+3)(+2) = 6$$
$$(+3)(+1) = 3$$
$$(+3)(\ 0\ ) = 0$$
$$(+3)(-1) = -3$$
$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې − =− × +

مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$
$$(-8)(-9) = 72$$
$$(-5)(+3) = -5$$
$$(+4)(-7) = -28$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| −13 | +3 | −9 | +8 |
| − 5 | −4 | +3 | +7 |
| +65 | −12 | −27 | +56 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



د الجبري عددونو تقسیم:

علامه په علامه او عدد په عدد ویشو لمړی د علامو خارج قسمت په یوه جدول کې مطالعه کوؤ.

$\frac{+}{+} = +$ $\frac{-}{-} = +$ $\frac{+}{-} = -$ $\frac{-}{+} = -$

$\frac{+18}{+3} = +6$ $\frac{-15}{-5} = +3$ $\frac{+12}{-6} = -2$ $\frac{-10}{+2} = -5$

## د پولینومونو څلور ګونې عملیې

1- د پولینومونو جمع:

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې مشابه حدونه یو تر بل لاندې راشي بیا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه مشابه حدونه یو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3 + 8x^2 - 11x + 8 \\ \underline{11x^3 + 9x^2 + 15x - 3} \\ 18x^3 + 17x^2 + 4x + 5 \end{array}$$

2- د پولینومونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې مشابه حدونه یو د بل لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغییر ور کوؤ او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4 - 15x^3 + 8x^2 - 20x + 8 \\ \underline{\pm 35x^4 \pm 9x^3 \pm 11x^2 \pm 9x \mp 16} \\ -22x^4 - 24x^3 - 3x^2 - 29x + 24 \end{array}$$

3- د پولینومونو ضرب :

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو بیا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوؤ د پولینومونو دضرب حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال:

$$
\begin{array}{r}
3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\
7x^2 - 8x + 9 \\
\hline
21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \\
-24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \\
27x^3 - 45x^2 + 63x - 63 \\
\hline
21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63
\end{array}
$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندی لیکو او منفي کوونې د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کښته کوو نوی مقسوم جوړو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوې برخې ته باقي وایې.

مثال:

$$
\begin{array}{l|l}
72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21 & 8x^2 + 7x - 3 \\
\cline{2-2}
\pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3 & 9x^3 + 4x^2 - 5x + 7 \\
\cline{1-1}
\quad 32x^4 - 12x^3 + 9x^2 & \\
\quad \pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2 & \\
\cline{1-1}
\quad\quad -40x^3 + 21x^2 + 64x & \\
\quad\quad \mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x & \\
\cline{1-1}
\quad\quad\quad 56x^2 + 49x - 21 & \\
\quad\quad\quad \pm 56x^2 \pm 49x \mp 21 & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


د باقي مانده دعوه :

د صحیح عددونود تقسیم میزان په لاندی ډول دی

$$\text{باقي} + \text{خارج قسمت} \times \text{مقسوم علیه} = \text{مقسوم}$$

که مقسوم په $P(x)$ اومقسوم علیه په $(x-a)$ اوخارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په $R$ وښیونو لیکو چې

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د $x$ په عوض $a$ وضع کوو نو :

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$
$$Q(a) = R$$

دی دعوی ته د باقیمانده دعوه یا $Remainder's\ Theorem$ وائي.

مثال: وښیاست چه $x+2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ د پولینوم جذر دی او که نه دی؟

حل : د $x+2$ جذر پیدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولینوم کې د $x$ په عوض $(-2)$ وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو $(-2)$ د پولینوم جذر دی او $x+2$ د پولینوم فکتور دی.

$$P(-2) = 3(-2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$$
$$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$$
$$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$$
$$P(-2) = -28 + 28$$
$$P(-2) = 0$$
$$R = 0$$

$x+2$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او $(-2)$ ئي جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: هغه افاده پیدا کړئ چه په $x-1$ باندی وویشل شي باقي ئي $(-3)$ شي او که په $x+2$ باندي وویشل شي باقي ئي $-9$ شي.

$$p(x) = ax + b$$
$$p(1) = a.1 + b = -3$$
$$p(-2) = a(-2) + b = -9$$
$$a + b = -3$$
$$\mp 2a \pm = \mp 9$$
$$3a = 6$$
$$3a = 6 \Rightarrow a = 2$$
$$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$$
$$b = -5$$

مطلوبه افاده $(2x-5)$ ده.

تمرین:

1- جمع یې کړئ؟

a- $$\begin{array}{r} 11x^3 - 11x^2 + 7x - 9 \\ 8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \\ 9x^3 - 4x^2 + x - 2 \\ \hline \end{array}$$

b- $$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 16 \\ 7x^2 - 20x + 8 \\ 5x^2 + 3x - 11 \\ \hline \end{array}$$

2- تفریق کړئ؟

a- $$\begin{array}{r} 8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15 \\ 7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20 \\ \hline \end{array}$$

b- $$\begin{array}{r} 11x^3 - 13x^2 + 20x - 8 \\ 5x^3 + 15x^2 + 8x + 11 \\ \hline \end{array}$$

3- ضرب یې کړئ؟

a- $$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \\ 7x^2 - 8x + 6 \\ \hline \end{array}$$

b- $$\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 7 \\ 3x^2 + 7x - 8 \\ \hline \end{array}$$

c- $$\begin{array}{r} 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \\ 3x^3 - 8x^2 + 6x - 8 \\ \hline \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



4- تقسيم يې کړئ؟

$$a-\ \frac{15x^5+16x^4-73x^3+101x^2-5x+6}{3x^2+8x-6}$$

$$b-\ \frac{21x^4+67x^3-58x^2-119x+77}{7x^2+6x-11}$$

$$c-\ \frac{35x^6-59x^5+36x^4+35x^3-74x^2+60x-24}{5x^3-7x^2+6x-3}$$

$$d-\ \frac{16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4}{2x+37}$$

## ترکیبي تقسیم *Synthetic Division*

هغه تقسيم دی چه د خارج قسمت د ضريبو د پيدا کولو لپاره د مقسوم ضريبونه ټول په يوه وار استعماليږي.

طريقه يې داسی ده چه د مقسوم ضريبونه په يوه افقي کرښه کې ليکود کرښې په اخر کې په يوه کنج کې د قيمت ليکوبيا يوی کرښی ته ځای پريږدو او يو خط کشوو دمقسوم د پولينوم د اول حد ضريب بی له کوم تغيره راکښته کوو. د $x$ په قيمت کې يې ضربوو د دويم حد دضريب لاندی يې ليکو او ورسره جمع کوو يې. د جمع حاصل د $x$ په قيمت کې ضربوو. په همدی ترتيب تر اخره اجراات کوو. د خط لاندی اخرني عدد د R قيمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضريبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجی څخه يوه کمه ده.

که R=0 وي نو $x-a$ د مقسوم دپولينوم فکتور دی. او د قيمت د پولينوم جذر دي.

مثال:-د ترکيبي تقسيم پواسطه وښياست چه $(x-2)$ د $P(x)=x^4+6x^3-8x^2-12x-8$ د پولينوم فکتور دي.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +6 | -8 | -12 | -8 | 2 |
| | 2 | 16 | 16 | 8 | |
| 1 | 8 | 8 | 4 | 0 | |

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولينوم فکتور دی او $(2)$ د پولينوم جذر دی او $q(x)=x^3+8x^2+8x+4$ د خارج قسمت پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library


که بینوم د $(x-a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x+a)$ شکل لرلوو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax\pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $\left(\pm\frac{b}{a}\right)$ لیکل کیږي.نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

تمرین

1 : د باقیمانده دعوی پواسطه یې حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x+3)$ وویشل شي باقي یې $(-24)$ شي او که په $(2x-3)$ وویشل شي باقي یې $(-6)$ شي

2 : د ترکیبي تقسیم پواسطه یې حل کړئ؟

$$a:\ \frac{x^4-6x^3+15x^2-6x-40}{x-3}$$

$$b:\ \frac{2x^4-13x^3+4x^2+24x-28}{2x+3}$$

$$c:\ \frac{6x^3+4x^2-84x-9}{x+4}$$

$$d:\ \frac{12x^4-x^3-20x^2+8}{3x-2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


# دويم فصل

## مساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو برابری ته مساوات وايي.

مساوات په دوه قسمه دی.

1- مطابقت 2- شرطیه مساوات یا معادله

### 1- مطابقت:

مطابقت هغه مساوات دی چې د مجهول په ټولو قیمتو باندې یې دواړه خواوې مساوي وي.

د اسانتيا لپاره مطابقتونه په شپږو ګروپو کې مطالعه کوو.

1 ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a+b)^n$ شمکل ولري.

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n+1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې يې مثبت دي په اول حد کې د $a$ توان $n$ د $b$ توان صفر دی په نورو حدو کې د $a$ د توان څخه يو کميږي $b$ ته ورکول کيږي تر څو چې د $a$ توان صفر او د $b$ توان $n$ شي د اول حد ضريب يو دی د دويم حد ضريب $n$ دی د نورو حدو د ضريبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکيني حد ضريب د $a$ په توان کې ضربوو د مخکينو حدو په شمېر يې ويشو.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$
$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$
$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$$
$$(a+b)^8=a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$$
$$(a+b)^9=?$$
$$(a+b)^{10}=?$$
$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+n(n-1)a^{n-2}b^2+\dots\dots+nab^{n-1}+b^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a-b)^n$ شکل ولري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول ګروپ د مطابقتو په څير دي. صرف د اول ګروپ د ټول حدو علامې مثبت دی او د دويم ګروب د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دويم حد علامه منفي ده د دريم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتيب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$(a-b)^9 = ?$

$(a-b)^{10} = ?$

$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 \ldots\ldots + nab^{n-1} - b^n$

3- دريم ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزيه کيږي اول قوس د دواړه حدو د قاعدو تفاضل دی دويم قوس $n$ حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د $a$ توان $n-1$ دی د $b$ توان صفر دی په نورو حدو کې د $a$ د توان څخه يو کميږي $b$ ته ورکول کيږي تر څو چې د $a$ توان صفر او د $b$ توان $(n-1)$ شي.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
$a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

|

|

|

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

4- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او $n$ طاق وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دویم قوس $n$ حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي. په اول حد کې د $a$ توان $n-1$ دی د $b$ توان صفر دی په نورو حدو کې د $a$ د توان څخه یو کمیږي $b$ ته ورکول کیږي تر څو چې د $a$ توان صفر شي او د $b$ توان $n-1$ شي.

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^6 + b^6 = (a+b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^9 + b^9 = ?$

$a^{11} + b^{11} = ?$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او $n$ جفت وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي د هر قوس اول حد د دواړو حدودقاعدو مجموعه ده او دویم حد یې د دواړو حدو د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چند جذر دی.

$a^2 + b^2 = \left(a + b - \sqrt{2ab)}\right)\left(a + b + \sqrt{2ab}\right)$
$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = \left(a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$

$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$

**شپږم ګروپ:** هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري دري لمړي حدونه یې مربعګاني دي دري وروستي حدونه یې د دوه حدو د حاصل ضرب دوه چند دي.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

1: $(2x + 3y)^2 = (2x)^3 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

2: $(4x - 5y)^4 = (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4$

$= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4$

3: $(2x + 3y + 5z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y$

$+2 \times 2x \times 5y + 2 \times 3y \times 5z$

$= 4x^2 + 9y^2 + 25y^2 + 12xy + 20xz + 30yz$

2- مثال: تجزیه یې کړئ؟

1: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

5: $9x^4 + 36y^4 = (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = \left(3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}\right)$

$(3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2})$

$(3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy)$

تمرین:

انکشاف ورکړئ

1- $(3x + 5y)^2$    2- $(2x + 7y)^3$    3- $(4x + 5y)^4$

4- $(4x - 5y)^5$    5- $(3x - 7y)^4$    6- $(2x - 3y)^6$

(c) ketabton.com: The Digital Library


7- $7x^2-9y^2$    8- $8m^3-125n^3$    9- $\frac{8}{125}x^3-\frac{216}{1331}y^3$

10- $8x^3+27y^3$    11- $64m^3+1000n^3$    12- $\frac{125}{216}x^3+\frac{729}{1728}y^3$

13- $4x^2+y^2$    14- $16x^4+256y^4$    15- $\frac{81}{625}m^4+\frac{1296}{2401}n^4$

16- $(2x+3y+5z)^2$    17- $(3x+2y-5z)^2$    18- $(\frac{2}{8}x-\frac{4}{5}y-\frac{7}{8}z)^2$

## تجزیه:

تجزیه په لغت کې توټه ، توټه کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوې افادې د ضربي عواملو د پیدا کولو طریقې ته تجزیه وایي.

### 1- د مشترک نیولو پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد یا حرف شامل وي دا شامل مشترک نیسو د قوس د باندې یې لیکو بیا د افادې هر حد په دې مشترک ویشو د قوس په داخل کې یې لیکو افاده تجزیه کیږي.

1: $3x^2-15=3(x^2-5)$

2: $5x^2-15x+10=5(x^2-3x+2)$

3: $4x^3+24x^2-36x=4x(x^2+6x-9)$

4: $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x=\frac{1}{4}x(x-3)$

### 2- د $a^2-b^2$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

1: $4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x-5y)(2x+5y)$

2: $\frac{4}{25}m^2-\frac{9}{49}n^2=\left(\frac{2}{5}m\right)^2-\left(\frac{3}{7}n\right)^2=\left(\frac{2}{5}m-\frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m+\frac{3}{7}n\right)$

3: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{49}=\left(\frac{x}{6}\right)^2-\left(\frac{y}{7}\right)^2=\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6}+\frac{y}{7}\right)$

### 3- د $a^3-b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

1: $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

2: $64x^3-125y^3=(4x)^3-(5y)^3=(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$

3: $216m^3-343n^3=(6m)^3-(7n)^3=(6m-7n)(36m^2+42mn+49n^2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library


4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

$$1:\ 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2:\ 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3$$

$$= (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3:\ \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترينوم:

دري حده افادې ته ترينوم وايي.

عمومي شکل يې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترينوم تجزيه:

د ترينوم تجزيه په دوه حالته کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي

2- $a \neq 1$ وي

1- چې $a = 1$ وي ترينوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترينوم د دغه شکل د تجزيې لپاره داسې دوه عدده پيدا کوو چې د ضرب حاصل يې $c$ او د جمع حاصل يې $b$ شي. فرضاً $m$ او $n$ داسې دوه عددونه دي.

يعنې $b = m + n$ او $c = mn$ دي نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

گروپ بندي کوو يې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$

$$(x + m)(x + n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



1- مثال:

$x^2 + 11x + 30$

$x^2 + 5x + 6x + 30$

$x(x + 5) + 6(x + 5)$

$(x + 5)(x + 6)$

2- مثال:

$x^2 - 11x + 30$

$x^2 - 5x + 6x + 30$

$x(x - 5) - 6(x - 5)$

$(x - 5)(x - 6)$

نوټ: که په ترینوم کې د $(c)$علامه $(+)$وه هغه عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي هم علامه دي.بیا د $b$ علامی ته گورو که د $b$ علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د $b$ علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

1: $x^2 + 15x + 36$

$x^2 + 12x + 3x + 36$

$x(x + 12) + 3(x + 12)$

$(x + 12)(x + 3)$

2: $x^2 - 13x + 40$

$x^2 - 8x - 5x + 40$

$x(x - 8) - 5(x - 8)$

$(x - 8)(x - 5)$

2- که په ترینوم کې د $c$ علامه منفي وه نو عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي مختلف العلامه دي بیا د $b$ علامې ته گورو که د $b$ علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د $b$ علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

1: $x^2 + 5x - 66$

$x^2 - 6x + 11x - 66$

$x(x - 6) + 11(x - 6)$

$(x - 6)(x + 11)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2: $x^2 - 5x - 66$

$x^2 - 11x + 6x - 66$

$x(x-11) + 6(x-11)$

$(x-11)(x+6)$

تمرین:

$x^2 + 15x + 44$ -1 $\quad$ $x^2 + 19x + 70$ -2 $\quad$ $x^2 + 29x + 180$ -3

$x^2 - 16x + 55$-4 $\quad$ $x^2 - 21x + 90$-5 $\quad$ $x^2 - 13x + 36$-6

$x^2 + 6x - 135$ -7 $\quad$ $x^2 + 11x - 210$-8 $\quad$ $x^2 + 31x - 630$ -9

$x^2 - 7x - 170$ -10 $\quad$ $x^2 - 9x - 400$ -11 $\quad$ $x^2 - 25x - 186$-12

2- حالت چې $a \neq 1$ وي.

د ترینوم د دغه حالت د تجزیې لپاره داسې دوه عددونه پیدا کوو چې دضرب حاصل یې $ac$او د جمع حاصل یې $b$ شي؟

1. $3x^2 + 11x + 10$
   $ac = 3(10) = 30$
   $b = 11$
   $3x^2 + 6x + 5x + 10$
   $3x(x+2) + 5(x+2)$
   $(x+2)(3x+5)$
2. $5x^2 - 19x + 12$
   $ac = 5(12) = 60$
   $b = -19$
   $5x^2 - 15x - 4x + 12$
   $5x(x-3) - 4(x-3)$
   $(x-3)(5x-4)$
3. $7x^2 + 3x - 34$
   $ac = 7(-34) = -238$
   $7x^2 - 14x \qquad x - 34$
   $7x(x-2) + 17(x-2)$
   $(x-2)(7x+17)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



4. $11x^2 - 23x - 30$
$ac = 11(-30) = 330$
$b = -23$
$11x^2 - 33x + 10x - 3$
$11x(x-3) + 10(x-3)$
$(x-3)(10x+10)$

تمرین:

لاندې ترینومونه حل کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| $5x^2 + 11x + 2$ -1 | $7x^2 + 24x + 9$ -2 | $3x^2 + 31x + 80$ -3 |
| $7x^2 - 19x + 10$ -4 | $5x^2 - 22x + 21$ -5 | $2x^2 - 17x + 35$ -6 |
| $3x^2 + 2x - 33$-7 | $4x^2 + 7x - 57$-8 | $7x^2 + 3x - 34$-9 |
| $5x^2 - 10x - 54$-10 | $7x^2 - 11x - 30$-11 | $8x^2 - 23x - 85$-12 |

## د ګروپ بندۍ پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې حدونه تر درې حدو زیات وه او په ټولو حدو کې یو کوم حرف یا عدد شامل نه ؤ مګر په بعضو حدو کې شامل ؤ دغسې افاده په ګروپو ویشو په هر ګروپ کې شامل مشترک نیسو تر مشترک نیولو وروسته باید قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نیسو افاده په قوسو تجزیه کیږي.

$x^3 + 5x^2 + 3x + 15$
$x^2(x+5) + 3(x+5)$
$(x+5)(x^2+3)$

## د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راکړ شوې افادې تقسیم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ویشل کیږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچني مشترک مضرب L.C.M:

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنۍ افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمیږي او تر دې بله کوچنۍ افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمیږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملوکې یې مشترک او غیرمشترک پیدا کووکه په مشترکو ضربي عواملوکې د (کوچني) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1: $(x^2 + 2x)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

1: $(x^2 + 2x)^2 = \{x(x+2)\}^2 = x^2(x+2)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x+2)(2x-1)$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x+2)(2x-7)$

$G.C.D = x(x+2) = x^2 + 2x$

$L.C.M = x^2(x+2)^2(2x-1)(2x-7)$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

1- $2ax^3 - 4a^3x - 6a^3$

2- $ax^2 + 2a^2x + a^3$

3- $3a^2(x+a)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# الجبري کسرونه

الجبري کسر هغه افاده ده چې په مخرج کې یې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2+3x-2}{x} \quad , \quad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه 2- غیر ناطق الجبري کسرونه

2- ناطق الجبري کسرونه :

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

$a$- واقعي ناطق الجبري کسرونه $b$- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه

$a$- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه کوچنۍ وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ یا $\frac{2}{x+3}$

$b$- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه زیاته یا ورسره مساوي وي. لکه:

$$\frac{4x^2+5x-1}{x^2+3x-4} , \frac{3x^2+5x+3}{x+5}$$

2- غیر ناطق الجبري کسرونه :

هغه کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي.

لکه $\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2}$ ، $\frac{x+5}{\sqrt{x}+3}$

د الجبري کسرو خواص:

1- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)} = \frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}{\frac{x^2+5x+6}{x+3}}=\frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}}=\frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرج علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y}=+\frac{x}{-y}=+\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$$

## د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرج مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوؤ

$$1:\quad \frac{x}{x+5}+\frac{3x-1}{x+5}-\frac{x+3}{x+5}=\frac{x+3x-1-x-3}{x+5}=\frac{3x-4}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+7}{x+2}=\frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

$$3:\quad \frac{x}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{x(x+2)+(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$$

$$=\frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

## د الجبری کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړ د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرج سره اختصاریدلو اختصاروو بیا یې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x+3}{x+1}\times\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$2:\quad \frac{x^2-2x}{x+2}\times\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-10}=\frac{x(x-2)}{x+2}\times\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)}=\frac{x(x+1)}{x+5}$$
$$=\frac{x^2+x}{x+5}$$

## د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرج تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرج څخه حذفوو.

$$1:\quad \frac{x^2+3x-28}{x^2+9x+14}=\frac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)}=\frac{x-4}{x+2}$$

$$2:\quad \frac{x^2+3x}{x^2+11x+24}=\frac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)}=\frac{x}{x+8}$$

## د الجبري کسرونو تقسیم:

د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

$$1:\quad \frac{x^2+13x+30}{x+5}\div\frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+15}$$
$$\frac{x^2+13x+30}{x+5}\times\frac{x^2+6x+5}{x^2+8x+15}$$
$$\frac{(x+3)(x+10)}{x+5}\times\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{(x+10)(x+1)}{x+5}=\frac{x^2+11x+10}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x^2-11x+18}{x-3}\div\frac{x^2+7x-18}{x^2-9}$$
$$\frac{x^2-11x+18}{x-3}\times\frac{x^2-9}{x^2+7x-18}$$
$$\frac{(x-2)(x-9)}{x-3}\times\frac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)}=\frac{(x-9)(x+3)}{x+9}=\frac{x^2-6x-27}{x+9}$$

## تمرین:

1- لاندې کسرونه جمع کړئ؟

1- $\frac{2x-3y}{6y^2}+\frac{18xy-9y^2}{9y^2}$

2- $\frac{x+5}{x^2}+\frac{x-3}{x}-\frac{x+7}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library


3- $\frac{x+11}{x+3}+\frac{x-1}{x+2}$  4- $\frac{2x+1}{x^2-16}+\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}$

5- $\frac{x}{x+5}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{x-2}{x+5}$  6- $\frac{2}{x+7}+\frac{3}{x-7}$

2- لاندې کسرونه اختصار کړئ؟

1- $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$  2- $\frac{x^2+5x-24}{x+8}$  3- $\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22}$

3- لاندې کسرونه ضرب کړئ؟

1- $\frac{x^2+5x+6}{x+5}\times\frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6}$  2- $\frac{x^2+x}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

3- $\frac{x^2-3x-28}{x-7}\times\frac{x+5}{x+4}$  4- $\frac{x^2+3x-40}{x+8}\times\frac{x-3}{x+5}$

4- لاندې کسرونه تقسیم کړئ؟

1- $\frac{x^2+13x+6}{x+5}\div\frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35}$  2- $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+1}{x}$

3- $\frac{x^2}{x-1}\div\frac{x}{x^2-1}$  4- $\frac{x}{x+3}\div\frac{x^2}{x^2-9}$

5- $\frac{x+5}{x}\div\frac{x+5}{x}$

## د کسرونو ګویا کول

د یوه کسر د صورت یا مخرج څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر ګویا کول وایي. معمول په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي.

د کسر د مخرج ګویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې (2) وي. لکه $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{x}=3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}}=\frac{2\times\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\times\sqrt{2x}}=\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}^2}=\frac{2\sqrt{2x}}{2x}=\frac{\sqrt{2x}}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{3}{\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}\times\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2}=\frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې دکسر په مخرج کې یو جذري حل موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ ، $\frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ ، $\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو د ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x\times x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x}=\sqrt[3]{x^2}$$

$$2-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x\times x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3-\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x}\times\sqrt[7]{x^6}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x\times x^6}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{x}=2x\sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخرج کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه یې (2) وي.

لکه $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ او داسې نور.

صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}$$
$$=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2:\quad \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{11}^2}$$
$$=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11}=\sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3:\quad \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



4- چې د کسر په مخرج کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې يې د (2) څخه زياتې وي.

لکه: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$ ، $\frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو او که د منځ علامه يې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزيې دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو.

$$1:\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}=\frac{1\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5x^2}-\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{x-5}$$

$$2:\quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}=\frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}$$

$$=\frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[5]{3x^4}+\sqrt[5]{9x^3}-\sqrt[5]{27x^2}+\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{3x^4}-\sqrt[5]{9x^3}+\sqrt[5]{27x^2}-\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{243}}$$

$$=\frac{(x+3)(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}}{x+3}$$

$$=\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}$$

تمرين:

د لاندې کسرو مخرجونه ګويا کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{x}}$    2- $\frac{x}{\sqrt{x}}$    3- $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$    4- $\frac{3x}{\sqrt{x}}$    5- $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

6- $\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$    7- $\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}}$    8- $\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}$    9- $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$    10- $\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

11- $\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$    12- $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$    13- $\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}}$    14- $\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$    15- $\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## قسمي كسرونه:

كه د دوه كسرونو د مجموعې څخه يو واقعي كسر جوړ شي. دغه كسرونه د واقعي كسر قسمي كسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}=\frac{2(x+5)+3(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5}=\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

$\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$ يو واقعي كسر دى د $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلى دى نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ كسرونه يې قسمي كسرونه دي.

## د يوه واقعي كسر د قسمي كسرو پيدا كول:

د قسمي كسرو د پيدا كولو لپاره د واقعي كسر مخرج تجزيه كوو د مخرج د ضربي عواملو شمېر د قسمي كسرونو شمېر ښيي. د مخرج د ضربي عواملو په لحاظ د واقعي كسر د قسمي كسرو پيدا كول په څلورو حالتو كې مطالعه كوو.

1- چې د كسر د مخرج ضربي عوامل غير تكراري بينومونه وي هر بينوم د يوه كسر مخرج دى صورت يې د الفباء په غټو حروفو ښيو عمليې پرې اجراء كوو د حروفو قيمتونه پيدا كوو د هغوي په عوض يې وضع كوو د واقعي كسر قسمي كسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي كسرونه پيدا كړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{8x+51}{(x+6)(x+7)}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو $8x+51=A(x+7)+B(x+6)$

د $A$ او $B$ د قيمتو د پيدا كولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د $A$ او د $B$ قيمتونه پيدا كوو نو د هر قوس جذر پيدا كوو.

$$x+7=0$$
$$x=-7$$

$-7$ د $x$ په عوض وضع كوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$8(-7) + 51 = A(-7+7) + B(-7+6)$

$-56 + 51 = A(0) + B(-1)$

$-5 = 0 - B$

$-B = -5 \qquad B = 5$

$x + 6 = 0 \qquad x = -6$

6- په معادله کې د $x$ په عوض وضع کوؤ.

$8(-6) + 51 = A(-6+7) + B(-6+6)$

$-48 + 51 = A(1) + B(0)$

$3 = A \qquad A = 3$

د $A$ په عوض 3 او د $B$ په عوض 5 وضع کوؤ.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عینیت پواسطه:

$8x + 51 = A(x+7) + B(x+6)$

$8x + 51 = Ax + 7A + Bx + 6B$

$8x + 51 = Ax + Bx + 7A + 6B$

$8x + 51 = (A+B)x + 7A + 6B$

په عینیت کې د مشابه حدو ضریبونه مساوي وي.

$$\begin{array}{l} A + B = 8 \\ \underline{7A + 6B = 51} \\ 7A + 7B = 56 \\ \underline{-7A \pm 6B = \pm 51} \\ B = 5 \end{array}$$

$A + B = 8 \rightarrow A = 8 - 5 = 3$

$A = 3$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بینومونه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2+12x+2=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$
$$=Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx$$
$$=Ax^2+Bx^2+2Ax+Bx+Cx+A$$
$$5x^2+12x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$
$$A+B=5$$
$$2A+B+C=12$$
$$A=2$$
$$A+B=5\rightarrow 2+B=5 \qquad B=5-2=3$$
$$B=3$$
$$2A+B+C=12$$
$$2\times 2+3+C=12$$
$$4+3+C=12$$
$$7+C=12$$
$$C=12-7$$
$$C=5$$
$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غیر تکراري ترینومونه وي. او د تجزیې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج یې ترینوم وي په صورت کې یې بینوم لیکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+7}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو.

$$5x^2+20x+21=A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=(A+B)x^2+(5A+C)x+7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5\Rightarrow 3+B=5\Longrightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5\times 3+C=20$$

$$15+c=20 \qquad C=20-15$$

$$C=5$$

$$\frac{3}{x}+\frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه يې داسې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+3x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+3x+5)+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax^3+3Ax^2+5Ax++Bx^2+3Bx+5B+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو :

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+3Ax^2+Bx^2+5Ax+3Bx+Cx+D+5B$$

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+(3A+B)x^2+(5A+3B+C)x+D+5B$$

$$A=2$$

$$3A+B=7$$

$$3\times 2+B=7\Rightarrow 6+B=7\Rightarrow B=7-6$$

$$B=1$$

$$5A+3B+C=14$$

$$5\times 2+3\times 1+C=14$$

$$10+3+C=14$$

$$3+C=14$$

$$C=14-13$$

$$C=1$$

$$5B+D=5$$

$$5\times 1+D=5$$

$$5+D=5$$

$$D=5-5$$

$$D=0$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+5}+\frac{x}{(x^2+3x+5)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# دريم فصل

## معادله يا شرطيه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قيمتو يې دواړه خواوي مساوي وي.

لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره يې دواړه خواوي مساوي دي.

دغسې مساوات ته شرطيه مساوات وايي.

### د معادلې اقسام:

معادله ډېر قسمونه لري.

1- يو مجهوله اوله درجه معادله
2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
3- درې مجهوله اوله درجه معادله
4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
5- يو مجهوله دويمه درجه معادله
6- يو مجهوله دريمه درجه معادله
7- يو مجهوله څلورمه درجه معادله
8- جذري معادلې
9- اکسپونينشل معادلې
10- لوګاريتمي معادلې
11- مثلثاتي معادلې

### اول: يو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول يې يو او د مجهول درجه يې هم يوه وي.

عمومي شکل يې دا دی $ax + b$ چه $a$ او $b$ ثابت عددونه دي او $x$ مجهول دی ځرنګه چې د $x$ توان يو دی نو ځکه ورته يو مجهوله اوله درجه معادله وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د معادلې خواص:

1- که د معادلې د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي په معادله کې تغیر نه راځي.

2- که د معادلې د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي په معادله کې تغیر نه راځي.

3- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد کې ضرب شي په معادله کې تغیر نه راځي.

4- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد تقسیم شي په معادله کې تغیر نه راځي.

5- که د معادلې دواړه خواوې په عین توان رفع شي په معادلې کې تغیر نه راځي.

6- که د معادلې دواړه خواوې تر عین جذر لاندې شي په معادله کې تغیر نه راځي.

د یو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طریقه:

که د معادلې دواړه خواو ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښي خواته او مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د یوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کیږي که مثبت وي منفي کیږي که منفي وي مثبت کیږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربیږي.

مثال:

1: $x+5=8$  $x=8-5$  $x=3$

2: $x-7=11$  $x=11+7$  $x=18$

3: $3x=36$  $\frac{3x}{3}=\frac{36}{3}$  $x=12$

4: $\frac{x}{5}=4$  $5\times\frac{x}{5}=4\times 5$  $x=20$

5: $\frac{5}{x}-3=-2$  $\frac{5}{x}=-2+3$  $\frac{5}{x}=\frac{1}{1}$  $x=5$

6: $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}+\frac{2}{x}=36$

$\frac{3+7+2}{x}=36$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{12}{x} = 36 \qquad \frac{12}{x} = \frac{36}{1} \qquad 36x = 12$$

$$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36} \qquad x = \frac{1}{3}$$

## جذري معادلې

هغه معادلې دي چې مجهول يې تر جذر لاندې وي

لکه $\sqrt{3x+30} + 11 = 17$

## د جذري معادلو دحل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوې خواته پرېږدو نور جذري او غېرجذري حدونه د مساوات بلې خواته ورو. بيا د مساوات دواړه خواوې د جذر په درجه رفع کوو جذر د منځه ځي .که بيا هم په معادله کې جذر موجود ؤ عمليه تکراروو .

1- مثال:

$$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$$

$$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$$

$$\sqrt{5x-4} = 6$$

$$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2 = 6^2$$

$$5x - 4 = 36$$

$$5x = 36 + 4 = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Rightarrow x = 8$$

$$x = 8$$

2- مثال:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$$

$$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$$

$$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{5x+6}\right)^2$$

$$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$2x + 108 = -20\sqrt{5x+6}$$

$$\frac{2x+108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x+6}}{2}$$

$$x + 54 = -10\sqrt{5x+6}$$

$$(x+54)^2 = \left(-10\sqrt{5x+6}\right)^2$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x+6)$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$

$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$

$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$

$$\acute{\Delta} = 38416 - 2316 = 36100$$

$$\acute{\Delta} = 36100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$

$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$

$$x_2 = \frac{196 - 190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+4} = -1 \, \sqrt{3x-1} = \sqrt{3x+4} - 1$$

$$\left(\sqrt{3x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+4} - 1\right)^2$$

$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1$$

$$2\sqrt{3x+4} = 6$$

$$\left(2\sqrt{3x+4}\right)^2 = 6^2$$

$$4(3x+4) = 36$$

$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$

$$3x = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-7}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}\right)^2$$

$$x=\frac{441}{x-7}-2\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}\times\sqrt{x-7}\right)+x-7$$

$$\frac{441}{x-7}-49=0\Longrightarrow 49x-343=441\Longrightarrow 49x=441+343=784$$

$$49x=784$$

$$\frac{49x}{49}=\frac{784}{49}\quad\Longrightarrow x=16$$

$$x=16$$

تمرين

لاندې جذري معادلې حل کړئ

1. $\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+9}=0$ $\qquad x=1$
2. $\frac{2x^2-128}{\sqrt{3+x^2}}=0$ $\qquad x=8$
3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{91}{\sqrt{x+13}}$ $\qquad x=36$
4. $\frac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$ $\qquad x=\frac{81}{a}$
5. $\sqrt[5]{x+8}=\sqrt[10]{x^2+64x+36}$ $\qquad x=\frac{7}{12}$
6. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\qquad x=81$
7. $\sqrt{x+13}-\sqrt{2x+1}=0$ $\qquad x=12$
8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ $\qquad x=\frac{16}{25}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



9. $\sqrt{x} + 5 = 6 - \sqrt{x+7}$ $\qquad x = 9$

10. $2(x+2) = 1 + \sqrt{4x^2 + 9x + 14}$ $\qquad x = \frac{5}{3}$

تمرین:

1. $\frac{5-x}{4} + \frac{x}{8} = 1$
2. $\frac{2}{x} - 3 = \frac{3}{x} - 8$
3. $\frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x-3} = 6$
4. $\frac{x}{2} - \frac{2x-8}{5} + \frac{4}{5} = 3$
5. $\frac{x-1}{4} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} + x - 4 = 4$
6. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library


# څلورم فصل

## دوه مجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان يې يو وي عمومي شکل يې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

$a_1$ ، $a_2$ ، $b_2$ ، $b_2$ ، $c_1$ او $c_2$ ثابت عددونه دي $x$ او $y$ مجهولونه دي څرنګه چې د هر مجهول توان يو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وايي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم زيات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم حل نلري.

3- که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سيستم يو حل لري.

### د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلې په (6) طريقو حليږي.

1- د جمع يا افناء په طريقه:

په دواړو معادلو کې د يوه مجهول ضريبونه مساوي کوؤ. که هم علامه ود معادلې يو د بل څخه منفي کوو او که مختلف العلامه وه معادلې جمع کوو پدې ترتيب د دوه مجهوله معادلو سيستم په يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قيمت يې پيدا کوو بيا دا جذر د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د دويم مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سيستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$
$$5x + 3y = 19$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$5(7x + 8y = 38)$$
$$7(5x + 3y = 19)$$
$$35x + 40y = 190$$
$$\pm 35x \pm 21y = \pm 133$$
$$19y = 57$$
$$y = 3$$
$$7x + 8y = 38$$
$$7x + 8 \times 3 = 38$$
$$7x + 24 = 38$$
$$7x = 38 - 24$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

2- مثال:

$$3x - 5y = 2$$
$$4x + 2y = 20$$
$$2(3x - 5y = 2)$$
$$5(4x + 2y = 20)$$
$$6x - 10y \quad = 4$$
$$20x + 10y \quad = 100$$
$$26x \qquad = 104$$
$$x = 4$$
$$4(4) + 2y = 20$$
$$16 + 2y = 20$$
$$2y = 20 - 16$$
$$2y = 4$$
$$y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقه حل کړئ؟

1- $\begin{cases} 5x + 4y = 32 \\ 8x - y = 29 \end{cases}$

2- $\begin{cases} 6x - 8y = 4 \\ 7x - 2y = 12 \end{cases}$

3- $\begin{cases} 6x + 3y = 21 \\ 5x + 7y = 26 \end{cases}$

4- $\begin{cases} 9x - 2y = -3 \\ 4x + 3y = 57 \end{cases}$

2- په تعویضي طریقه د دوه مجهوله معادلو حل:

د یوې معادلې څخه د یو مجهول قیمت د بل له جنسه پیدا کوو او په بله معادله کې یې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوؤ د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دا قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

مثال:

$$\begin{cases} 3x - 11y = 10 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}$$

$$x = \frac{11y + 10}{3}$$

$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$

$$44y + 40 + 6y = 90$$

$$50y = 50$$

$$y = 1$$

$$3x - 11y = 10$$

$$3x - 11 \times 1 = 10$$

$$3x - 11 = 10$$

$$3x = 10 + 11$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


تمرين:

لاندې سیستمونه په تعویضي طریقه حل کړئ؟

-1
$$\begin{aligned}3x + 13y &= 25\\ 2x + 2y &= 10\end{aligned}$$

-2
$$\begin{aligned}6x - 5y &= 20\\ 7x + 3y &= 41\end{aligned}$$

-3
$$\begin{aligned}11x + 5y &= 53\\ 8x - 9y &= -12\end{aligned}$$

-4
$$\begin{aligned}x - 2y &= 1\\ 2x + y &= 12\end{aligned}$$

3- د مساوات په طریقه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دوارو معادلو څخه د یو مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه پیدا کوو او سره مساوي کوو یې د دوه مجهوله معادلو سیستم په اوله درجه یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دغه قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$\begin{aligned}3x + 7y &= 19\\ 5x - 2y &= 18\end{aligned}$$

$$3x + 7y = 19 \qquad\qquad 5x - 2y = 18$$

$$3x = 19 - 7y \qquad\qquad 5x = 18 + 2y$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \ldots\ldots I \qquad\qquad x = \frac{18 + 2y}{5} \ldots\ldots II$$

څرنګه چې په $I$ او $II$ نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښې طرفونه یې هم مساوي دي نو لیکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$41y = 41$

$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$

$y = 1$

$3x + 7y = 19$

$3x + 7 \times 1 = 19$

$3x + 7 = 19$

$3x = 19 - 7$

$3x = 12$

$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad ; \quad x = 4$

تمرین:

-1 $\begin{matrix} 4x + 2y = 14 \\ 15x - y = 10 \end{matrix}$ -2 $\begin{matrix} 7x - 3y = 5 \\ 8x - 4y = 0 \end{matrix}$

-3 $\begin{matrix} 11x + 6y = 40 \\ 2x + 9y = 31 \end{matrix}$ -4 $\begin{matrix} 9x - 3y = 21 \\ 8x + 7y = 38 \end{matrix}$

4-د دیترمینانت په طریقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

دیترمینانت په لغت کې ( معین یا ثابت ) ته وایې او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتیب ته د یترمینانت وایي لکه $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

د دیترمینانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل :

د $x$ او $y$ د ضریبو دیترمینانت په $D$ ښیو او قیمت یې پیدا کوو . د $x$ د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په $D_x$ یې ښیو قیمت یې پیدا کوو بیا د $D$ په دیتر مینانت د $y$ د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په $D_y$ یې نیسو او قیمت یې پیدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د $x$ قیمت لاس ته راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د $y$ قیمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{matrix} 3x - 5y = 2 \\ 5x + y = 22 \end{matrix}$ د دیترمینانت پواسطه حل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1b_2 - a_2b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \qquad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \qquad D_y = 56$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{112}{28} = 4 \qquad x = 4$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{56}{28} = 2 \qquad y = 2$$

5- دګراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په (     ) صفحه د تابع په بحث کې وګورئ

6- د متريکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متريکس($Matrixes$):

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطيلي ته وايي ترتيب ته متريکس وايي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متريکس په غټو خروفو ښودل کيږي او هغه اعداد يا حروف چې په متريکس کې ليکل کيږي د متريکس د عناصرو په نوم يادېږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول ليکل شوی وي د متريکس د سطر په نوم يادېږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول ليکل شوی وي د متريکس د ستن په نوم يادېږي د سطرونو شمير په $i$ او د ستونونو شمېر په $j$ ښيئ چې $i$ او $j$ طبيعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \dots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


د متریکس مرتبه:

که د متریکس د سطرونو شمېر $m$ او د ستونو شمېر یې $n$ وي دغه متریکس ته $m \times n$ مرتبه متریکس وایي.

او داسې لیکل کیږي $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$

مثال: لاندې متریکسونه حل کړئ؟

$(a_{ij})_{2\times2} = (i+j)_{2\times2}$ -1 $\qquad$ $(a_{ij})_{3\times2} = (i+j)_{3\times2}$ -2

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = i + j$ $\qquad$ $a_{12} = 1 + 2 = 3$ $\qquad$ $a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

په نتیجه کې لاندې متریکس لاس ته راځي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د متریکس ډولونه:

متریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري متریکس: هغه متریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \quad 5 \quad 9]_{1\times3}$

2- ستوني متریکس: هغه متریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3\times1}$

3- صفري متیریکس: هغه متریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; 0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي متیریکس: هغه متریکس دی چې د سطرونو شمېر یې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لکه :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

مربعي يا مستطيلي متريکسونه دوه قطرونه لري ، چې يوه ته اصلي قطر يا (Mean diagonal) او بل ته (*Minor diagonal*) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22}$ ... ... . $a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{nn}$ ... ... ... $a_{12}$ ، $a_{21}$ فرعي قطر دی.

لاندې متريکسونه څه ډول متريکسونه دي. $3 \times 1$ او $1 \times 4$

5- قطري متريکس: هغه متريکس دی چې د اصلي قطر څخه پـه غير نور عناصر يې صفرونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متريکس: که د قطري متريکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متريکس ته سکالر متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متريکس: که د قطري متريکس داسې قطر عناصر يو (1) وي نو دې متريکس ته واحد متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلثي متريکس: که د يوه متريکس د اصلي قطر لاندې او يا پورته عناصر صفرونه وي دې متريکس ته مثلثي متريککس وايي لکه.

پورتنی مثلثي متريکس په لاندې ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندې مثلثي متریکس دی.

په انګلیسي کې ورته *Upper Tringolar matrix* او *Lower Tringolar matrix* وايي.

## متقابل یا متضاد متریکس:

هغه متریکسونه چې عناصر يې يو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m\times n} = A(-a_{ij})_{m\times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د متریکسونو جمع:

د متریکسونو په جمع کې د متریکسو د مرتبې مساوات ضرور دي یعنې که $a_{ij}$ او $b_{ij}$ دوه متریکسونه ولرو کولای شو چې دغه دوول متریکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ متریکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د متریکس تفریق:

په تفریق کې هم د متریکس د تفریقولو لپاره د متریکس د مرتبو مساوات ضرور دی.

که $a_{ij}$ او $b_{ij}$ وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متریکسونه راکړ شویدي $A - B$ متریکس پیدا کړئ؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-2) & -1-(-1) \\ 3-3 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & -1+1 \\ 3-3 & +1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

### د متریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د متریکسونو جمع د تبدیلي د قانون پیروي کوي مګر د متریکسونو تفریق د تبدیلي د قانون پیروي نه کوي. لکه

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

2- د متریکسونو جمع او تفریق د تبدیلي د خاصیت پیروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مګر د متریکسونو په تفریق کې ی‌ې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

### په متریکسونو کې د سکالر ضرب:

په یوه متریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو یعنی که $A = a_{ij}$ او $K \in IR$ وي نو $KA$ د $C$ سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي $KA$ پیدا کړئ؟

$$KA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times3 & 2\times6 \\ 2\times2 & 2\times1 & 2\times0 \\ 2\times1 & 2\times0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دوه متریکسونو ضرب :

د متریکس د ضرب لپاره باید د یوه متریکس د سطرونو شمېر د بل متریکس د ستونو د شمېر سره مساوي وي یعنی که $A = (a_{ij})_{m\times n}$ او $B = (b_{ij})_{n\times p}$ وي کولای شو چې ضرب یې کړو.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

طریقه یې داسې ده چې د یوه متریکس لمړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې یې لیکو او په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د متریکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 + 1(-1) \\ -1\times 1 + 0\times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 \\ -1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2\times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1\times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6+4 & 8+3 \\ -3-8 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

### د متریکس د ضرب خواص:

1- د متریکس ضرب عمیله د تبدیلي د قانون پیروي نه کوي یعني:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متریکسونو ضرب د اتحادي خاصیت پیروي کوي.

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


3- د متریکسونو ضرب د توزیعي خاصیت پیروي کوي.

$$A(B+C) = AB + Ac$$

د یوه متریکس ترانسپوز متریکس:

که د یوه متریکس سطر په ستون او ستون یې په سطر بدل شي نوی متریکس ته ترانسپوز متریکس وایي.

که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وي نو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متریکس وایي په $A^T$ ښودل کیږي.

که $A = A^T$ وي نو پدې صورت کې $A$ ته متناظر متریکس وایي.

لکه $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ یو متناظر متریکس دی ځکه $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

د ترانسپوز متریکس خواص:

1- ترانسپوز متریکس د خپل لمړني متریکس سره مساوی وي.

$$(A^T)^T = A = \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ij})A$$

2- د دوه یا څو ترانسپوز متریکسو د جمع او تفریق حاصلونه د لمړنیو متریکسو د جمع د حاصلو او تفریق د حاصلو د ترانسپوزو سره مساوي دي.

$$(A \pm B \pm C \pm \ldots\ldots)^T = A^T + B^T + C \ldots\ldots\ldots$$

3- $(AB)^T = A^T \times B^T$

4- $(\alpha A)^T = \alpha \times A^T$

5- $(-A)^T = -A^T$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## دیترمینانت

مربعي متریکس ته دیترمینانت وايي.

لکه که $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ متریکس ولرو نو $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ یو دیترمینانت دي او په $|A|$ سره ښودل کیږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطراو $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطر وايي.

## د دیترمینانت محاسبه

د اصلي قطر څخه فرعي قطر منفي کوو $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

مثال: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ قیمت پیدا کړئ

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 7 \times 4 = 6 - 28 = -22$

## د دیترمینانت د حل طریقه

دیترمینانت په دوه طریقو حلیږي.

1- دساروس په طریقه 2- دکرامر په طریقه

### 1- دساروس د دیترمینانت په طریقه لول

اول ستون او دریم سطر د منځه وړواو پاتی $2\times 2$ مرتبې دیترمینانت محاسبه کوواو دتقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31}$$

دویم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


دريم ستون او دريم سطر د منځه وړو. او دتقاطع په عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ ديترمينانت حل کړئ

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4\big(6 \times 2 - (-3 \times 1)\big) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دويم- د کرامر په طريقه:

د ديترمينانت دوه لمړي ستونونه د ديترمينانت د باندي ليکو د اصلي قطرو د مجموعې څخه د فرعي قطرومجموعه منفي کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{matrix}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5(-1)\}$$
$$-\{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2(-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$
$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194$$
$$= -117$$
$$|B| = -117$$

## د دیترمینانت خواص

1-که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفر وي نو د دیترمینانت د صفر سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت يې صفر دي

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د $A$ د متریکس دیترمینانت د $A^T$ دمتریکس د دیترمینانت سره مساوي دی

د $2 \times 2$ مرتبې متریکس ضربي معکوس د معکوس متریکس سره د مربعي متریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که د متریکس قیمت $|A| = 0$ وي نودی متریکس ته *Singular Matrix* وائي اوکه $|A| \neq 0$ وي نو دی متریکس ته *Non singular Matrix* وایي.

هغه متریکسونه چې معکوس لري .

1- چې متریکسونه مربعي وي یعنی د $A_{n\times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متریکسونه یو د بل معکوس دي .

حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

لیدل کیږي چې $AB = BA = 1$ دي نو $A$ او $B$ یو د بل معکوس دي.

## الحاقي متریکس Adjoin of Matrix

که د یوه متریکس د اصلي قطر د عناصرو ځایونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغیر شي دغه متریکس ته الحاقي متریکس وایي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Adj}A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متریکس د یوه متریکس د معکوس متریکس د لاس ته راوړلو لپاره استعمالیږي طریقه یې داسې ده چې دالحاقي متریکس د دیترمینانت دقیمت په معکوس کې ضربوو د راکړشوي متریکس معکوس متریکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}A}{|A|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل:- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ویلای شوچې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## تمرین

د لاندې متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

$a$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

$b$: $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

## د متریکس پواسطه ددوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1yc = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دی غواړو چې دمتریکس پواسطه یې حل کړو د $x$ او $y$ د ضریبو متریکس په $A$ ښیو $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په $B$ ښیي. اود $x$ او $y$ متریکس په $X$ ښیو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نو ليکو چې:

$$AX = B \Longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

يا $X = A^{-1}B$

مثال: لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x = 1 \quad \& \quad y = 2$

## تمرين

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د گوس Goose طريقه د افناً طريقه ده.

په همدې ترتيب کولای شو چې څلورمجهوله،پنځه مجهوله او نوری څو مجهوله معادلی په مختلفو طريقو حل کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# پنځم فصل

## دویمه درجه یومجهوله معادلی

هغه معادلی دي چې یو مجهول ولري او د مجهول توان یې دوه وي. عمومي شکل یې دادي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې $b, a$ او $c$ ثابت عددونه دي $(x)$ مجهول دي ځرنګه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دویمه درجه یو مجهوله معادله وایي.

### خصوصي حالتونه

1- که b=c=0 وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلی دواړه جذرونه صفردي یعنی :

$$x_1 = 0 \qquad \& \qquad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

$(x)$ مشترک نیسو اومعادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بیا هر قوس په نوبت سره دصفر سره مساوي کوواو د معادلی جذرونه پیدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5x^2 + 11x = x(5x + 11) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$cx_1 = 0$$
$$5x + 11 = 0$$
$$5x = -11$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$
$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- که $b = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 + c = 0$

د دغسې معادلو د حل کافي او لازمي شرط دادې چې $a$ او $c$ باید مختلف العلامه وي .او که نه نو د حقیقي اعدادو په سیټ کې حل نلري .د مختلطو اعدادو په سیټ کې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ؟

1: $5x^2 + 21x = 0$ 2: $11x^2 - 22x = 0$ 3: $2x^2 + 28x = 0$

4: $7x^2 - 63 = 0$ 5: $4x^2 + 16 = 0$ 6: $-7x^2 + 28 = 0$

## د دويمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې په څلورو طریقو حلیږي.

1- د تجزیې پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

2- د تکمیل مربع پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلوحلول

(c) ketabton.com: The Digital Library



3- د محمد بن موسی دفارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

4- دګراف پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزیې پواسطه دیو مجهوله دویمه درجه معادلوحل:

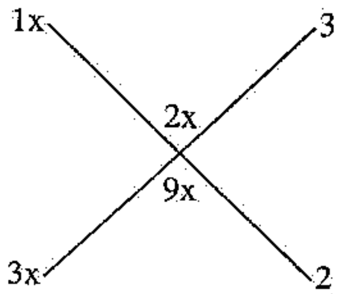
$(a)$ او $(c)$ تجزیه کوو د ضربي عواملو څخه یي داسې یوه یوه جوړه ضربي عوامل راخلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه یي $(b)$ شي بیا دغه ضربي عوامل په چارت کې لیکواو د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پیدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي

مثال:- $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزیې پواسطه حل کړئ.

$$a = 3 = 1.3 = -1(-3)$$

$$c = 6 = 2.3 = 1.6 = -2(-3) = -1(-6)$$

$$b = 11$$




$$(x+3)(3x+2) = 0$$

$$x + 3 = 0$$

$$x_{1=-3}$$

$$3x + 2 = 0$$

$$3x = -2$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راکړشوی ده غواړو چې د تکمیل مربع پواسطه یي حل کړو ټول حدونه د $x^2$ په ضریب ویشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{5x^2}{5}-\frac{17x}{5}+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x=-\frac{6}{5}$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\left(\frac{17}{10}\right)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2-\frac{6}{5}$$

$$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2=\frac{289}{100}-\frac{6}{5}=\frac{289-120}{100}=\frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{17}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x-\frac{17}{10}=\pm\frac{13}{10}$$

$$x=\frac{17}{10}\pm\frac{13}{10}=\frac{17\pm 13}{10}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=\frac{2}{5}=0.4$$

3- د محمد بن موسى د فارمول پواسطه ددويمه درجه يو مجهوله معادلو حل:

لمړي د محمد بن موسى فارمول ثبوتوو.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

داسانتیا لپاره $b^2-4ac$ په $\Delta$ ښیو:

$$\Delta=b^2-4ac$$

نو:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

د $(\Delta)$ په باب دری حالته موجود دي .

1- چې $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذرونه لري اوجذرونه يې:

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پیدا کیږي.

2- چې $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري اوجذر يي د $x=\frac{-b}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي.

3- چې $\Delta < 0$ وي معادله دحقیقي اعدادو په سیټ کې جذر نه لري.

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$7x^2-13x-24=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times7\times(-24)$$

$$\Delta=169+672=841$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-13)+\sqrt{841}}{2\times 7}=\frac{13+29}{14}=\frac{42}{14}=3$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-13)-\sqrt{841}}{2\times 7}=\frac{13-29}{14}=\frac{-16}{14}=-\frac{8}{7}$$

$x_{1=3}$ $\quad x_2=-\frac{8}{7}$

مثال: لاندي معادله حل کړئ؟

$$9x^2+30x+25=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=30^2-4\times 9\times 25=900-900=0$$
$$\Delta=0$$

معادله يوجذر لري.

$$x=\frac{-b}{2a}=-\frac{30}{2\times 9}=-\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2+3x+10=0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times 2\times 10=9-80=-71$$

څرنگه چې $0>\Delta$ دي نومعادله جذر نه لري.

تمرين

لاندې معادلې د تجزيې پواسطه حل کړئ.

1: $3x^2+5x-42=0$ 2: $7x^2-29x+4=0$ 3: $2x^2+3x-14=0$

لاندې معادلې دتکميل مربع پواسطه حل کړئ.

1: $11x^2-17x-48=0$ 2: $13x^2+7x-360=0$ 3: $8x^2-65x+102=0$

لاندې معادلې د محمد بن موسی د فارمول پواسطه حل کړئ.

1: $2x^2+3x-65=0$ 2: $9x^2-43x+48=0$

3: $25x^2-11x-192=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## دمحمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که $b$ جفت وي د $b$ نیمايي په $\acute{b}$ ښیو $\frac{b}{2} = \acute{b}$ او $b = 2\acute{b}$ کیږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د $b$ په عوض $(2\acute{b})$ لیکو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(2\acute{b}) \pm \sqrt{(2\acute{b})^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2\acute{b} \pm \pm\sqrt{4\acute{b}^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-2\acute{b} \pm \sqrt{4(\acute{b}^2 - ac)}}{2a} = \frac{-2\acute{b} \pm 2\sqrt{\acute{b}^2 - ac}}{2a} = \frac{2\left(-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{b}^2 - ac}\right)}{2a}$$

$$= \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{b}^2 - ac}}{a}$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{b}^2 - ac}}{a}$$

داساتنیا لپاره $\acute{b}^2 - ac$ په $\acute{\Delta}$ ښیو یعنې:

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac$$

د $\acute{\Delta}$ په باب هم درې حالته موجود دي.

1- که $\acute{\Delta} > 0$ وي معادله دوه جذره لري اوجذرونه يې د $x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي.

2- که $\acute{\Delta} = 0$ وي معادله یوجذرلري، اوجذر يې د $x = \frac{-\acute{b}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي

3- که $\acute{\Delta} < 0$ وي معادله جذرنه لري.

مثال:- $3x^2 + 14x - 40 = 0$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 7^2 - 3(-40) = 49 + 120 = 169$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-14 \pm 13}{3}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3} \qquad x_2 = -9$$

مثال:- $4x^2 + 12x + 9 = 0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\acute{\Delta} = 0$$

معادله یو جذر لري.

$$x = -\frac{\acute{b}}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad so \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندي معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\acute{\Delta} = -19$$

$$\acute{\Delta} < 0$$

معادله جذر نه لري.

تمرين

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د يو مجهوله دويمه درجه معادلو د جذرو او ضريبو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

دمحمد بن موسی فارمولونه لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2- د $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ثبوت

د محمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

3: د $x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = \frac{b^2-2ac}{a^2}$ ثبوت

$$x_1^{\,2} + 2x_1x_2 + x_2^{\,2} = (x_1 + x)^2$$

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

4: د $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$ ثبوت

$$x_1{}^3 + 3x_1{}^2x_2 + 3x_1x_2{}^2 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1{}^2x_2 - 3x_1x_2{}^2$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{3abc}{a^3}$$

5: د $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$ ثبوت

$$x_1{}^4 + 2x_1{}^2x_2{}^2 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2x_1{}^2x_2{}^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2(x_1\, x_2)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

**مثال:** د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه،د جذرونو د ضرب حاصل، دجذرو د مربعګانو مجموعه پيدا کړئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} == \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

## دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول

که د يوې معادلې جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله يې پيدا کړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړشوو جذرو مربوطه معادله لاس ته راځي . د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي:-

1: $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

2: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

د $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ ثبوت

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

مثال:- د يوې معادلې جذرونه په ترتيب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله يې پيدا کړئ

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$x^2-(5-7)x+(5)(-7)=0$$
$$x^2-(-2)x-35=0$$
$$x^2+2x-35=0$$

تمرين

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1=3$ & $x_2=\frac{3}{5}$ 2: $x_1=\frac{7}{3}$ & $x_2=5$

3: $x_1=\sqrt{3}$ & $x_2=2$

## د دویمه درجه یومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول

دجذرو علامی په یوه جدول مطالعه کوو

| | | |
|---|---|---|
| که $S>0$ وي<br>دواړه جذرونه مثبت دي | که $P>0$ وي<br>جذرونه هم علامه دي | که $\Delta>0$ وي<br>معادله دوه جذره لري |
| که $S<0$ وي<br>دواړه جذرونه منفي دي | که $P>0$ وي<br>جذرونه هم علامه دي | که $\Delta>0$ وي<br>معادله دوه جذره لري |
| که $S>0$ وي<br>لوی جذر مثبت دي | که $P<0$ وي<br>جذرونه مختلف العلامه دي | که $\Delta>0$ وي<br>معادله دوه جذره لري |
| که $S<0$ وي<br>لوی جذر منفي دي | که $P<0$ وي<br>جذرونه مختلف العلامه دي | که $\Delta>0$ وي<br>معادله دوه جذره لري |
| که $S>0$ وي<br>لوی جذر مثبت دي | | $\Delta=0$ وي<br>معادله یو جذر لري |
| که $S<0$ وي<br>لوی جذر منفي دي | | $\Delta=0$ وي<br>معادله یو جذر لري |
| | معادله جذر نه لري | $\Delta<0$ وي |

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ دجذروعلامي مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$\Delta > 0$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف العلامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذر يي منفي دی.

## د ديکارت قاعده

ديکارت ددويمه درجه معادلو د علامو تغير ته تحول وايي.

ديکارت وايي:

1- که دويمه درجه معادلودعلامو دوه تحوله لرل دمعادلی دواړه جذرونه مثبت دي

2- که د علامو تحول يو ؤ د معادلي يو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه ؤ نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه يي منفي دي.

لکه:

$5x^2 - 17x + 6 = 0$ دواړه جذرونه يي مثبت دي.

$3x^2 + 7x - 26 = 0$ يو جذر يي مثبت دي.

$x^2 + 169x + 4 = 0$ دواړه جذرونه يي منفي دي.

## دهغه معادلو حلول چي په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي:

شپږ قسمه معادلي په دويمه درجه يو مجهوله معادلو بدليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



1- دریمه درجه معادلې:

هغه دریمه درجه معادلې چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري.دداسې معادلود حل لپاره $x$ مشترک نیسو.اومعادله د دوه فکتورو په حاصل ضرب بدلوو.هر فکتورد صفر سره مساوي کووډمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال:- $5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \qquad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلې:

هغه څلورمه درجه معادلې چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي.طریقه یې داسې ده چې $x^2$ په $y$ شیوڅلورمه درجه معادله په دویمه درجه معادله بدلیږي.دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دویمه درجه معادلې دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه یې مثبت او دوه یې منفي وي.

2- که د دویمه درجه معادلې یو جذر مثبت ؤ نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې یو یې مثبت اوبل یې منفي وي.

3- که دویمه درجه معادلې مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دویمه درجه معادلې جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال:- لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : $x^2$ په $y$ ښيو نو $x^4 = y^2$ کيږي

$$3y^2 - 7y - 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$\Delta > 0$$

معادله دوه جذره لري يوجذر يي مثبت او بل يي منفي دي نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x^2 = y = y_1 = 4$$

$$x^2 = 4 \qquad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

## تمرين

لاندې معادلې حل کړئ

1- $4x^2 + 3x - 45 = 0$　　2- $7x^2 - 11x - 6 = 0$

3- $5x^2 + 13x + 6 = 0$　　4- $13x^2 + x - 14 = 0$

5- $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$　　6- $7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$

## 3- جذري معادلې :

هغه جذري معادلې چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادلو بدليدلای شي طريقه يي داسې ده چې $\sqrt{x}$ په $y$ ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو چې $x = y^2$ کيږي اودويمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال :- $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دويمه درجه معادله بدله کړئ اوحل يي کړئ؟

حل: $y = \sqrt{x}$ ښيو نو $x = y^2$ کيږي د $(x)$ په عوض $(y^2)$ او د $(\sqrt{x})$ په عوض $(y)$ وضع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac$$

$$\acute{\Delta} = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$

$$\acute{\Delta} = 100$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$

$$x_1 = 2 \qquad \& \qquad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلی چې توانونه يې کسري وي اود يو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي. لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په $(y)$ ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو نو $\left(x^{\frac{2}{3}} = y^2\right)$ کيږي.

$$5y^2 + 3y - 26 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$$

$$\Delta = 529$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$

$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \therefore \ y_1 = 2$$

$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \qquad \therefore \ y_2 = -2\frac{3}{5}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \qquad x^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$

$$x_1 = 8$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ.

1- $x^{\frac{2}{5}} + 3x^{\frac{1}{5}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٥- هغه معادلی چې توانونه یې کسري وي:

هغه معادلی چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي.

$x^{\frac{m}{2n}}$ په $y$ او $x^{\frac{m}{n}}$ په $y^2$ بنیو پورتنی معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$

دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول یا په کومه بله طریقه حلوو قیمتونه یې پیداکوو د $y$

د قیمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قیمت پیداکوو دمعادلی جذرونه لاس ته راځي.

مثال :- د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلی جذرونه پیدا کړئ؟

$x^{\frac{1}{3}} = y$ بنیو نو $x^{\frac{2}{3}} = y^2$ کیږي.

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$
$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$
$$\Delta = 289$$
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$
$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -\frac{11}{2}$$
$$\because \; x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \qquad \therefore \; x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \qquad \& \; x_1 = 27$$
$$\because \; x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \qquad \therefore \; x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2},$$
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$
$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرین :

لاندې معادلی دویمه درجه معادلو ته واړوئ؟

1: $5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0$  2: $4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## عبارتي سوالونه

1: د $(A)$او $(B)$ ددوه ښارو تر منځ فاصله (450) کیلومتره ده یو موټر سهار په اوه بجی په یوسرعت د $(A)$ د ښار څخه د $(B)$ ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجی د $(x+15)$ کیلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په یو وخت کې د $(B)$ښار ته ورسیدل د هر یوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x}-\frac{450}{x+15}=1$$
$$\frac{450(x+15)-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{450x+6750-450x}{x(x+15)}=1$$
$$\frac{6750}{x(x+15)}=\frac{1}{1}$$
$$x^2+15x=6750$$
$$x^2+15x-6750=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(15)^2-4\times1\times(-6750)=225+27000=27225$$
$$\Delta=27225$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{27225}}{2\times1}=\frac{-15\pm165}{2}$$
$$x_1=\frac{-15+165}{2}=\frac{150}{2}=75$$
$$x_2=\frac{-15-165}{2}=\frac{-180}{2}=-90$$

2- د یوه قایم الزاویه مثلث ضلعی په ترتیب سره $(x+1)$ ، $(x+2)$ او $(x+3)$ دي دمثلث ضلعی پیدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$$
$$x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9$$
$$x^2=4$$
$$x_1=2 \qquad \& \qquad x_2=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


۳- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي د یوه ارتفاع د قاعدې څخه یو متر او د بل ارتفاع دقاعدې څخه دري متره زیاته ده او د مساحتو تفاضل يې اوه مترمربع دی د هر یوه مساحت قاعده او ارتفاع پیدا کړئ

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2}-\frac{x(x+1)}{2}=7$$
$$\frac{x^2+3x-x^2-x}{2}=7 \Rightarrow \frac{2x}{2}=7 \Rightarrow x=7$$

قاعده $x=7$

$x+1=8$ د کوچني مثلث ارتفاع

$x+3=10$ د لوی مثلث ارتفاع

۴- د یوه عدد د طرفینو د ضرب حاصل (323) عدد پیدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1)=323$$
$$x^2-1=323$$
$$x^2=323+1=324$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{324}$$
$$x=18$$

۵- دیوه مستطیل اوږدوالی تر سور دري متره زیات دی که مساحت يې (88) سانتي مترمربع وي سور او اوږدوالی يې پیدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3)=88$$
$$x^2+3x-88=0$$
$$\Delta=x^2-4ac=3^2-4\times1\times(-88)=$$
$$9+352=361$$
$$\Delta=361$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-3\pm\frac{\sqrt{361}}{2\times1}=\frac{-3\pm19}{2}\Rightarrow x_1=8\Rightarrow x_2=-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



6- يو سړی د $(A)$ د ښار څخه د $(B)$ ښار ته په يوه سرعت روان شوبله ورځ يي په خپل سرعت کی دوه متره زيادت راوست نيم ساعت مخکی ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کېلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20(x+2)-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20x+40-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{40}{x^2+2x}=\frac{1}{2}$$
$$x^2+2x=80$$
$$x^2+2x-80=0$$
$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=1^2-1(-80)=1+80=81$$
$$\acute{\Delta}=81$$
$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{1}=-1\pm 9=8$$

اولنی سرعت $x=8$

اخرنی سرعت $x+2=10$

7- د يوې دايرې مساحت (154) سانتي مترمربع دې شعاع يي څو ده؟

حل:

$$\pi r^2=154$$
$$\frac{22}{7}r^2=154$$
$$\frac{7}{22}\times\frac{22}{7}r^2=154\times\frac{7}{22}$$
$$r^2=49$$
$$\sqrt{r^2}=\sqrt{49}$$
$$r=7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## عبارتي سوالونه

1- د يوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدي څخه $(3cm)$ زياته ده مساحت يې $27cm^2$ دې قاعده او ارتفاع يې پيدا کړئ؟

2- د يوه مستطيل طول د هغه د سور څخه $(5cm)$ زيات دی مساحت يې $(24cm^2)$ دی سور او طول يې پيدا کړئ؟

3- ديوی دايری مساحت $(616)$ سانتي مترمربع ده شعاع يې څو ده؟

4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله $800m$ ده يو موټروان په يوه سرعت سره دا فاصله طی کوي دبېرته راتګ په وخت کی $5m$ په خپل سرعت کی تغير راولي يو ساعت مخکی رارسيږي دتګ او راتګ سرعت يې پيدا کړئ؟

5- احمد د محمود څخه يوه روپۍ زياته لري که د پيسو د ضرب حاصل يې $(840)$ وي دهر يوه روپۍ پيدا کړئ؟

6- يو سړی په خپله ځمکه باندی دېوال تاووي د دېوال سور نيم متر دې که د دېوال تر تاوولو وروسته يې ځمکه $(29cm^2)$ کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکی مساحت څو وي؟

7- د يوې دايرې مساحت د هغی تر محيط $(5)$ واره زيات دې ضلعه يې پيدا کړئ؟

8- د يوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $\left(\frac{82}{9}\right)$ ده عدد پيدا کړئ؟

9- د کوم عدد مربع د هغه عدد $(19)$ چنده ده؟

10- د دوه مثلثو قاعدی مساوي دي ديوه ارتفاع دقاعدی څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدی څخه د دوه واحدو په اندازه زياته ده که مساحتونه يې جمع شي $(76cm^2)$ کيږي د مثلثو قاعدی او ارتفاعګانی پيدا کړئ؟

11- احمد دمحمود دری چنده کار کوي که دواړه په شريکه يو کار په $(3)$ ورځو کی وکړي ووايأست چه هر يو به دا کار په څو ورځو کی وکړي؟

12- که د يوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي $(3)$ کيږي عدد پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



13- که د یوه سړي اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ یې کټلې وي ووایاست چه څو ورځی کار یې کړی دی؟

14- د یوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پیدا کړئ؟

15- د احمد او محمود د پیسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل یې (609) ده د هر یوه پیسې څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زیاتې او د محمود روپۍ (5)کمې شي د یوې ورځې د اجورې د ضرب حاصل یې (2475) روپۍ کیږي د هر یوه اجوره څو ده ؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لګیا دي احمد خپل کار تر محمود درې ورځې د مخه خلاصوي که په شریکه یې په دوه ورځو کې وکړي ووایاست چه هر یو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

18- د مربع مساحت $(125316cm^2)$دی ضلعه یې پیدا کړئ؟

19- د یوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زیاته ده که مساحت یې $(675cm^2)$ وي قاعده او ارتفاع به یې څو وي؟

20- یو موټر سهار په اته بجې حرکت کوي بل موټر یوساعت وروسته (10)کېلو متر سرعت په زیادت وریسې روان شو که دواړه په یوه وخت کې مطلوب ته رسیږي که وهل شوې فاصله (900) کېلو متره وي د هریوه سرعت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# شپږم فصل

## غیرمساوات

د دوه افادو د عددي قیمتونه برابري ته غیرمساوات وايي.

د غیر مساوات علامه دا (>) یا دا (<) ده هره افاده چي ددی علامی مخی ته لیکل شوی وي لويه ده تر هغه افادی چي د علامی شاته لیکل شوی وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

یا لکه $18 < 45$ او داسي نور.

### د غیرمساوات خواص:

1- که د غیرمساوات د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$11 < 19$$
$$11 + 8 < 19 + 8$$
$$19 < 27$$

2- که د غیرمساوات د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$13 > 9$$
$$13 - 10 > 9 - 10$$
$$3 > -1$$

3- که دغیرمساوات دواړه خواوی په مثبت عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$12 > 4$$
$$+2(12) > +2(4)$$
$$24 > 8$$

4- که د غیرمساوات دواړه خواوي په منفي عدد کی ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$15 < 21$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$15(-2) > 21(-2)$$
$$-30 > -42$$

5- که د غېرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد تقسيم شي د غېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$
$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$
$$3 < 5$$

که د غېرمساوات دواړه خواوې په منفي عدد تقسيم شي د غېرمساوات علامه تغير خوري. لکه:

$$30 > 24$$
$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$
$$-15 < -12$$

7- که دغېرمساوات دواړه خواوې معکوس شي دغېرمساوات علامه تغير خوري. لکه:

$$5 < 7$$
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غېرمساوات دواړه خواوې د طاق عدد په توان رفع شي د غېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$
$$(2)^3 > (-9)^3$$
$$8 > -729$$

9- که د غېرمساوات دواړه خواوې د جفت عدد په توان رفع شي دلته درې حالتونه موجود دي.

الف: که د غېرمساوات دواړه خواوې مثبت وي د غېرمساوات علامه تغير نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$
$$5^2 > 3^2$$
$$25 > 9$$

ب: که د غېرمساوات دواړه خواوې منفي وي د غېرمساوات علامه تغير خوري. لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$-2 > -5$$
$$(-2)^2 < (-5)^2$$
$$4 < 25$$

ج: که د غیرمساوات د یوی خوا عدد مثبت او د بلی خوا عدد منفي وي دلته دری حالته موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$7 > -5$$
$$(7)^2 > (-5)^2$$
$$49 > 25$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$4 > -7$$
$$(4)^2 < (-7)^2$$
$$16 < 49$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غیرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$6 > -6$$
$$(6)^2 = (-6)^2$$

## دغیر مساوات دحل سیټ:

د حقیقي اعدادو هغه سیټ چې په راکړشوی غیر مساوات کی صدق کوي د غیر مساوات د حل سیټ بلل کیږي.

## دغیرمساوات اقسام

په دی کتاب کی موږ دري قسمه غیر مساواتونه مطالعه کوو.

1- یومجهوله اوله درجه غیر مساوات

2- دوه مجهوله اوله درجه غیرمساوات

3- یومجهوله دویمه درجه غیرمساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library



## 1- يومجهوله اوله درجه غير مساوات:

هغه غيرمساوات دي چې مجهول يې يو او د مجهول درجه يې يوه وي عمومي شکل يې دا $ax + b \geq 0$ يا دا $ax + b \leq 0$ دی.

## ديومجهوله غيرمساوات د حل طريقه:

معلوم دغيرمساوات ښۍ خواته او مجهول د غيرمساوات چپې خواته ورولازمي عمليې پرې اجراء کوو په اخر کې د غيرمساوات دواړه خواوی د $x$ په ضريب ويشو د غيرمساوات دحل سيټ لاس ته راځي.

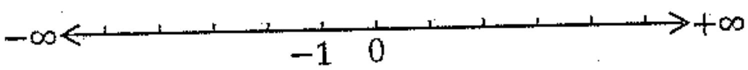
مثال: لاندې غيرمساوات حل کړئ.

$$3(4x + 11) - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$12x + 33 - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$10x + 39 \leq 15x + 44$$
$$10x - 15x \leq 44 - 39$$
$$-5x \leq 5$$
$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{5}{-5}$$
$$x \geq -1$$

د حل سيټ يې عبارت دی له:

$$A = \{x / -1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددو په کرښه داسې ښودل کيږي.




تمرين:

لاندې غيرمساواتونه حل کړئ.

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## مطلقه قيمت:

د يوه الجبري عدد حسابي برخې ته دهغه الجبري عدد مطلقه قيمت وايي.د مطلقه قيمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقه قيمت يې مطلوب وي د عمود خطونو ترمنځ ليکل کيږي. لکه $|-15|$ يا $|+15|$ چې دغه دواړه د مطلقه قيمت معنی ورکوي او داسې ليکل کيږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غيرمساوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: يو وار افاده د راکړشوي عدد څخه لويه او بيا يې دعدد د متناظرڅخه کوچنی فرضوو.

$3x - 11 > 19$

$3x > 19 + 11$

$3x > 30$

$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$

$x > 10$

$A = \{x/x > 10\}$

$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$

$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$

$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$

$C = A \cup B \left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$

## دبينوم داشارې څېړل

د بينوم عمومي شکل$(ax + b)$ دې د بينوم داشارې د څېړلو لپاره $(a)$ مشترک نيسو د قوس د باندې يې ليکو د بينوم هر حد په دې مشترک وېشو او د قوس په داخل کې يې ليکو.دقوس جذر پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

دلته د $(a)$ په باب دوه حالتونه موجود دي.

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x + \frac{b}{a}$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ | $-$ | 0 | $+$ |

دبينوم اشاره د جذر څخه کښته منفي اوپورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x + \frac{b}{a}$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ | $+$ | 0 | $-$ |

د بينوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال: د $(3x-6)$ اشاره وټاکئ؟

حل: $3x-6=0 \Rightarrow 3(x-2) \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

| $x$ | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $3(x-2)$ | $-$ | 0 | $+$ |

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x+15$ اشاره وټاکئ؟

حل:

$$-5x+15=-5(x-3)$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

| $x$ | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $-5(x-3)$ | $+$ | 0 | $-$ |

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونو اشارې وټاکئ؟

1- $2x-12$ 2- $3-x$ 3- $-4x+12$

4- $4x-20$ 5- $-6x-18$

**د هغه افادو داشارو ټاکل چې د څو بینومو د ضرب په شکل وي:**

د هرې افادې اشاره پیدا کوو اوضربوو يې د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي

مثال: $(4-x)(x+4)$ اشاره وټاکئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



حل:

$4 - x = 0 \quad \Rightarrow -x = -4 \quad \Rightarrow x = 4$
$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -4$

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $+4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4 - x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x + 4$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(4 - x)(x + 4)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

دجذرو منځ کې د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کې منفي ده.

تمرين:

د لاندې بېنومونه د حاصل ضرب په شکل راکړشوي دي اشاره يې وڅېړئ؟

1- $(2x - 12)(3 - x)$
2- $(3 - x)(x + 7)$
3- $(-4x + 12)(x + 8)$
3- $(-6x - 18)(x + 5)$

## د کسري افادو د اشارو څېړل:

د صورت او مخرج اشارې پيدا کوو او يو پر بل يې ويشو د کسر اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅېړئ؟

$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -4$
$2x - 6 = 0$
$2x = 6 \quad \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow x = 3$

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x + 4$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $2x - 6$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{x+4}{2x-6}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

دجذرو منځ کې د کسر اشاره منفي او په خارج کې مثبت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

د لاندې کسرو اشارې وڅیړئ:

1: $\frac{2x+6}{x-1}$ 2: $\frac{3x+4}{2-x}$

3: $\frac{x+2}{12x-18}$ 4: $\frac{-x-1}{1-2x}+3$

## دهغه غیرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بینومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بینومو اشارې پیدا کوو او سره ضربوو یې دحاصل ضرب اشارې لاس ته راځي دغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو هره اشاره چې دغیرمساوات دعلامې سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دی

مثال:

$$(x+3)(x-4)>0$$
$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$
$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-4$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+3)(x-4)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+3)(x-4)>0$ | د حل سیټ | | د حل سیټ ندی | | د حل سیټ |

تمرین:

د لاندې غیرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ

1: $(x-8)(2-x)<0$ 2: $(3x-6)(12-x)>0$

3: $(x-1)(1-x)\leq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## دهغه غیرمساوات دحل د سیټ پیدا کول چې د کسر په شکل وي:

دصورت او مخرج اشارې پیدا کوو دصورت اشاره د مخرج په اشاره ویشود کسر اشارې لاس ته راځي. دغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو د غیر مساوات د حل سیټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2}+1<0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2}<0$$

$$\frac{2x+2}{x-2}<0$$

$$2x+2=0 \ \Rightarrow 2x=-2 \ \ \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-2}{2} \ \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+2$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{2x+2}{x-2}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{2x+2}{x-2}<0$ | د حل سیټ نه دی | | د حل سیټ | | د حل سیټ نه دی |

تمرین:

د لاندې کسري غیرمساواتو دحل سیټ پیدا کړئ.

1: $\frac{2x+1}{x-1}+2>0$ 2: $\frac{4x+7}{2x-3}-1<0$

3: $\frac{x-6}{x+2}-2\geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## دیو مجهوله غیرمساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیرمساواتو ته د یو مجهوله غیرمساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیټ پیدا کوو هغه سیټ چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د سیستم د حل سیټ دی.

مثال: د لاندې غیرمساوات سیستم حل کړئ.

$$3x-6<0$$
$$5x+8<0$$

حل:-

$3x-6=0 \quad \Rightarrow 3x=6 \quad \Rightarrow x=2$

$5x+20=0 \quad \Rightarrow 5x=-20 \quad \Rightarrow x=-4$

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-6<0$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $5x+20<0$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| | د حل سیټ | | | | | |

تمرین:

په لاندې ډول دیو مجهوله غیرمساوات سیستمونه راکړ شویدي حل یې کړئ.

1- $7x-11>0 \ \& \ 4x+13>0$

2- 2: $13x+2>0 \ \& \ 5x-8<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## دوه مجهوله غېرمساوات

هغه غېرمساوات دی چې مجهولونه يې دوه او د هر مجهول درجه يې يوه وي عمومي شکل يې دا $ax + by \geq c$ يا دا $ax + by \leq c$ دې

د دغه رنګه غېرمساوات دحل د سيټ د لاس ته راوړلو لپاره دغېرمساوات ګراف رسموو ګراف مستوي په دوه برخو ويشي يوه برخه يې په غېرمساوات کې صدق کوي او بله برخه يې نه کوي دغه برخه يې کربښي، کرښې کوو بله برخه يې دغېر مساوات د حل سيټ دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غېرمساوات حل کړئ.

حل : غېرمساوات په مساوات بدلوو اوګراف يې رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

1- $x = 0$ نو:

$$2y = 6 \quad \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

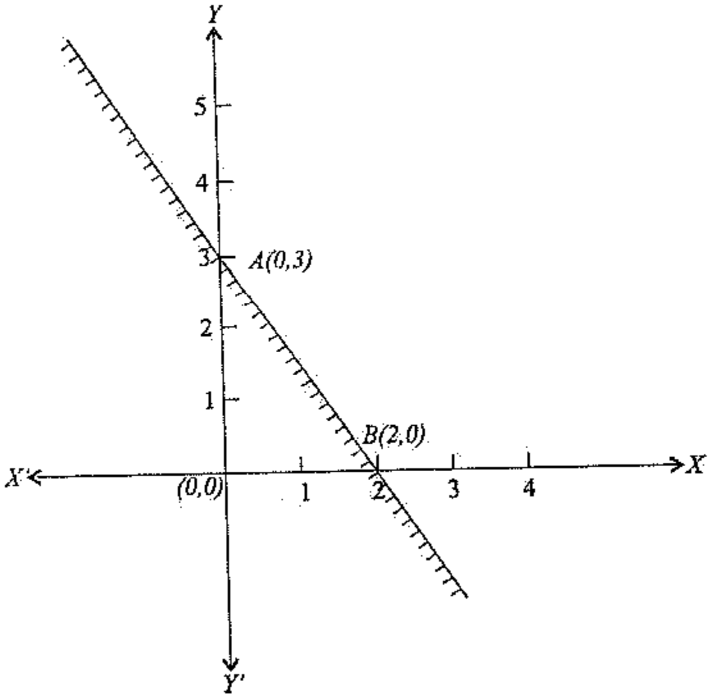
$$A(0,3)$$

2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

## دوه مجهوله غیرمساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کې دوه غیرمساواتوته د غیرمساوات سیستم وایي.

لکه: $2x - 3y > 6$ او $3x + 5y < 15$

دغه دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وایي.

## د دوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه:

غیرمساواتونه په مساواتو بدلوو اود هر مساوات گرښه یعنی گراف رسموو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یې په مربوطه غیرمساوات کې صدق کوي.دهر غیرمساوات د حل سیټ پیدا کوو. څرنگه چې د غیرمساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یې په دواړو غیرمساواتو کې صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیټ دي.

-1

$$3x + 5y < 15 \qquad \Longrightarrow 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضوو نو:

$$5y = 15 \qquad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \qquad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \qquad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

$$C(0,-2)$$

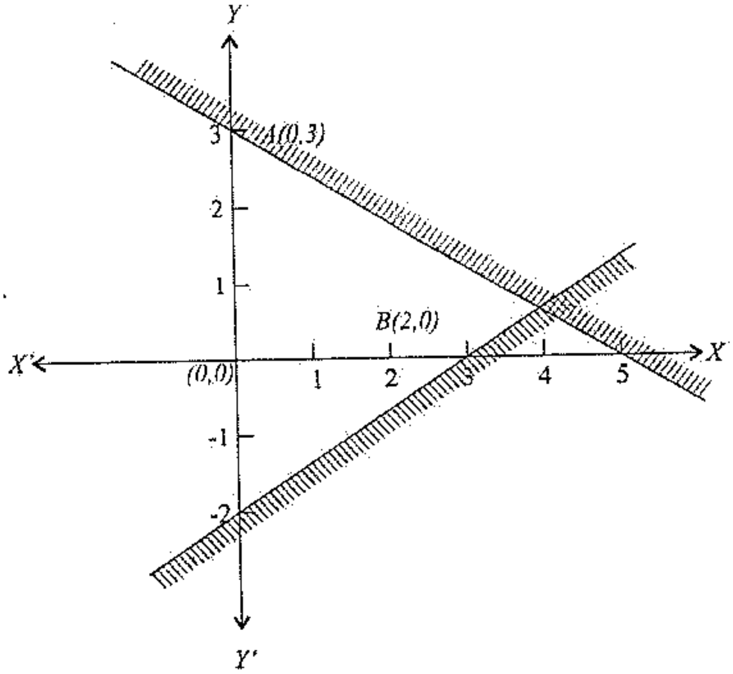
$$y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$2x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$




که درې دوه مجهوله غيرمساواتونه راکړ شوي وي د ګراف د ترسيم په وخت کې مثلث لاس ته راځي د څلور غيرمساواتونو څخه څلور ضلعي په همدې ترتيب د دوه مجهوله غيرمساواتونو شمېر دمضلعګانو دضلعو شمېر راښيي.

## يو مجهوله دويمه درجه غيرمساوات

هغه غيرمساوات دي چې مجهول يي يو او د مجهول درجه يي دوه وي عمومي شکل يي دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ يا دا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غيرمساوات د حل څخه مطلب د هغه سيټ پيدا کول دي چې په غيرمساوات کې وضع شي اوپه غيرمساوات کې صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دویمه درجه غیر مساوات د حل طریقه

که د غیر مساوات دواړو خواو ته حدونه موجود وي نو ل د غیر مساوات چپې خواته وروړ لازمي عملیې پرې اجراء کوو او د ترینوم شکل ته یې راوړو او تجزیه کوویې. د هر قوس جذر پیدا کوو د حل سیټ یې په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د جدول په طریقه          2- د سیټ بلډر په طریقه

### 1- د جدول په طریقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپې خواته او لوی جذر ښی خواته لیکو که د $(a)$ علامه مثبت وه د جذر څخه کښته دقوس علامه منفي او پورته مثبت ده او که د $(a)$ علامه منفي وه نو د جذر څخه کښته د قوس علامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دویمه درجه غیر مساوات د حل سیټ پیدا کړئ.

$$3x^2+13x-38<0$$

$$3x^2-6x+19x-38<0$$

$$3x(x-2)+19(x-2)<0$$

$$(x-2)(3x+19)<0$$

$$x-2=0 \quad \Rightarrow x=2$$

$$3x+19=0 \quad \Rightarrow 3x=-19 \quad \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{-19}{3} \Rightarrow x=-\frac{19}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{19}{3}$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $3x+19$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $(x-2)(3x+19)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $(x-2)(3x+19)<0$ | د حل سیټ نه دی | | د حل سیټ | | د حل سیټ نه دی |

(c) ketabton.com: The Digital Library



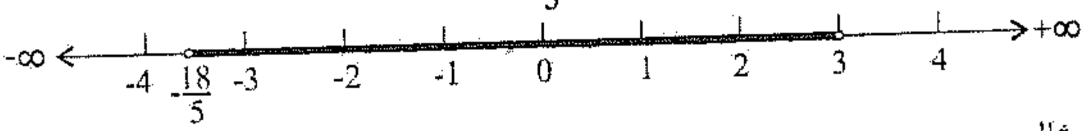
2- د سيټ بلډر په طريقه د دويمه درجه غيرمساوات حلول:

تر تجزيه کولو وروسته د غيرمساوات علامې ته ګورو که د غيرمساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي يو وار دواړه مثبت اوبل وار دواړه منفي فرضوو او که د غيرمساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف العلامه دي په نوبت سره يو مثبت او بل منفي فرضوو.

مثال: $5x^2+3x-54<0$

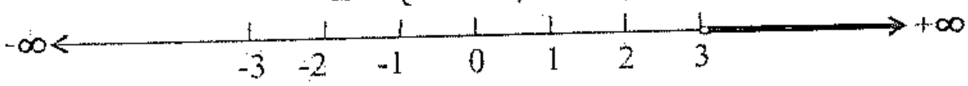
حل:

$$5x^2-15x+18x-54<0$$
$$5x(x-3)+18(x-3)<0$$
$$(x-3)(5x+18)<0$$
$$x-3<0 \Rightarrow x<3$$
$$5x+18>0 \Longrightarrow 5x>-18 \Rightarrow \frac{5x}{5}>\frac{-18}{5} \Rightarrow x>-\frac{18}{5}$$
$$A=\{x / -\frac{18}{5}<x<3\}$$




مثال:

$$3x^2-13x+12>0$$
$$3x^2-9x-4x+12>0$$
$$3x(x-3)-4(x-3)>0$$
$$(x-3)(3x-4)>0$$
$$x-3>0 \qquad \Longrightarrow x>3$$
$$3x-4>0 \qquad \Longrightarrow 3x>4$$
$$\frac{3x}{3}>\frac{4}{3} \qquad \Longrightarrow x>\frac{4}{3}$$
$$A=\{x \in IR / x>3\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library


## تمرين

لاندې دويمه درجه غېرمساوات ونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$
2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$
3. $\frac{3x+1}{x+2} \leq 2x + 3$
4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$
5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$
6. $\frac{x+1}{x} > 2$
7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$
8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$
9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$
10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$
11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$
12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$
13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$
14. $7x^2 + 3x \geq 0$
15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library


# اووم فصل

## پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غیرمشخص مقدار ته وایي

اوپه اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول څخه په غیر یو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر اودغې معادلی ته پارامتریک معادله وایي. لکه:

$$(m+3)x^2+3(m-3)x-19m-6=0$$

### د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلیږي.

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول

2- د پرامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

### 1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولوپه هره طریقه حلید له حلوو یي. مگر ښه او اسانه طریقه یې د محمدبن موسی فارمول دی.

مثال: لاندي پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2+mx-(6m^2+10m+4)=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=m^2-4\{-(6m^2+10m+4)$$

$$\Delta=m^2+24m^2+40m+16$$

$$\Delta=25m^2+40m+16$$

$$\Delta=(5m+4)^2$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{(5m+4)^2}}{2\times1}=\frac{-m\pm(5m+4)}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د $m$ له جنسه پیدا کړئ؟

$$1: (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$$

$$2: (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$$

$$3: (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$$

$$4: x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$$

$$5: x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$$

## 2- د پارامتر د قیمت له مخی د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخی د پارامتر قیمت پیدا کوو اوپه معادله کی یي وضع کوي یومجهوله دویمه درجه معادله لاس ته راځي. دغه معادله حلوو دمعادلی د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کی د جذرو مجموعه $\left(-\frac{7}{2}\right)$ ده په معادله د $(m)$ کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \quad \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow m = 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(m-1)x^2+(2m+1)x-5m=0$$
$$(3-1)x^2+(2\times 3+1)x-5\times 3=0$$
$$2x^2+7x-15=0$$
$$\Delta= b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-15)$$
$$\Delta= 49+120=169$$
$$\Delta= 169$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 13}{4}$$
$$x_1=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$ معادلی دجذرو دضرب حاصل $(-15)$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$x_1x_2=-15$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-15$$
$$\frac{c}{a}=\frac{-4m-3}{m-2}=-15 \Rightarrow -15m+30=-4m-3$$
$$-15m+4m=-3-30$$
$$-11m=-33$$
$$\frac{-11m}{-11}=\frac{-33}{-11}$$
$$m=3$$
$$(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$$
$$(3-2)x^2-(3-1)x-4\times 3-3=0$$
$$x^2-2x-15=0$$
$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2-ac=(-1)^2-1(-15)=1+15=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\acute{\Delta} = 16$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{16}}{1} = \frac{1 \pm 4}{1}$$

$$x_1 = \frac{1+4}{1} = \frac{5}{1} = 5 \qquad \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1-4}{1} = \frac{-3}{1} = -3 \qquad \Rightarrow x_2 = -3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$ په معادله کې $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$ رابطه کې معادله حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}} = \frac{-b}{+c} = \frac{-(-3m)}{9m-1} = \frac{+3m}{9m-1} = \frac{12}{35}$$

$$108m - 12 = 105m$$
$$108m - 105m = 12$$
$$3m = 12$$
$$\frac{3m}{3} = \frac{12}{3} \quad \Rightarrow m = 4$$

$$(m-3)x^2 - 3mx + 9n - 1 = 0$$
$$(4-3)x^2 - 3 \times 4x + 9 \times 4 - 1 = 0$$
$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = (-6)^2 - 1(35) = 36 - 35 = 1$$
$$\acute{\Delta} = 1$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{1}}{1} = 6 \pm 1$$

$$x_1 = 6 + 1 = 7 \quad \Rightarrow x_1 = 7$$
$$x_2 = 6 - 1 = 5 \quad \Rightarrow x_2 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



4- مثال: $(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$ معادلی جذرونه د $(3x_1-1)(3x_2-1)=70$ په رابطه کی صدق کوي د معادلی جذرونه پيدا کړئ؟

حل:

$$(3x_1-1)(3x_2-1)=70$$
$$9x_1x_2-3x_1-3x_2+1=70$$
$$9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1=70$$
$$9\left(\frac{c}{a}\right)-3\left(\frac{-b}{a}\right)=70-1$$
$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right)-3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right)=69$$
$$\frac{45m}{m-1}-\frac{9m+3}{m-1}=69$$
$$\frac{45m-9m-3}{m-1}=69$$
$$\frac{36m-3}{m-1}=\frac{69}{1}$$
$$69m-69=36m-3$$
$$69m-36m=-3+69$$
$$33m=66 \qquad \Rightarrow m=2$$
$$(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$$
$$(2-1)x^2-(3\times 2+1)x+5\times 2=0$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times 1\times 10=49-40=9$$
$$\Delta=9$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7\pm\sqrt{9})}{2\times 1}=\frac{7\pm 3}{2}$$
$$x_1=\frac{10}{2}=5 \ \Rightarrow \ x_1=5$$
$$x_2=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \ \Rightarrow x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


5- مثال: د $(m-4)x^2-mx-5m+1=0$ په معادله کې د معادلې یو جذر (8) دی د $m$ قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$(m-4)8^2-m\times 8-5m+1$$
$$(m-4)64-8m-5m+1=0$$
$$64m-256-13m+1=0$$
$$51m-255=0$$
$$51m=255 \quad \Rightarrow m=5$$

7- مثال: د $m$ په کوم قیمت باندې $(m-2)x^2-(m-3)x-8m-1=0$ معادله دوه مساوي مختلف العلامه جذرونه لري؟

حل:

$$-\{-(m-3)\}=0$$
$$m-3=0 \quad \Rightarrow m=3$$

7- مثال: د $(m)$ قیمت د $(2m-1)x^2-(2m+1)x+2m-4=0$ څخه داسې پیدا کړئ چه د معادلې یو جذر صفر وي؟

حل: هغه وخت د معادلې یو جذر صفر کیږي چه $c=0$ شي

$$-(2m+1)=0$$
$$2m-4=0 \ \Rightarrow 2m=4 \quad \Rightarrow \frac{2m}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$m=2$$

8- مثال: د $(m)$ په کوم قیمت $(2m+1)x^2-(7m+2)x+6m+1=0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چه $\Delta=0$ شي.

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(7m+2)\}^2-4(2m+1)(6m+1)$$
$$\Delta=49m^2+28m+4-48m^2-32m-4$$
$$\Delta=m^2-4m$$
$$\Delta=0 \quad \therefore \ m^2-4m=0 \Rightarrow m(m-4)=0$$
$$m_1=0$$
$$m-4=0 \quad \Rightarrow m=4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


9- مثال: د پهـ $(m)$كومو قيمتو باندې $(m-1)x^2-(2m+2)x+2m-5=0$ معادله دوه معكوس جذرونه لري؟

حل: كله چه $a=c$ شي

$$m-1=2m-5$$
$$m-2m=-5+1$$
$$-m=-4 \quad \Rightarrow m=4$$

10- مثال: د$(m)$ په كومو قيمتونو باندې $(m+1)x^2-mx-4m=0$ معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه لري؟

حل:- كله چه $p<0$ وي

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4m}{m+1}<0$$
$$(m+1)^2\left(\frac{-4m}{m+1}\right)<0\times(m+1)^2$$
$$-4m(m+1)<0$$
$$-4m<0$$
$$\frac{-4m}{-4}>\frac{0}{-4}$$
$$m>0$$
$$m+1>0 \quad \Rightarrow m>-1$$
$$A=\{m\in IR/m>-1\}$$

11- مثال: د $(m)$ په كومو قيمتونو باندې $(m-3)x^2-(m-2)x-2m+8=0$ معادله دوه حقيقي جذرونه لري؟

حل:- كله چه $(\Delta>0)$ تر صفر وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-2)\}^2-4(m-3)(-2m+8)$$
$$\Delta=m^2-4m+4+8m^2-32m-24m+96$$
$$\Delta=9m^2-60m+100=(3m-10)^2$$
$$\Delta>0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3m-10)^2>0$$
$$3m-10>0$$
$$3m>10 \quad \Rightarrow m>\frac{10}{3}$$
$$A=\{m\in IR\ /\ m>\frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د $(m)$ په کوم قیمت د $(m-2)x^2-(m-1)x-5m=0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل:- کله چه $(b\ \&\ c)$ دواړه منفي وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-5)\}^2-4(m-2)(-6m)$$
$$\Delta=m^2-10m+25+24m^2-40m$$
$$\Delta=25m^2-50m+25=(5m-5)^2$$

$$\Delta=(5m-5)^2\Rightarrow\Delta=5m-5\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow5m-5>0\Rightarrow5m>+5\Rightarrow m>1$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\{-(m-5)\pm\sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)}=\frac{m-5\pm(5m-5)}{2(m-2)}$$
$$x_1=\frac{m-5+5m-5}{2(m-2)}=\frac{6m-10}{2m-4}$$
$$x_2=\frac{m-5-5m+5}{2m-4}=\frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د $(m)$ قیمت داسی تعین چه معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه ولري.

1: $x^2-5x-3m+1=0$

2: $(2+3)x^2-mx-25m+4=0$

3: $mx^2-2(m+1)x+m+15=0$

4: $mx^2-(2m+1)x+m=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندې معادلو څخه د $(m)$ قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$

6: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د $(m)$ قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه موهومي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# اتم فصل

## اکسپوننشل (نمائي) معادلی

اکسپوننشل معادلی هغه معادلی دي چه توان یي مجهول وي عمومي شکل یې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د (1) وي یعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزایده ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

داکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو او معلوم دمساوات ښی خواته وړو.لازمی عملیي پری اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسی طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدی یي سره مساوي وي.نو توانونه یي هم مساویدي دلته څو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کی توان مونوم یا بینوم وي نو یو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه یي پیدا کوو

1- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$
$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$
$$2 \times 3^x = 18 \quad \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \quad \Rightarrow 3^x = 9 \quad \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدې یي مساوي دي نو توانونه یي هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$
$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$
$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$
$$3^x\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوؤ.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{3}{5}\left\{3^x\left(\frac{5}{3}\right)\right\} = 45 \times \frac{3}{5}$$
$$3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حده وي قاعدی یي مساوي اود یوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلی په دویمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلی حلوو اود جذرو له مخی یي د اکسپوننشل معادلی جذرونه پیدا کوو.

مثال:

$$3^{2x} - 3^x = 702$$
$$(3^x)^2 - 3^x = 702$$

$3^x = y$ وضع کوو.

$$y^2 - y - 702 = 0$$
$$(y-27)(y+26) = 0$$
$$y_1 = 27$$
$$x_2 = -26$$
$$y_1 = 3^x = 27 = 3^3$$
$$3^x = 3^3$$
$$x = 3$$
$$y_2 = 3^x = -26$$

د اکسپوننشل معادلی دومېن همېشه مثبت وي نود $(y_2)$ د قیمت څخه دمعادلی جذرنه پیدا کیږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حدونه موجود وي او توانونه یي جذري حدونه وي .دغه ډول معادلی هم په دویمه درجه یو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}} = 4 \cdot 3^{\sqrt{9x}} - 3$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$27^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$
$$\left(27^{\sqrt{x}}\right)^2 - 4 \cdot 27^{\sqrt{x}} + 3 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$27^{\sqrt{x}} = y$ وضع کوو.

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$
$$(y-1)(y-3) = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$
$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$
$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$
$$3\sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{9}$$
$$S = \left\{x \in IR / x = 0 \vee x = \frac{1}{9}\right\}$$

4- چه دوه داسې اکسپوننشل معادلې راکړ شويوي چه چپ طرف يې د دوه داسې طاقت لرونکوعددو د ضرب حاصل وي چه قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي دغسې معادلې په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$
$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$
$$2^{x+y} = 2^4$$

$$2^{x+y} = 2^4$$
$$2^{2x+3y} = 2^{15}$$

$$x + y = 4$$
$$2x + 3y = 15$$

$$2(x + y = 4)$$
$$2x + 2y = 8$$
$$\pm 2x \pm 3y = \pm 15$$
$$-y = -7$$
$$y = 7$$
$$x + 7 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x = 4 - 7 = -3$$
$$x = -3$$

## تمرين

1. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$
2. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$
3. $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$
4. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$
5. $\frac{1-2^x}{2^x} = 1$
6. $4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$
7. $5^{2y} - 5^y - 600 = 0$
8. $\begin{aligned} 3^{2x} \cdot 3^{5y} &= 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} &= 243 \end{aligned}$
9. $9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$
10. $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$
11. $\begin{aligned} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} &= 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} &= 1024 \end{aligned}$
12. $\frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$
13. $2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# نهم فصل

## لوګاریتمي معادلی Logarithm's Equation:

لوګاریتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وايي.

او په اصطلاح کی داکسپوننشل معادلو معکوسی معادلی ته لوګارتمي معادله وايي.

فرضاً $(b = a^x)$ یوه اکسپوننشل معادله لرو معکوسه معادله یي لوګاریتمي معادله ده.

چه داسی لیکل کیږي.

$$log_a b = x$$

$a$ ته د $log\, b$ قاعده وايي.

کولای شو چه اکسپوننشل تابع په لوګاریتمي تابع او لوګاریتمي تابع په اکسپوننشل تابع بدله کړو.لکه $(x = 2^3)$ یوه اکسپوننشل تابع ده لوګاریتمي تابع یي عبارت له $(log_2 x = 3)$ څخه ده.

اوهمدا ډول $(log_2 8 = x)$ یوه لوګاریتمي تابع ده اکسپوننشل تابع یي عبارت له $(8 = 2^x)$ څخه ده.

د لوګاریتم خواص:

1- د (1) لوګاریتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کیږي.

$$\begin{pmatrix} log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$$

2- د هر مثبت لوګاریتم په خپله قاعده باندی (1) کیږي $\begin{pmatrix} log_b b =.1 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ دا ځکه چه $(b = b^1)$ کیږي.

مثال:

$$log_x x = 1 \qquad log_8 8 = 1$$

3- د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت دی. $\begin{pmatrix} log_b b^r = r \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ ځکه چه:

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$b^r = b^r$$

4- د یوه حاصل ضرب لوګاریتم په یوه قاعده باندی دضربي عواملو د لوګاریتمو د مجموعی سره مساوي دي په همغه قاعده باندی:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N.$$

$$log_a M = x \qquad M = a^X$$

$$log_a N = y \qquad N = a^Y$$

اکسپونتشل معادلی طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

دچپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a MN = x + y$$

$$log_a MN = log_a M + log_a N$$

1- مثال: ?= $log_2(2x)$ لوګاریتم پیدا کړئ

حل:

$$log_2(2x) = log_2 2 + log_2 x = 1 + log_2 x$$

2- مثال:لاندې لوګاریتم پیدا کړئ؟

$$log_x(xy) = ?$$

$$log_x(xy) = log_x x + log_x y = 1 + log_x y$$

5- د یوه خارج قسمت لوګاریتم په یوه قاعده باندی د صورت او مخرج د لوګاریتمو د تفاضل سره مساوي دی په همغه قاعده باندی.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_A N$$

$$log_a M = x \qquad M = a^x$$

$$log_a N = y \qquad N = a^y$$

اکسپونتشل معادلی طرف په طرف یو پر بل ویشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

د چپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a \frac{M}{N} = x - y = log_a M - log_a N$$

1- مثال: لاندې لوګاریتم حل کړئ؟

$$log_2 \frac{x}{2} = ?$$

$$log_2 \frac{x}{2} = log_2 x - log_2 2 = log_2 x - 1$$

2- مثال:

$$log_x \frac{5x}{y} = log_x(5x) - log_x y = log_x x + log_x 5 - log_x y$$

$$log_x \frac{5x}{y} = log_x(5x) - log_x y = 1 + log_x 5 - log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په بله قاعده ونیول شي لوګاریتم یې عبارت دي توان ضرب یې دهغه لوګاریتم په همغه قاعده.

$$log_b M^r = r\, log_b M$$
$$log_b M = x$$
$$M = b^x$$
$$M^r = (b^x)^r \Longrightarrow M^r = b^{rx}$$
$$log_b M^r = rx$$
$$log_b M^r = r\, log_b M$$

1- مثال:

$$log_3 81^7 = ?$$
$$log_3 81^7 = 7\, log_3 81 = 7\, log_3 3^4 = 4 \times 7\, log_3 3 = 28 \times 1 = 28$$

2- مثال:

$$log_3(3x)^5 = ?$$
$$log_3(3x)^5 = 5\, log_3(3x) = 5(log_3 3 + log_3 x)$$
$$= 5(1 + log_3 x) = 5 + 5\, log_3 x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


7- دیوه عدد لوګاریتم د یوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندی عبارت دي د قاعدی د توان معکوس ضرب یي دهغه عدد لوګاریتم د قاعدی دقاعدی په قاعده.

$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a m$$
$$x = \log_{a^b} M$$
$$(a^b)^x = M$$
$$(a^x)^b = M \qquad \Longrightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Longrightarrow a^x = \sqrt[b]{M}$$
$$x = \log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b}\log_a M$$
$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a M$$

مثال:

$$\log_{16} 32 = ?$$
$$\log_{16} 32 = \log_{2^4} 32 = \frac{1}{4}\log_2 32$$
$$= \frac{1}{4}\log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4}\log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$
$$\log_{16} 32 = \frac{5}{4}$$

دقاعدی د بدلولو فارمول:

که د یوه عدد لوګاریتم په یو ه قاعده غوښتل شوی وي مګر په دغه قاعده باندی د راکړ شوي عدد د لوګاریتم پیدا کول مشکل وي نو د راکړشوي عدد او د لوګاریتم د قاعدی لوګاریتم په یوه بله قاعده باندی پیدا کوو د عدد لوګاریتم د لوګاریتم د قاعدی په لوګاریتم ویشو د راکړ شوي عدد لوګاریتم په را کړشوی قاعده باندی لاس ته راځي.

مثلاً $\log_b M$ غوښتل شوی دی لوګاریتم یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ثبوت: $\log_b M$ په $x$ ښيو.

$$\log_b M = x \qquad \Longrightarrow M = b^x$$
$$\log_a M = \log_a b^x = x\log_a b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_a M = \log_b M \log_a b$$

$$\frac{\log_b M \log_a b}{\log_a b} = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

1- مثال:

$$\log_{27} 81 = ?$$

$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

2- مثال:

$$\log_{32} 128 = ?$$

$$\log_{32} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5}$$

## د لوګاریتم اقسام

لوګاریتم د قاعدي له مخې په دوه قسمه دی.

1- اعشاري لوګاریتم یا معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

2- طبعي لوګاریتم *Natural logarithm*

### 1- اعشاري لوګاریتم:

که د لوګاریتم قاعده (10) وه دی لوګاریتم ته اعشاري لوګاریتم وایي.

$$\log x$$

### 2- طبعي لوګاریتم:

هغه لوګاریتم دی چه قاعده يي $(e)$ وي.

څرنګه چه د دواړو قسمو قاعدې معلومې دي نو قاعده يي نه لیکل کیږي.

$$\ln x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## دیوه عدد د لوګاریتم پیداکول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غیر د نورو عددو لوګاریتم دوه برخې لري.یوه برخه یې صحیح او بله برخه یې اعشاري ده .صحیح برخې ته کرکترستیک ($Characteristic$) او اعشاري برخې ته یې مانتیس ($Mantesa$) وایي .کرکترستیک د محاسبې پواسطه او مانتیس د جدول او یا د حساب د ماشین پواسطه پیدا کیږي.که دطاقت لرونکي عدد قاعده لس وي یوازې کرکترستیک لري او مانتیس نه لري

-1 مثال: ?= $log(1000000)$ څو دی؟

$$log(1000000) = log\,10^6 = 6$$

کرکترستیک د ارقامو د شمیر څخه یو کم وي.

-2 مثال: ?= $log(0.000000001)$ څو دی؟

$$log(0.000000001) = log\,10^{-9} = -9$$

کرکترستیک یې د اعشاریې د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمیر سره مساوي دی او علامه یې منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه ؤ نو دغه عدد مانتیس او کرکترستیک دواړه لري.لکه $log(4560000)$ د داسې عدد د لوګاریتم د پیدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلوو چه یو رقم یې صحیح او نور رقمونه یې اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمیر ته ګورو عدد اوه رقمي دی نو په ($10^6 = 1000000$) کې یې ضربوو په دې ترتیب کولای شو چه کرکترستیک یې پیدا کړو.

$$log(4560000) = log(4.56 + 10^6) = log\,4.56 + log\,10^6 = log\,4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکترستیک دی.مانتیس یې د ($log\,4.56$) څخه لاس ته راوړو.طریقه یې داسې ده چه (6) د درې رقمي عددو د لوګاریتمي دجدول په پورتنۍ کرښه کې پیدا کوواو (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پیداکوو او د مخکیني لیکل شوي عدد شاته یې لیکو بیا کرکترستیک ته ګورو که مثبت ؤ نو د کرکترستیک په اندازه د جدول څخه د پیدا شوي عدد مخې ته صفرونه ږدو. اوکه کرکترستیک منفي ؤ د پیدا شوي عدد شاته د اعشاریې د علامې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

$$log(4560000) = log\,4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$
$$log(4560000) = 6.6590$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او مانتیس يي مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسر یي بدلوو او د مخکیني سوال په څېر یي حلوو

مثال: $log(0.00567)$ پیداکړئ؟

حل:

$$log(0.00567) = log(5.67 \times 10^{-3}) = log\,5.67 + log\,10^{-3}$$
$$= log\,5.67 - 3 = 0.3690 - 3$$

د راکړشوي عدد لوګاریتم $(0.3690 - 3)$ دی مګر که وغواړو چه د کرکترستیک او مانتیس څخه یو عدد جوړ کړو نود کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی$(\bar{3}.3690)$ او که وغواړو چه مانتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او دمانتیس څخه یي منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$
$$log(0.00567) = 0.3690 - 3 = \bar{3}.3690 = -2.6310$$

تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000
2- $log\,5890000$
3- $log\,69200$
4- $log\,73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- $log\,0.00234$
2- $log\,0.0598$
3- $log\,0.000568$
4- $log\,0.008$

د صفر لوګاریتم:

$$0 = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty}$$
$$log_{10}\,0 = -\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## انتي لوګاریتم:

هر عدد د خپل لوګاریتم انتي لوګاریتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $anti\ log\ 3 = 1000$ دی.

## انتي لوګاریتم پیدا کول:

مانتیس په جدول کی پیدا کووهغه عدد چه د مانتیس په ستون کی لیکل شوی دي لیکو بیا هغه عدد د مانتیس په کرښه کی دی په لسیز او سلیز مرتبو کی لیکو کرکترستیک ته ګوروکه مثبت ؤ کرکترستیک د عدد د ارقامو دشمېر څخه یو کم دی یعنی تر کرکترستیک یو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستیک منفي و نو دعدد شاته د کرکترستیک په اندازه د اعشاریي دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$antilog(2.3690) = ?$$
$$anti\ log(0.3690) = 2.338837239$$
$$anti\ log(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$anti\ log\ \bar{6}.3710 = ?$$
$$anti\ log\ 0.3710 = 2.35$$
$$anti\ log(\bar{6}.3710) = 0.00000235$$

تمرین:

1- $anti\ \ log(3.4581)$  2- $anti\ log(\bar{2}.6589)$

4- $anti\ log(0.7551 - 4)$  3- $anti\ log(-4.2907)$

د لوګ( $log$) اولن ($ln$) پیدا کول یو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول لیکو:

$$log_b\,M = \frac{log_a\,M}{log_a\,b}$$
$$log_b\,M \cdot log_a\,b = log_a\,M$$

د $(a)$ په عوض $(10)$ او د $(b)$ په عوض $(e)$ لیکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$log_e M \cdot log_{10} e = log_{10} M$$
$$ln M \cdot log\, 2.72 = log\, M$$
$$ln M \cdot 0.4343 = log\, M$$

مثال: $(ln\, 6.73 = 1.9066)$ دی $(log\, 6.73)$ پیدا کړئ؟

حل:

$$log\, M = ln\, M \cdot 0.4343$$
$$log\, 6.73 = ln\, 6.73 \cdot 0.4343$$
$$log\, 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$
$$log\, 6.73 = 0.8280$$

د $log$ څخه د $ln$ د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوی په (0.4343) ویشو.

$$\frac{ln\, M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{log\, M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343} log\, M$$
$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$
$$ln\, M = 2.3026 \cdot log\, M$$

مثال:

$$ln\, 563 = ?$$
$$ln\, 563 = log\, 563 \cdot 2.3026$$
$$ln\, 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

## انترپولېشن Interpolation:

انترپولېشن په نوي عبارت باندی د یوی موضوع بیانولو ته وایي.

او په اصطلاح کی انترپولېشن هغه عملیه ده چه د هغه عددو لوګاریتم پیدا کوي چه لوګاریتمي جدول یي ترتیب شوی نه وي طریقه یي داسی ده چه عدد لیکو مانتیس یي په یوه حرف ښیو د راکړشوي عدد څخه لاندی باندی عددونه په دری رقمي عدد کی پیدا کوو او لیکویي او مانتیس یي د جدول څخه لیکو په دی ترتیب شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي بیا د دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کی څلور عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د مانتیس سره یي جمع کوود راکړشوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال:- $log$ 4567 پیدا کړئ؟

$$0.01\left[0.007\begin{pmatrix} log\,4.57 & 0.6599 \\ log\,4.567 & m \\ log\,4.56 & 0.6589 \end{pmatrix}d\right]0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007}=\frac{d}{0.0010}\Longrightarrow d=\frac{0.01\cdot 0.0010}{0.007}=\frac{10}{7000}=\frac{1}{700}=0.00143$$

$$d=0.00143$$
$$m-0.6589=0.00143$$
$$m=0.00143+0.6589=0.6603$$
$$log\,4567=3.6603$$

## دانتر پولېشن پواسطه د انتي لوګاریتم پیدا کول:

د انتي لوګاریتم د پیدا کولو لپاره مانتیس په جدول کی لټوو که په جدول کی نه ؤ نو د دغه مانتیس انتي لوګاریتم په یوه حرف ښیو د مانتیس څخه لاندی باندی مانتیسونه په جدول کی پیدا کوو په نتیجه کی شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یې مجهول وي بیا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدلیږي. چه یو به یې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پیدا کوو اود کوچني عدد د انتي لوګاریتم سره یې جمع کوو د راکړشوي لوګاریتم انتي لوګ لاس ته راځي.

مثال:- دیوه عدد لوګاریتم (3.7351) دی انتي لوګ یې پیدا کړئ؟

$$0.01\left[d\begin{pmatrix} 5.44 & 0.735 \\ m & 0.7352 \\ 5.43 & 0.7348 \end{pmatrix}0.0004\right]0.0008$$

$$\frac{0.01}{d}=\frac{0.0008}{0.0004}$$

$$d=\frac{0.0004\cdot 0.01}{0.0008}=\frac{4}{800}=\frac{1}{200}=0.005$$
$$m-5.43=d$$
$$m=d+5.43$$
$$m=0.005+5.43$$
$$m=5.435$$

## کولوګاریتم $Cologarthm$:

د یوه عدد د معکوس لوګاریتم ته د هغه عدد کولوګاریتم وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً $(a)$ او $\left(\frac{1}{a}\right)$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $\left(\frac{1}{a}\right)$ لوګاریتم د $(a)$ د کولوګاریتم په نوم نوم یادیږي.

$$co\log a = \log\frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a$$
$$co\log a = -\log a$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوګاریتم دهغه عدد منفي لوګاریتم دي.

## د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه:

د لوګاریتمي معادلو په حلولو کی د لوګارتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$\log_a(x+6) - \log_a(x+2) = \log_a x$$
$$\log_a\frac{x+6}{x+2} = \log_a x$$
$$\frac{x+6}{x+2} = x$$
$$x^2 + 2x = x + 6$$
$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 1\times(-6) = 1 + 24 = 25$$
$$\Delta = 25$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2\log x} = 10x$$
$$\log x^{2\log x} = \log 10x$$
$$2\log x \times \log x = \log 10x \Longrightarrow 2\log^2 x = \log 10 + \log x$$
$$2\log^2 x - \log x - 1 = 0$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$log\, x = y = y_1 = 1$$

$$log_{10}\, x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \qquad x_1 = 10$$

$$log_{10}\, x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$log_{10}\, x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{log(35 - x^3)}{log(5 - x)} = 3$$

$$3\, log(5 - x) = log(35 - x^3)$$

$$log(5 - x)^3 = log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$log_5\left(log_{10}\sqrt{x^2 + 19}\right) = 0$$

$$log_{10}\sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt{x^2+19}\right)^2 = 10^2$$
$$x^2 + 19 = 100$$
$$x^2 = 100 - 19 = 81$$
$$x^2 = 81$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$
$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$log_3 x + log_9 x + log_{27} x = 5.5$$
$$log_3 x + log_{3^2} x + log_{3^3} x = 5.5$$
$$log_3 x + \frac{1}{2} log_3 x + \frac{1}{3} log_3 x = 5.5$$
$$log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$
$$log_3 x \left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \qquad \Rightarrow \frac{11}{6} log_3 x = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$
$$log_3 x = 3$$
$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$log_2(11x - 1) = 5$$
$$11x - 1 = 2^5$$
$$11x = 32 + 1 = 33$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$
$$x = 11$$

7- مثال:

$$log_3(2^x - 7) = 2$$
$$2^x - 7 = 2$$
$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$x = 3$

8- مثال:

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$
$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$
$$5^2 = (x^3)^2$$
$$x^3 = 5$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{5}$$

9- مثال:

$$\log_{10}\sqrt{x+1} + \log_{10}\sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$
$$\log_{10}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$
$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$
$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$
$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 1 = 25 \quad \Longrightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$
$$x^2 = 26 \quad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

10- مثال:

$$\log(x^2 - 1) - \log(x+1) = \log 2$$
$$Log\frac{x^2-1}{x+1} = \log 2$$
$$\frac{x^2-1}{x+1} = 2 \quad \Longrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 \qquad \Longrightarrow x - 1 = 2\ , \quad x = 3$$

11- مثال:

$$x^{\log_{10} x} = 10$$
$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$
$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow \log^2{}_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow x = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


12- مثال:

$$\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$$

$$\frac{x+1}{x-1} = 3^1 \quad \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \quad \Rightarrow x+1 = 3x-3$$

$$x - 3x = -3 - 1 \quad \Rightarrow -2x = -4 \quad \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

13- مثال:

$$\log_4(3x-3) = \log_2 3$$

$$\log_{2^2}(3x-3) = \log_2 3$$

$$\frac{1}{2}\log_2(3x-3) = \log_2 3$$

$$\log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$

$$\sqrt{3x-3} = 3 \quad \Rightarrow \sqrt{(3x-3)}^2 = 3^2$$

$$3x - 3 = 9 \quad \Rightarrow 3x = 9 + 3 = 12 \Rightarrow\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

14- مثال:

$$\log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \log_2 4$$

$$\log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \log_2 2^2 \Rightarrow \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2\log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$

$$\log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7$$

$$\frac{1}{x} = 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

15- مثال:

$$\log\sqrt{x} + \log x^{\frac{3}{2}} = \log 100$$

$$\log\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3} = \log 100 \Rightarrow \log\sqrt{x\cdot x^3} = \log 100$$

$$x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 10$$

16- مثال:

$$\log_{(x^2-x+4)}(x^2+5x-1) = 1$$

$$x^2 + 5x - 1 = x^2 - x + 4 \quad \Rightarrow 5x - 1 = -x + 4$$

$$\Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



17- مثال:

$$log_9 3 \cdot log_2 x = 1$$
$$log_{3^2} 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} log_3 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot log_2 x$$
$$= log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

x^(1/2)=2^1⟹x^(1/2)=2⟹(x^(1/2) )^2=2^2⟹ x=4

18- مثال:

$$log_3 log_2(x-1) = 2$$
$$log_2(x-1) = 3^2 \Longrightarrow x - 1 = 2^9 \Longrightarrow x = 2^9 + 1$$
$$= 513 \Longrightarrow x = 513$$

19- مثال:

$$log_{10} x = \frac{log_3 12}{log_3 10}$$
$$log_{10} x = log_{10} 12$$
$$x = 12$$

20- مثال:

$$3^{log_4 16} = 27^x$$
$$3^{log_4 16} = 3^{3x}$$
$$log_4 16 = 3x \Longrightarrow 16 = 4^{3x} \Longrightarrow 2^4 = 2^{6x} \Longrightarrow 6x = 4 \Longrightarrow x = \frac{4}{6}$$
$$x = \frac{2}{3}$$

تمرین:

لاندې معادلې حل کړئ؟

1) $x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

2) $\log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$

3) $\log(x-3) = 1 - \log x$

4) $\ln(y+1) = \ln(y-7) + \ln 4$

5) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6) $log_2 x + log_3 x = 1$

7) $log_3 x + log_5 x = log_{10} 15$

8) $log^2{}_2 (x-1)^2 - log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} log_3 x + log_3 y = -3 \\ log_{10} x^3 - log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} log_4 x - log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



# لسم فصل

## توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وایي.

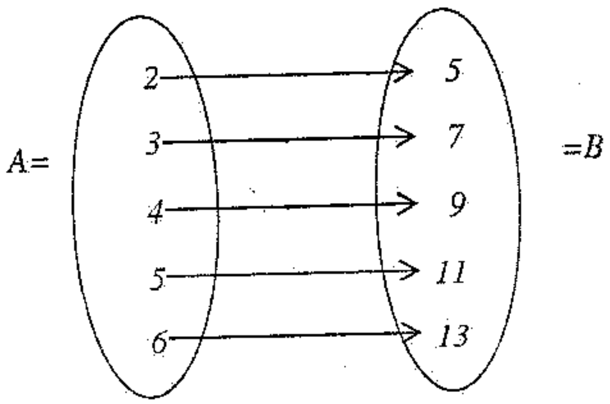
او په اصطلاح کې که د $(A)$ او $(B)$ دوه داسې سیټونه ولروچه د $(A)$ دسیټ هر عنصر د $(B)$ د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطی ته تابع وایي.

لکه: $A = (2,3,4,5,6)$ او $B = (5,7,9,11,13)$

سیټونه د لاندې رابطی پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطی ته تابع وایي.




په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه ،د قیمتونو سیټ اویا ډومېن $(Domain)$ وایي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ ، رنج $(Range)$ او کوډومېن $(Codomain)$ وایي.

رنج : د تعریف د ناحیې د عناصرو دتصویرونو سیټ ته رنج وایي.

کوډومین: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومېن وایي.

کله کله د ډومېن ټول عناصر د کوډومېن د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دی صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومېن دی.لکه پورتنې سیټونه .

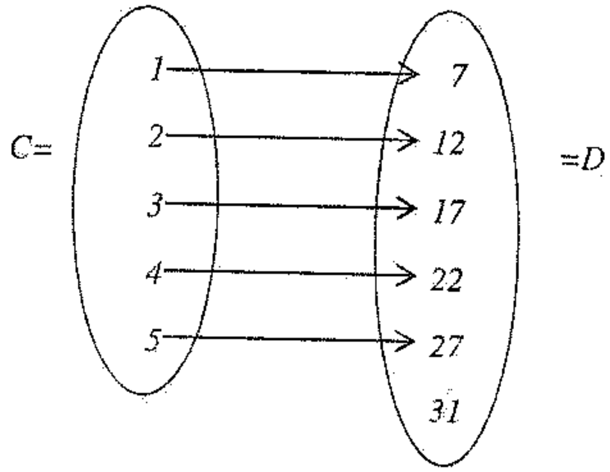
او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدی صورت کې د دویم

(c) ketabton.com: The Digital Library


سیټ هغه عناصر چه د اول سیټ د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیټ یا رنج بلل کیږي.
او د دویم سیټ ټول عناصر د کوډومېن په نوم یادیږي.

$$C = (1,2,3,4,5)$$

$$D = (7,12,17,22,27,31)$$




په دغه حالت کې د رنج او کوډومېن تر منځ لاندې رابطه موجوده ده.

$$Range \subseteq Codomain$$

## د تابع اقسام:

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع         2- ترانسندنتل تابع

### 1- ناطقه تابع:

خطي تابع ، دویمه درجه تابع او هوموګرافیک تابعګانې ناطقې تابعګانې دي.

$a$- خطي تابع:

هغه تابع ده چه ګراف یې مستقیم خط وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = ax + b$$

$$y = mx + b$$

$(a)$ او $(b)$ ثابت عددونه دي $(x)$ متحول دی $(y)$ د $(x)$ تابع دی. $a$ او $m$ دواړه یو شی دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## دخطي تابع د تعريف ناحيه :

د خطي تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی په $(IR)$ سره يي ښيي يعني:

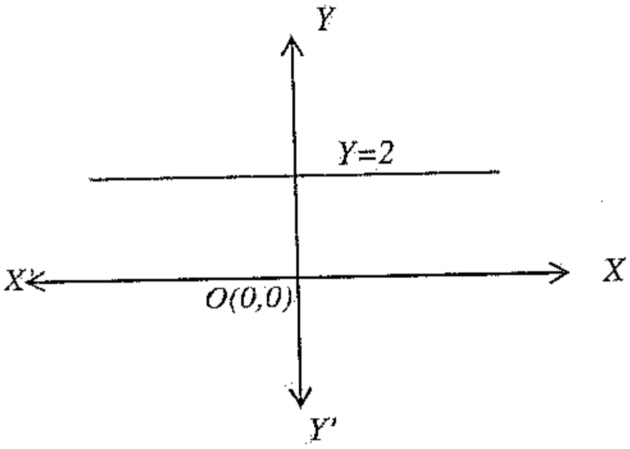
$$IR = (-\infty , +\infty)$$

د خطي تابع ميل د $(x)$ ضريب يعني $(m)$ دی.

## خصوصي حالتونه:

1- که په يوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابته تابع وايي.ګراف يي د $X\acute{X}$ د محورسره موازي دی.

مثال:- $Y = 2$ ګراف رسم کړئ؟




2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

$$y = mx + b \Longrightarrow 1.x + 0 = x$$

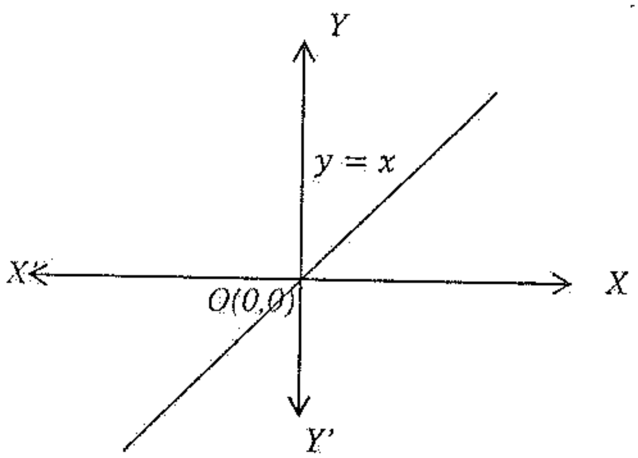
$$y = x$$

دغې تابع ته د عينيت تابع وايي ګراف يي اوله او دريمه ربعه نيمايي کوي .

مثال:- $y = x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library


## دخطي تابع د عمومي شکل د ګراف ترسیم:

1- د $X\acute{X}$ محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $X = 0$ فرضوو.

پیدا شوي نقطې وصلوو د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع ګراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کیږي نود $(YY')$ د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

2- $y = 0$ فرضوو نو:

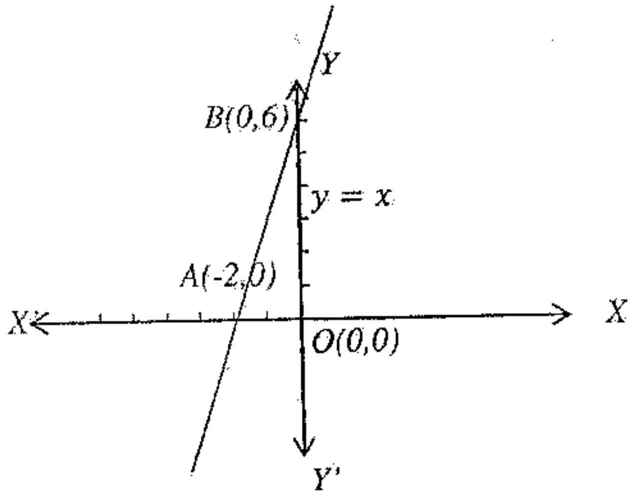
$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د $(XX')$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده د وضعیه کمیتونو د محورونو په مستوي کې یې د وضعیه کمیتونو د محورونو پر مخ یې پیدا کوو او و صلوو یې غوښتل شوی ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

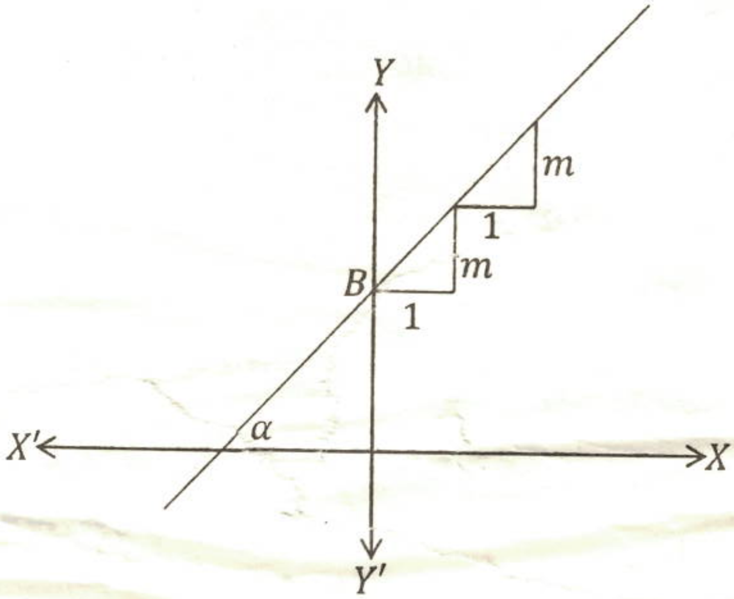

## د مستقيمې کرښې مېل:

د مستقيمې کرښې مېل د هغه زاويې تانجانت دی چه مستقيمه کرښه يي د $X\acute{X}$ د محور سره جوړوي.

په عمومي صورت د متحول ضريب د مستقيمې کرښې مېل دی.ددی خبری دثبوت لپاره د وضعيه کميتونو په مستوي کې د وضعيه کميتونو محورونه د $(\Delta)$د مستقيم پواسطه قطع کوو چه د $Y\acute{Y}$ محور د $B$ په نقطه کې قطع کړي او $X\acute{X}$ د محور سره د $(\alpha)$ په اندازه زاويه جوړه کړي بيا د $X\acute{X}$او $Y\acute{Y}$ د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د $(m)$ په اندازه توټې را بېلو او د $(\alpha)$ د زاويې تانجانت پيدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقيمې کرښې مېل دی. $\alpha$

$$tan\,\alpha = \frac{m}{1} = m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

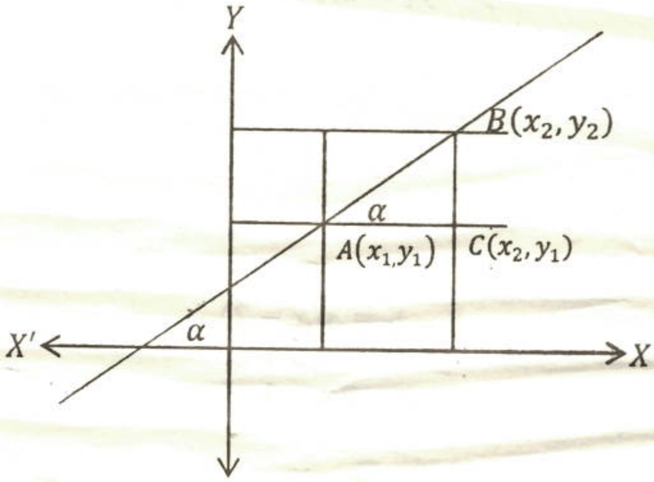

## دمیل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطی د مستقیمی دوه نقطی دي

د $(A)$ او $(B)$ د نقطو څخه د $X\acute{X}$ او $Y\acute{Y}$ د محورو سره موازي خطونه رسمو چه یو

او $B(X_2, Y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د $ABC$

په مثلث کې د $\alpha$ دزاویي تانجانت پیدا کوو.



(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ دیوی مستقیمی کرښی دوه نقطی دي مېل يي پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-9}{-2-5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقیمی کرښې معادله چه مېل او يوه نقطه يي معلومه وي:

د مستقیمی کرښی عمومي معادله ليکو.

$$y = mx + b \ldots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د يوې مستقیمی کرښی يوه نقطه ده په عمومي معادله کې يي وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \cdots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطی څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{c} y = mx + b \\ \underline{\pm y_1 = \pm m x_1 \pm b} \\ y - y_1 = mx - mx_1 \end{array}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمی کرښی معادله پيدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = 3(x - 2)$$

$$y = 3x - 6 + 5$$

$$y = 3x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیمی کرښی د معادلی پیدا کول چه دوه نقطی یي معلومی وي:

د هغه مستقیمی کرښی معادله لیکو چه مېل او یوه نقطه یي معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د $(m)$ په عوض یي قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمی کرښی معادله پیدا کړئ چه دوه نقطی یي $A(-4,14)$ او $B(4,8)$ وي.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)}\{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4}(x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8}(x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}(x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

## محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یي د تقاطع نقطی معلومی وي.

معادله یي په لاندي ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د $X\acute{X}$ دمحور سره یي د تقاطع نقطه $A(a,0)$ ده او د $Y\acute{Y}$ سره یي د تقاطع نقطه $B(0,b)$ ده دا نقطی په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطی یي معلومی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} - \frac{ay}{-ab} = \frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: د يوې مستقيمې کرښې دوه نقطې $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله يې پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{2x + y}{10} = 1$$

$$y = -2x + 10$$

تمرين:

1- په لاندې ډول د کرښونقطې راکړ شويدي مېل يې پيدا کړئ؟

1- $A(3,5)$ , $B(4,-11)$ 2- $C(9,3)$ , $D(2,7)$

3- $E(9,3)$ , $F(3,-5)$

2- په لاندې ډول د مستقيمې کرښې يوه نقطه او مېل راکړشوی دي معادله يې پيدا کړئ؟

1- $A(5,4)$ , $m = 4$ 2- $B(5,8)$ , $m = 2$

3- $C(-3,7)$ , $m = \frac{1}{2}$

3- په لاندې ډول دمستقيمې کرښې دوه نقطې راکړ شويدي معادله يې پيدا کړئ؟

1: $A(3,4)$ , $B(6,2)$ 2: $C(8,12)$ , $D(4,-7)$

3: $E(2,-1)$ , $F(3,-4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- په لاندې ډول د محورېنوسره د مستقیمې کرښې د تقاطع نقطې راکړشویدي محوري معادلې يي پيدا کړئ؟

1- $A(4,0)$ , $B(0,8)$ 2- $C(3,0)$ , $D(0,12)$
3- $E(8,0)$ , $F(0,24)$

جفته تابع :

که يوه تابع د او لېپاره يو شان وي دی تابع ته جفته تابع وايي. لکه $y = x^2$ چې:

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

يعنې:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع :

هغه تابع ده چه او لېپاره يو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چه د $(x)$ او لېپاره يو شان نه ده يعني د $(x)$ لېپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لېپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو $f(x) \neq f(-x)$ نو دغه تابع طاق تابع ده.

معکوسه تابع:

دوه تابعګانې هغه وخت يو د بل معکوسې دي چه د يوې ډومېن دبلې کوډومېن وي او کوډومېن دبلې تابع ډومېن وي .

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د $(x)$ قيمت د $(y)$ له جنسه پيداکوو اوبيا د $(x)$او $(y)$ ځايونه بدلوو معکوسه تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پيدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$
$$3x = y + 7$$
$$x = \frac{y + 7}{3}$$
$$y = \frac{x + 7}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## مرکبه تابع:

هغه تابع ده چه متحول یې د بل متحول تابع وي یا دا چه د تابع ،تابع ته مرکبه تابع وایي.

که وغواړو چه د دوه تابعګانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو یوه تابع په بله تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.مرکبه تابع لاس ته راځي او داسی لیکل کیږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعګانی راکړشویدي $fog$ او $gof$ پیدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x^2 - 1)^2 - 5 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 5$$
$$= 27x^2 - 18x + 1 - 5$$

$$gof = 27x^2 - 18x - 4$$

## د مرکبې تابع د تعریف ناحیه

د مرکبې تابع د تعریف ناحیه د اولی تابع د تعریف د ناحیې د هغه عناصرو سیټ دی چه په مرکبه تابع کې تصویر ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعګانې لرو چې $domf(x) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، $hof$ او $foh$ او ډومېنونه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h(\sqrt{4x - 1}) = (\sqrt{4x - 1})^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \qquad ; \ domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$$

(c) ketabton.com: The Digital Library 

$$foh = f\{h(x)\} = f\left(x^2+\frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)-1} = \sqrt{4x^2+4\times\frac{1}{4}-1}$$
$$= \sqrt{4x^2+1-1}$$
$$foh = 2x \quad ; \quad domf\{h(x)\} = IR$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو معکوسې تابعګانې پیدا کړئ؟

1- $y = 4x - 3$ 2- $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$

3- $y = x - \frac{1}{2}$ 4- $y = 5x - 8$

د لاندې تابعګانو ترکیب او دومېنونه پیدا کړئ؟

1- $f(x) = 3x - 4 \;,\; g(x) = \sqrt{3x^2+4}$

2- $f(x) = x^2 + 1 \;,\; h(x) = \sqrt{x}$

## پولینومي تابعګانې

څو شاخه اي تابعګانو ته پولینومي تابع وايي.لکه

$$y = \begin{cases} x+1 & : x < -2 \\ x+3 & : x > 2 \\ x-1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$y = x + 3 \quad : x > 2$

| x | 3 | 4 |
|---|---|---|
| y | 6 | 7 |

$y = x + 1 \quad : x < -2$

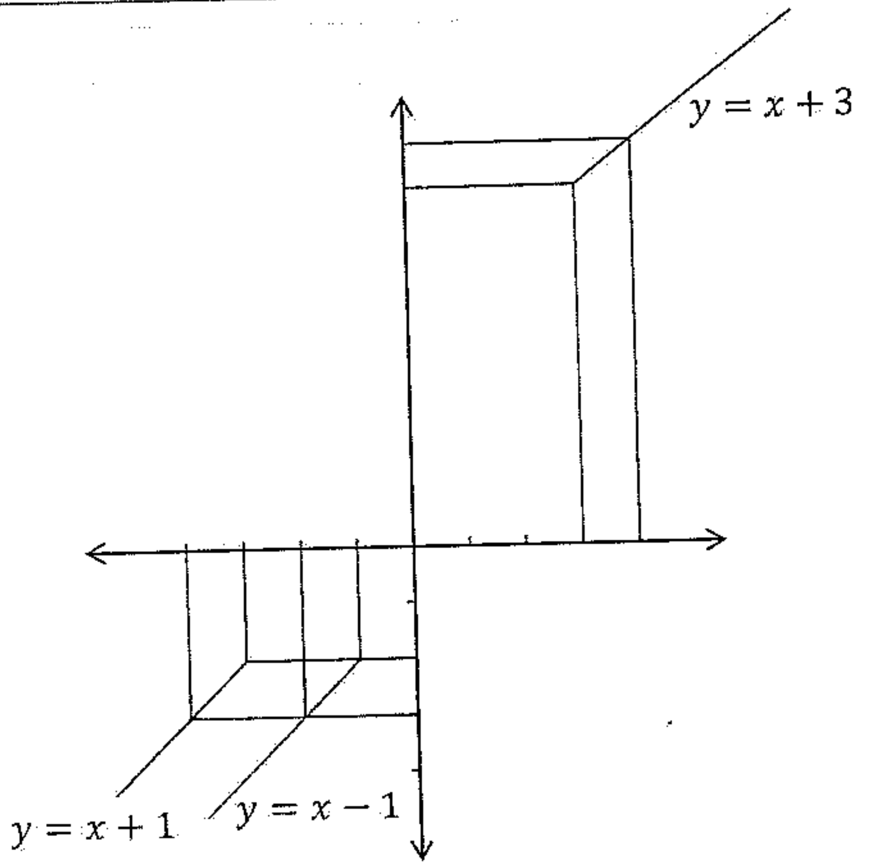
| x | −4 | −3 |
|---|---|---|
| y | −3 | −2 |

$y = x - 1 \quad : x < 1$

| x | −2 | −1 |
|---|---|---|
| y | −3 | −2 |

(c) ketabton.com: The Digital Library






## تمرين

د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

$$1\text{-}\ y = \begin{cases} x + 2 & : \ x > 3 \\ x - 2 & : x < 3 \end{cases}$$

$$2\text{-}\ y = \begin{cases} x - 1 & : \ x > 2 \\ x + 1 & : \ x < 2 \\ x + 2 & : \ x > 5 \end{cases}$$

$$3\text{-}\ y = \begin{cases} x + 4 & : \ x < 2 \\ x - 1 & : x > 0 \end{cases}$$

$$4\text{-}\ y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : \ x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : \ x > 6 \end{cases}$$

$$5\text{-}\ y = \begin{cases} x + 4 & " \ x < 3 \\ x - 4 & " \ x > 3 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# يوولسم فصل

## دويمه درجه تابع

دويمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه يي دوه وي.

عمومي شكل يې دا دی.

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

$a$، $b$ او $c$ ثابت عددونه دي او $(x)$ متحول دی او $(y)$ د $(x)$ تابع دی.

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه:

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی او په $IR$ سره يي ښيي. د تعريف ناحيي ته د قيمتونوسيټ او ډومين $(Domain)$ هم وايي.

د دويمه درجه تابع گراف:

د دويمه درجه تابع گراف ته پارابول وايي.

که په دويمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع گراف اصغري نقطه لري اود پارابول خوله پورته خواته خلاصيږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله کښته خواته خلاصيږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس $(Vertex)$ وايي.

د دويمه درجه تابع د گراف ترسيم:

د دويمه درجه تابع د گراف ترسيم په دری حالته کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د گراف ترسيم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د گراف ترسيم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



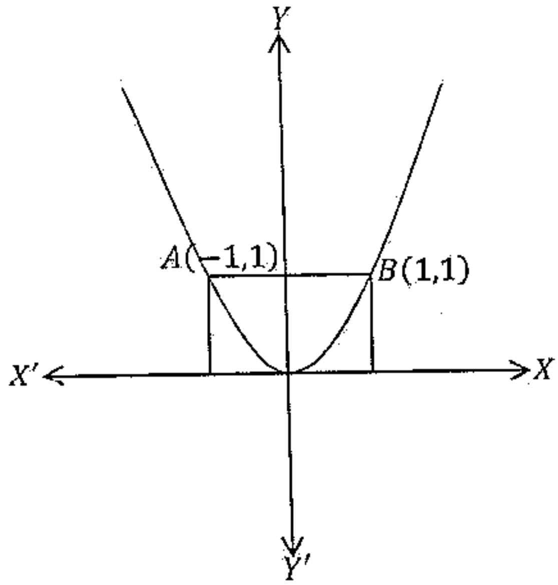
1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسیم:

$x$ ته ځو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو. بیا د تابع د ګراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال:- د $y = x^2$ ګراف رسم کړئ؟

$x$ ته ځو قیمتونه ورکوو او د $y$ قیمتونه پیدا کوو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو:

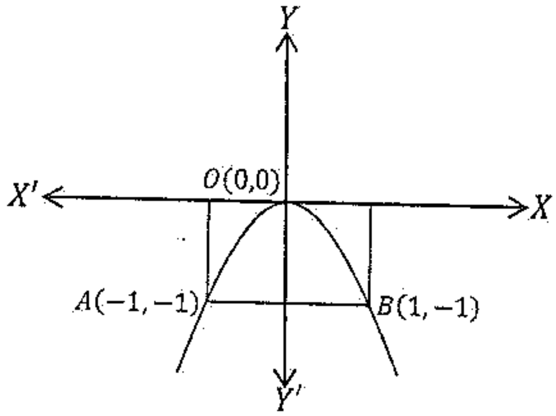
| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |



(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال:- د $y = -x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |




نوټ:

که $(a < 1)$وي نو د تابع ګراف پلن او سورور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع ګراف نري او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$ 2- $y = 2x^2$ 3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$ 5- $-\frac{2}{3}x^2$

## د ګراف انتقال:

د $(X\acute{X})$ او $(Y\acute{Y})$ په محورو باندې د تابع د ګراف حرکت ته د تابع دګراف انتقال وايي.

1- د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع د ګراف انتقال :

که وغواړو چه د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع ګراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو او ګراف یې رسموو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (3) په اندازه چپې او ښی خواته انتقال ورکړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

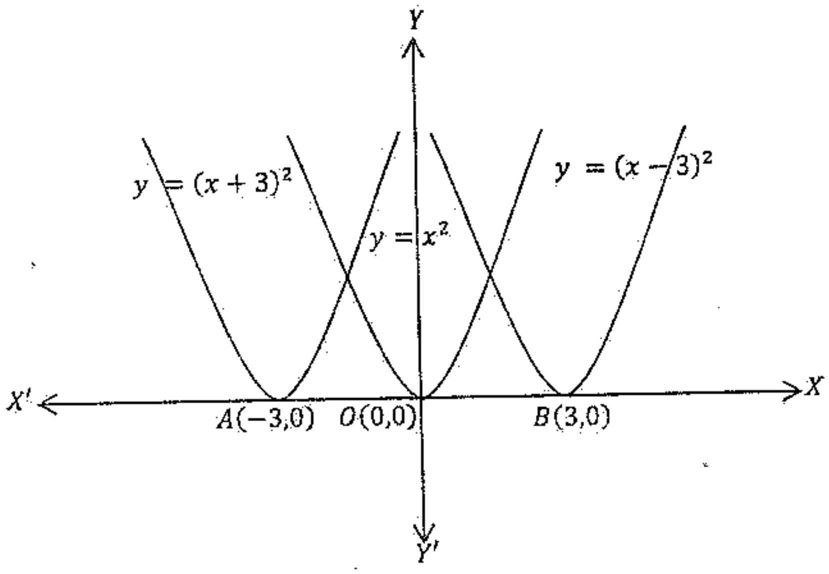


حل: چپې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکوو نو 3 ورسره جمع کوو.

$$y = (x+3)^2$$
$$x+3=0$$
$$x=-3$$
$$A(-3,0)$$

ښي خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y=(x-3)^2$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$




-2 د $YY'$ په محور باندې د تابع د ګراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د $(y\acute{y})$ په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه ګراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو(2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

... تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $y = 0$ فرضوو

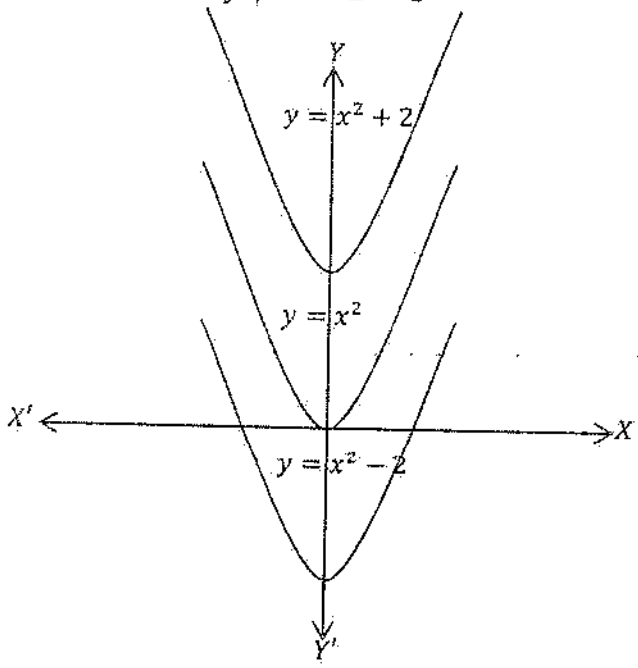
$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

د ګراف د ښه ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتیجه کې $y = 2$ کیږي چه د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | 2 | 3 |




تمرین:

لاندې تابعګانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع ګراف ته د (3) په اندازه ښي او چپې خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع ګراف ته د $\left(\frac{3}{2}\right)$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسیم:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطي يې عبارت دي.

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-C}{A}}, 0\right)$$

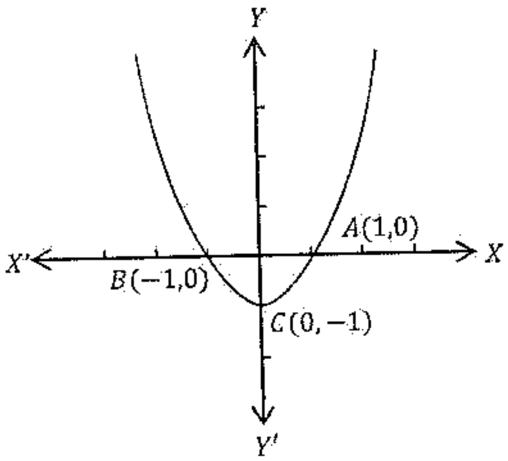
2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له $M(0, C)$ دغه نقطه د تابع د ګراف راس هم دي.

د $(A)$ نقطه د $(C)$سره او د $(C)$ نقطه د $(B)$ سره وصلوو د تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $xx'$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(1,0) \qquad B(-1,0)$$

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. چې $y = -1$ کیږي نو د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0,-1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $xx'$ د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

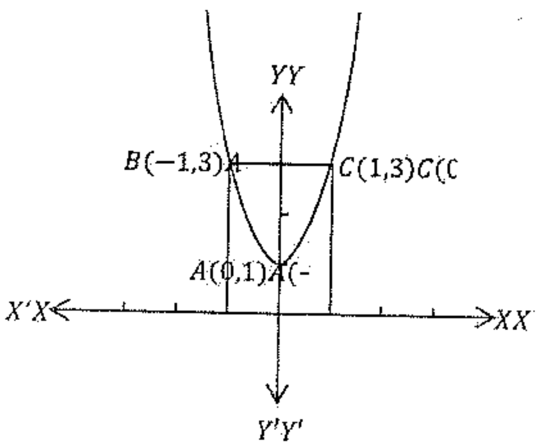
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمت پیدا کوو.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $0$ | $2$ |

$B(-1,2) \qquad O(0,1) \qquad C(1,2)$



(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

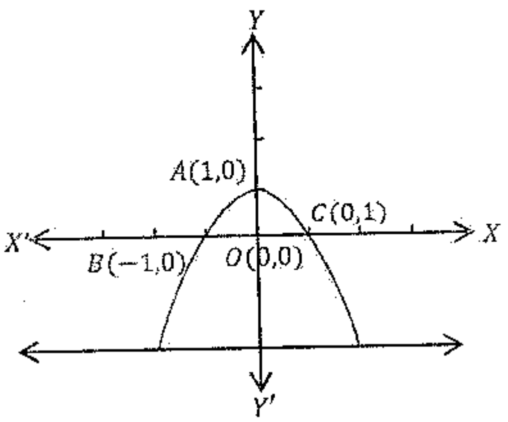
حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 + 1 = 0$$
$$-x^2 = -1$$
$$x^2 = 1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$
$$A(1,0) \qquad B(-1,0)$$

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د گراف نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کیږي د تقاطع نقطه يي عبارت ده.

$$C(0,1)$$




مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 - 1 = 0$$
$$-x^2 = 1$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځکه چه منفي عدد جذر نلري نو د تابع ګراف د $(XX')$ محور نه قطع کوي.

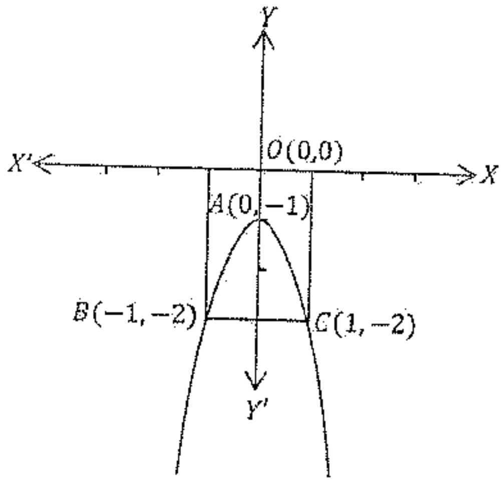
2- د $YY'$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$ نو د $X$ د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0, -1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمت پیدا کوو.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-2$ | $-1$ | $-2$ |

$B(-1, -2)$ $O(0,0)$ $C(1, -2)$




3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ د تابعګانو د ترسیم طریقه:

1- د $(XX')$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $(y = 0)$ فرضوو، په نتیجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله لاس ته راځي . د دغه معادلې د حل لپاره د $(\Delta)$ قیمت پیدا کوو د $(\Delta)$ په باب درې حالته موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه یې د $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي او د تقاطع نقطې یې عبارت دي له : $B(X_2, 0)$ او $A(X_1, 0)$

b- که $(\Delta = 0)$ وي معادله یو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي $x = \frac{-b}{a}$ نو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له : $A(x, 0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c- كه $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع كوي.په دغه حالت كې د پاره ددې چه د $(Y\acute{Y})$ د محور يوى او بلى خواته دګراف خط السير تعين شي نو $(x)$ ته يو منفي او يو مثبت قيمت وركوو اود $(y)$ قيمتونه پيدا كوو د $(Y\acute{Y})$ د محور يوى او بلى خواته دوه نقطى لاس ته راځي چه د تابع د ګراف خط السير تعينوي.

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحورسره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا كوونو $x = 0$ فرضوود $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع دګراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع د ګراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

كه $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \qquad \therefore \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

كه $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ كيږي.نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


که $0 < a$ وي بيا هم $0 > \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کيږي مګر $0 > a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کيږي. دواړه خواو څخه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{4ac-b^2}{4a}<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ او $x=\frac{-b}{2a}$ شي نو $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ کيږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y=2x^2-3x-2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د د قاطع نقطه پيدا کوو نو $y=0$ فرضوو.

$2x^2-3x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25$

$\Delta=1$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm5}{2\times2}=\frac{3\pm5}{4}$

$x_1=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2 \quad \therefore\ x_1=2$

$x_2=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \quad \therefore\ x_2=\frac{-1}{2}$

نو د محور سره د ګراف د د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(2,0) \qquad B\left(\frac{-1}{2},0\right)$$

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y=0$ فرضوو. نو $y=6$ کيږي. نو

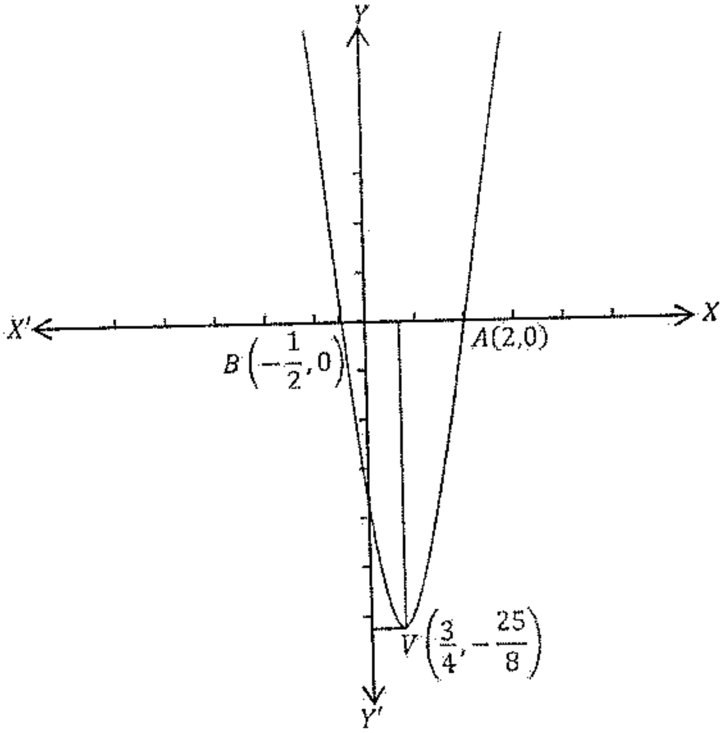
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0,-2)$

د تابع د ګراف د راس نقطه پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{4\times2\times(-2)-(-3)^2}{4\times2}=\frac{-16-9}{8}=-\frac{25}{8}\right)$$

$$V\left(\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$$



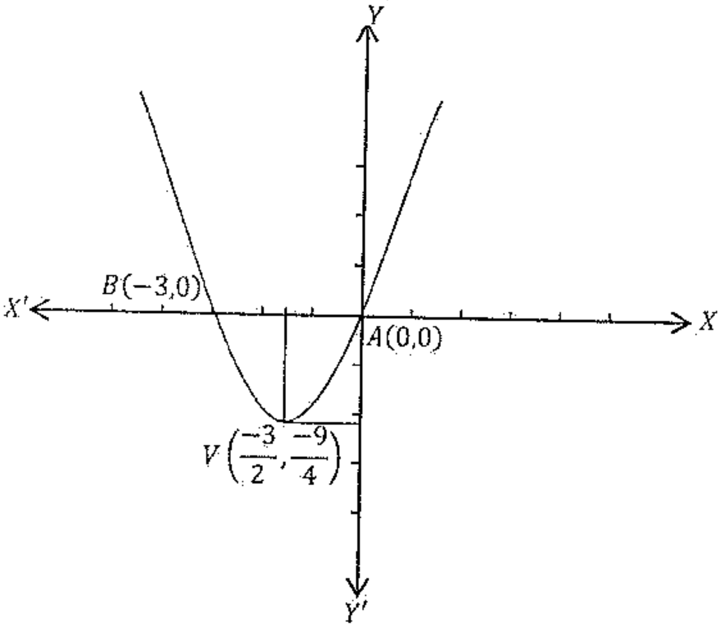

مثال: $y=x^2+3x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

$y=0$
$x^2+3x=0$
$x(x+3)=0$
$x_1=0$
$x_2=-3$
$A(0,0)\qquad B(-3,0)$

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{4\times1\times0-3^2}{4\times1}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-9}{4}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ گراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad : \quad x_1 = 1 \qquad A(1,0)$$

$$X_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad : \quad x_2 = 3 \qquad B(3,0)$$

2- $x = 0$ فرضوو نو:

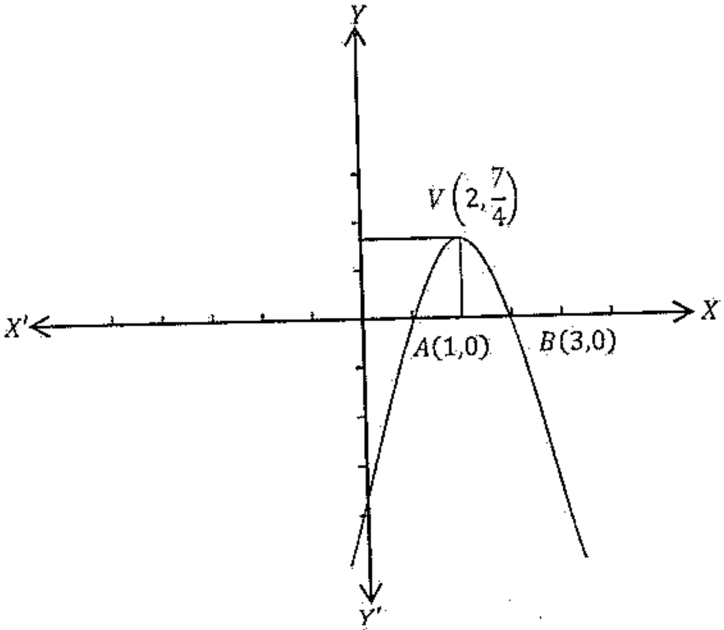
$$y = -3 \qquad C(0, -3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


اصغري او اعظمي ټکي يې پيدا کوؤ:

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-4}{-2},\frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right)=\left(2.\frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2,\frac{7}{4}\right)$$




مثال: $y=x^2+2x+1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y=0$ فرضوو نو:

$$x^2+2x+1=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times1=4-4=0$$
$$\Delta=0$$

معادله يو جذر لري

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

$A(-1,0)$

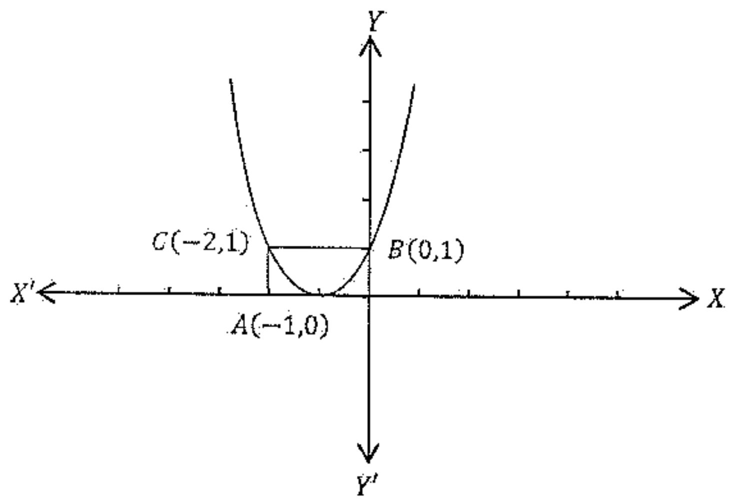
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $x = 0$ فرضوو نو:

$$y = 1$$
$$B(0,1)$$

| $x$ | $-2$ |
|---|---|
| $y$ | $4$ |

$$C(-2,1)$$




## تمرين:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2 + 6x$

2- $5x^2 - 13x + 6$

3- $4x^2 - 4x + 1$

4- $-x^2 + 5x - 6$

5- $-2x^2 - 3x + 14$

6- $3x^2$

7- $4x^2 + 8x$

8- $6x^2 + x - 57$

9- $11x^2 - 13x - 18$

10- $2x^2 - 6x$

11- $2x^2 + x - 21$

12- $-x^2 + 4$

13- $11x^2 - 13x - 18$

14- $3x^2 - x - 10$

15- $5x^2 + 2x - 51$

16- $-9x^2 + 17x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## هوموگرافيک تابع

هغه تابع ده چه د بېنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي.عمومي شکل يې دا دې.

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} \qquad \text{زوږنصاب}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{نوی نصاب}$$

$a$، $b$، $c$ او $d$ ثابت عددونه دي $(x)$ متحول دی او $(y)$ د $(x)$ تابع دی.

مجانب $Asymptotes$ :

که د يو مستقيم او يوه منحني ترمنځ فاصله په لايتناهي$(\infty)$ کې صفرشي دا مستقيم ددی منحني مجانب دی.

مجانب په دری قسمه دی.

1- عمودي مجانب $Vertical\ Asymptotes$

2- افقي مجانب $Horiztil\ Asymptotes$

3- مايل مجانب $Slant\ or\ oblique\ Asymptotes$

1- عمودي مجانب :

هغه خط چه د $(x)$ په فاصله باندی د $(Y\acute{Y})$د محور سره موازي رسميږي د تابع د گراف عمودي مجانب بلل ميږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کوود عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$cx+d=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx = -d$$
$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال:- د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Longrightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب :

هغه خط چه د $(y)$ په ترتیب د $(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسمیږي د تابع د ګراف افقي مجانب دی.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرج ویشو خارج قسمت یې په $(m)$ ښیو او باقي په $(p)$ ښیو نو لیکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه یې مساوي دي نو صورتونه یې هم مساوي دي.

$$ax + b = mcx + md + p$$
$$a = mc \Longrightarrow m = \frac{a}{c}$$

دباقي د پیدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md + p = b \Longrightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc - ad}{c}$$
$$p = \frac{bc - ad}{c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: د $h(x) = \frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانده پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{8}{4} = 2$$
$$m = 2$$
$$p = \frac{bc - ad}{c} = \frac{-3 \times 4 - 8(-9)}{4} = \frac{-12 + 72}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

3- مایل مجانب *Slant or Oblique Asymptotes*:

که د یوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زیاته وي دغه ډول تابعګانی مایل مجانب لري او د مجانب د معادلی د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ویشو.

مثال: د $g(x) = \frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب ، افقي مجانب،مایل مجانب یې پیدا کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$

افقي مجانب نلري، مایل مجانب معادله یې دا ده.

$$\frac{6x^2 - 24}{x + 2} = 6x - 12$$

د هوموګرافیک تابع د ګراف ترسیم:

1- عمودي مجانب پیدا کوو او رسموویې.

2- افقي مجانب پیدا کوو او رسموو یې.

3- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف دتقاطع نقطه پیدا کوو.

4- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو.

5- د ګراف د ښه دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو.

6- پیدا شوی نقطی دوضعیه کمیتونود محورونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو یې د راکړ شوی تابع ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال: د $f(x)=\frac{2x+4}{x-2}$ د تابع گراف رسم کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x=-\frac{d}{c}=-\left(\frac{-2}{1}\right)=\frac{2}{1}=2$$

افقي مجانب:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$$

د $(X\acute{X})$ سره تقاطع پیدا کوونو $(y=0)$ فرضوو:

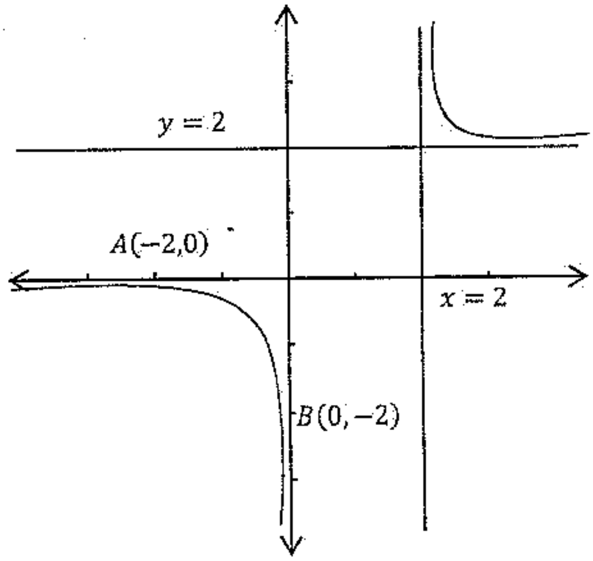
$$\frac{2x+4}{x-2}=0$$
$$(x-2)\left(\frac{2x+4}{x-2}\right)=0(x-2)$$
$$2x+4=0$$
$$2x=-4$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{-4}{2}$$
$$x=-2 \qquad \therefore \quad A(-2,0)$$

د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x=0$ فرضوو.

نو $y=-2$ کیږي او د تقاطع نقطه یې: $B(0,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library






تمرين:

دلاندي تابعګانو ګراف رسم کړئ

$1: G(x) = \frac{4x-3}{2x+1}$ $\quad 2: F(x) = \frac{2x-6}{3x+6}$ $\quad 3: h(x) = \frac{3x+9}{x-6}$

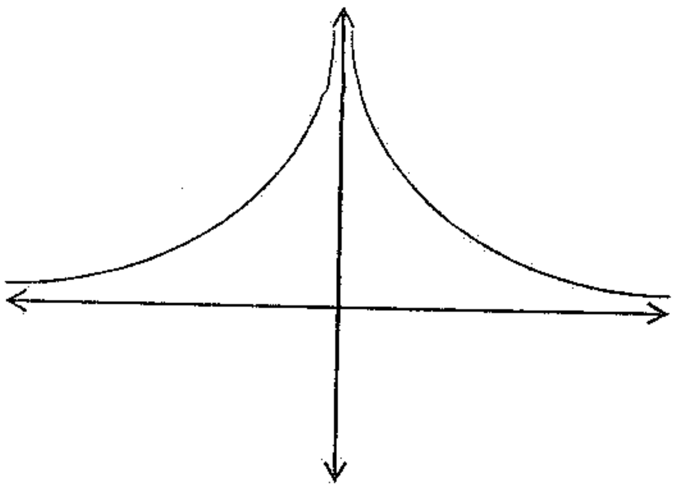
مثال: د $y = \frac{1}{x^2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ |

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right) \quad B(-1,1) \quad C(1,1) \quad D\left(2,\frac{1}{4}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$
2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$
3) $h(x) = x^2 - 9$
4) $y = 6^x$
5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

## اکسپوننشل تابع $Exponintiol\ function$:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یې په توان کې وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = a^x$$

$a$ ثابت عدد دی $(x)$ متحول دی او $(y)$ د $(x)$ تابع دی.

که $(a > 1)$ وي تابع متزایده ده او که $(a < 1)$ وي نو تابع متناقصه ده.

د تعریف ناحیه یې د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یې د مثبت اعدادو سیټ دی. د ګراف د ترسیم لپاره یې $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیتونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یې د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

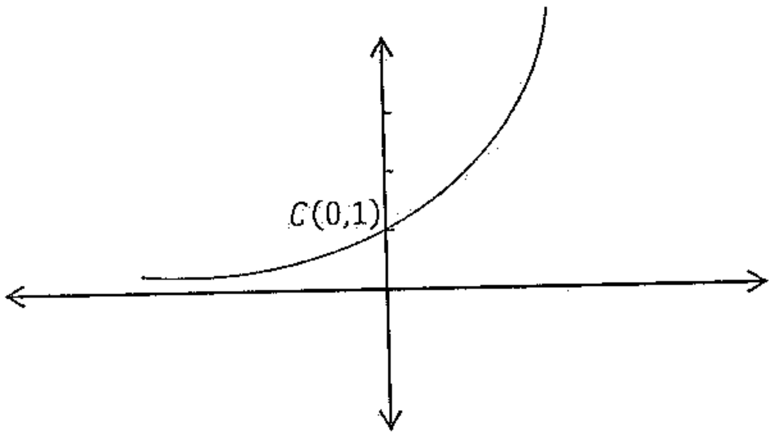


مثال: $y = 2^x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ $C(0,1)$ $D(1,2)$ $E(2,4)$



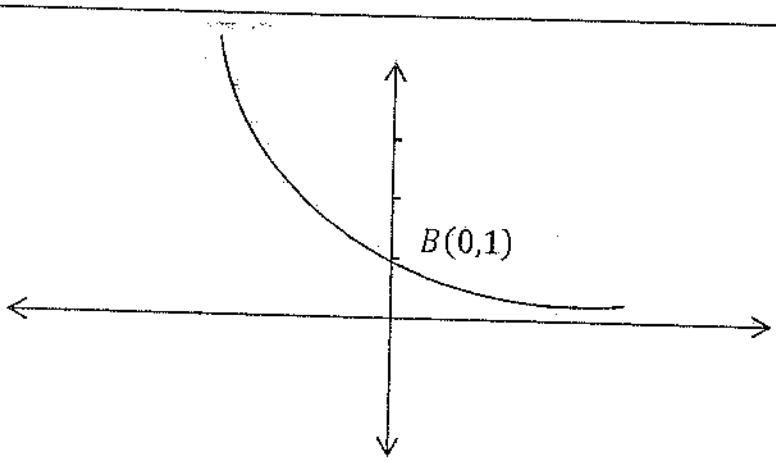

مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

$A(-1,2)$ $B(0,1)$ $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $D\left(2,\frac{1}{4}\right)$ $E\left(3,\frac{1}{8}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library




تمرين:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

$1- y = 3^x$    $2- y = 5^x$    $3- y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$4- \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$5- y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$    $6- y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$    $7- y = 5^x$

$8- y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

## لوګاریتمي تابع $Logarithmical\ functions$:

لوګاریتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعریف ناحیه یې د مکمل اعدادو سیټ دې او د تصویرونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ دی. ګراف یې په اوله او څلورمه ربعه کې رسمیږي.

د ګراف د ترسیم لپاره $x$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $y$ قیمت پیدا کوو.

مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

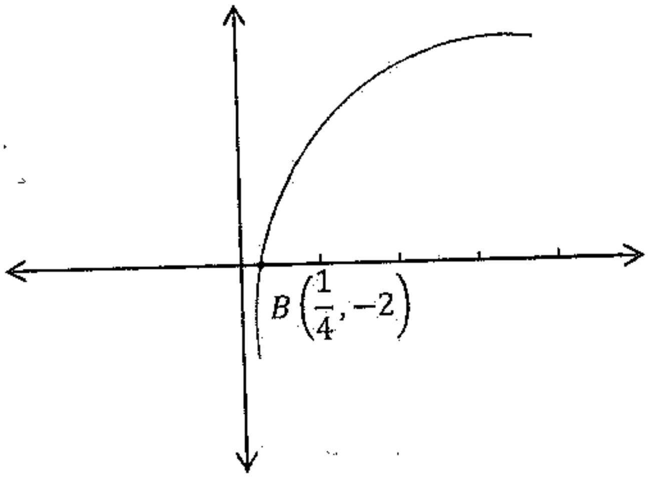
| $x$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| $x$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |

$A\left(\frac{1}{8},-3\right)$ $B\left(\frac{1}{4},-2\right)$ $C\left(\frac{1}{2},-1\right)$ $D(1,0)$ $E(2.1)$ $F(4,2)$




## تمرین

دلاندي تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $\log_3 x = y$

2- $log_2 x = y$

3- $log_4 x = y$

4- $\log_5 x = y$

5- $log_2 x = y$

6- $\log_8 x = y$

7- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

8- $y = 3^{2x}$

9- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# دولسم فصل

## ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټرسایکل باندی یو په بل پسی سپرېدلو ته وایي. او په اصطلاح کې د یوی قاعدی لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وایي.

لکه: 2,7,12,17,22

یا لکه: 5,15,75,375,1875

که د ردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7 , 21 , 63 ,189,567

او که د ردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه:

1, 5, 9, 13, 17 ...

دغیر معین ردیف په اخر کې درې نقطې لیکې.

ردیف په دری قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونیکي ردیف *Harmonecal Sequences*

1- حسابي ردیف :

هغه ردیف دی چه هر وروستني حد يي د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه کې لاس ته راځي. او یا دا چه د دوه عددو تفاضل یي ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په $(a_1)$ او مشترک تفاضل په $(d)$ او دحدونو شمېر په $(n)$ ښیو نو فارمول یي په لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که د ضریب ته متوجه شود $(d)$ ضریب د حدو تر شمېر یو کم دي نو که د حدونو شمېر $(n)$ وي نو د $(d)$ ضریب به $(n-1)$ وي فارمول یې په لاندې ډول دی.

$$a_1\ , a_1+d\ , a_1+2d\ , a_1+3d\ , a_1+4d, \ldots +(n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد $(30)$ دي مشترک تفاضل یې $(17)$ دی $(51)$ حد یې څو دی؟

$a_1 = 30$
$d = 17$
$n = 51$
$a_{51} = ؟$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{51} = 30 + (51-1)17 = 30 + 50 \times 17$$
$$a_{51} = 30 + 850 = 880$$
$$a_{51} = 880$$

د $(d)$ ، $(a_1)$ او $(n)$ فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: دیوه حسابي ردیف اول حد $(15)$ دي $(31)$ حد یې $(585)$ دي مشترک تفاضل یې پیدا کړئ؟

$$d = \frac{585-15}{31-1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي ردیف منځني حد دطرفینو اوسط دي.

مثال:- د یوه حسابي ردیف $(50)$ام حد $(1973)$ دی مشترک تفاضل یې $(40)$ دی اول حد یې څو دي؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = 1973 - (50-1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$
$$a_1 = 13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (17) او اخري حديي (2117) دی او مشترک تفاضل يي (21) دی د حدونو شمېر يي پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

## حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوویعنی په $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ کی دداخل شوي حدونه په $(m)$ ښیواودوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض يي لیکو د $(d)$ قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \quad \Longrightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال:- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ.

حل :

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

$3 \ , \ 9.4 \ , \ 15.8 \ , \ 22.2 \ , \ 28.4 \ , \ 35$

تمرین:

لاندې عبارتي سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



2- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه یې منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي ردیف:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد یې د مخکیني حد سره دیوه ثابت عدد د ضربیدو په نتیجه کې په لاس راغلې وي یا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل یې ثابت وي. لکه:

$$2,8,32,128,512 \ ...$$

د هندسي ردیف اول حد $(a_1)$ په مشترک نسبت یې په $(r)$ ښیي.

د هندسي ردیف فارمول:

هغه ردیف دی چه هر وروستنی حد یې د مخکیني حد سره د یوه ثابت عدد د ضربېدو په نتیجه کې لاس ته راغلی وي او یا دا چه د دوه حدو تفاضل یې ثابت وي. لکه:

$$3, 12, 48, 192, 768$$
$$5, 10, 20, 40, 80, 160 \cdots$$

د هندسي ردیف فامول:

اول حد یې په $(a_1)$ او مشترک فصل په $(r)$ او ورستنی حد په $(a_n)$ ښیو نو .

$$a_1, a_x r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د $(r)$ توان ته ځیر شو د $(r)$ توان د حدو د شمېرڅخه یو کم دې نوکه دحدونو شمېر $(n)$وي نو د $(r)$ توان به $(n-1)$ وي. نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \dots \dots a_1 r^{n-1}$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یې $r = 3$ دې اوم حد $(a_7)$ یې څو دې؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د $(a_1)$او $(r)$قیمتونه د لاندې فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دې مشترک نسبت یې $(r = 2)$ دی اول حد یې څو دې؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دی اوم حد یې $(5832)$ دی مشترک نسبت یې پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 10)$ دی $(n)$ ام حد یې $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یې $(2)$ دې د حدونو شمیر یې څو دی؟

حل :

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Longrightarrow 128 = 2^{n-1} \Longrightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Longrightarrow n = 7 + 1 = 8 \Longrightarrow n = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



1- د يوه هندسي رديف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څويم حد يي $\frac{1}{16}$ دي؟

$a_1 = 2 \qquad a_1 r^{n-1} = a_n$

$a_2 = 1 \qquad 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$

$r = \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a_n = \frac{1}{16} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$n = ? \qquad n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \quad \Rightarrow n = 6$

د هندسي رديف خصوصيات:

1- په هندسي رديف کې هر حد دطرفينو د حاصل ضرب جذردي.

مثال: (3, 6,12,24,24 ) د يوه هندسي رديف حدونه دي نو ليکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \qquad and \qquad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په يوه هندسي رديف کې اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدو د شمېر په توان رفع شي او دويم جذر يي ونيول شي د رديف دټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال :-لکه (2, 6, 18, 54) يو هندسي رديف دی نو د دويم خاصيت سره سم ليکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$
$$11664 = 11664$$

3- که يو هندسي رديف طاق حدونه ولري نو د منځني حدمربع يي د اول او اخر حدو د حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) يو هندسي رديف دی نو د دريم خاصيت سره سم ليکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$
$$400 = 400$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## په هندسي ردیف کې د حدو داخلول:

که د یوه هندسي ردیف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه یې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي ردیف دفارمول څخه د $(r)$ قیمت پیدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمېر $(n)$ اوتر دخول وروسته د حدو شمېر $(m+2)$ دی نو د $(n)$ په عوض په فارمول کې $(m+2)$ لیکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د یوه هندسي ردیف دوه حدونه $(3)$ او $(96)$ دي څلور نور حدونه یې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \qquad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3,6, 12 ,24 , 48 , 96

مثال: درې داسې عددونه پیدا کړئ چه دویم حد یې د اول حد څخه د $(3)$ په اندازه او دریم حد یې د دویم حد څخه د $(6)$ په اندازه زیات وي او یو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x+9}{x+3} \Longrightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9$$

$$9x = 6x + 9 \Longrightarrow 9x - 6x = 9 \Longrightarrow 3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Longrightarrow x = 3$$

$$x = 3 \qquad x + 3 = 6 \qquad x + 6 = 9$$

### 3- هارمونیکي ردیف:

د حسابي ردیف معکوس ته هارمونیکي ردیف وایي. مثلاً لاندې ردیف یوحسابي ردیف دی لکه:

(2,4,6,8 ,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دغه رديف معکوس رديف عبارت له $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ څخه دی دغه رديف ته هارمونيکي رديف وايي.

مثال: په يوه هارمونيکي رديف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d = -3$ دی ترادف يې جوړ کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{4}-3\ ,\frac{1}{4}-6\ ,\frac{1}{4}-9\ ,\frac{1}{4}-12\ ,\cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1-12}{4}\ ,\frac{1-24}{4}\ ,\frac{1-36}{4}\ \cdots$$

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{-11}{4}\ ,\frac{-23}{4}\ ,\frac{-35}{4}\ \cdots$$

د هارمونيکي رديف حسابي اوسط:

$\frac{1}{a_{n-1}},\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n+1}}$ د هارمونيکي رديف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونيکي اوسط پيدا کړئ

حل: $a_n = \frac{2(2\times 8)}{2+8} = \frac{32}{10} = 3.2$

(c) ketabton.com: The Digital Library


سلسلی Series:

د ردیف د حدونو مجموعی ته سلسله وایي.

سلسلی په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله Arithmetc Series

2- هندسي سلسله Geometric Series

1- حسابي سلسله :

د حسابي ردیف د حدونو مجموعی ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلی فارمول:

د سلسلو مجموعه په $S_n$ ښیي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسی لیکو چه اخر حد یي په سر کی راشي بیا یي د ولنی مجموعی سره جمع کوو.

$$\begin{aligned} S_n &= \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \cdots + a_1 \\ S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\} \\ \hline 2S_n &= \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\} \end{aligned}$$

$$2S_n = n\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلی عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بېل، بېل ولیکو نو لاندی فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(d = 6)$ دی د $(20)$ حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



حل:

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$
$$S_{20} = 10(128) = 1280$$
$$S_{20} = 1280$$

مثال: د يوه حسابي رديف اول حد $(a_1 = 11)$ او يوپنځوسم حد يې $(a_{51} = 10761)$ دی د $(51)$ حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{51} = \frac{51}{2}(11 + 311) = \frac{51}{2}(11 + 411) = \frac{51}{2}(422) = 51 \times 261 = 10761$$
$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کې $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قيمتونه دحسابي په عمومي فارمول کې وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په يوه ټولګي کې 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره يوه دويم شاګرد سره دوه په همدې ترتيب تر اخره روپۍ دي وواياست چه د ټولو سره څو روپۍ دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کی $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلی په عمومي فارمول کی وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n+2) = \frac{n}{2}\times 2(n+1)$$
$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدی ترتیب تر اخره مرسته کړی وي وواياست چه ټولو به څو روپۍ ورکړی وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$
$$S_{100} = 100(100+1) = 100\times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کی اول حد (1) اومشترک تفاضل یي (2) دی دغه عددونه د حسابي سلسلی په عمومي فارمول کی وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2}\cdot 2n = n^2$$
$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$
$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد یې د حدونو په شمېرکی ضرب شي دحدونو مجموعه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال : د يوه حسابي رديف د حدونو شمېر 41 او منځني حد يې 145 دي د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او اخر حدو مجموعه د منځني حد د دوه چند سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

مثال: د يوه حسابي رديف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځني حد يې $a_5 = 27$ دی د اول اخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

دريمه تبصره:

کله، کله د څو اولو حدو او په همغه شمېر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او اخر حد معلوم نه وي. د اول او اخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m}$$

$m_1$ د شپږو اولو حدو مجموعه او $m_2$ د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او $(m)$ د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي رديف $n$ حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل:

$S_{m_1} = 62$

$S_{m_2} = 482$

$m = 19$

$S_{19} = ?$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$
$$S_{19} = \frac{19}{2}(136) = 1292$$
$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله Geometric Series:

د هندسي رديف د حدونو مجموعی هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلی فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

دواړه خواوی په $(r)$ کی ضربوو اوبيا (I) رابطه ورڅخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \cdots + a_1r^n \ldots\ldots\ldots II$$
$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1r \pm a_1r^2 \pm a_1r^3 \pm \cdots \pm a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$
$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$
$$\frac{S_n(r-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$
$$S_n = \frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$$

دغه سلسلی ته متزايده سلسله وايي.

مثال: د يوی هندسي سلسلی $a_1 = 5$ او مسترک نسبت يي $r = 3$ دي د $n = 7$ حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7-1)}{3-1} = \frac{5(2187-1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$S_7 = 5465$

(c) ketabton.com: The Digital Library



او که د $I$ رابطې څخه $II$ رابطه منفي کړو نو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسلې ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي رديف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يې $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{32-1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$S_5 = 15.5$

مثال: د يوې هندسي سلسلې د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يې 5 دی مشترک نسبت يې څو دی؟

حل:

$a_1 = 8$

$S_8 = 120$

$n = 4$

$r = ?$

$$120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | −14 | 2 |
| | 2 | 6 | 14 | |
| 1 | 3 | 7 | 0 | |

$r = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


## د هندسي سلسلې پواسطه په عام کسر باندې داعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلې فارمول لیکو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

په دغه فارمول کې $(r^n \to 0)$ صفر کیږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ کیږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چه اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\overline{3}$ اعشارکسردی . په عام کسر یې بدل کړئ؟

حل:

$a_1 = o.\overline{3} = \frac{3}{10}$

$r = \frac{1}{10}$

$n = \infty$ $\qquad S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10\times 3}{10\times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$S_n = ?$ $\qquad S_n = \frac{1}{3}$

مثال: $0.8\overline{3}$ اعشار کسر دی په عام کسر یې بدل کړئ؟

حل:

$a = \frac{8}{10}$

$a_1 = \frac{3}{100}$ $\qquad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10-1}{10}}$

$r = \frac{1}{10}$ $\qquad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10\times 3}{100\times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$

$S_n = ?$ $\qquad S_\infty = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## تمرين

1- د (20)او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پيدا کړئ چه لمړی رقم يي (3) وي؟

2- يو ديوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنګونه وهي وواياست چه په شواروز کی څو زنګونه وهي؟

3- د يوه حسابي رديف ددری حدومجموعه (33) او د ضرب حاصل يي (1287) دی عددونه يي پيدا کړئ؟

4- د يوه حسابي رديف د څلورو حدومجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه يي (214) ده عددونه پيدا کړئ؟

5- د يوه حسابي رديف څلورو حدو دضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل يي (2) دی عددونه پيدا کړئ؟

6- (3003) کسان په يوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی يو نفربيا دوه بيا دری.......په همدی ترتيب تر اخره ولاړ دي وواياست چه څو قطارونه جوړوي؟

7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟

8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟

9- $a$ , $b$ او $c$ په کوم شرط په يوه حسابي رديف کی شامل دي؟

10- د يوه رديف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنيو حدو د ضرب حاصل يي(285) دی عدونه پيدا کړئ؟

11- (3) او (243) د يوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟

12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دريم او اول حد تفاضل يي (136) وي؟

13- د يوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه يي(65) ده ابعاد يي پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library


14- دوه کسه د یوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځی (20) اجوره لري او بل سړی اول ورځ یوه روپۍ په دویمه ورځ دوه روپۍ په همدی ترتیب تراخره روپۍ اخلي وواياست چه په څویمه ورځ به د دوی پیسی مساوي شي ؟

15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یي دشپږو اولنیو حدو د مجموعی دوچنده دي که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یي(126) وي تصاعد معین کړئ؟

16- $0.\overline{123}$ ، $0.\overline{925}$، $0.\overline{27}$ کسرونه په عام کسر بدل کړئ؟

17- $0.1\overline{36}$ , $0.41\overline{6}$ , $0.6\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د یوه قایم الزاویه مثلث زاویي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړئ؟

19- د یوی څلور ضلعي زاویي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمی زاویي ( 9) برابره وي د هری زاویي پراخوالی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library


# دیارلسم فصل

## د رياضي استقراء Induction of Math

د ټولو طبعي عددو لپاره د یوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وایي.

خرنګه چه د ټولو عددو لپاره د یوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د یوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د یو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د $(n)$ لپاره فارمول صحیح فرضوو.

3- د $(n+1)$ لپاره فارمول ثبوتوو

مثال: ثبوت کړئ چه $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبعي عددو لپاره صحیح دی

حل: د $(1)$ لپاره یې ثبوتوو:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د $(1)$ لپاره صحیح دی. د $(n)$ لپاره یې صحیح فرضوو.

د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبیعي عددو لپاره صحیح دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل: د (1)لپاره یې ثبوتوو.

$$1 = \frac{1(3\times 1-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د $(n)$ لپاره یې صحیح فرضوو، د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو:

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)+\{3(n+1)-2\} = \frac{n(3n-1)}{2}+\{3(n+1)-2\}$$

$$S_n = \frac{3n^2-n+6n+2}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2} = \frac{3n^2+3n+2n+2}{2}$$

$$S_n = \frac{3n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$

مثال: ثابت کړئ چه لاندې مساوات د هر طبعي $(n)$لپاره صحیح دی.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنی رابطه صحیح ده څکه چه:

$$1^2 = \frac{1}{6}\times 1(1+1)(2\times 1+1) = \frac{1}{6}(2)(3) = \frac{1}{6}\times 6 = \frac{6}{6} = 1$$

د $(n)$ لپاره یې صحیح فرضوو. او د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} = \frac{2n^3+4n^2+5n^2+10n+3n+6}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^2(n+2)+5n(n+2)+3(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(2n^2+5n+3)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(2n^2+2n+3n+3)}{6} = \frac{(n+2)\{2n(n+1)+3(n+1)\}}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)\{(n+1)+1\}\{2(n+1)+1\}$$

ثابته شوه چه پورتنی مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحیح دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: ثبوت کړئ چه لاندی فارمول د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) \quad , \quad a \neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يې ثبوتوو.

$$a = \frac{a}{a-1}(a^1 - 1) = \frac{a(a-1)}{a-1} = a$$

د لپاره يې صحيح فرضوو.

د لپاره يې ثبوتوو.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + a^{n+1} = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) + a^{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^n - 1) + a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1} - a + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2} - a}{a-1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^{n+1} - 1)}{a-1} = \frac{a}{a-1}(a^{n+1} - 1)$$

## تمرين

لاندې فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$

4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (n)^2 = \frac{1}{3} + n(2n-1)(2n+1)$

5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

6) $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

7) $4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$

8) $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

9) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$

10) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \cdots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

11) $2 + 5 + 10 + \cdots + (n^2 + 1) = \frac{n(2n^2+3n+7)}{6}$

12) $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# څوارلسم فصل

## فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وايي.

د فکتوریل علامه د ( ! ) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$$

قضیه: $0! = 1$ کیږي

ثبوت: پوهیږو چه که یو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسیم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس ته راځي. لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضیه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

په دغه قضیه کې باید د $n > k$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $\binom{n}{n} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n-1} = n$ کیږي؟

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,\{n-(n-1)\}!} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!\cdot 1} = n$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ کیږي؟

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ کیږي؟

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,\{(n+1)-(n+1)\}!} = \binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ کیږي؟

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,\{n-(k-1)\}!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(k-1)!\cdot k(k+1)!\cdots n}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{(n-k)!\,(n-k+1)\cdots n}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{k(k+1)\cdots n}{(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\cdots n}{k!}$$

$$= \frac{k!\,\{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{k!\cdot\{k(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot\{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n\}}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

**د بینوم قضیه *Binomial Theorem*:**

**که چېرته $(a)$ او $b$ حقیقي عددونه او $(n)$ یو طبعي عدد وي نو**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n \cdots 1$$

د ریاضي د استقراء پواسطه د پورتني قضیي ثبوت پورتنی قضیه د $(1)$ لپاره ثبوتوو.

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$$

د $(n)$ لپاره یي صحیح فرضوو.او د $(n+1)$ لپاره یي ثبوتوو.

د $(1)$ مساوات دواړه خواوي په $(a+b)$ کی ضربوو.

$$(a+b)^n(a+b) = (a+b)\left\{\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right\}$$

$$= \binom{n}{0}(a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1}(a^n b + a^{n-1}b^2) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k}\left(a^{n-k+1}b^k + a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}(ab^n + b^{n+1})\right)$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}a^n b + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}a^{n-1}b^2 + \cdots + \left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

که دغه مجموعه په $\sum$ وښیونو لیکو چه

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: د دوه جمله يي د دعوی په اساس انکشاف ورکړئ.

$(x+y)^5$

$$(x+y)^5 = \sum_{n=1}^{5} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ کېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

# پنځلسم فصل

## لیمیټ limit

انټروال $Interval$:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلې ته انټروال وايي.

انټروال په درې قسمه دي.

1- تړلی انټروال $Closed\ Interval$ :

هغه انټروال دی چه د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې وي.

اوپه غټو قوسو ښودل کيږي. لکه:

$$A = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,]$$

او د سيټ په شکل داسې ليکل کيږي.

$$A = [x\epsilon IR/1 < x < 10]$$

2- نيم کښن انټروال $Half\ Open\ Interval$:

هغه انټروال دی چه د يوه انجام نقطه پکې شامله او د بل انجام نقطه پکې شامله نه وي. لکه:

$$A = [4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$$

اوه سيټ په شکل داسې ليکل کيږي. $A = [x\epsilon IR/4 \leq x < 14]$

3- خلاص انټروال $Open\ Interval$:

هغه انټروال دې چه د دواړو انجامو نقطې پکې شاملې نه وي. لکه:

$$A = (4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16)$$

او د سيټ په شکل داسې ليکل کيږي.

$$A = (x\epsilon IR/4 < x < 16)$$

مجاورت $Vicinity$:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که يوه نقطه د يوه انټروال په وسطي نقطه کې واقع وي نو دا انټروال ددې نقطې متناظر مجاورت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لکه (1)د (5)او (3) متناظر مجاورت دی. په یوه مجاورت کې هره نقطه زیات متناظر مجاورتونه لري.

د لیمیټ تعریف:

$Kart\ weierstras$ کارت ویرس ترس انګلیسي ریاضیدان چه په (1897 – 1815) م سنه کې اوسېده دلیمیټ تعریف داسی کړېدې.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی هغه عدد دې چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعریف په ناحیه یو داسی مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصویر د تابع د لیمیټ په مجاورت کی شامل وي.

یعنی د $F(x)$ دتابع لیمیټ د $(a)$ په نقطه کی $(b)$ دې په دی شرط چه د $(b)$ دهر مجاورت $(N)$ لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کی د $(D)$ یو داسی مجاورت موجود وي چه د$(D)$ دهر عنصر تصویر په $(N)$کی شامل وي. او داسی لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع لیمیټ د $x \to 1$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x+3) = 5\cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د لیمیټ ثبوت په دوه طریقو کیږي.

1- د جدول پواسطه 2- د مجاورت په طریقه

1- د جدول په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

$(x)$ ته د دواړه خواوڅخه قیمتونه ورکوواو د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | $-12$ | $-7$ | $-2$ | 3 | 8 | 13 | 16 | 23 | 28 |

دپورته جدول څخه معلومیږي چه $(x)$ته په هره اندازه چه (1) ته نژدی قیمت ورکړشي په همغه اندازه د$(y)$ قیمت (8) ته نژدی کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

د تابع لیمیټ (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N=(8-\varepsilon,8+\varepsilon)$$

د $(D)$ د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کې لیکو

$$8-\varepsilon<5x+3<8+\varepsilon$$
$$8-\varepsilon-3<5x<8+\varepsilon-3$$
$$5-\varepsilon<5x<5+\varepsilon$$
$$\frac{5}{5}-\frac{\varepsilon}{5}<\frac{5x}{5}<\frac{5}{5}+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$1-\frac{\varepsilon}{5}<x<1+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$D=\left(1-\frac{\varepsilon}{5},1+\frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5=\frac{1}{2}\right)$ قیمت ورکوو.

$$N=\left(8-0.5,8+0.5\right)$$
$$N=(7.5,8.5)$$
$$D=\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{5},1+\frac{\frac{1}{2}}{5}\right)=\left(1-\frac{1}{10},1+\frac{1}{10}\right)=(0.9,1.1)$$
$$D=(0.9,1.1)$$
$$\lim_{x\to0.9}(5x+3)=5\times0.9+3=7.5$$
$$\lim_{1.1}(5x+3)=5.5+3=8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کې د تابع لیمیټ دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x\to1}\left(3-\frac{1}{x}\right)=2$ کېږي؟

$$N=(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$$
$$2-\varepsilon<3-\frac{1}{x}<2+\varepsilon$$
$$2-3-\varepsilon<-\frac{1}{x}<2-3+\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$-1-\varepsilon<-\frac{1}{x}<-1+\varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)}>-x>\frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon}<x<\frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D=\left(\frac{1}{1+\varepsilon},\frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon=\frac{1}{4}$$

$$N=(2-\varepsilon\,,2+\varepsilon)=\left(2-\frac{1}{4},2+\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{7}{4},\frac{9}{4}\right)$$

$$D=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}},\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)=\left(\frac{1}{\frac{5}{4}},\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)=\left(\frac{4}{5},\frac{4}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{5}}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3-\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{1}-\frac{5}{4}=\frac{12-5}{4}=\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3-\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{1}-\frac{3}{4}=\frac{12-3}{4}=\frac{9}{4}$$

د ليميټ د استعمال ځايونه *Utilization of limit*:

اسحق نيوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لايبنز (Leibniz) په (1646 -1716) م کالونو کې د ليميټ پواسطه د انتيګرال او ديفرينسيال مسايل حلول يعنې دليميټ داستعمال ډېر مهم ځايونه د ديفرينسيال اوانتيګرال د مسايلو حلول دي. او هم د مشتق تعريف دليميټ څخه په غير ناممکن دی.

ارشميدس د دايری دمحيط د اندازه کولو لپاره داسی محاطي مضلعګانی په دايره کی رسمولی چه ضلعی يي بی اندازه کوچنی وي په دی ترتيب يي د (2π) تقريبي قيمت پيداکړ.نوموړي هم د ليميټ د استعمال څخه استفاده کړی وه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیټ پیدا کړو.نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ دتابع لیمیټ د $(x \to 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(5x - 8) = 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیټ $(x \to -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیټ په $x \to 3$ کی پیداکړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\left(4 - \frac{5}{x+2}\right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

## دصفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیټ پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع دلیمیټ پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی یي لیمیټ همدغه ثابت عدد دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$

که په تابع کی ثابت عدد نهٔ ؤ لیمیټ یي په صفر کی صفر دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیټ:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت اومخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیټ یي په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب: چه په صورت کې ثابت عدد وي او په مخرج کې نه وي ليميټ يې په صفر کې لايتناهي دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-4x+7}{2x^2-3x}=\frac{7}{0}=\infty$$

ج: چه په صورت کې ثابت عدد نه وي او په مخرج کې وي ليميټ يې په صفر کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{2x^2+7x-11}=\frac{0}{-11}=0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کې ثابت عدد نه وي دلته بيا څو حالتونه موجود دي.

a- چه دصورت اومخرج دټيټ حد درجې مساوي وي ليميټ يې په صفر کې د کوچني توان حدو دضريبونسبت دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3-6x^2+12x}{5x^3+3x^2-6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2-6x+12)}{x(5x^2+3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2-6x+12}{5x^2+3x-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

b- چه د کسر د صورت د ټيټ حد درجه د مخرج د ټيټ حد د درجې څخه ډېره وي ليميټ يې په صفر کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^4+5x^3-4x^2}{8x^3-4x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(11x^3+5x^2-4x)}{x(8x^2-4x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^3+5x^2-4x}{8x^2-4x-3}=\frac{0}{-3}=0$$

چه د کسر د صورت د ټيټ حد درجه د مخرج دټيټ حد د درجې څخه کمه وي ليميټ يې په صفر کې $(\infty)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+5x^2-4x}{2x^4+2x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2+5x-4)}{x(2x^3+2x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+5x-4}{2x^3+2x^2+5x}$$

$$=\frac{-4}{0}=-\infty$$

په (∞) کې د يوې تابع ليميټ:

په (∞) د يوې تابع ليميټ په دوه حالته کې مطالعه کوو.

الف: په (∞) کې د تامې تابع ليميټ: د تامې تابع ليميټ په (∞) کې (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(3x^3-7x^2+7x-17)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}-\frac{17}{\infty^3}\right)=\lim_{x\to\infty}3x^3=3\cdot\infty^3=\infty$$

ب: په (∞) کې د کسري تابع ليميټ: د کسري تابع ليميټ په (∞) کې په دری حالته کې مطالعه کوو.

a- که دکسر د صورت درجه دمخرج د درجې څخه ډېره وه ليميټ يې په (∞) کې (∞)دي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x^2+6x-30}{2x^2+5x-21}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{21}{x^3}}=\frac{7-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{21}{\infty^3}}=\frac{7}{0}=\infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجې سره مساوي وي نوليميټ يې په (∞) کې د لوړ توان والاحدود ضريبو نسبت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-8x^2+6x-30}{2x^3+5x^2-21x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{8-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{2+\frac{5}{\infty}-\frac{21}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}=\frac{8}{2}=4$$

c- که د کسر دصورت درجه دمخرج د درجې څخه کمه وي لیمیټ یې په $(\infty)$ کې صفر دي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-8}{x^3+2x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

د لیمیټ قضیې $Theorms\ of\ limit$:

اوله قضیه:

د ثابتې تابع لیمیټ په یوه نقطه کې په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_{3}12=12$$

دویمه قضیه:

د یوه عدد او یوې تابع د حاصل ضرب لیمیټ د تابع د لیمیټ او ثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=kb$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}6x^2=6\lim_{x\to 2}x^2=6\times 2^2=24$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


دریمه قضیه:

ددوه تابعګانو د مجموعی لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=b+c$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2+7x^3)=\lim_{x\to 2}5x^2+\lim_{x\to 2}7x^3$$
$$(5\cdot 2^2+7\cdot x^3)=5\cdot 2^2+7\cdot 2^3$$
$$(5\cdot 4+7\cdot 8)=5\cdot 4+7\cdot 8$$
$$(20+56)=20+56$$
$$(76)=76$$

څلورمه قضیه:

ددوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot h(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}h(x)=b\cdot c$$

مثال:

$$\lim_{x\to -1}(x-1)^2=\lim_{x\to -1}(x-1)\cdot\lim_{x\to -1}(x-1)$$
$$=(-1-1)^2=(-1-1)\cdot(-1-1)$$
$$(-2)^2=(-2)(-2)\Rightarrow 4=4$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b}{c}$$

$$\left(\lim_{x\to a}g(x)=c\neq 0\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال:

$$\lim_{x\to0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to0}4x-\lim_{x\to0}3}{\lim_{x\to0}x+\lim_{x\to0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

شپږمه قضیه:

د یوی جذري تابع لیمیټ په یوه نقطه کی دتابع دلیمیټ دجذر سره مساوي دی په همغه نقطه کې:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x\to2}\sqrt[3]{8x^6}=\sqrt[3]{\lim_{x\to2}8x^6}=\sqrt[3]{8\cdot2^6}=2\cdot2^3=16$$

بې نهایت کوچنۍ تابع: که د یوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی صفر شي دی تابع ته بی نهایت کوچنۍ تابع وایي. لکه:

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

تبصره :

a- د بی نهایت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

b- د بی نهایت کوچنۍ تابعګانو دضرب حاصل هم یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x\to a$ په صورت کی یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي نو:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$$

d- که چېری $\varepsilon(x)$ یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي او $u(x)\neq0$ وي نو $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کی د $\lim_{x\to3}(x^2-9)$ تابع لیمیټ پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to3}(x^2-9)=3^2-9=9-9=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال: د $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع لیمیټ په $x\to\infty$ کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\cdot\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

1- د $lim_{x\to a} f(x)=b$ ثبوت:

$\lim_{x\to a} f(x)=b+\varepsilon(x)$ فرضوو او دا چه $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ دي نو:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

2- د $\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a} f(x_1)+\lim_{x\to a} f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x\to a} f(x_1)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} f(x_2)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a} f(x_1)+\lim_{x\to a} f(x_2)=\{b_1+\varepsilon_1\}+\{b_2+\varepsilon_2\}$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2+\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}$$
$$\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2$$

3- د دوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانود لیمیټو دحاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a} f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a} g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2+b_1\varepsilon_2+b_2\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_1\cdot\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_2\varepsilon_1=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2$$

4- د دوه تابعګانو د نسبت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټود نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g\,(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

ثبوت:

$$f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$=\frac{b_1b_2+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1+b_1b_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چه $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ ډېر کوچني مثبت عددونه دي نوصفر کيږي. نو ثابته شوه چه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د ساندويچ قضيه:

که $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ درې تابعګانې ولرو چه $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ وي که:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$$

نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ کيږي.

مثال: که $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\leq u(x)\leq\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو ? $\lim_{x\to 0}u(x)=$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=1=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو دساندويچ د قضيې سره سم د $u(x)$ قيمت پيدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to a} u(x)=1$$

تمرين:

لاندې ليميتونه حل کړئ؟

1- $\lim_{x\to0}(x^2-2x^2+5x+3)$

2- $\lim_{x\to-1}(x^2-2x-5)$

3- $\lim_{x\to0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4- $\lim_{x\to0}\frac{3x^3-4x^2+7x-14}{2x^2-11x+7}$

5- $\lim_{x\to0}\frac{4x^2-21x}{3x^3+5x^2+7x}$

6- $\lim_{x\to0}\frac{5x^3-4x^2}{7x^2-3x}$

7- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-3}{2x^2-3x+1}$

8- $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+5}{3x-1}$

9- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-11}{2x^3+3x^2-4x+7}$

10- $\lim_{x\to\infty}(4x^3-3x^2+4x-12)$

11- $\lim_{x\to3}\frac{3x^2-3x+7}{1+\frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x\to4}\left(\frac{x-3}{x-5}+\frac{x}{x+5}+\frac{x+4}{x}\right)$

اتمه قضيه:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

په داسې حال کې چه $(n)$ يو طبيعي عدد او $(a)$ يو حقيقي عدد دی.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}x^{n-1}+a\lim_{x\to a}x^{n-2}+a^2\lim_{x\to a}x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}\lim_{x\to a}x+\lim_{x\to a}a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


دغه قضیه د ټولو جذري افادو د لیمیټ د پیدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}{x-a}=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}a^{\frac{-(n-1)}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=?$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1-5}{5}}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x=y^6)$ او $a=b^6$ ښیو:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{y\to b}\frac{\sqrt[3]{y^6}-\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6}-\sqrt{b^6}}=\lim_{y\to b}\frac{y^2-b^2}{y^3-b^3}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{(y-b)(y+b)}{(y-b)(y^2+by+b^2)}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{y+b}{y^2+by+b^2}=\frac{b+b}{b^2+b^2+b^2}=\frac{2b}{3b^2}=\frac{2}{3b}$$

$$\therefore\quad b^6=a\quad\because\quad b=\sqrt[6]{a}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


ابهام $Uncertainty$:

په اعدادو یا ($\infty$) باندی دعملیودنتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومي ته ابهام وائي.

مبهم اشکال په لاندی ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, \infty^0, 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړیو شکلو یعنی ($\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ ، $0\cdot\infty$ ، $\infty-\infty$) ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئي پواسطه

4- د لوهسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کی د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی ابهام منځ ته راشي صورت او مخرج په هغه متحول ویشو چه درجه یي لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{3}$$

2- د تجزیي پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی مبهم شکل غوره کړي او د تجزیي وړ وي تجزیه کوو یي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2-2^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$
$$\lim_{x\to-2}(x-2)=-2-2=-4$$

مثال:

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-6\cdot2+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)-4(x-2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-4)=2-4=-2$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د یوی تابع ابهام د تقسیم او تجزیي پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی یې ضربوو.

مثال:

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}^2-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\infty-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\sqrt{x+1}^2 - 4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)$$

$$= \sqrt{3+1}+2$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{10x-4x^2-4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+10x-4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+2x+8x-4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\{-2x(2x-1)+4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2\cdot 2-1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $\left(1^{\infty}، \infty^{0}، 0^{0}\right)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ کار اخیستل کیږي. چه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

د $2.718281828=e$ عدد د یوه جرمني عالم ایولر $Euler$ پواسطه کشف شویدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ایولر د فارمول شکل ته ورواړوو نو $\frac{1}{\alpha}$ په $x$ ښیو:

$$x=\frac{1}{\alpha}\Rightarrow\because\ \alpha\to 0\quad\therefore\ x\to\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u=\frac{\alpha}{x}\quad\Rightarrow\ \therefore\ x\to\infty\quad\because\quad u\to 0\ \Rightarrow x=\frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}}=\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u}=x\Rightarrow u=\frac{1}{x}\quad\therefore\ u\to 0\quad\because x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{Ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}ln(1+x)\right\} = \lim_{x\to0}\left\{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \qquad \therefore\ x\to0 \quad \because\ u\longrightarrow\infty$$

$$= ln\left\{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\} = lne = 1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

د سوال د حل لپاره $(e^x-1)$ په $(y)$ ښيو:

$$e^x-1 = y \Rightarrow e^x = 1+y \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+y) = x\ln e = \ln(1+y)$$

$$x = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y\to0 \quad \because\ x\to\infty$$

$$= \frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

تبصره:

که يوه تابع د $\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د ليميټ د لاس ته راوړلو لپاره يې طبعي لوګاريتم نيسو او د پورتنيو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل يې لرلو د $(0\cdot\infty)$ شکل ته ئي را اړوو او د مخکينيو څلورو حالتو څخه چه په هر حالت ئي ابهام د منځه تللو ابهام ئي د منځه وړو.

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)} = \ln\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\{g(x)\ln f(x)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


د مبهم شکل عمومي حالت :-که $\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = 1^{\infty}$ وي په دی حالت کی $(\alpha)$ په $(u-1)$ ښيو:

$$(\alpha = u - 1)$$

$$\lim_{x\to a} u^v = \lim_{x\to a}(1 + u - 1)^{\frac{v}{u-1}\cdot u-1} = \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\cdot\alpha}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چه $(\alpha = u - 1)$ دی نو که $(u \to 1)$ وکړي په نتيجه کی $(\alpha \to 0)$ کوي په نتيجه کی ليکو چې:

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = \left\{\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim_{x\to a} v(u-1)} = e^{\lim_{x\to a} v(u-1)} = e^p$$

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = e^p \qquad , \qquad p = \lim_{x\to a}\{v(u-1)\}$$

1- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ پيدا کړئ؟

حل:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \qquad , \qquad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p \qquad , \qquad p = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left(1+\frac{2}{x}-1\right)\right\} = \lim_{x\to a} x\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^p = e^2$$

2- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قيمت محاسبه کړئ؟

حل: لمړی د ليميټ بڼه ليکو:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^p$$

$$p = \lim_{x\to a} v(u-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(1+\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}=e^{p}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{p}$$

$$p=\lim_{x\to0}\{v(u-1)\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x}(\cos x-1)\right\}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=1\cdot\frac{0}{1}=1\cdot0=0$$

$$\lim_{x\to0}(\cos x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{p}=e^{0}=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{4}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{8}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{4}{1}=4$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cos 2x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x$$
$$=-2\cdot 1\cdot 0=0$$

مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=?$

حل:

$$x-1=y\Rightarrow x=1+y$$
$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}ln(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$
$$\frac{1}{y}=u\Rightarrow y=\frac{1}{u}\qquad \therefore\ y\to 0\quad \because\ u\to\infty$$
$$\frac{1}{ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}=e$$

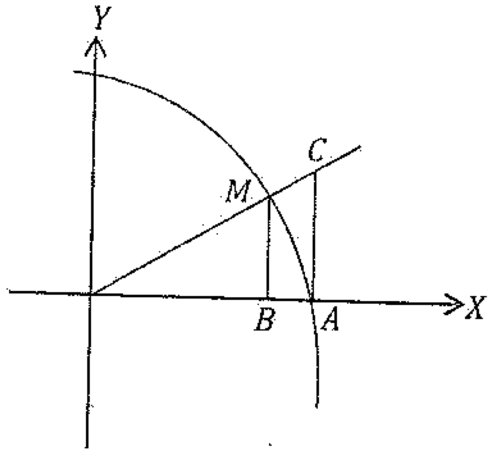
### د مثلثاتي تابعګانو ليميټ :limit of Trigono metrical Functions

د يوې زاويي د ساين اوهغه زاويي د نسبت ليميټ په صفر کی (1) دې، يعنې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


ثبوت:په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسموو اوهم ددی مثلثو تر منځ یوه قطاع په نظر کې نیسو. مساحتونه ئې پیدا کوو او مقایسه کوو یې.




$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$

$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{MB} < \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\widehat{AM} < \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}$

$\overline{OB} = \cos x \quad , \quad \overline{MB} = \sin x \quad , \quad \overline{OA} = 1 \quad , \widehat{AM} = x$

$\sin x\cos x < x < \tan x$

$\frac{\sin x\cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$

$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim\limits_{x\to 0}\cos x$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 = \lim\limits_{x\to 0}\cos x$

د ساندویچ د قضیې سره سم:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



1- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=?$

حل:

$$2x=\alpha \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore\ x\longrightarrow 0 \qquad \because \quad \alpha\longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot 1=2$$

2- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10}{7}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2sin^2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+2sin^2x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{\frac{3x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x}}{5x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

5- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}$$

$$2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

6- مثال: $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-1-cosx+1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-cosx}$$

$$=\sqrt{2(1^2)-1}=\sqrt{2\cdot 1-1}=\sqrt{2-1}=1$$

## د تابعګانو متمادیت (اتصال):

د اتصال له مخی تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع　　　2- غیر متمادي تابع

### 1- متمادي تابع :

هغه تابع ده چه دګراف د ترسیم په وخت کی یې د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنی ګراف یې پریکړون نه لري.په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپوننشل تابع، لوګاریتمي تابع، د ساین او کوساین تابعګانې متمادي تابعګانی دي په دې شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلی نه وي .

### 2- غیر متمادي تابعګانی:

هغه تابعګانی دي چه ګراف یې څو ټوټې وي. لکه هوموګرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکېنټ او کوسیکېنټ تابعګانې.

کولای شو چې متمادي تابګانی په غیرمتمادي تابګانو بدلی کړو مګر نشو کولای چې غیر متمادي تابعګانی په متمادي تابعګانو بدلې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د متمادیت شرطونه:

د متمادیت شرطونه دری دي.

1- د $(a)$ نقطه باید په $\lim_{x\to a} f(x)$ کی شامل وي.

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیټ په یوه نقطه کی باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

که پورتني دری واړه شرطونه په یوه تابع کی موجود وه تابع متمادي ده او که د دغه درې شرطو څخه یو یکی موجود نه و تابع متمادي نه ده غیرمتمادي ده.

1- مثال: وښیاست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \to 2$ په نقطه کی متمادي ده.

حل:

1- $2 \epsilon dom f(x) \because 2 \in IR$

2- $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7$

3- $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادي ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $(x = -1)$ په ټکي کی وڅېړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په $(-1)$ کې صفر کیږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفر کوي د تابع د تعریف په ناحیه کی شامل نه دی $(-1 \notin dom f(x))$ نو تابع متمادي نه ده

د تابع د لیمیټ شرطونه :که دیوی تابع د ښي لاس لیمیټ د تابع دچپ لاس د لیمیټ سره مساوي وي نوتابع لیمیټ لري. اوکه د ښي لاس لیمیټ د چپ لاس د لیمیټ سره مساوي نه ؤ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library


د ښي لاس ليميټ :

د $(b)$ عدد د $(a)$ په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د ښي لاس ليميټ دی په دې شرط چه د $(b)$ د هر مجاورت $(N)$ لپاره د تابع د تعريف په ناحيه کې د $(a, a+\delta)$ يو خلاص انټروال موجود وي چه د دې انټروال د هر عنصر تصوير د $(N)$ په مجاورت شامل وي او داسې ليکل کيږي.

$$\lim_{x\to a+} f(x)$$

د چپ لاس ليميټ:

د $(b)$ عدد د $(a)$ په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د چپ لاس ليميټ دی په دې شرط چه د $(b)$ د هر مجاورت $(N)$ لپاره د تابع د تعريف په ناحيه کې د $(-\infty - a, a)$ يو انټروال موجود وي چه د دې مجاورت د هر عنصر تصوير د $(N)$ په مجاورت کې شامل وي او داسې ليکل کيږي.

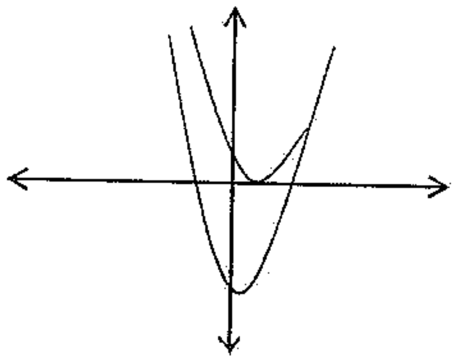
$$\lim_{x\to a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \quad x < 2 \\ x^2 - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x^2 - 3) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \exists$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



4- مثال: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \; x\geq 1\\ 1-x & ; \; x<1\end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې یې متمادیت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}(2x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x\to 1} f(x)=\nexists$ تابع لیمیټ نه لري.

نو تابع د $(x=1)$ په نقطه کې غېرمتمادي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x=a)$ په نقطه کې متمادي وي او $f(x)$ په $(x=g(a))$ کې متمادي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x=a)$ کې متمادي ده.

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(g(a))$$

2- د یوې طاقت لرونکې تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره لمړی دتابع لیمیټ پیدا کوو او بیا یې په همغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^a=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^a$$

3- د اکسپوننشل تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره قاعده دتابع دتوان دلیمیټ په توان لیکو.

$$\lim_{x\to a}(b)^{f(x)}=b^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

4- د لوګاریتمي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې دتابع دلیمیټ دلوګاریتم سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\log_b f(x)=\log_b \lim_{x\to a} f(x)$$

5- د یوې مثلثاتي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د هغه تابع دلیمیټ دمثلثاتي نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin \lim_{x\to a} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


د متمادي تابعګانو خواص:

که د دوه تابعګانو څخه هره یوه په یوه نقطه کې متمادي وي نو ددوی مجموعه ،تفاضل ، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کې متمادي دی.

مثال : که $f(x)=x^2+3$ او $g(x)=x^2+3x-2$ دوه تابعګاني متمادي وي نو ثبوت کړئ چې $g(x)\neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)\cdot g(x)$ , $f(x)-g(x)$, $f(x)+g(x)$ هم متمادي دي.

حل:

$$1: Df(x)=IR$$
$$2: \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x^2+3)=1^2+3=4$$
$$3: f(1)=(1^2+3)=4$$

نو د $f(x)$ تابع د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

$$1: Dg(x)=IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}(x^2+3x-2)=1^2+3\cdot 1-2=2$$
$$3: g(1)=(1^2+3\cdot 1-2)=2$$

نو د $g(x)$ تابع د $x=1$ په نقطه کې متمادي ده.

اوس د تابعګانو دمجموعی او حاصل ضرب متمادیت څیړو.

الف:

$$f(x)+g(x)=x^2+3+x^2+3x-2=2x^2+3x+1$$
$$1: D\{f(x)+g(x)\}=IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1}(2x^2+3x+1)=6$$
$$3: f(1)+g(1)=(2\cdot 1^2+3\cdot 1+1)=2+3+1=6$$
$$\lim_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big)=f(1)+g(1)=6$$

ب: د او تابعګانو دحاصل ضرب متمادیت وڅیړئ؟

$$1: Df(x)\cdot g(x)=IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to 1}(x^2+3x-2)(x^2+3)=2\cdot 4=8$$
$$3: f(1)\cdot g(1)=2\cdot 4=8$$

د تابعګانو حاصل ضرب هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## تمرين

د لاندې تابعګانو ليميټ پيدا کړئ؟

1: $\lim_{x\to\infty}(x^2 - 2x + 17)$

2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - 6x + 3}{x + 1}$

3: $\lim_{x\to 1}(x^3 + 5x^2 - 11x + 1)$

4: $\lim_{x\to 1}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



# شپاړلسم فصل

## مشتق

مشتق مفعوله صيغه ده د اشتقاق څخه اخيستل شوى ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کې د مصدر څخه د نورو افعالو او اسماؤ اخيستلو ته اشتقاق وايي. د مشتق څخه مقصد د دوه يمې درجې ،دريمې درجې اوداسې نورو تابعګانو د مېل پيدا کول دي.

### د خطي تابع مېل:

په خطي تابع کې د مستقيم خط مېل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ پواسطه پيدا کيږي.

مثال: $A(3,7)$ او $B(5,9)$ د مستقيمې کرښې دوه نقطې دي مېل يې پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 7}{5 - 3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنګه چه په منحني خطو کې دوه نقطې په يوه استقامت واقع نه وي نو له همدې امله دمنحني خطو دمېل د پيدا کولو لپاره د مستقيم خط د مېل څخه استفاده کوي.نو ځکه د منحني مېل ته مشتق وايي.

مثلاً $f(x) = x^2$ يوه تابع راکړشوې ده د مېل ددغه تابع د ګراف دوه نقطې په يوه استقامت وجود نلري نو په تقريبي ډول دوه نقطې پيداکواو مېل يې لاسته راوړوفرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x + h, f(x + h))$ دمنحني خط دوه نقطې دي نود مستقيم خط د مېل څخه استفاده کوونو ليکو چه:

$$m_{AB} = \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

د منحني خط دهرې اختياري نقطې مېل عبارت $\lim_{x \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د ګراف مېل د $P(3, -3)$ په نقطه کې پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



حل: څرنګه چې د $P(3,-3)$ په نقطه کې $x = 3$ دی نو کولای شو چه د میل په فارمول کې د $(x)$ په عوض $(3)$ وضع کړو.

$$m = \lim_{x\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)-(3+h)^2-(2\cdot 3-3^2)}{h}$$

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{6+2h-(9+6h+h^2)-6+9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h-9-6h-h^2+9}{h}$$

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{h(-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-4-h) = -4 \Rightarrow m = -4$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 - 1$ د تابع میل د $(x = -3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \lim_{x\to -3}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim_{x\to -3}\frac{\{(-3+h)^3-1\}-\{(-3)^3-1\}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-27+27h-9h^2+h^3-1+27+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3-9h^2+27h}{h}$$

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{h(h^2-9h+27)}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2-9h+27) = 27$$

منحنی یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعني:

$$S = f(t)$$

د $t_1$ او $t_2$ په وختونو کې د وهل شوو فاصلود تفاضل او وختو د تفاض نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وایي. یاداچه دتابع اومتحول دزیادت نسبت ته متوسط سرعت وایي.

$$\acute{v} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیټ ته لحظوي سرعت وایي

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کې متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2،4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که $(x)$ د $(\Delta x)$ په اندازه زیادت وکړي نو $(y)$ د $(\Delta y)$ په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \cdot 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیټ ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنی تصور پییري فرماټ (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 – 1665)م کې کړی ؤ نوموړي خپلی لیکلنی د نړی ریاضیدانانو ته پېشنهاد کړلی. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 – 1727)م او جورج ویلیم لایبنز(1664 – 1715)م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کې ثابت او د ساینسدانانو کمیسون ته یي پیشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یې په ډېر ښه ډول وکړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مشتق تعریف:

د صفر په نقطه کې د تابع او متحول د زیادت دنسبت لیمیټ ته مشتق وايي. لکه $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او په $f'(x)$ یا $y'$ ، $\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx}$ ښودل کیږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

1- مثال: د $f(x)=2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

2- مثال: د $f(x)=x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2 \quad\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

3- مثال: د $f(x)=\sqrt{x}\,;\,x\geq 0$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق د تعریف په مرسته وخېرئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(2x^2+x)}{\Delta x}$$

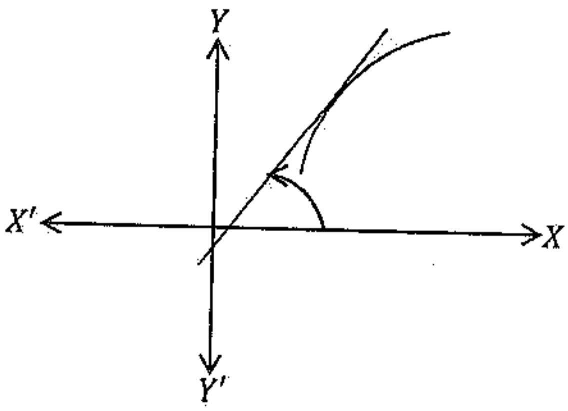
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+x+\Delta x-2x^2-x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(4x+2\Delta x+1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x+1)=4x+1\qquad\Rightarrow f'(x)=4x+1$$

د مشتق هندسي تعبير

په یوه نقطه کې د یوه منحني خط مېل دهغه زاويې تانجانت دی چه مستقیمه کرښه يي د $(XX')$ د محور دمثبت جهت سره جوړوي.




1- مثال: د هغه مماس مېل او معادله پیدا کړئ چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني باندې د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمیږي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$m = \acute{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{2(x+\Delta x)^3 - 1\} - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس میل $m = \acute{f}(x) = \acute{f}(1) = 6(1)^2 = 6 \cdot 1 = 6$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \qquad \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس میل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې اوخصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\acute{f}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


4- مثال: د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع مشتق د $(x_0)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$y=f(x_0)$$
$$y+\Delta y=f(x_0+\Delta x)=\frac{1}{x_0+\Delta x}$$
$$\Delta y=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}=\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x x_0(x_0+\Delta x)}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}=-\frac{1}{{x_0}^2}\quad\Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{{x_0}^2}$$

5- مثال: د $f(x)=4x^2-3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y=f(x)$$
$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-y$$
$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\{4(x+\Delta x)^2-3\}-(4x^2-3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{4(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-3\}-(4x^2-3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x^2+8x\Delta x+4(\Delta x)^2-3-4x^2+3}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8x\Delta x+4(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(8x+4\Delta x)}{\Delta x}$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(8x+4\Delta x)=8x$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ؟

1- $f(x)=\sqrt{x+1}$ 2- $f(x)=\frac{x^2-5}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



3- $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$

4- $f(x) = \frac{2}{x^2+5x-7}$

5- $f(x) = x - \frac{1}{x}$

6- $f(x) = 5x - 1$

## د مشتق قوانين:

### اوله قضيه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض : $y = c$ یوه تابع لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \quad \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

### د یوې طاقت لرونکی تابع مشتق:

مفروض : $y = f(x) = x^n$ یوه طاقت لرونکی تابع ده.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = \acute{f}(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$
$$\Delta y = (x + \Delta x - x)\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 \cdots + x^{n-1}\}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}$$
$$\acute{y} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعګانو د مجموعی مشتق د تابعګانو دمشتقو د مجموعی سره مساوي دی.

مفروض: $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانی لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = u' + v'$

ثبوت: د تابعګانو د جمع حاصل په $(y)$ ښیو:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y' = u' + v'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق د تابعګانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض: $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانې لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$

ثبوت: د $(u)$ او $(v)$ تابعګانو تفاضل په $(y)$ ښیو.

$$y = u - v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$
$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \qquad \& \qquad v = 1$$
$$\acute{u} = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$
$$\acute{v} = 0 \qquad \because \acute{y} = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2 \;, \quad v = -3x \;, \quad w = 5$$
$$\acute{y} = \acute{u} + \acute{v} + \acute{w}$$
$$\acute{y} = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$
$$\acute{y} = 8x - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعگانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولی تابع مشتق ضرب دویمه تابع جمع د دویمي تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د $(u)$ او $(v)$ دوه تابعگاني لرو او د حاصل ضرب تابع يي په $(y)$ ښيو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب: ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$
$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = v\acute{u} + \acute{v}u + 0 \cdot \acute{v}$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \Rightarrow \acute{u} = 3x^2$$
$$v = x^2 - 3 \Rightarrow \acute{v} = 3x$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$
$$\acute{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$
$$\acute{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



حل:

$u = 2x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \acute{u} = 4x - 5$
$v = 3x - 15 \Rightarrow \acute{v} = 3$
$\acute{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$
$\acute{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$
$\acute{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$

د حاصل تقسیم مشتق:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی دصورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندی.

مفروض: د $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانی لرود خارج قسمت تابع يي په $(y)$ ښيو. نو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتوو چي:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\lim_{\Delta x \to 0}(v + \Delta v)}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u=2+3x \quad \Rightarrow \acute{u}=3$$
$$v=1-2x \quad \Rightarrow \acute{v}=-2$$
$$y=\frac{u}{v} \quad \Rightarrow \acute{y}=\frac{\acute{u}v-\acute{v}u}{v^2}$$
$$\acute{y}=\frac{3(1-2x)-\{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2}=\frac{3-6x+4+6x}{(1-2x)^2}=\frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x)=\frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیداکړئ؟

حل:

$$u=7x-15 \quad \Rightarrow \acute{u}=7$$
$$v=2x^2+3x \quad \Rightarrow \acute{v}=4x+3$$
$$\acute{f}(x)=\frac{7(2x^2+3x)-(4x+3)(7x-15)}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x)=\frac{14x^2+21x-28x^2+60x-21x+45}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x)=\frac{-14x^2+60x+45}{(2x^2+3x)^2}$$

3- مثال: د $y=\frac{x^2}{3x+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u=x^2 \quad \Rightarrow \acute{u}=2x$$
$$v=x+1 \quad \Rightarrow \acute{v}=3$$
$$\acute{y}=\frac{2x(3x+1)-3\cdot x^2}{(3x+1)^2}=\frac{6x^2+2x-3x^2}{(3x+1)^2}$$
$$u=x^2 \quad \Rightarrow \acute{u}=2x$$
$$v=x+1 \quad \Rightarrow \acute{v}=3$$
$$\acute{y}=\frac{2x(3x+1)-3\cdot x^2}{(3x+1)^2}=\frac{6x^2+2x-3x^2}{(3x+1)^2}=\frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}$$
$$\acute{y}=\frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه یې دوه وي. لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق یې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع .

فارمول یې په لاندې ډول دی.

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ یوه تابع راکړ شوی ده.

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\acute{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال:- د $y = \sqrt{x}$ مشتق پیدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$\acute{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}\right]\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}\right]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: د $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\frac{6x^2-6x+4}{2\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}}$$

## د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول یې د بل متحول تابع وي یا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وایي.لکه که د $f$ تابع د $g(x)$ تابع وي او $g$ د $x$ تابع وي نودغه تابع ته مرکبه تابع وایي.

د مرکبې تابع د مشتق دفارمول د پیدا کولو لپاره په لاندې ډول اجراٿت کوو.

$$\Delta y=\Delta y\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'_{(x)}\Rightarrow\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y'_{(u)}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'_{(x)}$$

$$y'_{(x)}=y'_{(u)}\cdot u'_{(x)}$$

نو په دې اساس که $y=u^n$ وي مشتق یې $y'=nu^{n-1}\cdot u'$ دی.

او که $y=\sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$y'=\frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


1- مثال :

$$y = (2x^2 - 1)^3$$
$$\acute{y} = 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x$$
$$= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x$$
$$\acute{y} = 48x^5 - 48x^3 + 12x$$

2- مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3- مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \acute{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

څلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$$\acute{y} = -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x$$
$$= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$$

نوټ:

که د $(f)$ تابع د $(x_0)$ په نقطه کې مشتق ولري نو $\acute{f}(x)$ دهغه مماس میل دی چه د $[x_0, f(x_0)]$ په نقطه په منحني باندی مماس وي.

مثال: د $f(x) = x^3$ دتابع میل د $x_0 = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل: څرنګه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کیږي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو مېل يي عبارت دی.

$$\acute{f}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کی د مشتق ور وي نو دا تابع په دی نقطه کی متمادي ده مګر ممکن یوه تابع په یوه نقطه کی متمادي وي مګر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ دتابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ

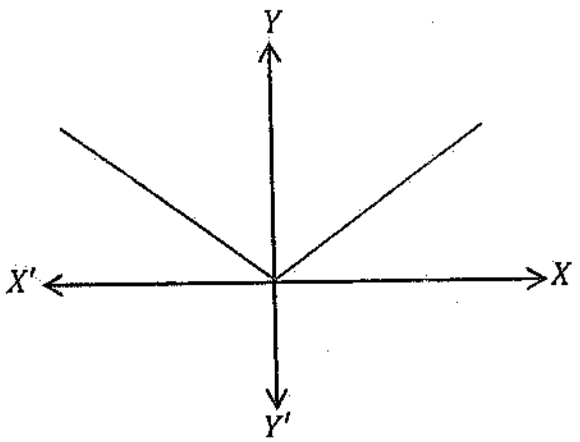
$$\acute{f}(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\acute{f}(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$$

لیمیټ نلري نو مشتق هم نلري.

$f(x) = |x|$



(c) ketabton.com: The Digital Library


د مثلثاتي تابعګانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$= 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$
$$\acute{y} = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او $(u)$ د $(x)$ تابع وي نو مشتق يې عبارت دی له:

$$\acute{f}(x) = \acute{u}\cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin 4x \\ u = 4x \Rightarrow \acute{u} = 4 \\ \acute{f}(x) = \acute{u}\cos u \end{array}\right| \qquad \acute{f}(x) = 4\cos 4x$$

2- مثال :- د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$
$$g(x) = x^3 \Rightarrow \acute{g}(x) = 3x^2$$
$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \acute{h}(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



3-مثال: د $y=\frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u=\sin x \Rightarrow \acute{u}=\cos x$$
$$v=1+x \Rightarrow \acute{v}=1$$
$$\acute{y}=\frac{\cos x(1+x)-1\cdot\sin x}{(1+x)^2}$$

د $y=\cos x$ تابع مشتق:

د $y=\cos x$ تابع مشتق $\acute{y}=-\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y=\cos x$$
$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$
$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\Delta y=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$
$$y=\cos x\Rightarrow\acute{y}=-$$

پورتنی مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$sin^2x+cos^2x=1$$
$$\cos x=\sqrt{1-sin^2x}=(1-sin^2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\cos x)'=\frac{1}{2}(1-\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin x\cos x)=\frac{-2\sin x\cos x}{2(1-sin^2x)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{cos^2x}}$$
$$=-\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=-\sin x$$

1-مثال: $f(x)=\sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = \acute{u}v + \acute{v}u$

$\acute{f}(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$

$\acute{f}(x) = 2(cos^2x - sin^2x) = 2\cos 2x$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$y = x \Rightarrow \acute{y} = 1$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$

$\acute{f}(x) = 1 - (cos^2x - sin^2x) = 1 - \cos 2x$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$\acute{f}(x) = 2(2\sec 2x \tan 2x + 2sec^2 2x) = 4\sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$

د $y = \tan x$ تابع مشتق:

$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = \dfrac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{cos^2x} = \dfrac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$

$\acute{y} = \dfrac{1}{cos^2x} = sec^2x$

څلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$u = \cos x \Rightarrow \acute{u} = -\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$v = \sin x \ \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{sin^2x} = \frac{-(sin^2x + cos^2x)}{sin^2x}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{sin^2x} = -csc^2x \qquad \therefore \quad co\acute{t}gx = -csc^2x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$u = 1 \ \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \cos x \ \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{cos^2x} = \frac{\sin x}{cos^2x}$$

$$\acute{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$u = 1 \ \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \sin x \ \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{sin^2x} = \frac{-\cos x}{sin^2x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x}$$

$$\acute{y} = -\cot x \csc x \ v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه تابع کې څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کې وي نو کله چه د دغه ډول تابعګانو مشتق پیدا کوو نو په نوبت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

لمړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'_{(x)} = \frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ رابطې څخه پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_{(x)} - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_x - (1)_x = 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_y - (1)_y = 1 - \frac{x}{1}\cos\frac{x}{y} - 0 = 1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د $(x)$ او $(y)$ قیمتونه وضع کووچه $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi.1)} = \frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1 + \pi\cos\frac{\pi}{1}} = \frac{\cos\pi}{1 + \pi\cos\pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$
$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\acute{f}_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$\acute{f}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = -2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دپورتني تابع ضمني مشتق په لاندې ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5\acute{y} - \acute{y} - 2x = 0$$

$$\acute{y}(6y^5 - 1) = 2x$$

$$\acute{y} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

## د تابع دويم ضمني مشتق:

که يوه دويمه درجه دوه مجهوله تابع راکړشوی وي او وغواړو چه دويم ضمني مشتق يي پيدا کړو نو اول ضمني مشتق يي د فارمول پواسطه پيدا کوو.او بيا د مشتق دفارمولو پواسطه دويم ضمني مشتق پيدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دويم ضمني مشتق پيدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\acute{f}_{(x)} = 2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = -2y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\acute{y}_{(x)}$ د رابطی $y''_{(x)}$ پیدا کوو

$$y''_{(x)} = \frac{\acute{x}y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = -\frac{1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کی د $(y)$ مشتق نظر $(x)$ ته د $(1,1)$ په ټکي کی پیدا کړئ او د منحني د مماس معادله پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = 2x + y$$
$$\acute{f}_{(y)} = x + 2y$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad \Rightarrow x + 2y \neq 0$$
$$\acute{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلی ضمني مشتق په لاندی ډول هم پیدا کولای شو.

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$
$$2x + y + x\acute{y} + 2y\acute{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\acute{y} = 0$$
$$\acute{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$
$$\acute{f}_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$
$$\acute{f}_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د يوی تابع دويم ،دريم، څلورم ... او نور مشتقات ونيسو ترڅو چه مشتق يي صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دريم مشتق ونيسئ؟

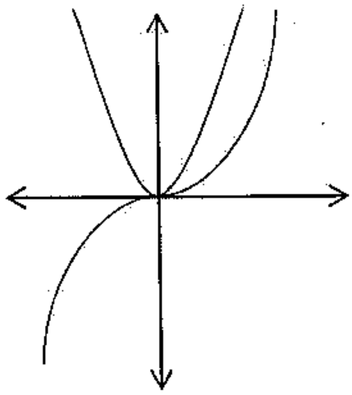
حل:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$f'_{(x)} = 3x^2 - 6x + 4$$
$$f''_{(x)} = 6x - 6$$
$$f'''_{(x)} = 6$$

دويم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پيدا کړئ؟ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

$$y' = x^2 \qquad y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دويم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نود $\left(y^{(9)}\right)^2 + y^2$ قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل:

$y = \sin x + \cos x$
$\acute{y}_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$
$y''_{(x)} = -\sin x - \cos x$
$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$
$\vdots$
$y'(9)_{(x)} = \cos x - \sin x$
$\left(y^{(9)}\right)^2_{(x)} + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$
$= cos^2x - 2\sin x \cos x + sin^2x + sin^2x + 2\sin x \cos x + cos^2x$
$= 2sin^2x + 2cos^2x = 2(sin^2x + cos^2x) = 2 \cdot 1 = 2$

## د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو دتزاید او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو، اصغري نقطو، اعظمي حجم، د لنډې فاصلې، اعظمي مساحت او داسې نورو شیانو د پیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعګانو د ګراف د ترسیم لپاره.

4- د مبهمو اشکالو دلیمیټ د پیدا کولو لپاره.

لنډه دا چه د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه او نورو علومو کې زیات ګټور دی.

1- دتوابعو د تزاید او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a,b]$ په تړلې انټروال کې متمادي وي او په $(a,b)$ انټروال کې مشتق ولري نو که $\acute{f}(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انټروال متزایده ده. او که $\acute{f}(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: وښیئ چه د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع ګراف متزاید دې؟

حل: څرنګه چه تابع تامه ده نو $domf(x) = IR$ دې مشتق یې په لاندې ډول دي.

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که په مشتق کې د $(x)$ په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کيږي نو $f'(x) > 0$ دی په نتيجه کې تابع متزايده ده.

دويم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انټروال کې متناقصه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده اومشتق لري د تناقص د انټروال د معلومولو لپاره $f'(x) < 0$ پيدا کوو.

$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کې منفي دی نو تابع په همدی انټروال $(-1,1)$ کې متناقصه ده.

دريم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅيړئ؟

حل:

$D_{f(x)} = IR$
$f(x) = 5x - 4$
$f'(x) = 5 > 0$

تابع متزايده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انټروال کې متزايده او په کوم انټروال کې متناقصه ده.

حل: که $y' < 0$ وي تابع متناقصه ده او که $y' > 0$ وي تابع متزايده ده.

$y = x^2$
$y' = 2x$
$y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$ د تناقص شرط
$y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ د تزايد شرط

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $+\infty$ ↘ | $4$ ↘ | $1$ ↘ | $0$ | $1$ ↗ | $4$ ↗ | $+\infty$ ↗ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


## د یوې تابع بحراني ټکي

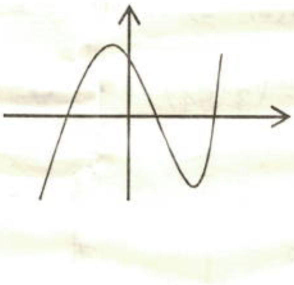
د یوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه *Maximum point* :

د تابع د ګراف تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه *Minimum point* :

د تابع دګراف تر ټولو ټيټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



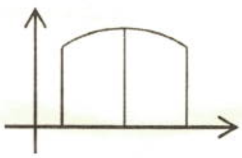
ثابته تابع :

هغه تابع ده چې مشتق يې صفر وي.

$y' > 0 \quad y' < 0$

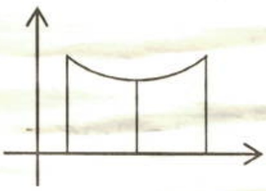
متزايده تابع :

که د $(a, b)$ په فاصله کې $\acute{y} > 0$ وي، تابع متزايده ده.



متناقصه تابع :- که د $(a, b)$ په فاصله کې $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده.

$\acute{y} < 0 \ \acute{y} > 0$



(c) ketabton.com: The Digital Library



د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دی نقطه کی د تابع گراف خپل جهت ته تغیرورکوي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ یوه تابع راکړ شوی ده وواياست چه ددی تابع گراف څو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پيدا کوو اود $(x)$ قیمتونه پيدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 7x + 2$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore \quad A(2,-2)$$ اصغري نقطه ده
$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad B\left(\frac{1}{3}, \frac{17}{54}\right)$$ اعظمي نقطه ده

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\acute{f}(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\frac{17}{54}$ | | $-2$ | | $-2$ | | $+\infty$ |

دويم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه يا نسبتي نقطه پيدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پيدا اوعلامی يي مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$-x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftarrow f(x) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 4 + 8 = 12$

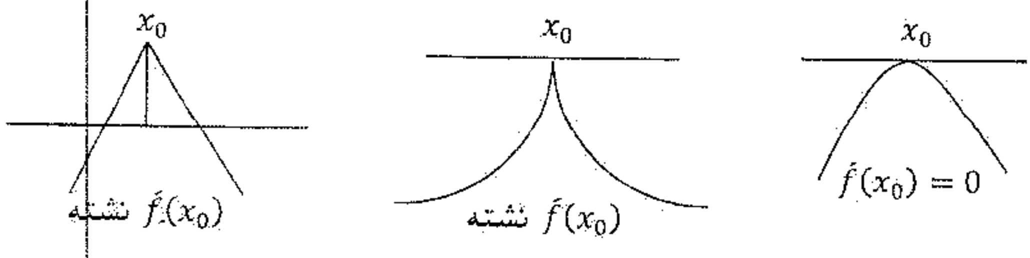
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 + \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\left(1 + \sqrt{3}\right)}{-2} = -2.73$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{2(-1)} = \frac{2 - \sqrt{3.4}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2\left(1 - \sqrt{3}\right)}{-2} = 0.73$$

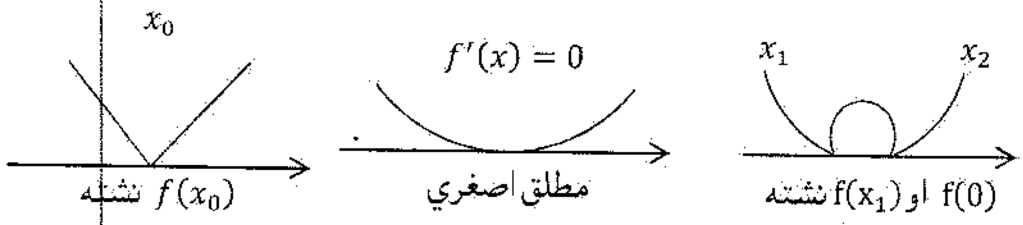
| $x$ | | $-3$ | | $-2.73$ | | $-1$ | | $0.73$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\frac{2}{15}$ | ↘ | min | ↗ | $0$ | ↗ | max | ↘ | $-2$ | ↘ |

د کسر اشاره دجذرو منځ کې مثبت او په خارج منفي ده.

مطلق اعظمي $Maximum$ د $f(x)$ په تابع کې که د هر $(x)$ لپاره $f(x) \leq f(x_0)$ وي نو $\left(x_0, f(x_0)\right)$ ټکي ته مطلق اعظمي وايي.




مطلق اصغري $Minimum$ که د $f(x)$ د تابع دتعریف د ناحیې د هر $(x)$ لپاره $f(x) \geq f(x_0)$ وي نو $\left(x_0, f(x_0)\right)$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



(c) ketabton.com: The Digital Library



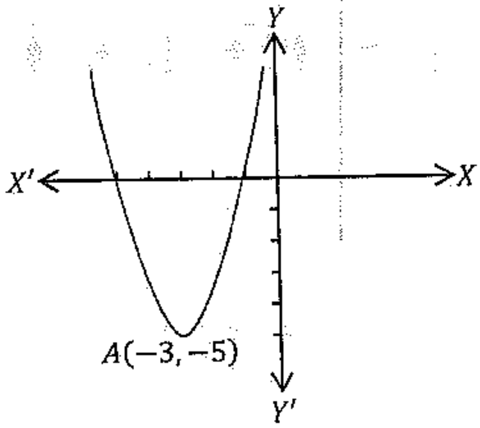
لمړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پیدا کړئ؟

حل:

$\acute{f}(x) = x + 3 \quad \because \acute{f}(x) = 0 \quad \therefore \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$

$A(-3, -5)$




دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ د تابع اعظمي او اصغري نقطې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3$$

په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

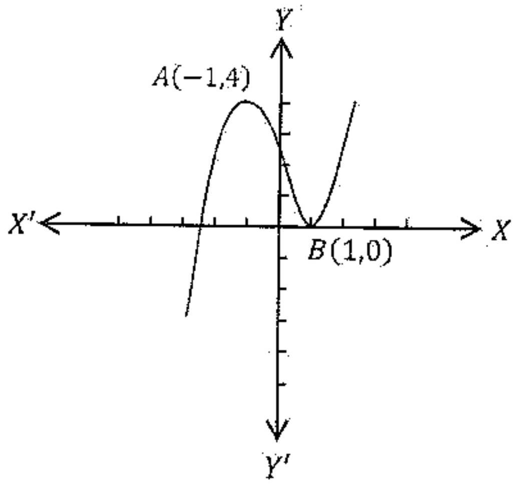
$\acute{f}(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$

اصغري ده $x_1 = 1 \quad \Rightarrow A(1,0)$

اعظمي ده $x_2 = -1 \quad \Rightarrow B(-1,4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## د تابع د ګراف د ترسیم طریقه:

1- د تابع اتصال مطالعه کوو.
2- د محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیدا کوو.
3- د تزاید او تناقص د انتروال د معلومولو لپاره د مشتق اشاري مطالعه کوو.
4- د ګراف مجانبونه معلوموو.
5- د دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو.
6- په جدول کې د تابع د ګراف وضعیت مطالعه کوو.
7- پیدا شوي نقطې د وضعیه کمیتونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو يې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \;\; \& \;\; x_2 = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د $(X\bar{X})$ د محورسره د تابع دګراف د تقاطع نقطې $A(-1,0)$ او $B(2,0)$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تا بع دګراف اعظمي یا اصغري نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$\acute{y} = 1 - 2x$$

$$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \ \Rightarrow -2x = -1 \ \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د $(x)$ دغه قیمت په تابع کې وضع کوو.د $(y)$ قیمت لاس ته راورو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه یا اعظمي ده یا اصغري ده.د تابع دویم مشتق پیدا کووکه $y'' > 0$ ؤاصغري نقطه ده اوکه $y'' < 0$ ؤ نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنګه چه همېشه منفي دې نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پیدا کول:

د تابع دویم مشتق نیسو او قیمت یې پیدا کوو بیا یې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعیه کمیات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{y} = 3x^2 + 18x - 6$$
$$y'' = 6x + 18$$
$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$
$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3,73)$ انعطاف نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویمه درجه تابع ګراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

دومین یې د حقیقي اعدادو سیټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کی تابع متمادي ده. د تناظر محور یې د اول مشتق پواسطه پیدا کیږي.

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محوردی.

د راس د نقطې د پیدا کولو لپاره د تناظر په محور کی د $x$ قیمت په تابع کی وضع کوو د راس د نقطېوضعیه کمیتونه لاس ته راځي.

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه یې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وُد تابع ګراف مقعر دی یعنی ګراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وُد تابع ګراف محدب دي یعنی ګراف اعظمي نقطه لري

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

2- د $X\bar{X}$ دمحور سره د تقاطع نقطه پیدا کوو:

$$y = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

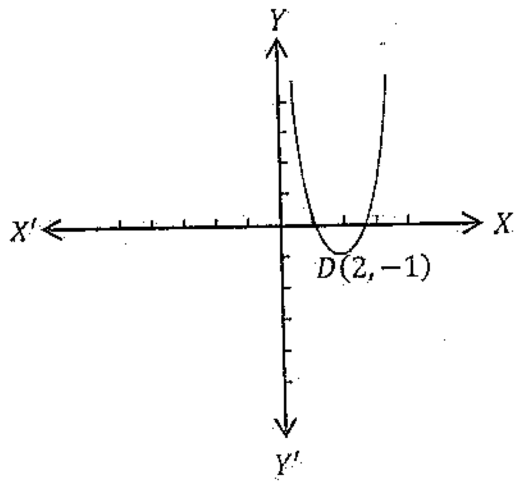

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$A(1,0) \quad , \quad B(3,0)$$

3- د $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع د تقاطع نقطه پیدا کوو.

$x = 0$
$y = 0 - 4 \cdot 0 + 3$
$y = 3$
$C(0,3)$

4- د بحراني نقطې دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو او د $(x)$ قیمت پیدا کوودا قیمت په تابع کې وضع کوو د $(y)$ قیمت لاس ته راځي د $(x)$ او $(y)$ یوه جوړه قیمتونه بحراني نقطه تعینوي بیا یي دویم مشتق پیدا کوو که $y'' > 0$ ؤ بحراني نقطه اصغري ده او که $y'' < 0$ ؤ نوبحراني نقطه اعظمي ده.

$\acute{f}(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow D(2,-1)$




دویم مثال: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ د تابع تحولات مطالعه اوګراف يي رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library


2- د XX́ سره تقاطع:

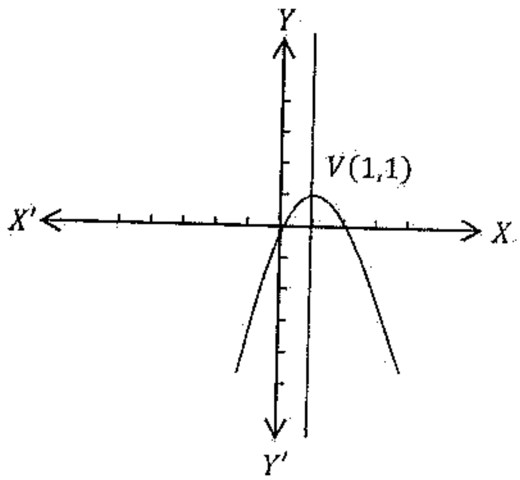
$f(x) = 0$
$-x^2 + 2x = 0$
$x(-x + 2) = 0$
$x_1 = 0$
$-x + 2 = 0$
$-x = -2 \Rightarrow x = 2$
$A(0,0)$ & $B(2,0)$

3- د YY′ سره تقاطع:

$x = 0$
$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
$C(0,0)$

4- بحراني نقطه يې پيدا كوو. نومشتق يې نيسو.

$f'(x) = -2x + 2$
$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$
$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$
$V(1,1)$



(c) ketabton.com: The Digital Library



## هوموګرافيک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوی وي.عمومي شکل يې دادی

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجانب:- $Asymptote$ : که د يوه مستقيم او يوه منحني تر منځ فاصله په لايتناهي کې صفر شي دا مستقيم ددی منحني مجانب دي.

مجانب د منحني لپاره لاربښود دي.

مجانب په درې قسمه دي.

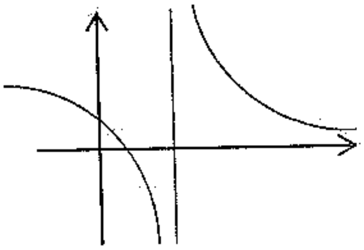
1- عمودي مجانب $(Vertical\ Asymptote)$

2- افقي مجانب $(Horizontal\ asymptote)$

3- مايل مجانب(Slant Asymptote)

1- عمودي مجانب:

که په يوه ثابت عدد کې د تابع ليميټ $(\infty)$ شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندې د $Y\acute{Y}$ د محور سره موازي رسميږي د تابع ګراف عمودي مجانب دی. يعنې که $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.



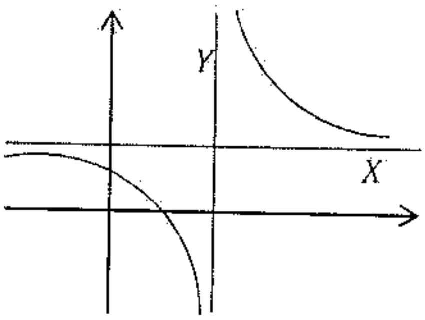
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- افقي مجانب:

که په لایتناهي کی دیوی تابع لیمیټ یو ثابت عدد ؤ نو هغه خط چه د دی ثابت عدد په ترتیب د $YY'$ د محور سره موازي رسمیږي د راکړشوي تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

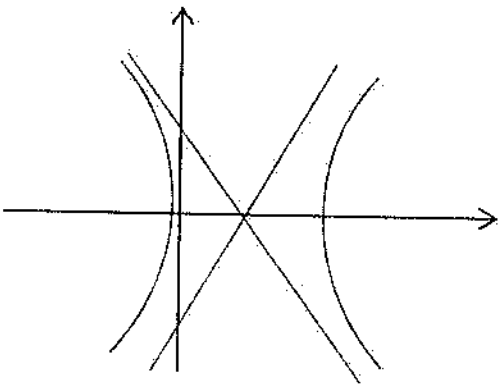
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د ګراف افقي مجانب دي.




3- مایل مجانب $Slant\ Asymptote$:

په کسري تابعګانو کی که دصورت درجه د مخرج د درجي څخه د واحد په اندازه ډیره وه نو دغه ډول تابعګانی مایل مجانب لري دمایل مجانب دترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



حل:

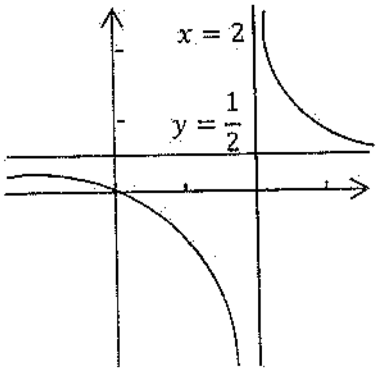
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2\cdot 2-4} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ عمودي مجانب دی.

مايل مجانب يې پيدا کوو.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}} = \frac{1+0}{2-0}\frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ افقي مجانب دی.




دويم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ؟

حل: مايل مجانب:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{2} \Rightarrow y = x+2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري ځکه د هرې تابع ګراف چه مايل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

دريم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل:

عمودي مجانب

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

بالاخره $x=-1$ او $x=2$ عمودي مجانبونه دي.

مايل مجانب نلري.

## د مجانب د ټاکلو عمومي لار:

1- که د $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموګرافيک تابع کې $(m)$ دصورت درجه او $(n)$ دمخرج درجه وي نو

الف: که $m<n$ وي نو د $(x)$ محورافقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي نو $y=b$ افقي مجانب دی $(b)$ د صورت اومخرج دمساوي درجووالا حدودضريبونو نسبت دي.

ج: که $m>n$ وي افقي مجانب نلري د مايل مجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج ددرجې څخه د واحد په اندازه ډېره وي مايل مجانب لري او افقي مجانب نلري.

مثال: $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزايد او تناقص په باب خپل نظر وليکئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{2\cdot x-1(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}=\frac{5}{x^2}$$
$$\acute{f}(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

تابع متزايده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library


انعطاف نقطه يې داسې پيدا کيږي.

$\acute{f}(x) = 0$

$3ax^2 + 2bx + c = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(x) = 0$

$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$

$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$

$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$

$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$

1- مثال د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$

$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

$\acute{f}(x) = 3x^2 + 6x$

$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$

$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$

$A(0,-4)$ اصغري نقطه ده.

$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$

$y_2 = 0$

$B(-2,0)$ اعظمي نقطه ده.

انعطاف نقطه پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0$

$6x + 6 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$

$C(-1,-2)$ انعطاف نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$y = 0$

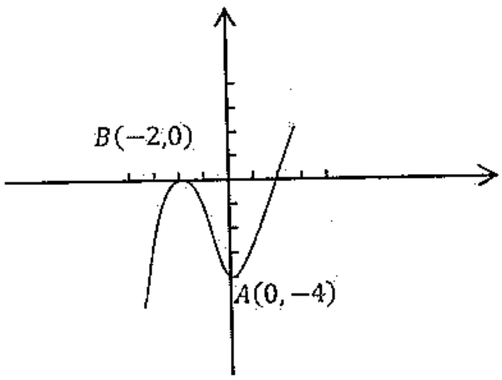
$(x-1)(x+2)^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{c} x - 1 = 0 \\ x = 1 \\ C(1,0) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} (x+2)^2 = 0 \\ x + 2 = 0 \\ x = -2 \\ D(-2,0) \end{array}\right\}$$

د $Y\acute{Y}$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو $x = 0$ فرضوو.

$y = 0^3 + 3 \cdot x^2 - 4 = -4$

$E(0,-4)$




دویم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = -x^3 + 3x^2$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$\acute{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 6x = 0 \ \Rightarrow -3x(x-2)$

$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ \Rightarrow x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

$f(x) = 0$

$-x^3 + 3x^2 = 0 \ \Rightarrow -x^2(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$O(0,0) \ \Rightarrow B(3,0)$

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

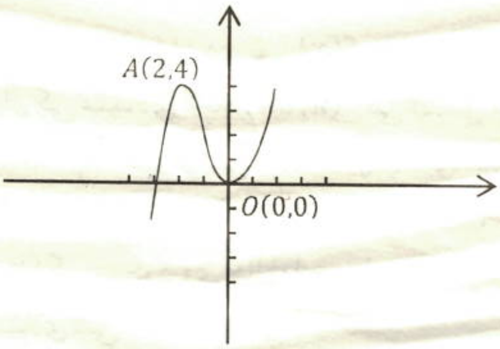
انعطاف نقطه پیدا کوو دویم جذر یي پیدا کوو.

$f''(x) = -6x + 6$

$x = 1$

$f(1) = 2$

$C(1,2)$

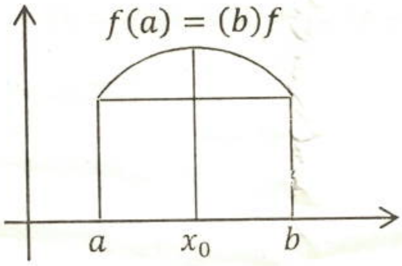



د رول قضیه: *Theorem of Rolle*:

که چېرى د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ انتروال کی متمادي وي او د $a < x < b$ په انتروال کی د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نود $a < x < b$ په انتروال کی $(x_0, f(x_0))$ یو تکی شته چه $\acute{f}(x) = 0$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library






ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي.نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- که تابع ثابته وي نو $\acute{f}(x) = 0$ دی.

2- که$f(x)$ تابع ثابته نه وي او $x_2, x_1 \in (a, b)$او $f(x_1) > 0$ وي نوتابع په $x_0 \in [a, b]$ نقطه کی $Maximum$ لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع یوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو کی $\acute{f}(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د$[a, b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د $Rolle$ قضیه پری تطبیق کړئ؟

حل: پوهیږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر $(x)$ لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي اوپه $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نود $Rolle$ د قضيي سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلاً د $(x_0)$ یوه نقطه باید موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنګه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلی اقلاً یو حل باید په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی دری ځله دا قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د $[a, b] = [-1,1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ په تابع باندی د $Rolle$ قضیه تطبیق کړئ؟

حل: دانټروال د پیل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذیره نده مګرد رول قضیه پری دتطبیق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او$f(0)$ تابع په $[-1,1]$ متمادي ده او د $[-1,1]$ په انټروال کی د $(x_0)$ یو عدد شته چه $\acute{f}(x_0) = 0$شي اوهغه $x_0 = 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y}(x) = \frac{\acute{u}(x)}{2\sqrt{u}}$ څخه استفاده کوو.

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \acute{f}(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

## د متوسط قیمت قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $(a,b)$ په انټروال کې دمشتق وړ وي نو د $(a,b)$ په انټروال کې د $(c)$ یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي. $f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$ یعنی $\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت :- $f(x) - \acute{f}(x) \cdot x$ په $g(x)$ ښیو:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \dots\dots\dots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \dots\dots\dots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرګندیږي چه $g(a) = g(b)$ دی نو درول دقضیې سره سم د $[a,b]$ په انټروال کې د $(c)$ یوداسې عدد شته چه $\acute{g}(c) = 0$ دی نو لیکو چه

$$\acute{g}(x) = \acute{f}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \acute{g}(c) = \acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\acute{g}(c) = 0$$

$$\acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې دمتوسط قیمت قضیه د $[a,b] = [1,3]$ په انټروال کې وڅېړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کې متمادي ده او د $(1,3)$ په انټروال کې د مشتق وړ ده نو د متوسط قیمت د قضیي سره سم د $(1,3)$ په انټروال کې یو $(x_0)$ شته چه

$$f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{36}{2} = 18$$

د $(c)$ دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 + 8 = 26 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{6}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{26}{6}} = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x = +\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل دی نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مګر $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1,3)$ په انټروال کې شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کیږي.

## د لوهپیتال قاعده:

که د کسري تابعګانو لیمیټ د $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوپیتال په طریقه کولای شو چه لیمیټ یې پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د تابع د مشتق دلیمیټ سره مساوي دی په همغه نقطه کې .که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود ؤ دویم مشتق یې نیسو په همدی ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کووتر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots\cdots$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4} = \frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4} = \frac{8+2-10}{4-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-4x+5x-10}{x^2-2^2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2)+5(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2} = \frac{2\cdot 2+5}{2+2} = \frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لمړی مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x+\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

دویم مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=4\cdot 3^3=4\cdot 27=108$$

دریم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

## دبحراني ټکو تطبيق:

1- داسې دوه عددونه پیدا کړئ چه د جمع حاصل يې (20) اود ضرب حاصل يې اعظمي وي؟

حل:

$x =$ اول عدد

$= 20 - x$ دویم عدد

$= f(x) = x(20-x) = 20x - x^2$ د ضرب حاصل

$f'(x) = 20 - 2x$
$f'(x) = 0$
$20 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow x = 10$
$f(10) = 20\cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$
$f(0) = 20\cdot 0 - 0^2 = 0$
$f(20) = 20\cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library


اعظمي نقطه $[10،100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يي (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t-2)(t-3)$ ده متوسط سرعت يي د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځني سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4-3} = \frac{2-0}{4-3} = 2$$

3- د کرې دحجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{د کرې مساحت} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{sphere}}{A_{Sphere}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ رابطه موجود ده د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم ليکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د يوې مستطيلي ځمکې محيط (200) دی اعظمي مساحت يي پيدا کړئ؟

حل:

$\text{د مستطيل طول} = x$

$\text{د مستطيل عرض} = y$

$\text{د مستطيل مساحت} = S$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$محیط = 2x + 2y = 200$

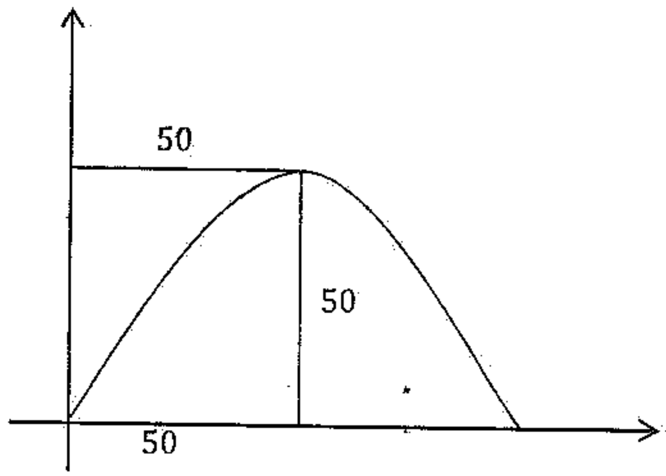
$محیط = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2 \quad ,D_f = IR$

د $[0.100]$ په انټروال کې دتابع اعظمي مساحت پیدا کوو.

$\acute{S} = 100 - 2x$

$\acute{S} = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$




6- د $(A)$ ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحني دپاسه حرکت کوي ووایاست چه څه وخت به د $(A)$ او مبداء تر منځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$

$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$

$\acute{d}_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$

$\acute{d}_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \frac{2x^4}{2} = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow x^4 = 4 \quad \Rightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

يو مربع القاعده مكعب مستطيل لروچه د درى واړه بعدونو مجموعه يي (24)ده اعظمي حجم يي پيدا كړئ؟

حل: دقاعدى اوږدوالى په $(x)$او ارتفاع په $(y)$ ښيو.

$$x + x + y = 24 \Rightarrow y = 24 - 2x$$
$$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$$
$$V = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$
$$\acute{V}(x) = 48x - 6x^2 \quad \because \acute{V}(x) = 0 \quad \therefore \quad 48x - 6x^2 = 0$$
$$x(48 - 6x) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \ \& \ x_2 = 8$$
$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$$
$$V(8) = 24 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3 = 1536 - 1024 = 512$$
$$V(12) = 24 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 = 3456 - 3456 = 0$$

د مكعب مستطيل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه يي $(8cm)$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# اولسم فصل

## انتیګرال Integral

انتیګرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي.

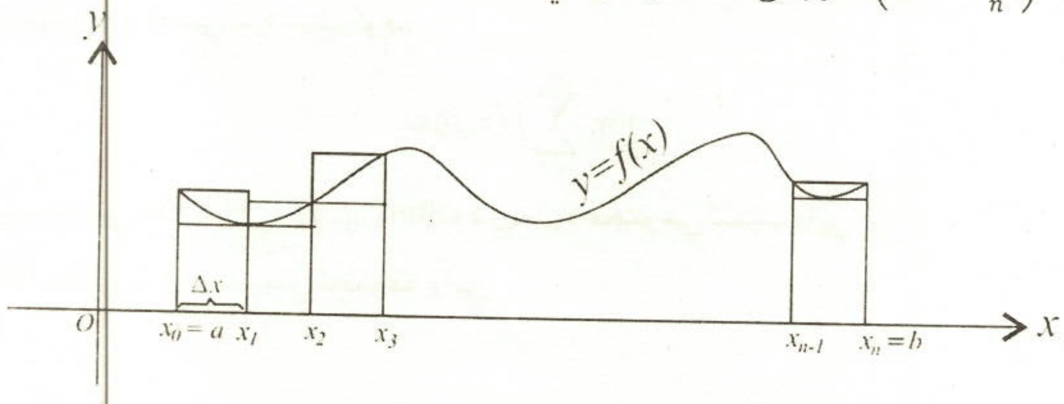
اوپه اصطلاح کی د مشتق دعملیي معکوسی عملیي ته انتیګرال وائي.یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقی ته انتیګرال وایي.

ارشیمیدس چه په (287 – 212)ق م کی یي ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او دجامداتو دحجمودمحاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیګرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه.ریمان (1866 – 1826) اولایبنز (1941 – 1875) معین انتیګرال کشف کړ.

دانتیګرال علامه لایبنز ( ∫ ) لیکلی ده. چه د ریمان دمجموعی (sum)د لمړي توري غزېدلی شکل دی.غېر معین انتیګرال لیووبل (1882 – 1809)کشف کړی دي. ګانوس (1855 – 1777) دانتیګرال اولین جدول ترتیب کړي دي.د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیګرال په باب زیات پرمختګ وشو.

## د ریمان مجموعه Riemann's sum:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده.دهغه سطحی د مساحت دپیدا کولو لپاره چه د $X\acute{X}$دمحور او $y = f(x)$ تابع دګراف تر منځ واقع دي که منظم هندسي شکل یي لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یي مساحت پیدا کیږي.او هندسي شکل یي نه لرلو نو د $[a\,,b]$ ترلی انټروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $\left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$ رابطی څخه لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library


د هرمستطیل دهر انتروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ لپاره په لاندې ډول دی.

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \cdots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \;, [x_1, x_2] \;, [x_2, x_3], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کې د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1},)\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښیو نو لیکو چه:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونه مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په $A$ وښیونو:

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

د رابطې د اطراف لیمیټ نیسو.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{N\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\,\Delta x$$

د ساندویچ د قضیې سره سم لیکوچه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

لیمیټ یعني $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وايي.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $[0.2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحني او ($xx'$) د محور تر منځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $[0,2]$ انټروال په څلورو برابرو برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطیل د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \quad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1] \ , \quad [x_1, x_2] \ , \quad [x_2, x_3] \ , \quad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \ , \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \ , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \ , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

د ګراف د ترسیم لپاره د $(x)$ قیمتونه په تابع کې وضع کوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو.

$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 \quad , \ A(0,1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25 \quad , \quad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

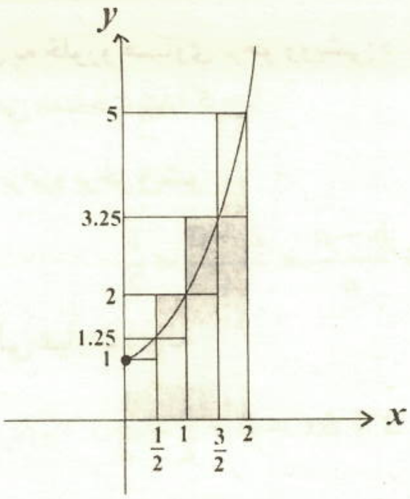
$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad , \quad C(1,2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25 \quad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \quad E(2,5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library






د لاندينيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2}$

$$= 3.75$$

د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه $= 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2}$

$$= 5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

دويم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ريمان د مجموعې ليميټ د $[1،10]$ په انټروال کې پيدا کړئ؟

حل: پوهيږو چه:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0,1,2,3,4,5 \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1 + \Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+x_i)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{9}{n}i\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9n^2+9n}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{11n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}\right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دویم مثال: د $[0,3]$ انټروال په شپږو مساوي برخو وویشئ او $y = 3x$ د مستقیم خط او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$x_0 = 0 \quad , x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad , x_2 = 3\Delta x = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}$

$x_3 = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \quad , x_4 = 0 + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$

$x_5 = 0 + 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3 \quad , x_6 = 0 + 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$

$[x_0, x_1] \quad , [x_1, x_2] \quad , [x_2, x_3] \quad , [x_3, x_4] \quad , [x_4, x_5] \quad , [x_5, x_6]$

$[0,1] \quad , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad , \quad \left[2, \frac{5}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right] \quad , \left[3, \frac{7}{2}\right]$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(0) = 0\,, \qquad A(0,0), \qquad f(1) = 3(1) = 3 \qquad B(1,3)$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right) \quad ,f(2) = 3\cdot 2 = 6 \;\Rightarrow D(2,6)$$
$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{2} \;\Rightarrow E\left(\frac{5}{2},\frac{15}{2}\right) ,f(3) = 3\cdot 3 = 9 \;\Rightarrow F(3,9)$$

## د انتیگرال مفهوم $Concept\ of\ Integral$:

انتیگرال دهغه تابع پیدا کول دي چه مشتق يي موجود وي يا د ريمان د مجموعی لیمیټ ته انتیگرال وايي. د انتیگرال علامه دا ( ∫ )ده چه د ريمان دمجموعی $Sum$ د لمړي توري غزېدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)\,dx$$

چه دلته $f(x)$ دانتیگرال تابع ده او $dx$ نظر $(x)$ ته د $f(x)$ دتابع د انتیگرال متحول دي.

## د انتیگرال اقسام:

انتیگرال په دوه قسمه دی.

1- غېرمعين انتیگرال

2- معين انتیگرال

### 1- غېرمعين انتیگرال $Indefinite\ Integral$:

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انتروال کی تعریف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع وي نود $F(x)+c$ دتابعګانو سیټ د $f(x)$ دتابع غېرمعين انتیگرال دی. اوداسی لیکل کیږي.

$$\int f(x)dx = \quad F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int xdx$ پیدا کړئ؟

حل:

$$\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}} dx = \int x^{-\frac{3}{7}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot x dx = \int \sqrt[8]{x^6} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c$$

$$= \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^8} + c$$

## د غیر معین انتیګرال خواص:

لکه څرنګه چه د تابعګانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیر معین انتیګرال هم ځانګړي خواص لري چه بې د ثبوته منل شوي دي.

1- که $(k)$ یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیګرال یې داسې پیدا کیږي.

$$\int k dx = k \int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که $a$ یو ثابت عدد او $f(x)$ یوه تابع وي نو:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\cdot\frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي د تابعګانو دمجموعې اوتفاضل انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې اوتفاضل سره مساوي دی.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال:

$$\int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي نو انتیګرال یې د ټولو حدونو د انتیګرالونو مجموعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)\, dx$$

مثال:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 + \int 9xdx + \int dx$$
$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + c$$

6- د دوه تابعګانو دحاصل ضرب انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چیری $f(x) = x + 1$ او $g(x) = x - 2$ وي

الف: لمړی یي ضربوو بیایي انتیګرال نیسو.

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx = \int [(x + 1)(x - 2)]dx$$
$$= \int (x^2 - x - 2)dx = \int x^2 dx - \int xdx - 2\int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

ب: د هری تابع انتیګرال پیدا او بیا یي ضربوو.

$$\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \int (x + 1)dx \cdot \int (x - 2)dx$$
$$= \left[\int xdx + \int dx\right]\left[\int xdx - 2\int dx\right]$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + c = \left(\frac{x^2 + 2x}{2}\right)\left(\frac{x^2 - 4x}{2}\right) + c$$
$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \neq \left(\frac{x^2 + 2x}{2}\right)\left(\frac{x^2 - 4x}{2}\right) + c$$

7- د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library


مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعګانې راکړشوي دي.

ثبوتوو چې د تابعګانو د خارج قسمت انتيګرال د تابعګانو د انتيګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دي.

$$\int (x^2 + 2x + 1)dx = \int x^2dx + \int 2xdx + \int dx$$

$$= \int x^2dx + 2\int xdx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$\int (1 + x)dx = \int dx + \int xdx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^2m + dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعګانو د انتيګرال پيدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5dx$ انتيګرال پيدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتيګرال پيدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2\int (1-2x)^{-\frac{1}{5}}dx = 2\cdot\frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2\left(-\frac{1}{5}+1\right)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^xdx = e^x + c$ پواسطه د انتيګرال پيدا کول:

مثال: $\int 4e^xdx = 4e^x + c$

د $\int a^xdx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتيګرال پيدا کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\int 7^{4x-3}dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3}dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3}dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

## معین انتیګرال *Definite Integral*

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $f(x)$ د تابع ریمان د مجموعې لیمیټ ته کله چه $n \to \infty$ او د فرعي انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \to 0$ نه وکړي نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې انتیګرال ته معین انتیګرال وایي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$(a)$ ته د انتیګرال لاندیني سرحد او $(b)$ ته دانتیګرال پورتني سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2dx$ معین انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثال : د $y = 3$ مستقیم او د $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

$\int_{-1}^3 3dx$ د مستطیل مساحت رابښیي.

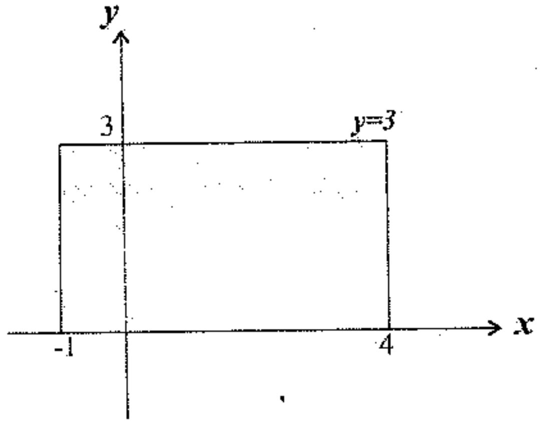
د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$

د انتیګرال پواسطه یي مساحت په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^{3} 3dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library






دریم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقیم او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ په $[0,3]$ انتیروال کې جوړیږي محاسبه کړئ

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$
$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال: د هغه سطحی مساحت پیدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د $[1,2]$ په انتیروال کې محصور وي؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$
$$A_2 = 1(-1) = -1$$
$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$
$$\int_1^2 (-2x+1)dx = \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2$$
$$= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


د معین انتیګرال خواص $Properties\ of\ definite\ integral$:

1- د $[a,b]$ په انټروال کی د ثابتی تابع انتیګرال یعني $\int_a^b cdx$ عبارت دی.

$$\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په $(n)$ مساوي برخو ویشویعنی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر $(x_i)$ لپاره د $i-$ ام انټروال څخه لرو.

$$f(x_i) = c \qquad , \qquad i = 1,2,3,\cdots n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد اویوی تابع د حاصل ضرب انتیګرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیګرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که د $[a,b]$ انټروال د $x_i$ چه $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ وي په $(n)$ مساوي برخو وویشونو د ریمان دمجموعی او انتیګرال دتعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = k \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^{2} 4dx = 4 \int_{-2}^{2} dx = 4[2-(-2)] = 4 \cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع او په $[a, b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = -\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$ انتیګرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\int_{2}^{3} 2xdx = -\int_{3}^{2} 2xdx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $a = b$ وي نو انټیګرال یې صفر دی.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2dx$ انټیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{3}^{3} 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعګانو د مجموعې او تفاضل انټیګرال په یوه انټروال کې د تابعګانو د انټیګرالو د مجموعې او تفاضل د انټیګرالو سره مساوي دی په همغه انټروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانو انټیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې نیول شوی دي نو:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) \pm g(x_i)\}\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \int_{a}^{b} f\,(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x_i)dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثالونه:

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx$$

$$= 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1 = 5$$

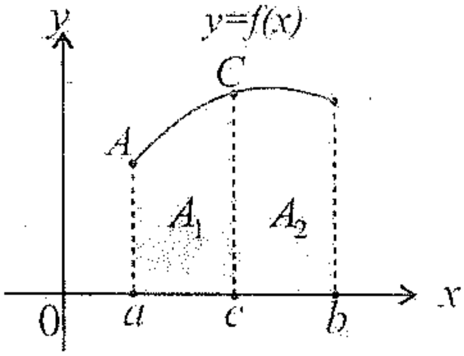
$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6- که چېرته د $f(x)$ یوه تابع چه په یوه تړلي انټروال چه د $a$ , $b$ او $(c)$ تکي پکې شامل وي او انټیګرال منونکي وي. نو د ټول انټروال انټیګرال د انټروال د ټوټو د انټیګرالو د مجموعې سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال د $[a,c]$ او $[b,c]$ په دوه انټروالو ویشو.




$A = \int_a^b f(x)dx$ د هغې سطحې مساحت دی چه د $f(x)$ د تابع د ګراف او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1 = \int_a^c f(x)dx \quad \text{او} \quad A_2 \int_c^b f(x)dx$$

د تابع د گراف د توټو مساحت دی. نو لیکو چه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال:-که $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x)dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \leq g(x)$ تابعګانی په $[a, b]$ کی انتیګرال منونکي وي او $g(x) \geq f(x)$ او $\Delta x \geq 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دې پس لیمیټ يې هم مثبت وي.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [g(x_i) - f(x_i)]\Delta x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \geq 0$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښیاست چه

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \leq \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}dx \leq \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \leq [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

$$(b - a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \leq (b - a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اطراف په $(b-a)$ ويشو.

$$1-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\leq 1+\frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\leq \frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6} \quad \Rightarrow -1<2$$

8- كه $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انتروال كې متمادي وي او $(m)$ اصغري نقطه او $(M)$ اعظمي نقطه وي نو

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

ثبوت :

$$\int_a^b mdx\leq \int_a^b f(x)dx\leq \int_a^b Mdx$$
$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$

دغه قضيه د انتيگرال د تخميني قضيي په نوم ياديږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}$ انتيگرال په تخميني توگه حساب كړئ؟

څرنگه چه د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انتروال كې متمادي ده او $M=f(0)=$
$e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو ليكو چه:

$$m(b-a)\leq \int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$$
$$e^{-1}(1-0)\leq \int_0^1 e^{-x^2}dx\leq 1(1-0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

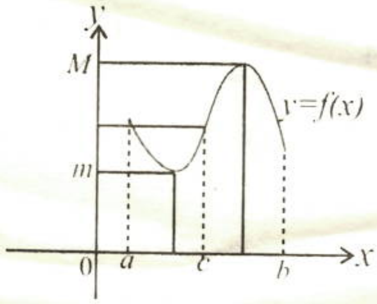

$$e^{-1} \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2} dx \le 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \le \int_0^1 f(x) dx \le 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a,b]$ کې متمادي وي نو د $(c)$ یو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$




ثبوت: د $a < b$ لپاره د $(m)$ او $(M)$ قیمتونه په ترتیب سره د $[a,b]$ په انټروال کې د تابع اصغري او اعظمي نقطې دي او $c \in [a,b]$ دی

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دی نو $m \le k \le M$ دی او د هر $(c)$ حقیقي عدد لپاره $a \le c \le b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته رابطه د متوسط قيمت درابطى په نوم ياديږي. $f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي.او حاصل ضرب يي د مستطيل مساحت دى. يعنى:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1,4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندى رابطه راکړ شوى ده د (c)قيمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{64-1}{3}\right] = \frac{63}{3} = 21$$

د $(x)$په عوض $(c)$ وضع کوواو د متوسط قيمت د قضيي څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

## دانتيګرال او مشتق اساسي قضيي:

**اوله قضيه :**

که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کى متمادي وي او$(x)$ په دى انټروال شامل وي که $x \in [a,b]$ نوليکلاى شو چه:

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) - F(x) - F(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)|_a^{x+h} - F(x)|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بنييو:

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F\left(t|_a^{x+h} - F(t)|_a^x\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه لیکو چه:

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$\acute{F}(x) = f(g(x)) \cdot \acute{g}(x)$$

$$\acute{F}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot(x^2+1)' = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$\acute{F}(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

دویمه قضیه:

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع اولنی تابع او د $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي په دې صورت کې لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثبوت: که $F(x)=\int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $\acute{F}(x)=f(x)$ دی د تابعګانو تفاضل په $(k)$ ښيو:

$$f(x)-F(x)=k\Rightarrow f(x)=F(x)+k$$

$$\acute{F}(x)=\int_a^b f(t)dt=f(x)=F(x)+k$$

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=k\cdots 1$$

د $(x)$ په عوض $(a)$ وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt-F(a)=k\Rightarrow 0-F(a)=k\Rightarrow k=-F(a)$$

د $k$ قیمت په (1) رابطه کې وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=-F(a)$$

د $(x)$ په عوض $(b)$ وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

اخري رابطه د $\int_a^b f(t)dt=[F(x)]_a^b$ شکل ښودل کیږي. دغه رابطه د اولنی تابع او $\int_a^b f(t)dt$ انتیګرال تر منځ رابطه ښیي چه د نیوټن (لایبنز) په نوم یادیږي.

مثال: $\int_0^1 x^2dx$ انتیګرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2\,dx=F(1)-F(0)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## په تعویضي طریقی سره د انتیګرال نیول:

[illegible] انتیګرال دلاس ته راوړلو لپاره يي

$u = g(x)$ او $\acute{F}(x) = f(x)$ بنیو $\frac{du}{dx} = \acute{g}(x)$ او $du = \acute{g}(x)dx$ بنیو:

$$\int_a^b f\{g(x)\}\,\acute{g}(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x \quad , \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right)du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{2-7}{14}\right] = -\frac{1}{5}\left[\frac{-5}{14}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3(1+2x^3)^5dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad , \quad x^2dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5dx = \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729-1}{6}\right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

پورته فارمول په غیر معین انتیګرال کی هم د تطبیق وړ دي.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$u = 1 - 4x^2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -8x \quad , \quad xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot xdx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}du\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دویم مثال: $\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = x^4 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 \quad , \quad x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3 \cos((x^4 + 2)dx) = \int cosux^3dx = \int cosu \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int cosudu = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2)\, dx = \frac{1}{4}\sin(x^4 + 2) + C$$

## قسمي انتیګرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتیګرال کې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ ښیو او دحاصل ضرب مشتق يي پيدا كوو.

$$(u \cdot v)' = \acute{u}v + \acute{v}u \quad \Rightarrow \acute{v}u = (u \cdot v)' - \acute{u}v$$

$$\int \acute{v}\, udx = u \cdot v - \int \acute{u}\, vdx$$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

پورته رابطه په قسمي طريقه د غير معين انتيګرال فارمول دی.

كه $(u)$ او $(v)$ تابعګانې د $[a, b]$ په انټروال كې تعريف شوی وي نود معين انتيګرال فارمول په قسمي طريقه په لاندی ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\int_a^b \acute{v}\,u\,dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\,dx \quad \text{V} \quad \int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

لمړی مثال : د $\int x\sin x dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$v = -\cos x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow dv = \sin x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = -x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x dx$$

$$h\int_a^b \acute{v}\,u\,dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\,dx$$

$$\int_0^1 -xe^x\,dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -e^1 + 0\cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

## دلوګاریتمي او اکسپوننشل تابعګانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$\acute{f}(x) = (\ln x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\ln\left(\frac{x}{x}+\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کیږي او څرنګه چه $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}$$

2- که $g(x)=a^x$ وي نومشتق یې دلاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\acute{g}(x)=a^x\,ln\,a$$
$$ln\,y=ln\,a^x=x\,ln\,a$$
$$(ln\,y)'=(x\,ln\,a)'$$
$$\frac{\acute{y}}{y}=1\cdot ln\,a+x\cdot 0=ln\,a$$
$$\acute{y}=y\,ln\,a=a^x\,ln\,a$$

## د اعشاري لوګاریتم مشتق:

د $f(x)=\log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له :

$$\acute{f}(x)=\frac{1}{x}log_a\,e$$

$$\acute{f}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u=\frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x}=\frac{1}{u}$ کیږي او کله چه $h\to 0$ تقرب وکړي نو $u\to\infty$ تقرب کوي.

$$(log_a\,x)'=\frac{1}{x}log_a\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=\frac{1}{x}log_a\,e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{log_a\,g(x)\}'=\frac{\acute{g}(x)}{g(x)}log_a\,e$$
$$\acute{f}(x)=\{log_a\,g(x)\}'=\{log_a\,g(x)\}'\cdot\acute{g}(x)$$
$$=\frac{1}{g(x)}log_a\,e\cdot\acute{g}(x)=\frac{\acute{g}(x)}{g(x)}log_a\,e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = \acute{x} \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 1 \Rightarrow \acute{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \acute{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\acute{y} = \acute{u} \cdot a^u \ln a$$

3- که په لوګاريتمي تابعګانو کې د لوګاريتم قاعده د طبعي لوګاريتم څخه اعشاري لوګاريتم ته بدله شي نول لوګاريتمي عددونه دصورت څخه مخرج ته اويا د مخرج څخه صورت ته ځي. لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\acute{u}}{u \log_e a} = \frac{\acute{u}}{u \ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \acute{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دويم مثال:

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم مثال:

$$f(x)=\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1)\}$$
$$f'(x)=\left(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1)\}'$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_a e\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right\}$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$$
$$=x\log_a e\left(\frac{x^2-1-x^2-1}{x^4-1}\right)=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\}$$

$$f'(x)=\left(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\}'$$

$$=\frac{1}{2}[\{\ln(x^2+1)\}'-\{\ln(x^2-1)\}']$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y=e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y'=(x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y=\sqrt[x]{2}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y=\sqrt[x]{2}$$
$$\ln y=\ln\sqrt[x]{2}=\ln 2^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x}\ln 2\right)'$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x}\cdot(\ln 2)' = \frac{0\cdot x - 1\cdot 1}{x^2}\cdot \ln 2 + \frac{1}{x}\cdot 0 = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln 2 \Rightarrow \acute{y} = -\frac{1}{x^2}\cdot \ln 2\cdot y = -\frac{1}{x^2}\cdot \sqrt[x]{2}\cdot \ln 2$$

شپږم مثال : د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x\ln x$$

$$(\ln y)' = (2x\cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2\cdot \ln x + 2x\cdot\frac{1}{x} = 2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1)\cdot y \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1)\cdot x^{2x}$$

اوم مثال :

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4+1}\log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4+1)\ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\frac{1}{x}\log_2 e}{\log_2 x}\log_3 e = \frac{1}{x\log_2 x\ln 2\ln 3} = \frac{1}{x\frac{\log_e x}{\log_e 2}\cdot \ln 2\ln 3}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{x\frac{\ln x}{\ln 2}\ln 2\ln 3} = \frac{1}{x\ln x\ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2+1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$\acute{y} = ?$

$x^2 + 1 = u$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{2x}{x^2+1}\log_{(x^2-1)} e$$

## د معکوسو تابعگانو مشتق:

که دوه تابعگانی یو د بل معکوس وي نو مشتقونه یې هم یو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

یا:

$$\acute{y}_{(x)} = \frac{1}{\acute{x}_{(y)}}$$

نو د ضمني تابعگانو د مشتق له مخی لیکو.

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = \acute{y}_y \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = 1 \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسی تابع له مخی پیدا کړئ؟

$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\ln a = a^x \ln a$$

## د معکوسومثلثاتي تابعگانومشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعگانو مشتق دلاندی رابطو پواسطه پیدا کیږي.

1- $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 2- $(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3- $(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ 4- $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library


-1

$$y = arc\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(arc\sin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-2

$$y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(arc\cos x)' = ?$$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2 y}} \Rightarrow (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-3

$$y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (arc\tan x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2 y}}$$

$$= cos^2 y = \frac{cos^2 y}{1} = \frac{cos^2 y}{sin^2 y + cos^2 y}$$

$$= \frac{\frac{cos^2 y}{cos^2 y}}{\frac{sin^2 y}{cos^2 y} + \frac{cos^2 y}{cos^2 y}} = \frac{1}{tan^2 y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

-4

$$y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{sin^2 y}}$$

$$= -sin^2 y = \frac{-sin^2 y}{1} = \frac{-sin^2 y}{sin^2 y + cos^2 y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \frac{\frac{-sin^2y}{sin^2y}}{\frac{sin^2y}{sin^2y}+\frac{cos^2y}{sin^2y}} = \frac{-1}{1+cot^2y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لمړی مثال:- د $y = (arc\tan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = 5(arctanx)^4\frac{1}{1+x^2}$$

دويم مثال:- د $y = \log_5(arc\tan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \{\log_5(arc\tan x)\}' = \log_5 u = \frac{\acute{u}}{u\ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arc\tan x\ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(arc\tan x\ln 5)}$$

دريم مثال:- د $y = arctane^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (arc\tan e^x)' = (arc\tan u)' = \frac{\acute{u}}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\acute{y}(0) = \frac{e^0}{1+e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د يوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی دمجموعې څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي.دواقعي کسرد قسمي کسرو پيدا کول دری حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسرد مخرج ضربي عوامل غير تکراري بېنومونه وي.لکه

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x^2+x-2)+B(x^2-3x-10)+C(x^2-6x+5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x - 2A - 10B + 5C}{(x - 5)(x - 1)(x + 2)}$$

$$4x^2 - x - 39 = (A + B + C)x^2 + (A - 3B - 6C)x - 2A - 10B + 5C$$

$A + B + C = 4$
$A - 3B - 6C = -1$
$-2A - 10B + 5C = -39$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x - 5} + \frac{3}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}$$

دویم حالت :

چه دکسر د مخرج په ضربي عواملو کې تکراري بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 2)(x - 1) + C(x - 2)}{(x - 2)(x - 1)^2}$$

$$3x^2 - 6x + 2 = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x - 2)$$

$$3x^2 - 6x + 2 = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - 3Bx + 2B + Cx - 2C$$

$$3x^2 - 6x + 2 = (A + B)x^2 - (2A + 3B - C)x + A + 2B - 2C$$

$A + B = 3$

$-2A - 3B$

$+C = -6$

$A + 2B - 2C = 2$

$$\frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2} = \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

دریم حالت:

چه د کسرد مخرج ضربي عوامل غیرتکراري ترینومونه وي.په صورت کې یې بېنوم لیکل کیږي.

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 4} + \frac{C}{x + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$= 5x^2+8x+9 = (A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C$$

$$A+C=5$$

$$A+B+2C=8$$

$$B+4C=9$$

$$A=3 \quad , \; B=1 \quad , \; C=1$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3X+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

**د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه:**

د $f(x) = e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرورچه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \;\; \& \;\; a \in IR$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \quad , \; \frac{du}{dx} = 0 \quad , \; du = 0 \cdot dx$$

$$v = a^x \quad , \; \frac{dv}{dx} = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad dv = \frac{a^x}{\ln a} dx$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لمړی مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}\cdot 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1}dx = ?$$

$$\int 3^{x+1}dx = \int 3^x \cdot 3dx = 3\int 3^x dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

## د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال:

که $(x \in IR^+)$ $f(x) = \ln x$ وي نو انتیګرال یې په لاندې ډول دی.

$$\int \ln dx = x\ln x - x + C$$

که $(x, a \in IR^+)$ $f(x) = \log_a x$ وي نو انتیګرال یې داسې پیدا کوو.

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\, dx = \int \ln x dx = x\log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \;,\; \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e \;,\; du = \frac{1}{x}\log_a e\, dx$$

$$v = x \;,\; \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x\, dx = x\log_a x - \int x\cdot\frac{1}{x}\log_a e\, dx = x\log_a x - \log_a e\int dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_A x dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \ln x dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

په تعویضي طریقه هم کولای شوچه د غیرمعین انتیګرال قیمت پیدا کړو.

لمړی مثال:

$$\int \frac{1}{2} e^{-2x-3}\, dx = ?$$

$$u = -2x - 3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -2 \quad , \quad dx = -\frac{1}{2} du$$

$$\int \frac{1}{2} e^{u}\left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^{u} du = -\frac{1}{4} e^{u} + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x + 2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دریم مثال: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int f(xdx) = \int e^{2x} dx = ?$$

$$2x = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x)dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u} du = \frac{e^{u}}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + C$$

څلورم مثال: د $f(x) = x\cdot \ln x^2$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)dx = \int (x \ln x^2)dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int f(x)dx = \int x \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2}u \cdot \ln u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

معین انتیګرالونه هم په تعویضي طریقه حلولای شو.

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = ?$$

$$u = 2x \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = -1 \;, & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1 & , \; u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}du = \frac{1}{2}[e^u]_{-2}^{2} = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_{1}^{2} 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$x = 1 \quad , \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2 \quad\quad u = x^2 = 4$$

$$\int_{1}^{2} 2x \ln x^2 dx = \int_{1}^{4} 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \int_{1}^{4} \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_{1}^{4} = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د قسمي کسروپواسطه دواقعي کسرد انتیګرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د یوه واقعي کسر انتیګرال پیدا کړو نو لمړی یي قسمي کسرونه پیدا کوو بیا د قسمي کسرو انتیګرالونه پیدا کوو او جمع کوو یې.

لمړی مثال : $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$
$$=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$7x-12=(A+B)x-4A-2B$$
$$A+B=7$$
$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \cdots\cdots\cdots 1$$
$$A=7-B \Longrightarrow 4(7-B)+2B=12$$
$$28-4B+2B=12$$
$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$
$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int \frac{-1}{x-2}dx+\int \frac{8}{x-4}dx$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int \frac{1}{x-2}dx+8\int \frac{1}{x-4}dx$$
$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$
$$=\ln\{(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\}=\ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library 

## د منحني سطحی د مساحت پیدا کول

### *Acconting area of curve plane*

هغه مستوي چه د $(X\acute{X})$ د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د گراف او $x = a$ او $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت یې دلاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی مثبت اومتمادي وي یعنی $y = f(x) \geq 0$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ دتابع گراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه پورتني طرف کی پروت دی او که $y = f(x) \leq 0$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ تابع گراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه کښتني طرف کی پروت دی.

لمړی مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د گراف او د $(Y\acute{Y})$ د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د گراف بحراني ټکی او د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د گراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$x = 4 - y^2$

$\acute{x} = 0 - 2y = -2y$

په بحراني نقطه دتابع مشتق صفر وي نو $\acute{x} = 0$ نو:

$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

د $(y)$ قیمت په اوله معادله کی وضع کوود $(x)$ قیمت لاس ته راځي

$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$
$x = 4$

$A(4,0)$ نقطه بحراني نقطه ده.د $Y\acute{Y}$ دمحور سره دتابع د گراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو او د $y$ قیمت لاس ته راځي

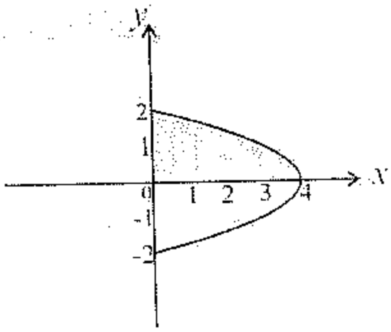
$x = 0$

$4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$B(0,2)$ $C(0,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library






$$A = \int_{-2}^{2} (4 - Y^2) dy = 2 \int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2 \left[ 4y - \frac{y^3}{3} \right]_{0}^{2}$$

$$A = 2 \left[ \left( 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - 0 \right] = 2 \left( 8 - \frac{8}{3} \right) = 2 \left( \frac{24 - 8}{3} \right) = 2 \left( \frac{16}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

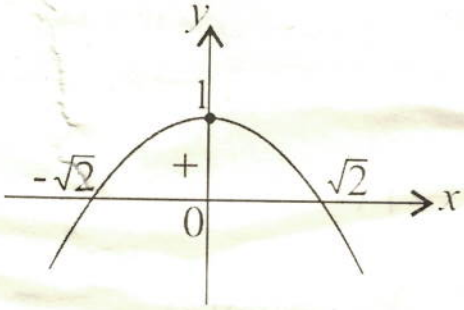
دویم مثال: د $(X\acute{X})$ دمحور او $Y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ دتابع دګراف پواسطه د محصورې سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$$
$$\acute{y} = -x$$
$$\acute{y} = 0 \qquad x = 0$$
$$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. $Y = 0$ فرضوو.

$$y = 0$$
$$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \qquad \Rightarrow x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2}, 0) \qquad\qquad C(-\sqrt{2}, 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2\int_{0}^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) dx = 2\left(\left[x - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{2}}\right)$$

$$A = 2\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}^3}{6} - 0\right) = 2\left(\frac{6\sqrt{2} - (\sqrt{2})^3}{6}\right) = 2\left(\frac{6\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{6}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

دریم مثال: د هغه سطحې مساحت پیدا کړئ چه د $y = x^2 - 3$ د تابع دګراف او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ محصوروي.

حل:

$y = x^2 - 3 \quad , \quad \acute{y} = 2x$

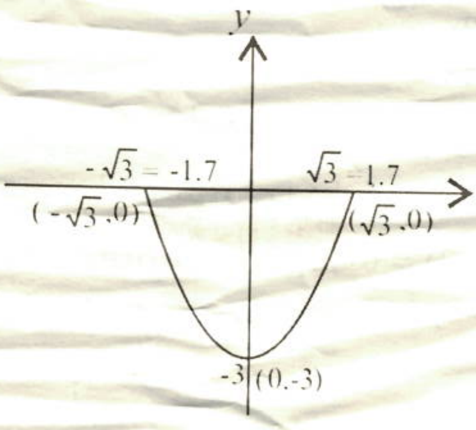
$\acute{y} = 0 \quad \therefore \; x = 0$

$y = 0^2 - 3 = -3 \quad , \quad A(0, -3)$

$y = 0$

$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$B(\sqrt{3}, 0) \qquad C(-\sqrt{3}, 0)$



(c) ketabton.com: The Digital Library



څرنګه چه ګراف يې د $y = x^2 - 3$ د محور لاندې واقع دی نو انتیګرال يې منفي دی. او څرنګه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت یې د سر حداتو دنیمایي څخه پیدا کوو.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = -2\int_{0}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)$$

$$= -2\left(\int_{0}^{\sqrt{3}} x^2 dx - 3\int_{0}^{\sqrt{3}} dx\right) = -2\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\left[\sqrt{3}^3 - 0\right] - 3[\sqrt{3} - 0]\right) = -2\left(\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7)$$

$$= -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع ګراف رسم کړئ او د منحني او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ فاصله پیدا کړئ؟

$$y = x^2 - 3x$$
$$\acute{y} = 2x - 3 \Rightarrow \acute{y} = 0$$
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$
$$y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4}$$

$A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ بحراني نقطه

څرنګه چه $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع د نقطې د پیدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \quad , x_1 = 0 \quad , O(0,0)$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad , \quad B(3,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4}$$

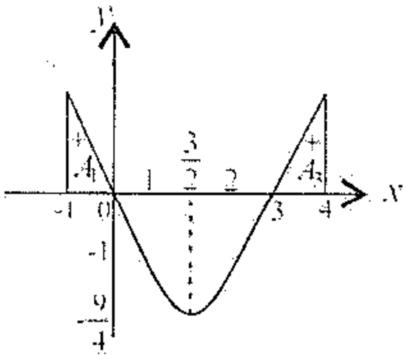
$$A = \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right) - \left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2\right\}\right] - \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right)\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 - \left\{\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right\}\right]$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right) + \left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$



پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ د منحني او $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = 2$ او $x = -1$ تر منځ واقع وي.

$\acute{y} = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$

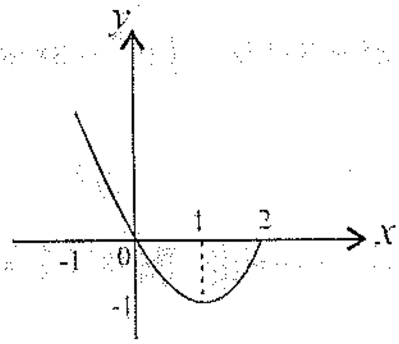
$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2\cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$A(-1,1)$ بحراني نقطه

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع تقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library






$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$
$x_1 = 0 \qquad , \quad O(0,0)$
$X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2 \quad , B(2,0)$

منحني د [1,2−] په انټروال کې د مبداء څخه تیریږي یوه برخه یي د [1,0−] په انټروال کې د ($X\acute{X}$) د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال یي مثبت دي. بله برخه یي د [0,2] په انټروال کې د ($X\acute{X}$) دمحور په لاندینۍ برخه کې واقع دی او انټروال یي منفي دي.

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\right\} - \left\{\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)$$
$$= -\left(\frac{-1-3}{3}\right) - \left(\frac{8-12}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{-4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

د هغه سطحو دمساحت محاسبه چه دمنحني خطو پواسطه محاصره وي:

*Accounting of area bounded by tow curves*

د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوه منحنیګانو پواسطه د محصور شوی سطحی دمحاسبی لپاره که $f(x) > g(x)$ وي یعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ دتابع د پاسه واقع وي د پاسنۍ تابع د انتیګرال څخه د لاندینۍ تابع انتیګرال منفي کوو د محصور شوي سطحی مساحت لاس ته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]d = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

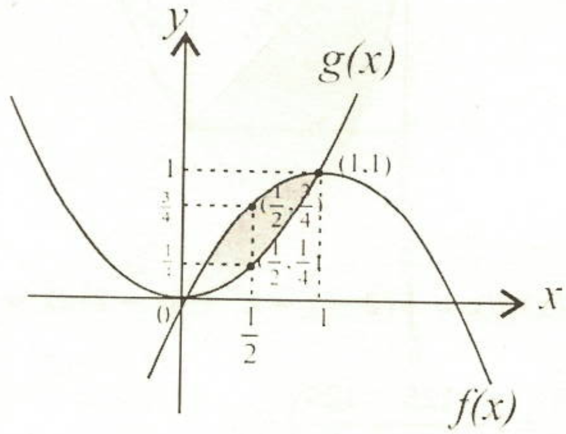

که د $G(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیګانو د ګرافونو تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل:- اول د منحنیګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$f(x) = 2x - x^2$
$g(x) = x^2$
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow$
$2x - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0$
$2x(1 - x) = 0$
$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$1 - x = 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1$




د منحنیګانو د تقاطع نقطی عبارت دي $A(1,1)$ او $O(0,0)$ دي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx =$$

$$\left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دويم مثال :د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{matrix} f(x) = x^2 - 6x + 2 \\ g(x) = 2 - x \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

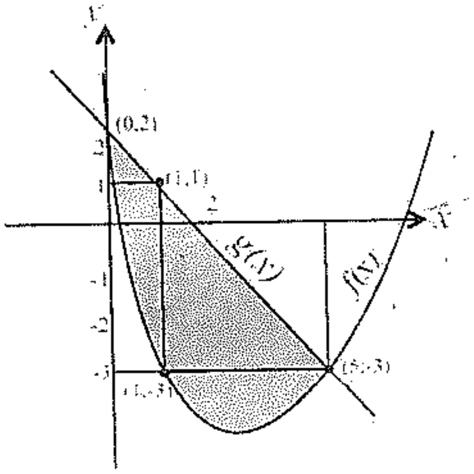
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0,2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5,-3)$$




$$A = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دريم مثال:- د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left.\begin{matrix} f(x) = -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) = x^2 - 2x + 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$
$-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$
$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$
$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$

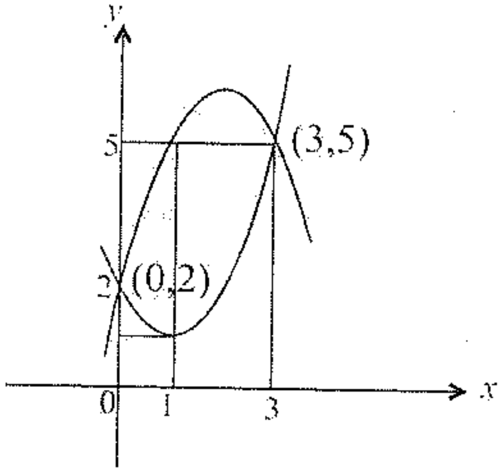
د منحنیگانو تقاطع نقطی عبارت دي $B(3,5)$ ، $A(0.2)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^3$$

$$= -\frac{27}{3} + 18 + 6 - 0 - \frac{27}{3} + 9 - 6 + 0 = 9$$



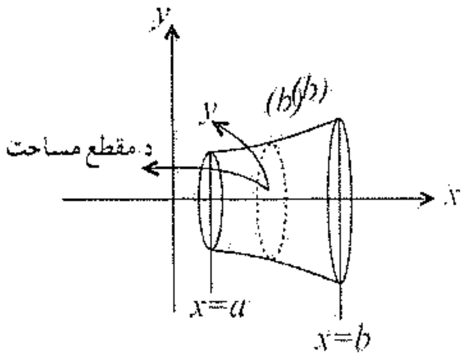
(c) ketabton.com: The Digital Library



## دکروي اجسامو دحجمو محاسبه:

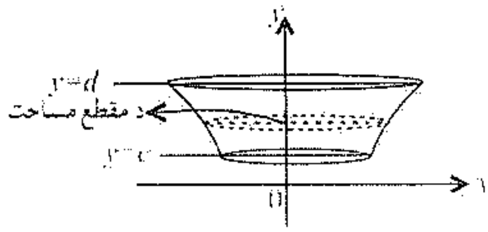
## *Accounting volume of Spherical things*

که د $y = f(x)$ دتابع ګراف منحني وي او د $x = a$ او $x = b$ دخطو منځ کی محصوروي د منحني خط د دوران په نتيجه کی استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع يي $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دايروي سطحی دي چه مساحتونه يي $A_{(x)} = \pi r^2$ دي او د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي دي شعاع يي $y = r$ ده د حجم فارمول يي د ريمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.




$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(x)}\Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع دمنحني ګراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور وي مساحت يي نظر د $(Y\acute{Y})$ محور ته د $A_{(Y)} = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع يي $\Delta y = d - c$ ده او شعاع يي $y = r$ ده حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.



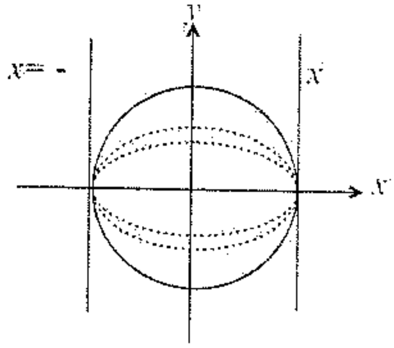

$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(y)}\Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi\{f(y)\}^2 dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د انتیګرال پواسطه د کرې د حجم پیدا کول

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخیږي کره لاس ته راځي. د دایرې معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمې کرې حجم د دایرې د معادلې څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو یې د کرې حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

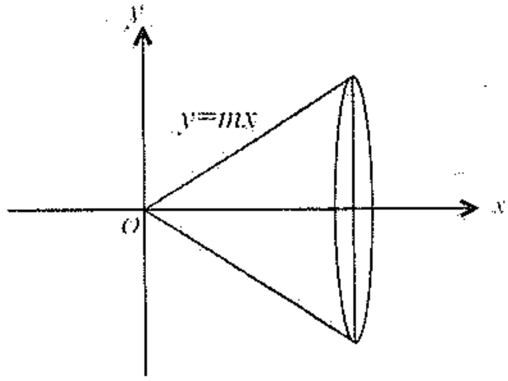
## د انتیګرال پواسطه د مخروط دحجم پیدا کول

که د مستقیم د یوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط دهمدغه ثابتې نقطې په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_{a}^{b} \pi y^2 dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library






$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$$y = mx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

د مخروط حجم $= V = \dfrac{\pi h}{3}(mh)^2$

د پورته شکل څخه معلوميږي چه د مخروط قاعده دايروي ده او شعاع يې د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي ده يعنى $y//r$ اود مخروط ارتفاع $(h)$ ده چه د $(x)$ په محور باندى منطبق ده يعنى $(x = h)$نود $y = mx$په رابطه کې يې قيمت ليکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

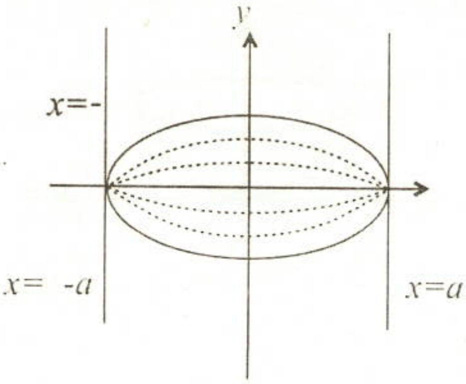
## د انتيګرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول:

هغه بيضوي چه مرکز يې د وضعيه کميتونو په ميداء واقع وي معادله يې عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

دنيمى بيضوي حجم پيدا کوو او دوه چنده کوو يې د ټولې بيضوي حجم لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{b^2}\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx=2\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=2\pi\left[\left(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right)-0\right]=2\pi\left[b^2a-\frac{b^2a}{3}\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{3ab^2-ab^2}{3}\right]=2\pi\left[\frac{2ab^2}{3}\right]$$

$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

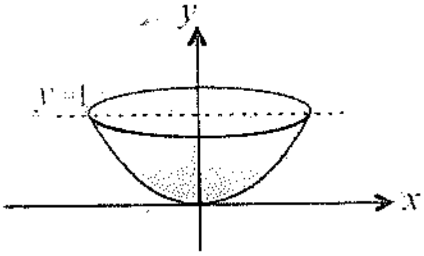
که چېرته د الپس محراقونه د $(Y\acute{Y})$ د محور پر مخ پراته وي حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y = x^2$ او $y = 1$ کرښې تر منځ پروت وي او د $(Y\acute{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

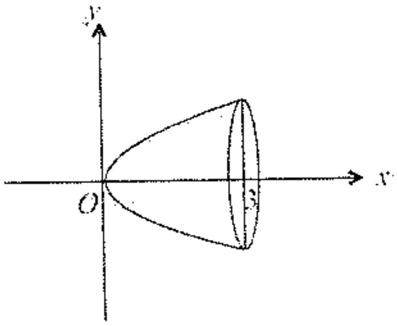





$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy$

$= \frac{1}{2}\pi y^2 |_0^1 = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$

دويم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ او $y = 3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پيدا کړئ؟




$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9\pi$$

تبصره:

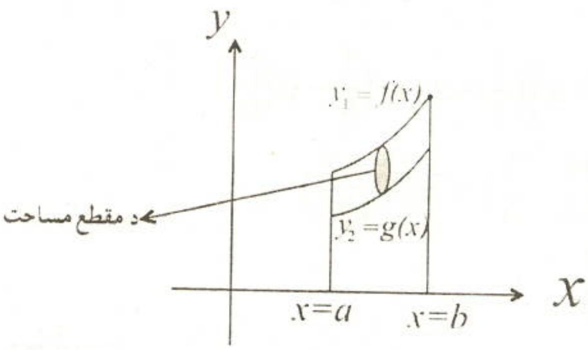
که $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابعګانی $[a, b]$ په انټروال کی متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنيګانو او د $x = a$ او $x = b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$\Delta x =$ د استوانی ارتفاع

$A(x) = \left(\text{استوانی د مقطع مساحت}\right) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library


د هغه استوانې د جحم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ دتابع ګراف د $g(x)$ د تابع د ګراف څخه پورته پروت وي

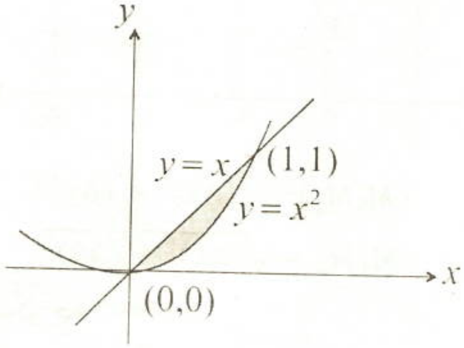



$$V = \int_a^b \pi({y_1}^2 - {y_2}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_1}^2 - {y_2}^2)dx$$

د هغه استوانی دحجم دفارمول پیدا کول چه د $g(x)$ دتابع ګراف د $f(x)$ دتابع د ګراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_2}^2 - {y_1}^2)dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحني او $y = x$ د کربښی تر منځ د $(x)$ د محور په شاوخوا تر منځ د دوران څخه لاس ته راځي.




$$\left.\begin{aligned} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \quad , \quad g(x) > f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

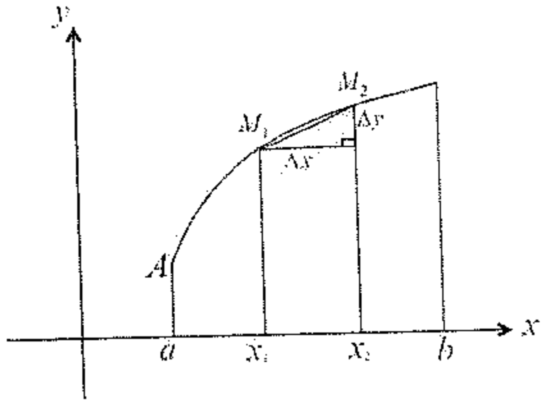
$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi \left(\frac{5-3}{15}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

## د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د $AM_1$ او $M_1M_2$ او $M_2B$ په دری ټوټو ویشو د $A, M_1, M_2$ او د $B$ د نقطو څخه په $(X\acute{X})$ عمودونه رسموو بیا $M_1$ د $M_2$ سره په یوه روښانه خط نښلوود $M_1$ څخه په $M_2X_2$ عمود رسموواو دتقاطع نقطه په $H$ ښیو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوودفیثاغورث دقضیي سره لیکو




$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم لیکو چه:

$$\acute{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \acute{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \acute{f}(x)\Delta t \qquad \Delta y = \acute{g}(x)\Delta t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\acute{f}(t)\Delta t\right)^2 + (\acute{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\left[\acute{f}(t)\right]^2 + [\acute{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعی څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\acute{f}(t)\right)^2 + \left(\acute{f}(t)\right)^2} \cdot \Delta t$$

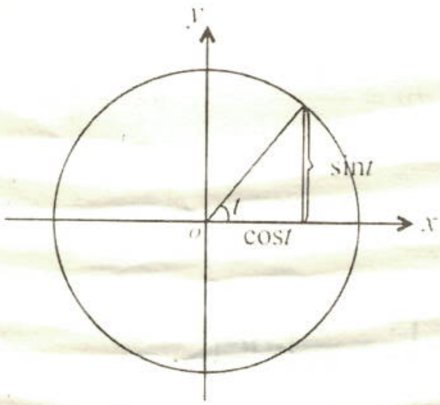
لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایری محیط محاسبه کړئ؟

د دایرې پارامتریک معادله په لاندی ډول ده.

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

که $0 \le t \le \pi$ نو د دایری نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^\pi \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2} \cdot dt$$




$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} \cdot dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r$ د دايرې نيمايي محيط

$2\pi r$ = د دايرې مکمل محيط

تبصره :

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \leq x \leq b$ انټروال کې راکړشوی ده د $(x)$ دپارامتر په پام کې نيولو سره د منحني د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ دمنحني دقوس اوږدوالی په $0 \leq x \leq 4$ انټروال کې پيدا کړئ؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad , \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad , du = \frac{9}{4dx} \qquad , \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\frac{4}{9}du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړ شوی دې د $(y)$ دپارامتر په پام کې نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ دمنحني د قوس اوږدوالي د $[1,4]$ په انټروال کې حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4} y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \qquad , \qquad u = \frac{9}{4} y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4} y + 1\right)^3}\right]_1^4 \qquad , \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}}\right]$$

## تفاضلي معادلې (*Differential Equations*):

هر هغه مساوات چه د يوی تابع مشتق او يوياڅو مستقل اوغېرمستقل متحوله پکی موجود وي تفاضلي معادلی بلل کيږي. لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 9y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دغه تفاضلي معادلی ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.

که په يوه تفاضلي معادله کی ديوه غیرمستقل متحول معمولي مشتق نظرمستقل متحول ته ونیول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \quad , \ (4x + y)dx + xdy = 0 \quad , \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زیاتومستقلومتحولو ته ونیول شي دغسی ډیفرینشیال معادلی ته جزئي یا یوطرفه ډیفرینشیال معادلې وايي. لکه:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5\frac{\partial u}{\partial y}$$

د ديفرينشيال ترتيب:

ديوی افادی دمشتق نیولو شمېرې ته د ديفرينشيال معادلی ترتيب وايي.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 4x$$

خرنګه چه دافادی څلورم مشتق نیول شوی دی نو د ديفرينشيال ترتيب $(4)$ ده مشتق نیول د $(d)$ دتوان څخه معلومیږي

د ديفرينشيال معادلی درجه:

د مشتق دلوړ ترتيب توان ته د ديفرينشيال معادلی درجه وايي.

که د ديفرينشيال معادلی توان کسري وي. توان يي بايد په صحيح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{(y''')^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني معادلې درجه (2) ده:

د $y''' = \sqrt{4+y'}$ یا $y'''' = \sqrt{5x+3y}$ معادلو درجه یوه ده.

کله کله یوه دیفرینشیال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2\frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x)\frac{d^2y}{dx^3} - \cos xy = 0$$

دپورته معادلې درجه معلومه نه ده.ځکه چه د $(y)$ نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کې ده نو نه شو کولای چه دپولینوم په شکل یي ولیکواونه یي مشتق پیدا کیږي.

## خطي دیفرینشیال معادلې $Linear\ Differential\ equation$

هغه دیفرینشیال معادله ده چه د $(y)$اول مشتق یي موجود وي او د $(y)$ او $(y')$ دضرب حاصل یي معدوم وي. لکه:

$$2\frac{d^2y}{dx} + 5\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - x^2y = 3x$$

هغه دیفرینشیال معادلې چه خطي نه وي د غیرخطي معادلو یا $(non-linear\ equation)$ په نوم یادیږي. لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4y^2 = 0 \qquad (1 \neq \text{د } y \text{ توان})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\cdot\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sin xy = 0$$

$$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2\frac{d^2y}{dx^2} + 3y = 0$$

ځرنګه چه د دغه معادلو پروګرام د لیسې د سویئي څخه لوړ دی د عالي ریاضیاتو په مستقل کتاب کې د دیفریشیال معادلو د تفصیل تصمیم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفیق غواړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

# احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

# اتلسم فصل

## احصائیه

احصائیه په لغت کی سرشماری ته وایي.

او په اصطلاح احصائیه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي کوي.

قاعده یې داده چه نفوس ، حاصلات،او نور شیان محاسبه کوي او بیایي د عددو په شکل لیکي.

احصائیه ډېر قسمونه لري لکه اقتصادي احصائیه ،اخلاقي احصائیه ،سیاسي احصائیه ،د نفوسو احصائیه او داسې نور.

داتا *Data*:

راټول شوو معلوماتو ته داتا وایي.

## د اطلاعاتو د راټولو طریقه:

اطلاعات معمولاً په څلورو طریقو راټولیږي

1- د پوښتنو پواسطه

2-دلیکنو پواسطه

3- د لیدنې پواسطه

4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

که وغواړو چه د یوې کورنۍ د عایداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو که عایدات لږ وي کولای شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د لیکنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که د یوې کورنۍ عایدات زیات وي په ذهن کی یې حفظ مشکل وي نودلیک پواسطه یې دعایداتو اطلاعات راټولوو اوپه راجستر کی یې لیکو.چه د عایداتو اطلاعات وساتل شي او دمنځه لاړ نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



3- د ليدنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د یوه شاګرد نمرو په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طریقه داده چه نتایج یا اطلاعنامه وکتل شي او دنوموړي د نمرو په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربې پواسطه داطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً دیوه مرکب جسم داجزاؤ د ښه معلوماتو لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتیا وړ اطلاعات ترې لاس ته راځي.جامعه بلل کیږي .

پوښتنه: د جامعې د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وایي.

نمونه: دجامعې هغه برخه ده چه د جامعې د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره ترې پوښتنې کیږي او د جامعې خواص پکې موجود وي .لکه یو موټې وریجې د یو ګدام وریجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

دپه یوه صفت موصوف شیانوڅخه د یوې برخې ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه باید لاندې درې صفات ولري.

1- د نمونې دغړي په توګه د یوه شي یا یوه کس ټاکل باید امکان ولري.

2- تر ټاکنې د مخه باید د نمونې د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونې ټول غړي باید په نمونه کې برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي اوکه نه. مثلاً که د دولت په مامورینوکې د ښوونکو معاش دوه چنده شي نودا پېښه یوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه یې:

که په یوه ټولنه کې د یوې موضوع په باب راټول شوي معلومات یا اطلاعات د یوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع یوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library


1- کیفي تصادفي متحول
2- مقداري تصادفي متحول

1- کیفي تصادفي متحول:

چه معلومات یې په توصیفي ډول بیانیږي عدد ته ضرورت نه لري.لکه د کارګرانو د سواد اندازه ، یا د یوه کلي دیندارهٔ خلک

2- مقداري تصادفي متحول :

هغه متحول دی چه د اطلاعاتو معلومات یې په شمېر سره کیږي. او په دوه ډوله دی.

الف. متصل مقداري تصادفي متحول ب. منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول :چه معلومات یې په عدد سره کیږي او د پرلپسی عددو تر منځ یې عدد پیدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسی عددو تر منځ یې عدد موجود وي.

دفریکونسي جدول *Table of frequncy*:

هغه جدول دی چه د داتاګانو معلومات پکي ترتیب شوی وي.که جدول په عمودي ډول ترتیب شوې وي دجدول د چپ طرف ستون داتاګاني یا معلومات ښیي او دښي طرف ستون یې د داتاګانو فریکونسي ښیي.لکه درنګونوجدول چه چپ طرف رنګونه یا داتا ښیي اوښې طرف فریکونسي ښیي.او که جدول په افقي ډول ترتیب شوی وي اول سطر د داتاګانو نمایندګي کوي اودویم سطر د هری داتا فریکونسي ښیي.

| دکورنی غړي | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | مجموعه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| دکورنی شمېر | 4 | 7 | 9 | 8 | 6 | 2 | 3 | 1 | 40 |

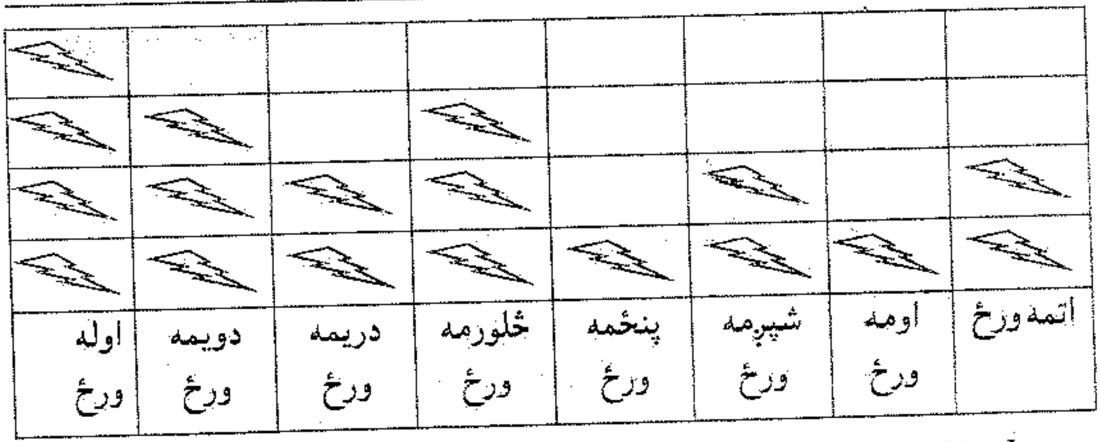
انځوریز ګراف یا تصویري ګراف

که په راکړشوو معلوماتو باندی د ښې پېژندګلوی لپاره شکلونه یا سمبولونه په یوه جدول کی استعمال شي دغه ګراف د انځوریز ګراف په نوم یادیږي.

دشکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زیاتی اری خرڅی کړي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library






موډ $Mode$:

دراټول شوو معلوماتو زیاتې فریکونسۍ ته موډ وایي.

موډ د مالونو په خرڅولو کې ، د رایو په اچولو کې ، د امتحان په نمرو او داسې نورو شیانو کې استعمالیږي.

اوسط $Mean$:

د اعدادو د مجموعې اوشمېر نسبت ته اوسط وایي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

مثال: یو دکاندار په اوله ورځ څلور کتبونه په دویمه ورځ پنځه کتبونه په دریمه ورځ شپږ کتبونه خرڅ کړي دي ووایاست چه په اوسط ډول یې د ورځې څو کتبونه خرڅ کړیدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{4 + 5 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول:

هغه جدول دې چه په هره طبقه کی د داتاګانوشمېر راښيي.

مثلاً دیوه ټولګي د شاګردانو د رياضي دمضمون نمری په یوه جدول کی ليکل شوی دي دا نمری په ګروپو ويشو او په هرګروپ کی دشاملو نمرو شمېرليکو په دغه شمېرکی زيات عدد ته د داتا کثرت وايي . اودی جدول ته د داتاګانو دکثرت جدول وايي که په جدول کی د داتاګانو دکثرت عدد کوچنی يا صفر وي. دجدول جوړول فايده نه کوي.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | 25 | 30 | 35 | 48 | 67 | 59 | 51 | 58 | 78 |
| 62 | 77 | 48 | 56 | 75 | 78 | 72 | 71 | 56 | 43 |
| 54 | 53 | 57 | 63 | 72 | 70 | 42 | 55 | 47 | 20 |
| 59 | 40 | 62 | 12 | 75 | 26 | 76 | 72 | 63 | 56 |

جدول يي داسی جوړيږي:

| نمرې | شمېر |
|---|---|
| 0 - 9 | 0 |
| 10 – 19 | 1 |
| 20 - 29 | 3 |
| 30 - 39 | 2 |
| 40 - 49 | 7 |
| 50 - 59 | 11 |
| 60 - 69 | 5 |
| 70 - 79 | 11 |

## د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه:

په یوه طبقه کی کوچني عدد ته ټيټ سرحد اوغټ عدد ته لوړسرحد وايي.هغه داتاګانی چه په یوه طبقه کی راځي د طبقی د وسعت په نوم يادېږي.د یوی طبقی د وسعت دپيدا کولو دطبقی سرحدات يو دبل څخه منفي کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| د لمړی طبقې وسعت | 50 − 0 = 50 |
| د دویمې طبقې وسعت | 60 − 50 = 10 |

ډله ایز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هری میاشتې د رخصتی ورځو ته کثرت ووایو نود ټول کال د رخصتیو مجموعه ډله ایز کثرت یا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو کثرت}}$$

مثال: په یوه ازموینه کی د دوه ټولګیو نمری په لاندی جدول کی راوړل شوي دي دا ټولګي د نمرو په لحاظ پرتله کړئ؟

| د الف ټولګی | مطلق کثرت |
|---|---|
| 10-30 ضعیف | 6 |
| 30 -50 متوسط | 10 |
| 50 -70 ښه | 4 |

| د ب ټولګی | مطلق کثرت |
|---|---|
| 10 -30 ضعیف | 19 |
| 30 -50 متوسط | 25 |
| 50 -70 ښه | 16 |

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل: د دواړو ټولګیو نسبي کثرت پیدا کوو

| د الف ټولګی | مطلق کثرت | نسبي کثرت | د نسبي کثرت فیصدي |
|---|---|---|---|
| 10- 30 | 6 | $\frac{6}{20}$ | 30% |
| 30-50 | 10 | $\frac{10}{20}$ | 50% |
| 50- 70 | 4 | $\frac{4}{20}$ | 20% |

| د ب ټولګی | مطلق کثرت | نسبي کثرت | د نسبي کثرت فیصدي |
|---|---|---|---|
| 10-30 | 19 | $\frac{19}{60}$ | 31.6% |
| 30-50 | 25 | $\frac{25}{60}$ | 41.6% |
| 50=70 | 16 | $\frac{16}{60}$ | 26.6% |

## میله اي ګراف

که د هری طبقی ګراف داسې رسم شي چه هر واحد یي یوه مربع وښودل شي اومربعګانی یو پر بل کېښودل شي دغه ګراف ته میله یي ګراف وایي.

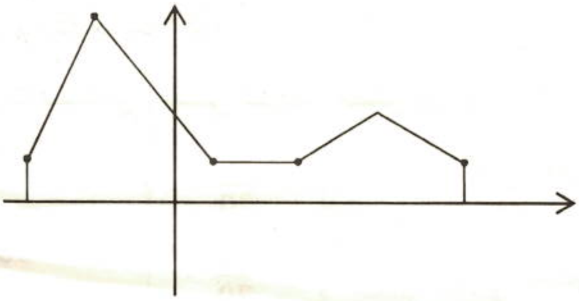
مثلاً دخو کلونو دپنبی د حاصلاتو ګراف یا درنګونو ګراف چه هره مربع په یوه رنګ خوښوونکي دلالت وکړي.

## دمنکسری کرښی ګراف:

داتا ګانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیتونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل یي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه ګراف ته د منکسری کرښی ګراف وایي

(c) ketabton.com: The Digital Library





## د گسسته یا غیر متصلو داتا گانو اوسط:

داتاگانی جمع کوو اود داتاگانو په شمیر یي ویشود داتاگانو اوسط په لاس راځي.د داتاگانو دتکرار په صورت کی د مکرری داتاگانی په فریکونسي کی ضربوو او جمع کوو یي د داتاگانو په شمیر یي ویشود داتاگانو اوسط په لاس راځي.که د داتاگانولمړی گروپ په $x_1$ او فریکونسي یي په $f_1$ وښیو او اوسط په $\acute{x}$ وښیو نود اوسط فارمول په لاندی ډول دی

$$\acute{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{n}$$

مثال :د یوه شرکت دعایداتو اندازه په لاندی ډول ده.

| دنده | د افغانیو په حساب میاشتنی عاید |
|---|---|
| رئیس | 50000 |
| دوه مرستیالان | 40000 |
| منشي | 20000 |
| دری متخصصان | 30000 |
| پنځه مامورین | 25000 |
| دوه خانه سامانه | 10000 |

د شرکت مدیر وایي چه بایداوسط عایدباید 30000 وي وواياست چه دادعا درسته ده

| $job$ | $f$ | $x$ | $f \times x$ |
|---|---|---|---|
| رئیس | 1 | 50000 | $1 \times 50000 = 50000$ |
| مرستیال | 2 | 40000 | $2 \times 40000 = 80000$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | | | |
|---|---|---|---|
| منشي | 1 | 20000 | $1 \times 20000 = 20000$ |
| متخصصین | 3 | 30000 | $3 \times 30000 = 90000$ |
| مامورین | 5 | 25000 | $5 \times 25000 = 125000$ |
| خانه سامان | 2 | 10000 | $2 \times 10000 = 20000$ |

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\acute{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده .

## د جدول په مرسته د نښتتو داتاګانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاګانو ته نښتتی داتاګانی وایي.که د دغه داتاګانوفریکونسیانی مختلفی وي.هغه داتاګانی چه فریکونسیانی یي نژدی وي په یوه ګروپ کی لیکواو د ګسسته داتاګانو د فارمول په څېر یي اوسط پیداکوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بوریو کی واچول اوویي ویل چه د بوریو وزن په اوسط ډول اوه منه دي.د ښاروالی له خوا بوری بیا وتلل شولی چه نتیجه یي په لاندی جدول کی درج ده.

| د هری بوری وزن | د بوریو شمېر |
|---|---|
| 6 - 6.5 | 11 |
| 6.5 - 7 | 14 |
| 7 - 7.5 | 12 |
| 7.5 - 8 | 8 |

د هر ګروپ اوسط د بوریو په شمېر کی ضربوو.اوسط یي پیدا کوو.

| دبوریو وزن | دبوریو شمېر |
|---|---|
| 6.25 | 11 |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| 6.75 | 14 |
| 7.25 | 12 |
| 7.75 | 8 |

د بوريووزن $x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8$

$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$

د بوريو شمېر $n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45$

په اوسط ډول د بوريو وزن $\acute{x} = \frac{312.25}{45} = 6.93\overline{8}$

## د داتاګانو د ګېډۍ کولو طريقه

که د داتاګانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې ؤ کولای شو چه د داتاګانو څخه ګېډۍ جوړه کړو.

لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127

115 – 120

120 – 128

128 – 143

وسعت:

د لوئي داتا او کوچنۍ داتا تر منځ فاصلې ته وسعت وايي.

## د ګېډۍ اوږدوالی:

که د داتاګانو وسعت دګېډيو په شمېر ووېشل شي دګېډۍ طول يااوږدوالی لاس ته راځي.

## ميله ئي ګراف:

که مربعګانی يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي .ميله ئي ګراف لاس ته راځي.

## د متصلو داتاګانو دسته بندي:

هم جنسه داتاګانو ته متصلې داتاګانی وايي . د دسته بندۍ لپاره يي هغه داتاګانی چه د واحداتو اندازه يي نژدې وي په يوه ګېډۍ کی ليکو.

د (15) ذده کوونکواوږدوالی په لاندی ډول ليکل شوی دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 153 | 148 | 151 | 138 | 136 |
| 142 | 131 | 141 | 141 | 139 |
| 152 | 159 | 139 | .132 | 146 |

پورته داتاګانو څخه ګېډۍ جوړې کړئ.

| د ذده کوونکو دونی اوږدوالی | دذده کوونکو شمېر |
|---|---|
| 130 − 140 | 6 |
| 140 − 150 | 5 |
| 150 − 160 | 4 |

وزني اوسط يا منځنۍ قيمت:

هره داتا په مربوطه ضريب کې ضربوو او د داتاګانو په مجموعه يې ويشو.

$\acute{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ وزني اوسط

مثال : د خينو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي .لکه A, B. C, D, F چه $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري يو محصل لاندې لمبرې اخيستې دي.

| مضمون | نمرې | د کريديتونو شمېر |
|---|---|---|
| رياضيات | $B$ | 3 |
| فزيک | $A$ | 3 |
| کيميا | $C$ | 2 |
| بيولوژي | $D$ | 3 |
| ژبه | $F$ | 1 |

د محصل د نمرو اوسط څو دې؟

حل:

| مضمون | حرفي نمرې | $x =$ د کريديتوشمېر | $w =$ عددي لمبرې | $w \cdot x$ |
|---|---|---|---|---|
| رياضيات | $B$ | 3 | 3 | $3 \times 3 = 9$ |
| فزيک | $A$ | 3 | 4 | $4 \times 3 = 12$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| کیمیا | C | 2 | 2 | $2 \times 2 = 4$ |
| بیولوژي | D | 3 | 3 | $3 \times 3 = 9$ |
| ژبه | F | 1 | 4 | $4 \times 1 = 4$ |

د کریدیتونو شمیر $= n = 12$

$$\text{د نمرو اوسط} = \bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

## مستطیلي ګراف

په مستطیلي ګراف کی د مستطیل قاعده د داتاګانو اتصال یا پیوستون راښیي. مساحت د ګېډې کثرت راښیي. که د ګېډیو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت لیکو په دی حالت کی اوږدوالی د کثرت عمودي محور دی.

مثال : په یوه ټولګي کی د ذده کوونکو وزن په لاندی ډول دی.

| د ذده کوونکو وزن په کېلوګرام | 40 − 45 | 45 − 50 | 50 − 60 | 60 − 70 | 70 − 90 |
|---|---|---|---|---|---|
| دذده کوونکو شمېر | 4 | 6 | 12 | 8 | 8 |

وزن د $(X\bar{X})$ په محور ښیو او څرنګه چه $5kg$ د ټولو منځ کی مشترک دي نو د $(X\bar{X})$ په محورټول وزنونه په یوه واحد اندازه کوو $(40-45)$ په یوواحدښیو. د مستطیلو د ارتفاعګانو پیداکولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو.

$$40 - 50 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

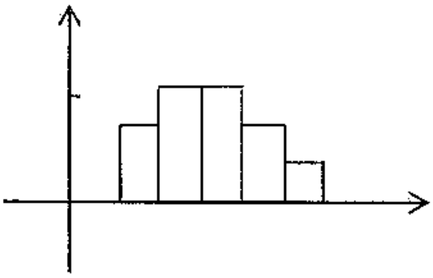
$$45 - 50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50 - 60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \rightarrow 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \rightarrow 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## دايروي ګراف:

د دايرې په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاګانو ښودلو ته دايروي ګراف وايي.

د کثرت ددرجې دلاس ته راوړلو لپاره د داتاګانو کثرت د ټولو داتاګانو په شمېر ليکواو په (°360) کې يې ضربوو دهرې ګېډۍ مرکزي زاويه لاس ته راځي.

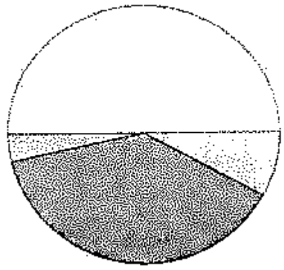
$$\text{کثرت د درجې له جنسه} = \frac{\text{د داتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال:-د يوې مؤسسې دکارکوونکو شمېر (200) کسه دي وظيفې يې د تحصيل د درجې له جنسه وېشلې دي.

| د تحصيل درجه | کثرت | مرکزي زاويه د درجې له جنسه |
|---|---|---|
| ډاکټر | 5 | $\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$ |
| ماشټر | 10 | $\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$ |
| ليسانس | 100 | $\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$ |
| څوارلسم پاس | 45 | $\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$ |
| دولسم پاس | 40 | $\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library





### میانه $Median$:

د داتاګانو د تحول وسطي عدد ته میانه وایي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سیټ په څیر یې ترتیبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد یې (3) دی.که د داتاګانو شمېر جفت وي.د منځنیو دوه داتاګانواوسط د داتاګانو میانه ده.لکه (10 4 3 9 6 2) چه میانه یې داسې پیدا کیږي.(10 9 [4 6] 3 2) چه $5 = \frac{4+6}{2}$ یعنی میانه یې (5) ده.

### د تحول ساحه $Evolution\ of\ field$:

که د متحول د اوږدوالي تغیر په یوه ساحه کې ممکن وي دغه ساحې ته د تحول ساحه وایي.

په ټولنه کې د ساحې وسعت د ټولنې پراګنده ګي ښيي.په هره اندازه چه دا توپیر کم وي پراګنده ګي کمه ده او دټولنې د وګړو تر منځ نژدېکت زیات دی. که د تحول ساحه صفر وه نودټولنې د څېړنې ځانګړتیاوې برابرې دي اوټولنه متجانسه ده.

مثال: په څلور میاشتنۍ ازموینه کې د دوه ډله کوونکو لمبرې په لاندې ډول دي.

39 38 37 36 35 33 32 25 21 20
39 35 34 34 35 35 35 34 33 20

د دواړو سیټونو د تحول ساحه پیدا کړئ او ووایاست چه په کومه ګېډې کې پراګنده ګي زیاته ده؟

حل:- د لوړو سرحدو څخه ټیټ سرحدونه منفي کوو.

$$39 - 20 = 19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مګر په اول ګروپ کې پراګنده ګي زیاته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


## د انحراف اوسط *Average deviation*

د داتاګانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وايي

د داتاګانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدی امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کی د هغوی مطلقه قیمتونه جمع کوي.او په لاندی ډول جمع کیږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1-\acute{x}|+|x_2-\acute{x}|+\cdots+|x_n-\acute{x}|}{n}$$

مثال : د (40) تنو شاګردانو لمبری په لاندی جدول کی راکړشوي دي.

| نمری | کثرت |
|---|---|
| $0-10$ | 2 |
| $10-20$ | 7 |
| $20-30$ | 4 |
| $30-40$ | 5 |
| $40-50$ | 10 |
| $50-60$ | 12 |

د انحراف اوسط يي پيدا کړئ؟

$$\acute{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

| $f$ = کثرت | د داتاګانو اوسط | $f \cdot x$ | $x-\acute{x}$ | $f(x-\acute{x})$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 10 | $5-37.5=-32.5$ | $2\times(-32.5)=-65$ |
| 7 | 15 | 105 | $15-37.5=-22.5$ | $7(-22.5)=-157.5$ |
| 4 | 25 | 100 | $25-37.5=-12.5$ | $4\times(-12.5)=-50$ |
| 5 | 35 | 175 | $35-37.5=-2.5$ | $5\times(-2.5)=-12.5$ |
| 10 | 45 | 450 | $45-37.5=7.5$ | $10\times 7.5=75$ |
| 12 | 55 | 660 | $55-37.5=17.5$ | $12\times 17.5=210$ |
| 1<br>$n=40$ | | 1500 | | |

$$f(x-\acute{x}) = -65-157.5-50-12.5+75+210=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليدل کيږي چه د جمع حاصل يي صفر دې نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کې نيسو.

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

## د څوضلعي فريکونسي ګراف

د څوضلعي فريکونسي ګراف د متصلو ډاټاګانو د پاره استعماليږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه ګراف يي رسم کړو د هرکلاس مرکز (منځنی نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښيو

د کلاس مرکزاوفريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کی يوه نقطه تعينوي دغه نقطې وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کی $(x_1 - c, 0)$نقطه او کلاسونو په اخر کی $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو دڅو ضلعي فريکونسي ګراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندی جدول کی د ډاټا څو ضلعي او مستطيلي ګراف رسم کړئ.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 − 36 | 26 − 31 | 21 − 26 | 16 − 21 | 11 − 16 | د کلاسونو حدود =$cl$ |
| 2 | 7 | 8 | 5 | 3 | مطلقه فريکونسي = $f_i$ |
| 33.5 | 28.5 | 23.5 | 18.5 | 13.5 | د کلاسونو مرکز =$x_i$ |

$c = 5$ دی نو د دوه ا ختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندی ډول اجرائت کوو.

$(x_1 - 5{,}0) = (13.5 - 5{,}0) = (8.5{,}0)$

$(x_2 + 5{,}0) = (33.5 + 5{,}0) = (38.5{,}0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library


داتا په صعودي ډول ترتیبوو. او د یو څخه تر$(n)$ پورې کود ورکوو د $(p = 1,2,3)$ موقعیت دلاندی رابطی پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیتا کې داولی ربعی او دریمی ربعومقادیر پیدا کړئ؟

حل:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| د دیتا شمېره | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| | 140 | 120 | 100 | 90 | 85 | 80 |

د لمړۍ اودریمی ربعو ځایونه عبارت دي.

$$c_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$c_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

$q_1 = 85$ & $q_2 = 120$

## صندوقچه یي ګراف:

صندوقچه یي ګراف هغه ګراف دې چه د نورو ګرافونو په نسبت د ډېټا تیت والې زیات روښانه ؛ کوي د ډېټا ګراف د لاندی اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنۍ ډېټا

ب- لمړۍ څلورمه

ج- میانه

د- دریمه څلورمه

ج- لویه ډېټا

مثال : په یوه ښارکی په (15) ورځو کی د ترافیکي پېښو شمېر په لاندی ډول دې صندوقچه یي ګراف ئي رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

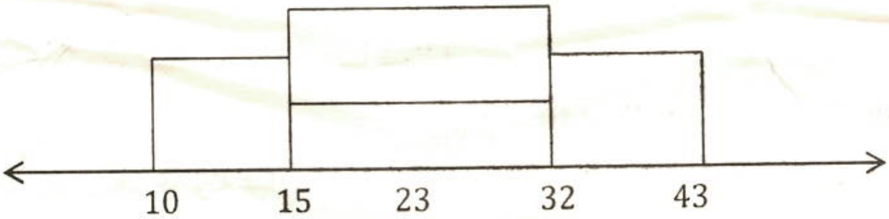


| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 15 | 23 | 14 | 27 | 16 |
| 34 | 41 | 43 | 32 | 18 | 25 | 31 |

پورتنی داتا په ترتیب لیکو .

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 18 | 23 |
| 25 | 27 | 31 | 32 | 34 | 41 | 43 |

تر ټولو کوچنی داتا $(q_1 = 10)$ ده اوتر ټولولویه داتا$(q_n = 43)$ ده میانه $(med = 23)$ده لمړی ربعه $q_1 = 15$

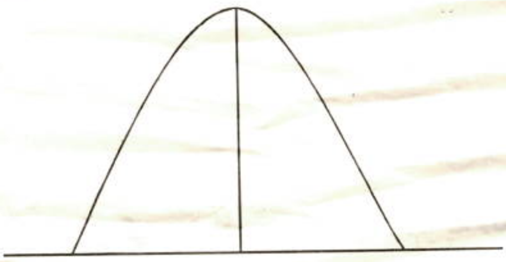



پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده دلمړی او څلورمی ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 ترمنځ ده.

## د نارمل منحني د مرکزي تاکونکو پرتله کول:

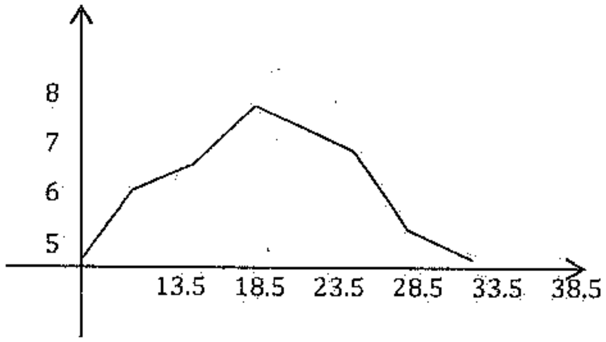
نارمل منحني يو متناظر منحني دې چه ديوه زنګ په ډول شکل لري او زياتی طبعي پېښی د همدغه منحني په واسطه ښودل کيږي.اوسط ، ميانه او موډ يي په مرکزي برخه کی قرار لري نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

که منحني متناظر وي نواوسط په ميانه منطبق دی اوځرنګه چه يوه اعظمي نقطه لري نو ځکه يي موډ هم د اوسط اوميانې سره مساوي دی.

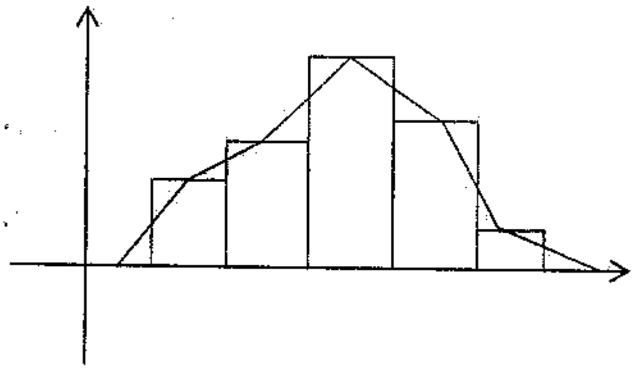


$\acute{X} = mod = med$

(c) ketabton.com: The Digital Library


مستطیلي ګراف اود فریکونسي څو ضلعي ګراف:



د فریکونسي څو ضلعي دګراف راسونه د فریکونسي داړونده جدول د مستطیلو د پورتنی ضلعي په نیمایي منطبق دي دفریکونسي څو ضلعي مساحت دمستطیلو د مساحت سره مساوي دي.

## د ساقی او پاڼی ګراف $Grph\ of\ stem\ and\ wrench$:

په دوه رقمي عدد کی د لسیز رقم ساقه او د یویز رقم پاڼه ده.

مثال : د سانتي متر په حساب د شل نوو پیدا شوو ماشومانود تنی اوږدوال په لاندی ډول انتخاب شوی دي.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 46 | 47 | 43 | 49 | 40 | 42 | 46 | 45 | 43 |
| 43 | 43 | 48 | 49 | 47 | 49 | 48 | 49 | 47 | 45 |

پورتنی داتاګانی په صعودي ډول ترتیب کړئ او څرنګه چه د(4) رقم یعنی دلسیز رقم پکی مشترک دی نو داتاګانی په لاندي ډول ترتیبوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9) \cdots\cdots\cdots 1$

د صفر څخه تر (9) پوري د رقمو تکرار دپاڼو شمېر ښيي.پورتني رقمونه په لاندی ډول هم لیکلای شو.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 5 | 5 | |
| 6 | 6 | | |
| 8 | 8 | | 9 |
| 9 | 9 | 9 | |

که د (1) شماری د جدول څخه ګراف جوړ کړود ساقی او پاڼی ګراف لاس ته راځي چه (4) به یي قاعده او دقوس په منځ کی رقمونه به یي پاڼی وي.که پورتني جدول ته د $90^{\circ}$ په اندازه دوران ورکړو. میله یي ګراف لاس ته راځي.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | | 9 | | |
| 3 | 5 | | 7 | | 9 | | |
| 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
| 0 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

ربعی $Quarters$:

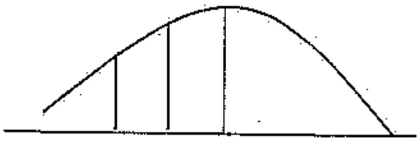
د یوه شي څلورمی برخی ته ربع وایي.

یعنی که یو شی په څلورو برابرو برخو وویشو برخی یي د اولی ربعی،دویمی ربعي، دریمی ربعی او څلورمی ربعی په نوم یادیږي.

اوله ربعه د شي 25% دویمه ربعه دشي 50% اودریمه ربعه دشي 75% وي.که داتا په صعودي ډول ترتیب شي د داتا میانه د($Q_2$)سره مساوي ده د داتا داولی نیمایي میانه ($Q_1$)ده او د دویمی نیمایي میانه ($Q_3$) ده.

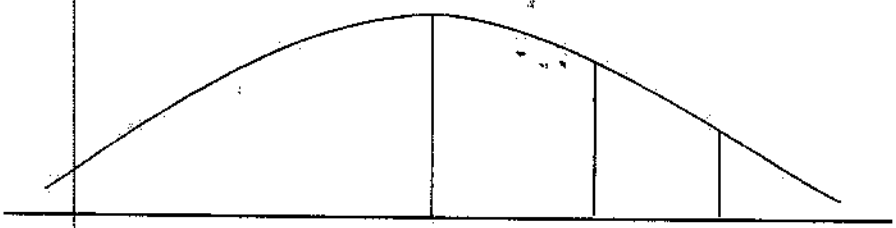
(c) ketabton.com: The Digital Library

که اوسط اومیانه مساوي وي نو تر اوسط او میانی د مخه داتاګانی اوداوسط او میانی د وروسته دېټاګانو سره مساوي ډي.اوکه اوسط د میانی کینی خواته پروت وي نو دهغه داتاګانو شمېر چه داوسط ښی خواته پرتی دي زیات دی تر هغه دېټاګانو دشمېر څخه چه د اوسط چپی خواته پرتی دي.



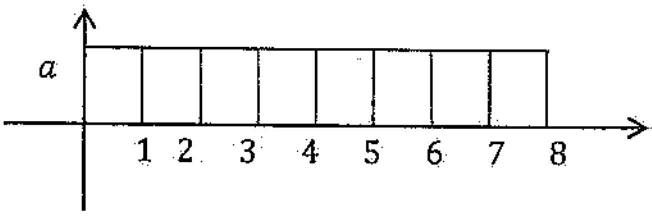
$$\acute{X} = mod = med$$

او که اوسط دمیانی ښی خواته پروت وي نود هغه داتاګانوشمېر چه د اوسط چپی خواته پرتی دي زیات دېد هغه داتاګانوتر شمېر چه د اوسط ښی خواته پرتی دي



$$mod > med > \acute{x}$$

مثال: په لاندی ګراف کی اوسط او میانه پیدا کړئ؟




$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\acute{x} = \frac{a\cdot 1 + a\cdot 2 + a\cdot 3 + a\cdot 4 + a\cdot 5 + a\cdot 6 + a\cdot 7 + a\cdot 8}{a+a+a+a+a+a+a+a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\acute{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## ربعي انحراف

ربعي انحراف یو له هغه ټاکونکو څخه دی چه د ډیټا تیت والی ښکاره کوي.

مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لږ وي په همغه اندازه ډیټا نژدی وي یعنی تیتوالی یي کم وي.

کله کله دځلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښیي چه دی ته د څلورمی د نیمايي لمن وايي.

مثال: د لاندی عددونو د څلورمو انحراف پیدا کړئ.

20 22 22 23 24 25 29 30 31 35 36

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

## واريانس (*Variance*):

واريانس په لغت کی اختلاف ته وايي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاگانی ولرو دهری داتا اوسط پیدا کړود داتاگانواو دهغوی د اوسطونودتفاضل د مربعګانود مجموعی اوسط ته واريانس وايي.

د انحرافونو د مربعګانو مجموعه عبارت ده.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2 = (x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتنۍ مجموعه په $(n)$ ویشواو په $(s^2)$ يي ښيو.واريانس لاس ته راځي.

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\acute{x})^2}{n}=\frac{(x_1-\acute{x})^2+(x_2-\acute{x})^2+\cdots+(x_n-\acute{x})^2}{n}$$

د واريانس د پيدا کولو لپاره د لاندې فارمول څخه هم کټه اخلي.

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\acute{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i=n\bar{x}$$

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2}-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}{n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n}2x_i\bar{x}}{n}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\acute{x}^2}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}+\frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-2\bar{x}\cdot\bar{x}+\bar{x}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}}{n}-\bar{x}.^2$$

مثال: دلاندې ډېټا وريانس د دواړو فارمولو په مرسته پيدا کړئ

1 5 6 7 9

الف: د $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}{n}$ دفارمول پواسطه:

$$x'=\frac{1+5+6+7+9}{5}=\frac{28}{5}=5.6$$

$$s^2=\frac{(1-5.6)^2+(5-5.6)^2+(6-5.6)^2+(7-5.6)^2+(9-5.6)^2}{5}$$

$$s^2=\frac{(-4.6)^2+(-0.6)^2+(1.6)^2+(2.6)^2+(4.6)^2}{5}$$

$$s^2=\frac{21.16+0.36+2.56+6.76+21.16}{5}=\frac{52}{5}=10.4$$

ب: د $s^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i^{\,2}}{5}-\bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$s^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2}{5} - \acute{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

یادونه:

که دځو کلاسو د ډیټاګانی $x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$ وي او فریکونسي ګانی یي په لاندی ډول وي $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ واریانس یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_1 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی

د متحول دمربع واحد د واریانس واحد دی.

## معیاري انحراف (مطلق تیتوالی):

د واریانس مربع جذر ته معیاري انحراف وایي په $(s)$ سره یي ښیي او د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \acute{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

واحد یي د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 - 2\acute{x}x_i + \acute{x}^2) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2x\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}\acute{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2n\acute{x}^2 + n\acute{x}^2\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - n\acute{x}^2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right\} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

مثال:- د (5) ناروغانو د بدن د حرارت درجه په لاندې ډول راکړشوې ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف یې پیدا کړئ.

حل:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (40-39.4)^2 + (41-39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \quad \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \acute{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \acute{x}^2}$$

چه $\acute{x}$ د دیټا اوسط ، $x_i$ د کلاس مرکز او $f_i$ د کلاس فریکونسي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## دبدلون ضريب يانسبي پراګنده ګي:

د بدلون ياتغير ضريب د معياري انحراف او مطلق اوسط نسبت دی مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{د بدلونونو يا تغيراتو ضريب} = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\acute{x}}$$

که د تغيراتو ضريب په 100 کی ضرب کړودتحول ضريب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\acute{x}}$$

د بدلون ضريب دمثبتو دېتاګانو لپاره دی.که دېتاګانی مساوي وي د بدلون ضريب صفر دی.که ټولی دېتاګانی په يوه مثبت عدد کی ضرب شي د بدلون ضريب تغير نه کوي.

که دهری دېتاسره يو مثبت عدد ورزيات شي د بدلون ضريب کوچنی کيږي.

مثال: د $(1.3.5)$ دېتا د بدلون ضريب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دويم مثال: د تلويزون د تصويري لامپونو توليدوونکي د$(A)$ او $(B)$ دوه ډوله لامپونه توليدوي د $(A)$ متوسط عمر (1495) ساعته او د $(B)$ متوسط عمر (1875) ساعته دي معياري انحرافونه يي په ترتيب سره (280) او (310) دي دکوم لامپ دضريب بدلون زيات دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنګه چه $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامپ ډېره پراګنده ګي لري ولی تینګښت یې کم دې.

## په نورمال منحني کی تیتوالی:

**دنورمال منحني په دواړو خواو کی د** $(\acute{x} - s , \acute{x} + s)$ اویاد $(\acute{x} - 2s , \acute{x} + 2s)$ پواسطه پراګنده ګي یا تیتوالی پیدا کیږي.

مثال: د یوی موسسی د معاش اوسط (12500) او معیاري انحراف یې (700) دی.

**الف**: په نورماله توزیع کې د فیصدی په نظر کی نیولو سره د معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: ایا ویلای شئ چه (14000) افغانی معاش غیر عادي معاش دی؟

حل: لمړې $\acute{x} \pm s$ او $\acute{x} \pm 2s$ او $\acute{x} \pm 3s$ قیمتونه په لاس راوړو.

| فیصدي | فاصله د افغانیو له مخی | فاصله د $(s)$ له مخی |
|---|---|---|
| 68% | $11800 - 13200$ | $\acute{x} \pm s$ |
| 96% | $11100 - 13900$ | $\acute{x} \pm 2s$ |
| 99.6% | $10400 - 14600$ | $\acute{x} \pm 3s$ |

$$\acute{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \acute{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو (14000) افغانی معاش غیرعادي معاش دی څکه چه د $(2S)$ داندازی څخه زیات اوهم د $(\acute{x})$ داندازی څخه ډېر دې.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د نورماله توزیع مشخصات:

د نورمال په دواړو خواو کې د نورمال په نسبت دمنحني د ټيټوالي، جګوالي او نژدېکت عامل ته شاخص وايي.شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص *Skewness* :

هغه توزیع چه د اوسط په دواړو خواو کې متناظره نه وي خلمېدل نومیږي. د لاندې دوو ضریبونو پواسطه ښودل کیږي.

الف- د خلمېدلو ضریب: د خلمېدلوضریب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره استعمالیږي.فارمول یې په لاندې ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2}{s^2}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نوتوزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحني د توزیع خلمېدل مثبت دي *Possitive Skewness* یعنی خمېدل یې ښی خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحني دتوزیع خلمېدل منفي *Negative Skewness* دي.یعنی چپی خواته خلمیږي که چېرته دکثرت جدول موجود وي خلمیدلو(عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{\sum s^a}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

ب- د پیرسون دخلمیدو ضریب: د پیرسون د خمېده ګی ضریب په لاندې ډول دی.

$$sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پړسوب *kurtosis* شاخص:

دا شاخص ښیي چه څه وخت منحني جګوالی او څه وخت ټیټوالی لري فارمول یې په لاندې ډول دی.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

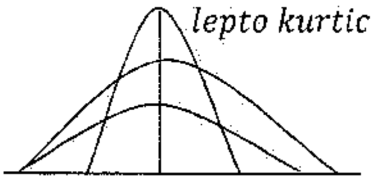
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کثرت جدول موجود وي نو د پړسوب فارمول په لاندې ډول دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^4}{s^4}$$

په دی فارمول کی $(s)$ معیاري انحراف دی. دغه شاخص د پړتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراګنده ګی، پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ د ضریب دری ډوله خلمېدل او پړسوب ښیي.




حل: په نورمالي توزیع کی $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پړسوب یي د نورمال منحني څخه ډېریږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پړسوب یي کم دی.

## څو متحوله ټولنې:

که په یوه کلاس کی یوازې د شاګردانو دونې په باب خبرې کیږي نو په دغه ځای کی متحول یو دی. او که د شاګردانو د چاغښت په باب هم خبرې وشي نو په دي صورت کی متحولونه دوه کیږي. د دغسې متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکي د قایمو مختصاتو په سیستم کی جوړیږي. لمړی د متحولونو معادلې جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کی په نخښه کووا و وصلوو یي.

مثال: یو متخصص د غذائي موادو تاثیر په یو شمېر موږکانو باندی وڅېړل. د غذاء تر تطبیق دمخه یي د هر موږک وزن اندازه کړ او بیا یي د عملیي تر تطبیق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړ او لاندې د ښتا ګانی یي په لاس راوړلی.

(1.8). (2.3). (1.7). (3.5). (2.4)

په هره جوړه کی لمړی مختصه د موږکانو د غذاء ترتطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذائي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| د موږکانو شمېر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| د موږکانو لمړنی وزن | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| د غذائي موادو تر تطبيق وروسته د موږکانو وزن | 8 | 3 | 7 | 5 | 4 |

پورتنی جدول په ستوني ډول جوړ کړئ.

| دموږکانوشمېر | د موږکانولمړنی وزن | دغذائي رژيم ترتطبيق وروسته د موږکانووزن |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 7 |
| 4 | 3 | 5 |
| 5 | 2 | 4 |

پورتنی دېټاګانی دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

## دپراګنده ګۍ ګراف Scatter Diagram:

د دېټا داندازه کولولپاره په يوه مستوي کې پاشل شوی نقطی د پراګنده ګراف په نوم ياديږي.

لاندي مرتبې جوړې راکړشوي دي.

$$(1،2)،(2،3)،(3،4)،(4،5)$$

پورته دېټا د شېر او خط دېټا ده.که سکه پورته خواته وغورزول شي او دشېر مخ کښته خواته وي نود $(y)$ په محور يو ډېريږي.

د موږکانو د غذائي رژيم دېټا په لاندې ډول ده.

$$(2،4)،(1،8)،(2،3)،(3،5)،(1،7)$$

په دغه دېټا کې د هرې نقطې تابع ښېله ده. نو له همدغه جهته ځو متحوله ټولنه ورته وائي.

### پېوستون او دپېوستون ضريب:

د يوه مستقيم او نقطو تر منځ دفاصلې د پيدا کولو فارمول ته دپېوستون ضريب وائي او په $(r)$ سره يي ښيي .او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندی دېټا دموږکانو دغذائي رژیم دېټا ده.

| دموږکانو شمېر | لمړنی وزن($x$) | وروستنی وزن ($y$) | $xy$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 8 |
| 2 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 1 | 7 | 7 |
| 4 | 3 | 5 | 15 |
| 5 | 2 | 4 | 8 |
| | $\sum 9$ | $\sum 27$ | $\sum 44$ |

دموږکانود غذائي رژیم د وزنونو تر منځ دپیوستون ضریب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په ($x$) او وروستني وزنونه په ($y$) ښیو دموږکانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad , \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x{}^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y{}^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د دېټا شمېر}} = \frac{\sum x + \sum y}{n}$$

$$= \frac{(1\cdot 8) + (2\cdot 3) + (1\cdot 7) + (3\cdot 5) + (2\cdot 4)}{5}$$

$$= \frac{8+6+7+15+8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د پیوستون ضریب په لاندی ډول لاس ته راځي.

$$\text{د پیوستون ضریب} = r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



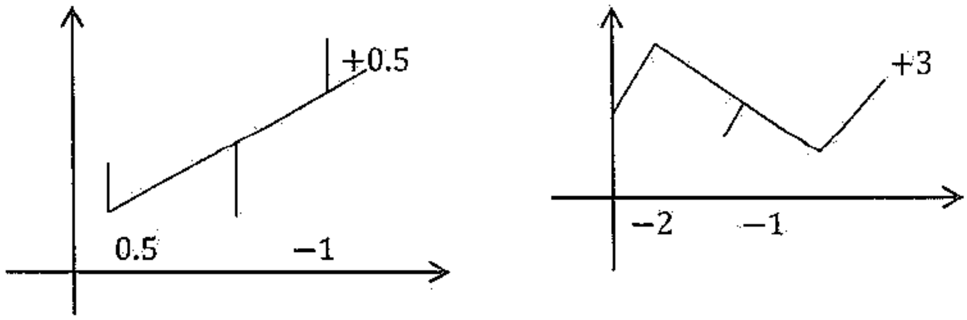
## د خطي مېلان معادله:

$y = ax + b$ د مستقيم خط معادله ده. چه دمستقيم خط مېلان دی که $a > 0$ وي کرښه متزايده ده. اوکه $a < 0$ وي نو کرښه متناقصه ده که $(x, y)$ جوړه د $y = ax + b$ په معادله کی صدق وکړي.

نونقطه په خط پرته ده . که دنقطي په مستوي داسي پاشلي وي چه کرښي ته نژدي وي نود پيوستون ضريب به $(-1)$ او$(+1)$ ته نژدي وي که يوه داسي کرښه چه معادله يي $y = ax + b$ وي د ټکو له منځه داسي تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدي وي نو د دغه کرښي د ترسيم لپاره بايد يوه داسي معادله جوړه کړو دفارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کی نيسو.

| $x$ | 1 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 5 | 7 |

د دغه دېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوی يي دمشاهدې څخه معلوموو.




په پورته دوارو حالتونو کی د کرښو د خطاګانو الجبري مجموعه صفر ده .

د الف حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ دکرښي د خطاګانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښي دخطاګانو الجبري مجموعه

څرنګه چه په دوارو حالتو د جمعي حاصل صفر دی نومناسبه کرښه نه معلومېږي.نو دپاره ددي چه مثبت او منفي علامي يو اوبل دمنځه يونسي نووروسته تر مربع کولو يي جمع کوو.

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ د خطاګانو ددويم توان جمع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$دخطاګانو \text{ د دویم توان جمع} = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$$

هغه کرښه چه د مربعګانو مجموعه يي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریګریشن کرښی وایي.د رګریشن اومشاهداتوتوپیرپه وښیو نو د دویم توانونو دلاکوچني والي په خاطر لیکو.

$$\text{د خطاګانو ددويمو توانونو مجموعه} = \sum(y-\bar{y})^2 = \sum\{y-(ax+b)\}^2$$

$$= \sum(y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2$$

په دې حالت کی $(x)$ او $(y)$ ثابت عددونه دي $(a)$ او $(b)$ متحولین دي

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د $(a)$ او $(b)$ دمحاسبی دغه لارد لږکیو مربعګانو دتګلاری په نوم یادیږي.

نتیجه :-د ریګریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار دمعلومولو دبل متحول د مقدار څخه استفاده کیږي.

مثال :- لاندی دېتاپه نظر کی ونیسئ.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

د ریګریشن کرښه نظر ته پیدا کړئ؟

حل : څرنګه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_x{}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{s_x{}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum(y_1 - \bar{y})^2}{n}$$

$$= \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5}$$

$$= \frac{\mathbf{4 + 1 + 0 + 1 + 4}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} = \mathbf{2}$$

$$s_y{}^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{s_y{}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 1) + (5 \cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4 + 6 + 6 + 4 + 0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r\frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی څېړل کیږي عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یي نمونه یي فضاء او د قیمتونو سیټ یي د حقیقي اعدادو سیټ وي.

که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,..}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \cdots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي اوپیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او $(x)$ تصادفي متحول وي په دی صورت کی د دی احتمال چه $(x)$ د $(k_1)$ او $(k_2)$ په منځ کی وي دلاندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$

که چېرې $(x)$ پیوسته ناځاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه؛

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چېرې ناځاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط $(Expected\ Value)$ د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي. د لاندی رابطی سره برابر دي.

$$E(x) = x_1f(x_1) + x_2f(x_2) + \cdots\cdots\cdots + x_nf(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_if(x_i)$$

$E(x)$ د $(x)$ اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که $(x)$ تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د $(x)$ وریانس چه د $(s^2)$ په شکل ښودل کیږيد لاندی رابطی سره برابر دی.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

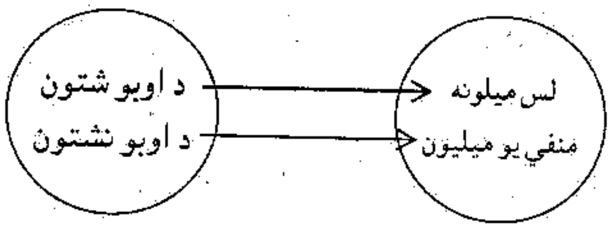


مثال: یو شخصي شرکت غواړي د یوی غونډۍ په سر یوه څاه وکني د اوبو څاه په یومیلون افغانۍ تمامیږي . که څاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس میلونه افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي یو میلون تاوان ورکوي.

الف :-دا موضوع د یوی تابع په شکل وښیئ.

ب:- که د اوبو احتمال $(0.2)$ وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال $(0.8)$ وي په دی صورت کی د احتمال تابع ،اوسط $(Expected\ Value)$ ، وریانس او د تصادفي متحول معیاري انحراف پیدا کړئ؟

د الف حل:




د ب حل: تصادفي متحول، داحتمال تابع ،اوسط ،وریانس، او معیاري انحراف په لاندی جدول کی ښودل شوي دي.

| تصادفي متحول | د تابع احتمال | اوسط | دتصادفي متحول دمربعاتوانحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه | واریانس | معیاري انحراف |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $f(x_i)$ | $E(x) = \sum x_i f(x_i)$ | $[x_i - E(x)]^2$ | $s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$ | $s$ |
| $-1$<br>$10$ | $0.8$<br>$0.2$ | $-1 \cdot 0.8 = -0.8$<br>$10 \cdot 0.2 = 2$ | $(-1-1.2)^2 = 4.84$<br>$(10-1.2)^2 = 77.44$ | $4.84 \cdot 0.8 = 3.872$<br>$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$ | $4.4$ |
| | $0.1$ | $1.2$ | | $\sum s^2 = 19.360$ | |

(c) ketabton.com: The Digital Library

## د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت:

د احتمال دوه جمله يي توزيع يوه مجزا (گسسته) توزيع ده چه د مختلفو پېښود توصيف لپاره استعماليږي.

د برنولي ناځاپي ازمايښت په برياليتوب او نابرياليتوب په دوه دستودسته بندي کيږي.

د برنولي توزيع کولای شوچه په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ بڼه وښيو.
$(P)$ د برياليتوب او $q=I-P$ دنابرياليتوب احتمال دی.

که يو ازمايښت $(n)$ ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي.چه دهرازمايښت دبرياليتوب احتمال په $(P)$ او دنابرياليتوب احتمال په $(q)$ښيو $(n)$ ځله ازمايښت څخه د $(m)$ ځلي برياليتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}\qquad ,0\le m\le n$$

د دوه جمله يي دتوزيع اوسط په $\bar{x}=np$ اومعياري انحراف يي په $s=\sqrt{npq}$ ښودل کيږي.

مثال: د شکرې د مرض څخه د يوه مريض د جوړېدلو احتمال(0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او يا د (3) څخه تر (4) تنو پورې جوړشي.

حل:

$$n=15\quad ,\qquad m=5\quad ,\qquad P=0.4\quad .\ q=0.6$$

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5\cdot(0.6)^{15-5}$$

$$=\frac{15!}{5!\,(15-5)!}\times 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}$$

$$=(3^{15})(0.4)^3(0.6)^{15-3}+(4)^{15}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$= \frac{15!}{3!\,(15-3)!} \cdot (0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!\,(15-4)!} \cdot (0.0256)(0.6)^{11}$$

$$= \frac{2730}{6}(0.000139264) + \frac{3270}{24}(0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24}$$

$$= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601$$

## د پواسن داحتمال توزيع:

د پواسن د احتمال دتوزيع فارمول دا $P(x=m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$

او $e = 2.718281 \cdots$ دی.

مثال: (200) کسانو دطیارې ټیکټ اخیستی دی که د مسافرینود نه راتګ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟

حل:

$$n = 200 \quad , \quad P = 0.01$$

$$P(x-m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad , \lambda = np = 200 \cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2} \cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2} \cdot 8}{6} = \frac{\frac{8}{7.389046158}}{\frac{6}{1}}$$

$$P(3) = \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه کوو.

$$P(x=m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ P = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.09$$

$$P(x-m) = P(3) = \binom{200}{3} (0.01)^3 (0.09)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!\,(200-3)!} (0.01)^3 (0.09)^{197} = 0.1814$$

د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

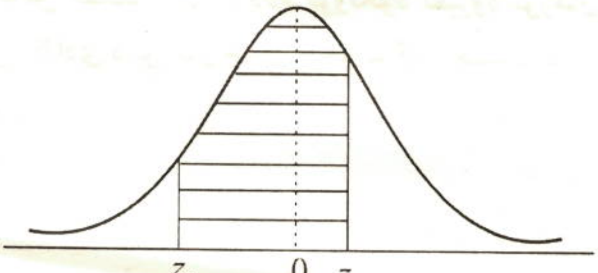
(c) ketabton.com: The Digital Library


د جدول دجوړولو شکل د احصائیوي دېټا د ستېنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

$z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ چه $(z)$ د ستېنډرډ نورمال متحول او منحني ته دستېنډرډ نورمال منحني یا د نورمال احتمال منحني په نوم یادیږي.د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندې مساحت د منحني د یوې برخې مساحت دی او $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ سره یې تر بدلولو وروسته په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$




د ستېنډرډ نورمال د توزیع احتمال دجدول د استعمال له لارې کولای شو.د جدول په عمودي ستون د $(z)$ د مقدا ردوه لمړي رقمونه د اعشاریي دعلامې دواړو خواوته رقمونه د منحني ارتفاع راښئي اوپورتنی سطرد اعشاریي دعلامې سلیز رقم د منحني دواحد قاعده راښئي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $(z)$په ستون کې $(1.5)$ او په سطر کې $(0.06)$ پیدا کوو ګوروچه د$(1.5)$ دعددپه کرښه او د $(0.06)$ دعدد په ستون کې واقع دی $(0.9406)$ دی چه همدغه دمنحني مساحت دي.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستګاه داسې تنظیم شوی ده چه که$(952)$ملي لېتره مایع په بوتل کې واچوي معیاري انحرا ف یې $(4)$ ملي لېتره کیږي که مایع د $(952)$ او $(956)$ ملي ېترو تر منځ وي معیاري انحراف یې څو دی؟

حل : لمړې د له جنسه پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library


یاداشت:

که د پواسن په فارمول کې د($\lambda$) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال رانبیي.

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددې احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره وي؟

حل:

$\lambda=60 \qquad , \qquad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$

$m=4 \qquad , \qquad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}\cdot 3^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}\cdot 3^4}{4!}$$

$$=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\frac{81}{20.0854}}{\frac{24}{1}}=\frac{1\cdot 81}{24\cdot 20.0854}=\frac{27}{8\cdot 20.0854}$$

$$=\frac{27}{160.6832}=0.168032$$

## د نورمال توزیع:

دنورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندې ډول ده.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

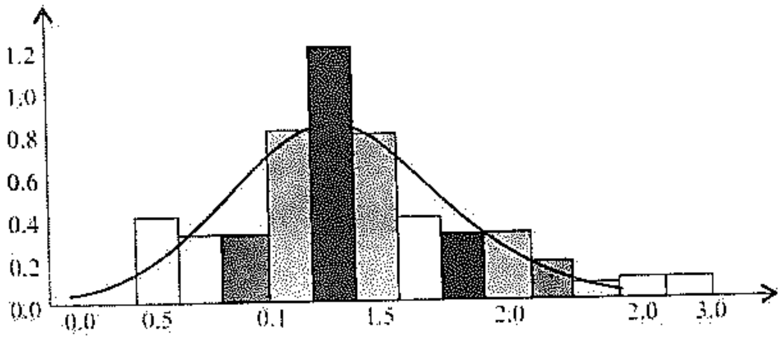
$x$ پیوسته تصادفي مقدار ($s$)معیاري انحراف او $f(x)$ د منحني جګوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعګانو څخه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: د موټر ماشین دتېلو دسوځولو په وخت کې یوه اندازه مضرلوګی خارجوي د هغه مضر لوګي مقدارچه د (46) موټرانو څخه تولیدیږي په (1980) میلادي کې دیوه فزیکدان پواسطه چه لوړېزن نومېده وڅېړل شو. لوګی یوه اندازه $N_2$ او $(O_2)$ لري لاندې مستطیلي ګراف د $N_2$ او $O_2$ اندازه چه واحد یې $^{gr}/_{mil}$ دي او په(46) موټرانوکې دتېلو د سوځېدوڅخه تولیدیږي ددغه موټرانو نورمال احتمال توزیع ، اوسط او وریانس راښئي د هرمستطیل مساحت د مستطیل دقاعدې او ارتفاع دحاصل ضرب څخه لاس ته راځي.مثلاً په څلورم ستون کې چه د ( 1) څخه شروع او تر (1.2) پورې یې د قاعدې طول دی مساحت یې په لاندې ډول لاس ته راځي $\frac{4}{46}\times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

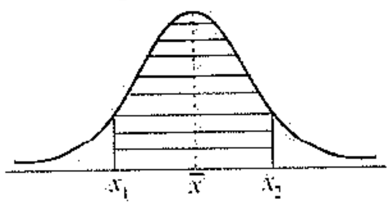



## د نورمال توزیع منحني لاندې مساحت اود هغه ستېنډرډ کول:

کله چه $(x)$پیوسته تصادفي متحول د $x_1$ او $x_2$ تر منځ قیمت واخلي نوباید د $(x)$ داحتمال دتوزیع له تابع څخه انتیګرال ونیول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \overline{x, s})dx$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د ځخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر ځخه تر(1) پوری ده. د جدول ځخه معلومیږي چه $P(0 \le z \le 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%)ډک شوي وي د (952) ځخه تر (956) پوری مایع لري.

دویم مثال : په یوه خاص مضمون کی د ذده کوونکود نمبرود نورمال توزیع اوسط (70) اومعیاري انحراف يي (8)دی د نورمال جدول ځخه په ګټه اخیستوسره د(54)ځخه تر (84) پوری فیصدي پیدا کړئ؟

حل:

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

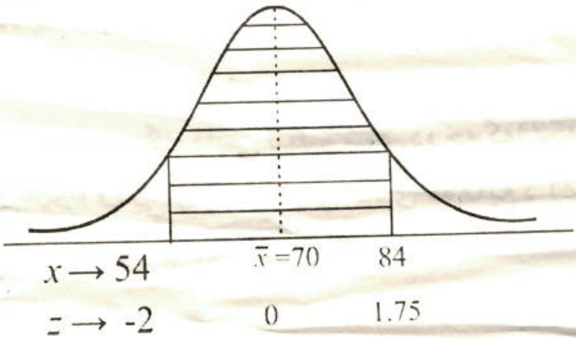
$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$

$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

## نمونه اخیستل

ناخاپه نمونه اخیستنه:

که دټولنی ټول عناصر په ټاکل کېدلو کی هم چانسه وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنی په ټولوعناصرباندی یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه يي نمونه اخیستنه:

په دی نمونه اخیستنه کی ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

خوشه يي نمونه اخیستنه:-که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بیلابیلو ځانګو ویشواو له هری ځانګی څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهری ټولنی عددي خصوصیاتو ( اوسط ، معیاري انحراف)ته د ټولنی پارامترو وائي.

د هری ټولنی د عددي نمونه ګیری خصوصیاتو(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

د $(x_1, x_2, x_3, \dots x_n)$ ناخاپه متحولونو ته د $(x)$ یوه ناخاپي نمونه وایي.که چېرته يي تابع په دی ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطی (5) سپینې او(7) توری ګلولی شته د قطی د منځ څخه (5) ګلولی یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي.د ټاکل شوو ناخاپه نمونو د تصادفي متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد دتوری ګلولی لپاره اود (1) عدد د سپینی ګلولی لپاره انتخابوو.

د $i = 1,2,3$ او د $P = \frac{5}{12}$ د $(x_1, x_2, x_3)$ ناخاپه متحولونه د برنولي نا خاپه متحولین دي. د مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(0)=\left(\frac{5}{12}\right)^{0}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-0}=1\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{12}$$

$$f(1)=\left(\frac{5}{12}\right)^{1}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-1}=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{144}$$

$$f(2)=\left(\frac{5}{12}\right)^{2}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-2}=\frac{25}{144}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{-1}=\frac{25}{144}\cdot\frac{12}{7}=\frac{25}{84}$$

$$f(3)=\left(\frac{5}{12}\right)^{3}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{-2}=\frac{\frac{125}{1728}}{\left(\frac{7}{12}\right)^{2}}=\frac{144\cdot125}{1728\cdot49}=\frac{125}{12\cdot49}=\frac{125}{588}$$

$$f(4)=\left(\frac{5}{12}\right)^{4}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-4}=\frac{\frac{5^4}{12^4}}{\frac{7^3}{12^3}}=\frac{12^3\cdot5^4}{12^4\cdot7^3}=\frac{5^4}{12\cdot343}$$

$f(5)=?$

## د نمونې د اوسط توزیع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ناڅاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې د احتمال توزیع عبارت ده.

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots x_n$ |
|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots\ \frac{1}{n}$ |

د $\bar{x}$ دمتحول اوسط $E(\bar{x}_n)=\mu$

د $\bar{x}_n$ دمتحول وریانس $U(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$

د نمونه يي وریانس $s_n^2=s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

د نمونه يي وریانس اوسط $E(S^2)=\delta^2$

په داسې حال کې چه $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ نمونه يي اوسط $\mu$ دټولنې اوسط $\delta^2$ د ټولنې ریانس وي او $s^2$ دنمونې وریانس وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library


# نولسم فصل

احتمالات$Probability$:

که د یوې پیښې وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښې یا احتمال په نوم یادیږي. د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دی.

مثلاً د معارف رئیس بې سواده دې نو احتمال یې صفر دی.

لمر د ختیځ له خوا راخیژي احتمال یې یو دی.

چانس:

که د یوې پېښې د وړاندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالیدل دغې پېښې ته چانس وایي.

په چانس کې دممکن ، ناممکن، خامخا او داسې نورې کلیمې استعمالیږي.

تصادفي پېښه :

هغه پېښه چه نتیجه یې معلومه وي. تصادفي پېښه، نا خاپي ازمایښت یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمد د بامه راولویدلو پښه یې ماته شوله.

تجربوي احتمال:

هغه احتمال چه د یوې تجربې په سرته رسولو کې په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وایي.

لکه د $(Cl_2)$ او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو د شمېر نسبت ته نظري احتمال وایي.

$$\text{تصادفي پېښې احتمال} = \frac{\text{د تصادفي پېښو دحالتونوشمېر}}{\text{د تجربې دټولوحالتونوشمېر}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندیز ته ویل کیږي. مګر نسبي کثرت د ازمایښت تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابیږي په ناڅاپي پېښو کې دتجربې احتمال د پېښې دنسبي کثرت سره مساوي وي دنسبي کثرت مجموعه ( 1) ده.

مثال: تېرکال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوریدلو.

الف: اورښت او د وریځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

الف: $30\% = \frac{10}{03} = \frac{1}{3} =$ نسبي کثرت

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

## په نمونه یي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددې امکان شته چه هر ممکن حالت منځ ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي یا اتفاقي پېښه وایي.

احتمال په $(P)$ او $P(A)$ د $(A)$ د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه یي فضا $(n)$ غړي ولري په دې صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسې سکه په نظرکې نیسو چه دواړه مخونه یي شېر وي لاندې سوالونو ته جوابونه ووایي.

الف: چه پیسه شېر راشي.

ب: چه پیسه خط راشي.

ج: ایا دشېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل:

الف: $P\left(\text{شمېر}\right) = \frac{1}{1} = 1$

ب: $P\left(\text{خط}\right) = \frac{0}{1} = 0$

ج: $0 \neq 1$

مثال: د یوه نورمال رمل اچول په نظر کې نیسو څرنګه چه د نمونې فضا $S = (1,2,3,4,5,6)$ ده نو له همدې کبله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(=) = P\left(1 = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%\right)$$

## د یوې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه:

د $(S)$ د نمونه يي فضا هرفرعي سیټ یوه اتفاقي پېښه ده چه په $(E)$ سره ښودل کیږي. که د غړو شمېر يي $(n)$ وي د اتفاقي پېښو ټول شمېر $(2^n)$ دی.

د ښار په ګڼه ګوڼه کې د ورځې د $(10)$ او $(12)$ بجو په شاوخوا کې د احمد د جېب ښوه غلا شوي ده د پولیسو تر پلټنې وروسته معلومه شوله چه دری ګنکپان په دغه سیمه کې لیدل شوي دي دپېښې نمونه يي فضاده د احتمالاتو له مخې د غلو په باب څېل معلومات وليکئ؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونه يي فضا $S = (x, y, z)$ ده کلي سیټ يي پيدا کړئ؟

$E_1 = (x)$ یوازې غل دی.

$E_2 = (y)$ یوازې غل دی.

$E_3 = (z)$ یوازې غل دی.

$E_4 = (x, y)$ $(x, y)$ دواړه غله دي.

$E_5 = (x, z)$ $(x, z)$ دواړه غله دي.

$E_6 = (y, z)$ $(y, z)$ دواړه غله دي.

$E_7 = (x, y, z)$ $(x, y, z)$ درې واړه غله دي.

$E_8 = \{\ \} = \phi$ یو هم غل نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library


## د احتمال قاعدې:

1- د يوې اتفاقي پېښې احتمال تل د $(0)$ او $(1)$ تر منځ وي که اتفاقي پېښه $(E)$ وي نو:

$$0 \le P(E) \le 1$$

2- که چېرې $(S)$ د يوه ازمايښت نمونه يي فضا وي نو $P(S) = 1$ د $(S)$ ناځاپي پېښه د واړمنې پېښې په نوم يادېږي.

3- د ناشونې پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو د اچولو نمونه يي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده $T =$ خط او شېر $= S$ دی لاندېني احتمالات پيدا کړئ؟

الف: دواړه سکې شېر دي.
ب: لږ ترلږه يوه سکه شېر ده.
ج: دواړه سکې يو شان دي.
د: دواړه سکې يو شان نه دي.
ها: د سکو يوه هم خط نه دی.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \qquad \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## ونه ایز دیاګرام

کولای شو چه هر ناڅاپي ازمایښت د ونه ایز دیا ګرام پواسطه رسم کړو طریقه یي داسې ده چه د ازمایښت دپېل څخه دیاګرام پېل کووبیا د هرې نتیجې څخه څانګې شروع کوویه هره څانګه کې نتیجې د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول ګراف ته ونه ایز دیاګرام وایي.د احتمالونو د جمع حاصل د هرې څانګې د نشرېدو په ټکي کې د (1) سره مساوي دې همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوي دې.

مثال: په یوه کڅوړه کې څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنګ(r) درې توپونه په شنه رنګ (g) او یو توپ په تور رنګ (b) رنګ شوي دي توپونه د لیدو لپاره راایستل کیږي او بیا بېرته اېښودل کیږي مربوطه احتمالات یي پیدا کړئ؟

حل:-

| $w$ | $rr$ | $rg$ | $rb$ | $gr$ | $gg$ | $gb$ | $br$ | $bg$ | $bb$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(w)$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

په پورته جدول کې ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرګندیږي

## د ضرب د حاصل لومړې قاعده:

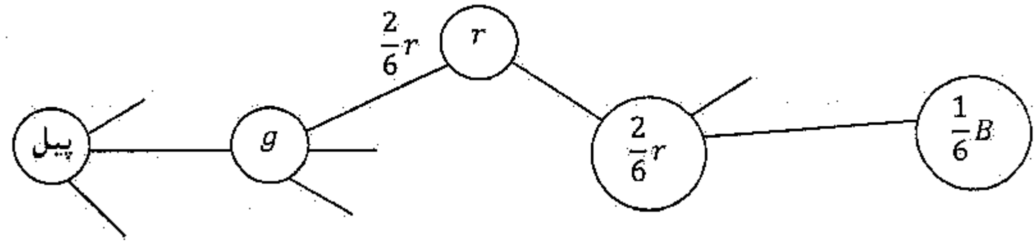
د یوې لومړنۍ پېښې احتمالات عبارت دي د پېښې د پېل څخه د پېښې تراخره پورې د احتمالاتو د ضرب د حاصل څخه .په دغه موضوع باندې د ښه پوهېدلو لپاره د یوې کورنۍ شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کوو یي د ټولې کورنۍ د غړو شمېر لاس ته راځي.

مثال:- په یوه کڅوړه کې سرې مرۍ درې شنې مرۍ او یوه توره مرۍ اېښودل شوي دي مرۍ د کڅوړې څخه داسې راوباسو چه ترکتلو وروسته بیاکڅوړې ته اچول کیږي اوپېل (شنې ،سرې، تورې) څخه وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library






$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$

$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$

يعنى د (شنى، سرى ،تورى)مريو د وتلو احتمال 0.92% دى

## د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- كه د (S)په يوه نمونه يي فضا كى د $(A)$ او $(B)$ دوه داسى ناڅاپي پېښى وي چه $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- كه د$(S)$ په نمونه يي فضا كى $(A)$ او $(B)$ دوه ناڅاپي پېښى يود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: كه د$(S)$ په نمونه يي فضا كى د$(A)$ يا$(B)$ يوه پېښنه رامنځ ته شي نو د $(A \cup B)$ پېښنه هم را منځ ته شوى ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4-كه د $(A)$ پېښنه د $(S)$ په نمونه يي فضا كى پېښنه شوى وي او بله پېښنه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښنه په دى معنى ده چه اقلاً د $(A)$ يا $(B)$ پېښنه، پېښنه شوى ده.

مثال: كه د $(C)$ پېښنه د $(A)$ او $(B)$ دوه بيلا بيلى پېښى په ځان كى ولري نو په دې صورت كى د $A \cup B$ ناڅاپي پېښنه هم په ځان كى لري.

حل:فرضاً $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3\}$ وي او $C = \{1,2,3,4\}$ وي ليدل كيږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$دي ځكه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

## دناخاپي پېښو تقاطع

1- په یوه نمونه یي فضا کې د دوه یا څو ناخاپي پېښو تقاطع د تبدیلۍ د قانون پیروي کوي.

فرضاً د $(A)$او $(B)$ او $(C)$ ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B = B \cap A$ رابطه صحیح ده.

2- که په یوه نمونه یي فضا کې دوه ناخاپي پېښې واقع شي نود دوی تقاطع دهری نا خاپي پېښې فرعي سیټ دی.

فرضاً د $(A)$ او $(B)$ دوه ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B \subseteq A$ او $A \cap B \subseteq B$

3- که د $(S)$ په یوه نمونه یي فضا کې د $(A)$ ناخاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cap S = A, A \cap \phi = \phi$$

4- که $A$ او $B$ دوه ناخاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نود دواړو پېښو تقاطع کوچنۍ پېښه ده.

$$A \cap B = A$$

مثال: دیوه ښوونځي دفوټبال دټیم څخه دری تنه د والیبال په ټیم کې هم شامل دي که دفوټبال دټیم غړي په (A) اود والیبال د ټیم غړي په (B) وښیو او ددواړو ټیمونو ګډ غړي په (C) وښیو نو دټیمونو تر منځ اړیکه د سیټ تیوري په شکل ولیکئ.

حل:

$$A \cap B = C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \ \& \ A \cap B \subseteq B$$

## کلي او مکمله سیټ

د څو فرعي سیټونو مجموعي سیټ ته کلي سیټ وایي. که په یوه کلي سیټ کې دوه سیټونه موجود وي نودا سیټونه یو د بل مکمله سیټونه دي.

که $(S)$ یوه نمونه یي فضا وي او $(A)$ یوه ناخاپي پېښه وي او $(\acute{A})$ یوه بله ناخاپي پېښه وي چه د $(A)$ سره په یوه وخت کې پېښه شوی نه وي. $(S)$ د دغه دواړه سیټونو کلي سیټ دي او $(\acute{A})$د $(A)$ مکمله سیټ دی.

الف: $A \cup \acute{A} = S$

ب: $P(A \cup \acute{A}) = P(S) = 1$

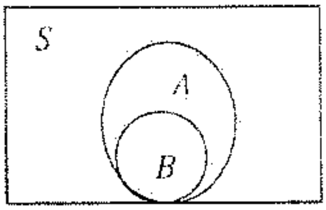
(c) ketabton.com: The Digital Library

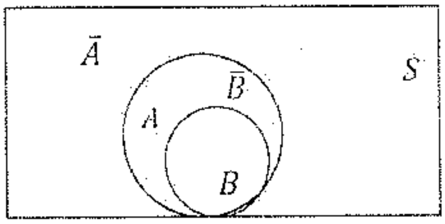


ج: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

که د $(S)$ په یوه نمونه یي فضا کې د $(A)$ ناڅاپي پېښه د $(B)$ ناڅاپي پېښه په بر کې ولري په ګرافیکي ډول وښیي چه د $(\bar{A})$ ناڅاپي د $(\bar{B})$ یوه ناڅاپي پېښه په بر کې لري

حل: څرنګه چه $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلومیږي چه:




## د سیټونو او مډل جوړونه:

د سیټ تیوري په واسطه د احتمالاتو مسایل حلیږي یعنی د ناڅاپي پېښو د پېښېدو د مسایلو حل اوس د سیټ تیوري په واسطه حلیږي چه په دی اساس د سیټ تیوري د فعالیت ساحه نوره هم پراخه شوه

مثال د په نمونه یي فضا کې د او ناڅاپي پېښی په لاندی دیاګرام کې راکړشوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی

a: د دې احتمال چه د $(A)$ یا $(B)$ حادثه ناڅاپي پېښه شي.

b. د دې احتمال چه د $(A)$ پېښه ،پېښه شي.

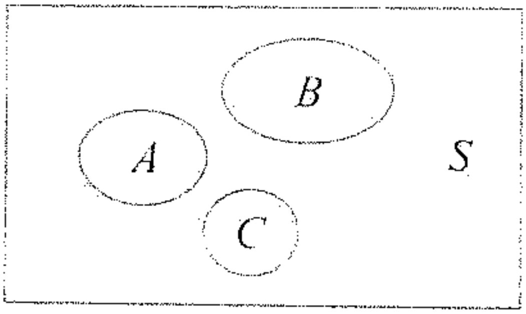
c. د دې احتمال چه د $(C)$ پېښه پېښه نه شي

حل.

a: د $(A)$ یا $(B)$ احتمال په حقیقت کې د $A \cup B$ احتمال دی څرنګه چه دا پېښې یو د بل څخه بېلې دي نو یعنې $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library




b. د دی احتمال چه د $(A)$ پېښه ناڅاپه پېښه شي د $(\acute{A})$ د پېښی څخه عبارت دی چه د $(\acute{A})$ پېښه نه ده پېښه شوی د $(\acute{A})$ پېښه د $(B)$ او $(C)$ د پېښو اتحاد دي يعنی دغه دواړه پېښی نه دي پېښی شوي نو $P(\tilde{A}) = P(C \cup B)$ څرنګه $P(A) = 1 - P(\acute{A})$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره ددی چه د $(C)$ پېښه ناڅاپه پېښه نه شي هغه پېښی دپېښېدلو د احتمال سره برابره ده چه د $(A)$ او $(B)$ پېښې. پېښې شي يعنی $(A \cup B)$ دپېښی د پېښېدلو څخه عبارت دی نو.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

## د شمېرنی اصل:

د دوه سيټونو د شمېرنی اصل په ترکيب او ترتيب پوری اړه لري

1- د دوه سيټونو دعناصرو دشمېرنی لپاره عناصر سره ضربوو مجموعه يي د سيټونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده.

2- که د يوه سيټ عناصر $(m)$ اودبل سيټ عناصر $(n)$ وي نو $(m \times n)$ يي د حاصل ضرب مجموعه ده.

مثال د $(0.1.2.3.4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړيږي او څو عددونه په $(2)$ پوره وېشل کيږي

حل $(20 = 5 \times 4)$ دوه رقمي عددونه وز څخه جوړيږي او $(12 = 4 \times 3)$ عددونه په $(2)$ پوره وېشل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library


پرموټیشن(ترتیب) Permotaion:

که څو شیان ولرو او ددی شیانو څخه جوړې جوړی کړوپه دغه جوړو کی د شیانو بدلولو ته ترتیب وایي.

$(a, b, c, d)$ څلور حروف راکړشوي دي غواړو چه دوه ،دوه يي جوړه کړو نو په لاندی ډول يي جوړه کوو.

$(ab, ac, ad, bc, bd, cd)$ نو که څلور شیان دوه،دوه جوړه کړو نو شپږ جوړی ورڅخه جوړیږي.

فکتوریل:

د مثبتو مسلسلو عددونوضربولوته فکتوریل وايي. او په (!) سره ښودل کیږي.

$0! = 1$ او همدا ډول $1! = 1$ دی. ثبوت يې په (277) صفحه کې وګورئ.

(n) مسلسل عددونه په$(P_n)$ ښيي $(P_n = n!)$ دی.

ترکیب $(Combinatuin)$:

هغه روش چه د هغه پواسطه د بینوم ضریبونه پیدا کیږي د ترکیب په نوم یادیږي. اوپه لاندی ډول لیکل کیږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$0 \le k \le n$ او $\binom{n}{k}$ داسی ویل کیږي. (k)دپاسه $(n)$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبنیشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قیمت پیدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4(1\cdot2\cdot3)} = \frac{5\cdot6\cdot7}{6} = 35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


## وریشن(تبدیل) *Variation*:

په تبدیل او ترتیب کې د جوړو شمېر ته تبدیل وايي.

وریشن یا تبدیل په $(V_k^n)$ ښیي. د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V_k^n = k!C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کې (4) کسه یو ځان د ریاست لپاره دویم ځان داول معاونیت لپاره دریم ځان د دویم معاونیت لپاره او څلورم د منشي په توګه ځان کاندیدوي. د امکاناتو شمېر يي پیدا کړئ؟

حل:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{26!}$$
$$= 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندې جدول کې خلاصه کوو.

| د ټاکنو ډول $k$ غړي د $n$ غړو څخه | دامکاناتو شمېر | |
|---|---|---|
| | پرته له تکرار څخه $k \le n$ | سره له تکراره $k \le n$ |
| ترتیب یا پرموټیشن | $P(n,k) = n!\,, n = k$ | $P(n,k) = \frac{n!}{k!}$ |
| ترکیب یا کمبېنیشن | $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ | $C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$ |
| تبدیل یا وریشن | $V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ | $V_k^n = n^k$ |

مثال: د یوې سکې په اچولو کې چه د راتګ امکان يي په یا خط کې ممکن دی او د هرې خوا دراتګ احتمال يي د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلې، (3) ځلې، (6) ځلي، (8) ځلي، (16) ځلیو غورځول شي د هم چانسو لمرنیوپیښو په نمونه يي فضا کې یو ونه ایزګراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په پورتني مثال کې د شېر او خط دراتګ احتمال په یو ،دوه، درې، څلور خلي غورځولو کې په لاندې جدول کې را ټول شوي دي

| څلور خله | | درې خله | | دوه خله | | يو خل | | هيڅ خل | | د سکې غورځول |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| احتمال | خط | احتمال | خط | احتمال | خط | احتمال | خط | احتمال | خط | |
| $\frac{1}{16}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 | |
| $\frac{4}{16}$ | 1 | $\frac{3}{8}$ | 1 | $\frac{2}{4}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | | | |
| $\frac{6}{16}$ | 2 | $\frac{3}{8}$ | 2 | $\frac{1}{4}$ | 2 | | | | | |
| $\frac{4}{16}$ | 3 | $\frac{1}{8}$ | 3 | | | | | | | |
| $\frac{1}{16}$ | 4 | | | | | | | | | |

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وارد احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کې د حدونو ضریبونه دي . دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په یوه جدول کې ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کې تری استفاده وکړو

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$

$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

$$(a+b)^5 = \textcircled{1}a^5 + \textcircled{5}a^4b + \textcircled{10}a^3b^2 + \textcircled{10}a^2b^3 + \textcircled{5}ab^4 + \textcircled{1}b^5$$

$$(a+b)^6 = \textcircled{1}a^6 + \textcircled{6}a^5b + \textcircled{15}a^4b^2 + \textcircled{20}a^3b^3 + \textcircled{15}a^2b^4 + \textcircled{6}ab^5 + \textcircled{1}b^6$$

عمومي شکل يې دا دی.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د خط راتلو احتمال په مرتبه کې عبارت دی

$$P\left(\text{د خط راتک}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بینوم قضیه:

د بینوم قضیه مخکې ویل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره.

که د یوی ناڅاپي پېښې پېښېدلو ته (1) او نه پېښېدلو ته یې (0) ووایو لاندی جدول د $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



| $k$ | ممکنې پایلې | احتمال | د بینوم د ضریبونو اراېه |
|---|---|---|---|
| 0 | | $(1-P)^2$ | $\binom{2}{0}P^0(1-P)^2$ |
| 1 | 10 | $2P(1-P)$ | |
| 2 | 11 | | $\binom{2}{2}P^2(1-P)^2$ |
| | | $\{P+(1-P)\}^2$ | $\sum\binom{n}{k}P^{k(1-P)^{n-k}}=?$ |

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په $(n)$ ځله تکرار کې د بینوم دانکشاف $(k)$. ام حد لاندې احتمال لري.

$$\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کیږي او د برنولي د پرابلم د احتمال په نوم یادیږي.اوداسې لیکل کیږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-kb}$$

د دوه جمله یي احتمال:

که یوه نمونه یي فضا دوه غړي ولري نو که د یوه غړي احتمال یي $(P)$ وي نو دبل حالت احتمال یي $(1-P)$ دی چه بایلل ورته وایي.که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کې او د بایللو احتمال په ښودل کیږي.

$$k-\text{ام ځلي وړل په n ځلي تکرار کې}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

مثال: که په یوه تجربه کې د وړلو احتمال$\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بایللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه یي په لاندې ډول کیږي.

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کی ددی احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتی انجونې دي څو دي؟

حل:

$$P=\frac{1}{2}$$

نو

$$q=1-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}}{2^5}=\frac{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}}{32}=\frac{10}{32}=0.3125=31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځوودی احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کی راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل ورل وګڼو نو

$$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$
$$Q=1-P=1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$
$$=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{6!}{4!\,(6-4)!}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2}\cdot\frac{4}{729}=\frac{60}{729}$$
$$=0.0823=8.23\%$$

څلورم مثال: د یوی سکی د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دي که څلور واره وغورځول شي د دی احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1-P=\frac{1}{3}P$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$P = \frac{3}{4}$ , $Q = \frac{1}{4}$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: يوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ ترلږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زيات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$
$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دې ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \quad \text{so} \quad 2^n > 100 \quad \Rightarrow n \geq 7$$

## متمادي او غير متمادي فضاګانې:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يي فضايو معين يا غير معين سيټ دی يعنی که د فضا عناصر معين $(Countable)$وي نمونه يي فضا معينه ده. چه پرېکړې فضا هم ورته وايي او که د فضا عناصر معين نه‌وي نو فضا غير معينه ده چه نښتې يا متمادي فضا هم ورته وايي

مثال: د لاندې فضاګانو څخه کومه يوه متصله او کوم يوه پرېکړې ده؟

الف: د دوو رمل دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل

ج: د (30) ذده کوونکو څخه د(3) تنو ټاکل

د: د يوې د کرې د حرارت د درجې لوړيدل د (100) درجو د سانتي ګيرېډ څخه تر (1000) درجو د سانتي ګيرېډ پورې.

ها: د ($30^\circ$) او ($45^\circ$) درجو ترمنځ د يوې زاويې ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library


حل. څرنګه چه د (الف او ج) نمونه يي فضاګانی دمحدودو عناصرو د شمېر شحخه جوړې شوي دي نو پربکړی فضاګانی دي او(ب ، د او ها) فضاګانی دنامحدودوعددونوڅخه جوړې شوي دي نو نېتی بامتمادي فضاګانی

ورته وايي.

دويم مثال. عبداله د خپل کور دګلانو د اوبولو لپاره يو واترپمپ وا خيستلو د واتر پمپ عمر د ساعت له مخې پيدا کړی؟

حل. { } خالي سيټ د واتر پمپ د ورانېدو وخت دی او $S = \{t \in \mathbb{R} \; : \; t \geq 0$ د واتر پمپ د عمر اوږد والي دی.

هم چانسه پېښې

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په يوه تجربه کې برابر وي د هم چانسه پېښو په نوم ياديږي

که چېرې $S = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ يوه نمونه يي فضا وي نو $(e_i)$ د هر $i = 1,2,3,\cdots n$ لپاره يوه ناځاپه لمړنی پېښه ده په دي شرط چه $0 \leq P(e_i) \leq 1$ وي

د لمړنيو پېښو داحتمالاتو مجموعه ديوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

مثال. څلور کسه په يوه لوبه کې اشتراک کوي د هر يوه نمونه يي فضا هم چانسه ده د هر يوه د ګټلو احتمال پيدا کړی؟

حل. که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو دهری ناځاپه لومړنی پېښې احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دي نو ليکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنی پېښې هم چانسه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د متمادي فضاګانو احتمال:

پیوسته نمونه يي فضا ګانی د لایتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل يي د اعدادو په محور ، سطحه او د اجسامو په حجمونو کی لیدل کیږي. د دغه ډول ټکو ښودنه ممکنه نه ده مګر د احتمال د نسبت لپاره يي خطونه ،سطحی او حجمونه په توټو وېشو. د اعدادو د محور څخه د یوه حرف لکه $(x)$ او په سطحو کی ددوه تورو لکه $(x,y)$ څخه او په احجامو کی د دری تورو څخه لکه $(x,y,z)$ څخه استفاده کوو

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0.3)$ په انټروال کی د یو ټکی وټاکئ چه:

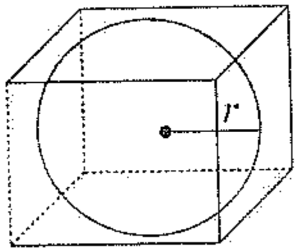
$$1 < x < 2.5$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دویم مثال: یوه کره په یوه مکعب کی محاط ده د مکعب ضلعه $(2)$ واحده ده په مکعب کی یوه نقطه ټاکو ایا ددی احتمال شته چه دا نقطه د کری پر مخ پرته وي؟

$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$ دکری شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$




## مشروط احتمال:

که $S$ نمونه يي فضا او $(A)$ او $(B)$ په دغه نمونه يي فضا کی دوه ناڅاپي پېښی وي په داسی حال کی چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ یعنی د $(A)$ د پېښی احتمال نظر د $(B)$ ناڅاپي پېښی ته مشروط احتمال بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


د پورته فارمول څخه لیکو چه:

-1

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$
$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

-2

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلي څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عمومیت ورکړو نو لیکو چه:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) + \cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_n}(A)}$$

لومړی مثال: یو شاګرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ دګاډی څخه کته اخلي چه (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیری پیښې:

1- د ګاډی پواسطه راتلل

2- په ټاکلي وخت رسیدل اوپه دې صورت کې د $(A)$ مشروط احتمال نظر $(B)$ ته $P_B(A)$ مطلوب دی ؟

حل:

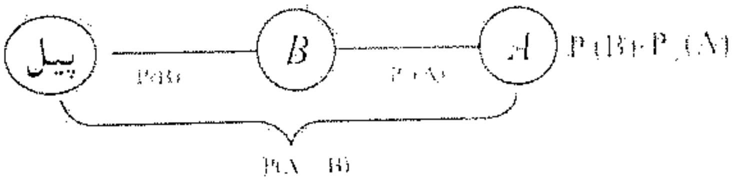
$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\bar{3} = 58.33\%$$

## د حاصل ضرب اصل

د په نمونه‌يي فضا کې د او د دوه ناڅاپي پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف سره سم لیکو چه:

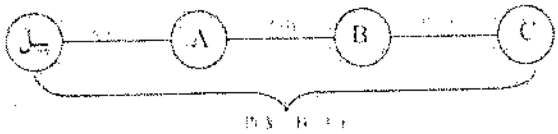
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ایز دیاګرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.




$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د او او دري پېښو لپاره هم د تطبیق وړ دی

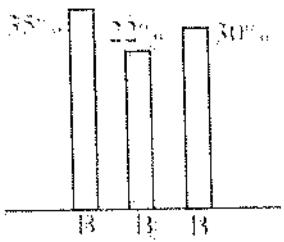



$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A\cap B}(C)$$

مثال - د $B_1$، $B_2$ او $B_3$ په دري ولایتونو کې په پارلماني ټاکنو کې د ګډون کوونکو فیصدي او د جمهوري ګوند فیصدي برخه ورکړشوې ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او یا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي.

ناڅاپي په لاندې ډول تعریفوو




V: هغه رایي ورکوونکي چه جمهوري ګوند يي ټاکلی وي.

$B_i$ د ولایت رایي ورکوونکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

| ولایت | درایو ورکوونکو فیصدي | جمهوري ګوند ته رای ورکوونکي |
|---|---|---|
| $B_1$ | 33.2% | 35 |
| $B_2$ | 46.5% | 22 |
| $B_3$ | 20.3% | 30 |

1- $B_i$ دوه په دوه یو دبل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د $(S)$ نمونه یي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \cup_{i=1}^{3} B_i$ دی نو:

$B_i \cap \mathbb{V}(i = 1,2,3,)$ یو له بل سره مستقل صورت نیسي

$$V = \bigcup_{i=1}^{3} (B_1 \cap V)$$

د دواړو خواو د احتمال لپاره لیکو.

$$P(V) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{3} (B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P_{B_i}(V)$$
$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V)$$
$$= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3$$
$$= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794$$
$$P(V) = 27.94\%$$

تعریف:

که چیرې د $B_1, B_2 \cdots, B_n$ رای ورکوونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $n$ $i = 1 \cdots n$ پیښنو عمومي حالت د $(S)$ په نمونه یي فضا کې یوه پیښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم یادیږي او د $(A)$ اختیاري ناڅاپي پیښې لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د $B_i$ چه $i = 1 \cdots n$ د $(S)$ نمونه یي فضا د یوی پیښې لپاره چه $P(B_i) \neq 0$ د $(A)$ ناڅاپي پیښې احتمال چه $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayex)$ بائیزفارمول پواسطه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i-1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بائیز فارمول زیات استعمال لري لکه $n = 2$ لپاره $B_2 = \bar{B}$ , $B_1 = \bar{B}$ په پام کې ونیسو په حقیقت کې $B_1$ او $B_2$ د $(S)$ دنمونه يي فضا پېښې دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

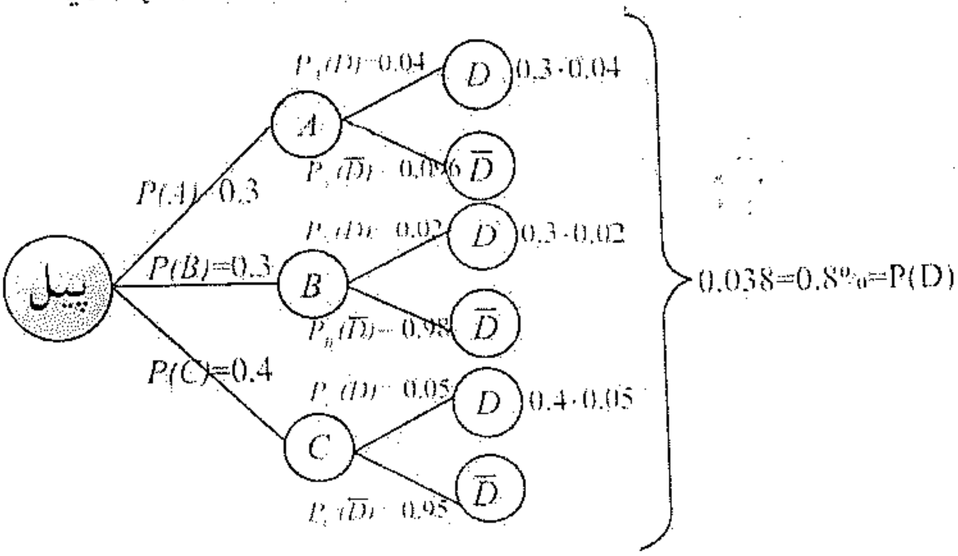
پورتنی فارمول د لپاره د بائیز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال:په یوه فابریکه کې د $A$ ، $B$ او $C$ دری ماشینونه په ترتیب سره 30% ، 30% او 40% د برق ګروپونه تولیدوي که چېرته په ماشینونو کې دګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4% ، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: ددې احتمال چه یو اخیستل شوی ګروپ وران دی.

b: په کوم احتمال خراب شوی ګروپ د $C$ په ماشین پوری اړه لري.

c: یو نوی تولید شوی ګروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشین پوری اړه ولري.




د $b$ جز حل:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


د C جزء:

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

## د ناڅاپه پېښو استقلالیت:

د ناڅاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیټ سره مساوي وي نو دغه دوول ناڅاپي پېښو ته مستقلې پېښې وایي یعنې پېښې استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د $A$ او $B$ پېښې ګډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د یوه ښوونځي ذده کوونکي د سترګو رنګ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ور کړئ.

الف: ټاکل شوی ذده کوونکی یو هوښیار ذده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی ذده کوونکی توری سترګې لري

حل: څرنګه چه $P_B(H) = P(H)$ اوسربېره پردې $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ناڅاپي پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعدة صدق وکړي پرته له هغې پېښې یو له له بلې سره تړلې دي.

نتیجه:

1- $A \cap B$ ، $A \cap \bar{B}$ ، $\bar{B} \cap \bar{A}$ ، $\bar{B} \cap A$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پیدا کولای شو

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | $B$ | $\bar{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $P(A\cap B)=a\cdot b$ | $P(A\cap \bar{B})=a(1-b)$ | $a$ |
| $\bar{A}$ | $P(A\cap B)=b(1-a)$ | $P(\bar{A}\cap \bar{B})=(1-a)(1-b)$ | $1-a$ |
| | $b$ | $1-b$ | 1 |

2- د $A$ ، $B$ او $C$ دري ناخاپه پېښې چه يو د بل څخه مستقلې دي نولرو چه:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دويم مثال: د لاندي متقاطع جدول خالي ځايونه ډک کړئ؟

| | $B$ | $\bar{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.12 | $P(A\cap \bar{B})=$ ? | ? |
| $\bar{A}$ | $P(\bar{A}\cap B)=?$ | $P(\bar{A}\cap \bar{B})=$ ? | ? |
| | ? | 0.6 | |

حل: څرنګه چه $P(\bar{B})=0.6$ نو $P(B)$ داسې پيدا کوو

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$
$$P(\bar{A})=1-P(A=1-0.3=0.7)$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چه:

$$P(A\cap \bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$
$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

که پيدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځايو کې وليکو جدول تکميليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

# شلم فصل

موهومي عددونه *Imaginary Numbers*:

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدې کبله کله چه په دويمه درجه معادلو کې $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترڅو چه په (1795) ميلادي کال يوجرمني ساينسدان چه Friedrich Gouss نوميدلو $(i^2 = -1)$ وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلود حل لپاره لاره خلاصه شوه چه $(\Delta < 0)$ وه.

موهومي عدد (*Imaginary Numbers*) يو عدد دی چه په روزمره ژوند کې په راکړه ورکړه کې نه استعماليږي. مګر دعلمي مسايلو د حل لپاره د زيات اهميت وړ دی لمړی حرف يي د ايوتا (*iota*) يوناني کلمې څخه اخيستل شوی دی

مثال:- $\sqrt{-36}$ جذر پيدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دويم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$
$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنګه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کيږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مګر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

1: $i = \sqrt{-1}$ 2: $i^2 = -1$ 3: $i^3 = -i$ 4: $i^4 = 1$
5: $i^5 = i$ 6: $i^6 = -1$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i \ , i^{4n+2} = -1 \ , i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه يي منفي وي د پورته جدول پواسطه حليږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library


$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$
$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$
$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$
$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$

لاندې موهومي عددونه د طاقت څخه وباسئ:

$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$

## د اعدادو سیټونه:

### 1- د طبعي اعدادو سیټ *Set of Natural Numbers*:

د(1) څخه تر لایتناهي (∞) پورې د اعدادو سیټ ته د طبعي اعدادو سیټ وايي په (IN) سره یي ښیي.

$$\mathrm{IN} = (1،2،3،4،5 \cdots \infty)$$

### 2- د مکمل اعدادو سیټ *Set of Whole Numbers*:

د (0) څخه تر (∞) پورې داعدادو سیټ ته د مکمل اعدادو سیټ وایي په (w) سره یي ښیي.

$$\mathrm{w} = (0،1،2،3،4، \cdots \infty)$$

### 3- د تام اعدادو سیټ *Set of Integer Numbers*:

د (−∞) څخه تر (+∞) پورې د اعدادو سیټ ته د تام اعدادو سیټ وایي او په (I) سره یي ښیي.

$$\mathrm{I} = (-\infty، \cdots ، -3،2،1،0،1،2،3 \cdots \infty)$$

### 4- د دناطق اعدادو سیټ *Set Of Rational Numbers*:

صحیح عدد،مختوم کسر،غیر مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وایي او په ($Q$) سره یي ښیي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$Q = \left(1، 2، 15، 109، \frac{4}{5}، \frac{2}{3} \cdots\right)$$

5- د غیرناطق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*:

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناطق عدد بلل کیږي او په $(\bar{Q})$ سره ښودل کیږي

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47}\ ,\ \frac{13}{49}\ ,\ \sqrt[3]{2}\ ,\sqrt{3}\right)$$

په مجموعي [illegible] د حقیقي اعدادو د سیټ په نوم یادیږي او په (IR) سره یې ښیي

$$\mathbb{R} = (\mathrm{Q} + \bar{\mathrm{Q}}) = \left(-\infty، -3، +6، \sqrt{2}، \frac{2}{5}، \frac{5}{6}، \frac{13}{49} \cdots \infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*:

هغه عددونه چه یوازی د $(i)$ حرف پکې موجود وي او د حقیقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کې نه وي موهومي عددونه بلل کیږي لکه $\left(-i\ ,11i,\ \ \frac{2}{3}i\ ,\ \sqrt{5i^3},\right)$

## دموهومي عددونو څلورګوني عملیې:

1- د موهومي عددونو جمع اوتفریق:

هم علامه عددونه جمع کووعلامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه عددونه یو دبل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

1: $15i - 31i = 16i$ 2: $14i - i = 13i$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کې ،عددپه عدد کې ضربوو. توانونه یې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ويشو او توانونه يو د بل څخه منفي كوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه $Complex\ Numbers$.

هغه عددونه دي چه د حقيقي عدد او موهومي عدد د مجموعي يا تفاضل څخه لاس ته راغلي وي لكه ( $5 + 11i\ , 8 - 20i$ ) او داسې نور. مختلط عدد په $(z)$ سره ښيي $z = 3 \pm 21i$ او داسې نور.

صفري مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفر وي.

مثال:- كه په $z = a + bi$ كې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ كيږي دغه عدد ته صفري مختلط عدد وايي.

مثال: لاندي $(i - 3, 4\ , 2i\ ,\ 2i - 3)$ عددونه په معياري شكل وليكئ؟

| مختلط عددونه | معياري شكل $(z = a + bi)$ |
|---|---|
| $i - 3$ | $-3 + i$ |
| $4$ | $4 + 0i$ |
| $2i$ | $0 + 2i$ |
| $2i - 3$ | $-3 + 2i$ |

د مختلطو عددونو څلورګونی عمليې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقيقي عدد د حقيقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع كوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بيا هم يو موهومي عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library


$$\begin{array}{r} 17+45i \\ \underline{28-106i} \\ 45-61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$ کیږي

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$Z_1 + Z_2 = (2-3i) + (3+4i) = (2+3) + (-3i+4i) = 5 + i$$

د مختلط عددونو د جمعی دعملیي خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a+bi) + (-a-bi) = (a-a) + (b-b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقيقي عدد د حقيقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} 29-18i \\ \underline{\pm 35 \pm 67i} \\ 64+49i \end{array}$$

$$(a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

د مختلط عددونوضرب:

علامه په علامه کی عددپه عددکی ضربوو اوتوانونه يې سره جمع کوو.

مثال:- $z_1 = a + bi$ , $z_2 = c + di$ دوه مختلط عددونه راکړشوي دي دضرب حاصل یې پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad+bc)i + bd(-1)$$
$$= ac + (ad+bc)i - bd = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

اول مثال: $z_1 = 3 - 5i, z_2 = 8 + 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1.z_2$ پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (3-5i)(8+5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2$$
$$= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25$$
$$z_1 \cdot z_2 = 49 - 25i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د مختلط عدد مزدوج $(Cnjugate\ of\ Complex\ Number)$:

د یوه مختلط عدد مزدوج د بینوم د مزدوج په څېر دی .او په $\bar{z}$ سره یي ښیي .مثلاًکه $(z)$ یو مختلط عدد وي نو مزدوج یي $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ یو مختلط عدد دي او مزدوج یي $\bar{z} = x - yi$ دي.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$
$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم , $Norm$ (میزان، ماخذ ،هنجار، نمونه) وایي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \qquad ,2xRel(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \qquad 2yiIm(z)$$

## د مختلط عدد ضري معکوس:

فرضاً $a + bi$ یو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره یي د $\frac{1}{a+bi}$ صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کی ضربووك

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ د $\frac{1}{a^2+b^2}$ ضربي معکوس دي.

مثال: د $2 - 3i$ ضربي معکوس پیدا کړئ؟

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزیه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

## د دوو مختلطو عددونو وېش:

په یوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم علیه دواړه د مقسوم علیه په مزدوج کی ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2}$$
$$=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}=\frac{8-14i+15}{4+25}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

## دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعې مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعې سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو دتفاضل سره مساوي دي او هم د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقیقي برخې دوه چند دی.

$$z+\bar{z}=2x$$

6- د یوه مختلط عدد اود هغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخې دوه چند دی.

$$z-\bar{z}=2yi$$

7- د یوه مختلط عدد دمزدوج ،مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}}=z$$

مثال: که $z_1=4+5i$ او $z_2=-3+2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ او $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ کیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



حل:

$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1+7i \quad \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$

$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (4-5i) + (-3-2i) = 1 - 7i$

ثابته شوه چه:

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)(-3+2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$
$= -12 - 7i + 10(-1)$
$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$
$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (4-5i)(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$
$= -12 + 7i + 10(-1)$
$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = -22 + 7i$

په نتيجه کې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = -22 + 7i$$

## د مختلطو عددونو په ساحه کی د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

د دویمی درجی معادلی عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله یو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه ډول معادلی د حقیقي اعدادو په سیټ کی حل نلري مګر په موهومي اعدادو کی حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$$

$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

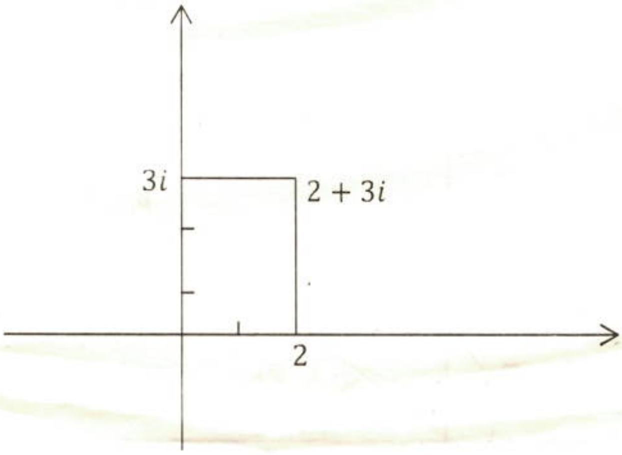
(c) ketabton.com: The Digital Library


حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240$$
$$= 16(-1) - 240 = -16 - 240 =$$
$$\Delta = -256$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2 \cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

په مختلط عددونو کی حقیقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کیږي.په دی ترتیب کولای شو چه دګوس داعدادو په مستوي کی مطلوب نقاط پیدا کړو د نقطو دوصلېدو څخه خط لاس ته راځي.او د خطودترسیم په نتیجه کی مختلف اشکال رسمولای شو.

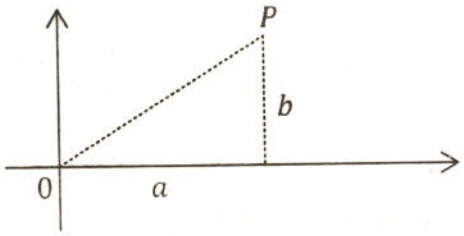
مثال:- د $(2 + 3i)$ نقطه پیدا کړئ




که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یي مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یي فاصله کړو نونقطه د مبداء سره وصلوو.مطلقه قیمت یي د مبداء څخه فاصله ده .چه د فیثاغورث د قضیي سره سم یي هم فاصله پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library






مثال: د $(P)$ د نقطی وضعیه کمیت $(4+3I)$ دی مطلقه قیمت یي د مبداء څخه څو دی؟

$$4+3i=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله یي د محورونو د مبداء څخه مساوي ده .

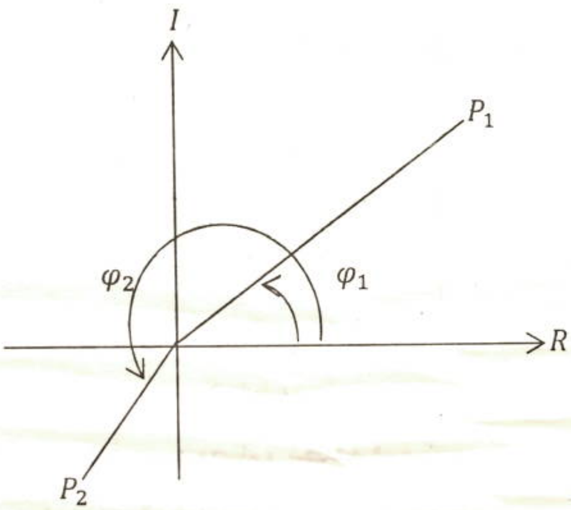
$$-5+12i \qquad -5-12i$$

$$=\sqrt{(-5)^2+12^2} \qquad =\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}$$

$$=\sqrt{169} \qquad =\sqrt{169}$$

$$=13 \qquad =13$$

د $(\varphi)$ هغه زاویه چه د $(\overline{OP})$ خط یي د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم یادیږي حرکت یي د ساعت د عقربی خلاف وي یعنی دا زاویه همېشه مثبت وي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

# یوویشتم فصل

## د ریاضي منطق

### د ریاضي استدلال:

د ریاضیکي بیان د سمون لپاره چه کومې علامې اوطریقې استعمالیږي د ریاضي د استدلال په نوم یادیږي.

شهودي درک یا مشاهدات:-هغه مفاهیم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلېدل یې استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات یا شهودي درک ورته وایي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاویې مساوي وي.او داسې نور.

### تمثیلي استدلال:

هغه استدلال دې چه د یوریاضیکي بیان د وضاحت لپاره مثالونه وویل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتایج لاس ته راوړل شي.

لکه په عامیانه ډول [مار خوړلی د پړي نه ډاریږي] دا یو قیاسي استدلال دی.

### استقرائي استدلال :

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کې د ټولو طبعي عددونو ،ټولو جفتو عددونو یا ټولو طاقو عددونو لپاره د یوه فارمول ثبوتولو ته استقراء یا استقرائي استدلال وایي.

د ټولو طاقوعددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو جفتوعددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو مسلسلوعددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

داستقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د ریاضي په استقراء کې ثبوت شوي دي.

لاندې جدول کې خالي ځایونه ډک کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



| دمجموعې فارمول | دمکعبونومجموعه | دمتوالي طبعي عددونومکعبونه | د متوالي عددونو شمېر |
|---|---|---|---|
| $1^2$ | | $1^3$ | 1 |
| | | $1^3+2^3$ | 2 |
| | 36 | $1^3+2^3+3^3$ | 3 |
| $10^2$ | | $1^3+2^3+3^3+4^3$ | 4 |
| $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ | | $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$ | $n$ |

مثال: ثبوت کړئ چه $P(n)=4^{2n}-1$ په (5) باندی د وېش وړ دې؟

حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو.

$$P(1)=4^{2\cdot 1}-1=16-1=15$$

(15) په (5) باندی وېشل کيږي.

په $(n)$باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چه په $(n+1)$ باندی هم د وېش وړ دی.

ثبوت:

$$P(n)=4^{2n}-1=5r$$
$$4^2\cdot(4^{2n}-1)=5r\cdot 4^2 \Rightarrow 4^{2n+2}-4^2=5r\cdot 16$$
$$4^{2(n+1)}-1=15+16\cdot 5r=5(3+16r)$$

د مساوات ښی خوا په (5) وېشل کيږي. نو چپ طرف يي هم وېشل کيږي.نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1)=4^{2(n+1)}-1$$

ثابته شوه چه که په راکړ شوي فارمول کی د $(n)$ په عوض هر طبعي عدد وضع شي په (5) وېشل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


## استنتاجي استدلال

که د یوی عملیی نتیجه همېشه ثابته وي او ښه په ډاډ سره يي په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وايي.لاندی جدول ته وګورئ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 12 | 19 | 23 |
| 15 | 19 | 26 | 30 |
| 30 | 38 | 52 | [illegible] |
| 18 | 26 | 40 | 48 |
| 9 | 13 | 20 | 24 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

په پورته جدول کی د عدد سره (7) جمع شوي دي.دجمع حاصل يي دوه چند شوی دي.بیا ببرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل يي نیمايي شوی دي په دغه عددو کی هرعدد د اولني عدد څخه د(1) په اندازه زیات شوی دي.چه دغسی عمل ته استنتاجي استدلال وايي.

## دحکم د نفی کولو استدلال:

دغېرناطقو عددونو د جمع حاصل يو غېر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحيح دی. نو$(x)$ او$(y)$ دوه مجهول عددونه په نظر کی نیسو چه دجمع حاصل يي $(x+y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x=1+\sqrt{2}$ او $y=1-\sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x+y=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$$

ګورو چه $(x+y=2)$ يو ناطق عدد دي.غېر ناطق عدد نه دي.نو ثابته شوه چه د دوه غېرناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غېرناطق عدد نه وي.

## د خلف برهان يا غېر مستقيم ثبوت:

دقضيي د عکس ثبوت ته غېر مستقيم ثبوت وايي.

قضيه: که د يوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که $n^2$ جفت وي .

مطلوب: ثبوتوو چه $(n)$ هم جفت دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو ليکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطې څخه څرګنده شوه چه $(n^2)$ طاق دی او دا د فرضيي خلاف ده نو داچه $(n)$ یو جفت عدد دی صحيح نه دی.

## د رياضي منطق او د بيان استنتاج:

بيان يوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بيان په (P) او د بيان صحت په (T) او غلطي يي په (F) وښيو او(~P) د (P) دبيان نفی وي نو د صحت جدول يي په لاندی ډول جوړيږي.

| $P$ | $\sim P$ |
|---|---|
| $T$ | $P$ |
| $F$ | $T$ |

### د بيانونو ترکيب:

1- $P \wedge Q$ کی $(\wedge)$ د (او) معنی ورکوي.

2- $P \vee Q$ کی $(\vee)$ د (يا) معنی ورکوي.

3- $P \Rightarrow Q$ کی $(\Rightarrow)$ د (په نتيجه کې) معنی ورکوي.

4- $P \Leftrightarrow Q$ کې $(\Leftrightarrow)$ د دوه ارتباط معنی ورکوي

مثال: د ثحت په جدول کی وښياست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بيان په کوم وخت کی صحيح دی.

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \vee (p \Longrightarrow q)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |

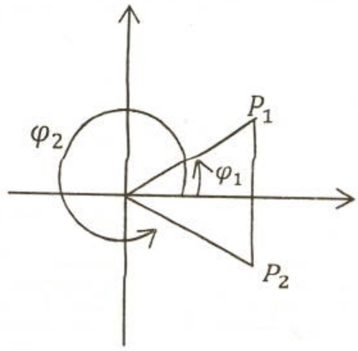
تمت بالخير

په 1394/4/23 نيټه چه د روژې د مبارکی مياشتی د اوه ويشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کی د تالاشی چوک د حاجي زرخان په پلازه کی پای ته ورسېدلو .

سردار محمد (خوږيانی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مزدوجو مختلطو عددونو د ارګومينټونو د جمع حاصل مکمل دوران ($360^\circ$) وي.




## دمختلطو عددونود دويم جذر پيدا کول:

دمختلط عدد دويم جذر د لاندې فارمول په واسطه پيدا کيږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

ثبوت:

$$\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2 = a+bi+2\sqrt{a+bi}\cdot\sqrt{a-bi}+a-bi \ldots\ldots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2}+2a$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 2$$

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 3$$

$$\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(-\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} = i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \ldots\ldots 4$$

دريمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a+bi}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2} \ldots\ldots 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \ldots\ldots\ldots 6$$

$$\sqrt{a-bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \ldots\ldots.7$$

اول مثال: د $\sqrt{-5+12i}$ دویم جذر پیدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i}=\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}=3+2i$$

دویم مثال:

$$\sqrt{-2i}=\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

# د ځینو کاشفینو انځورونه

بینارډ ریمان

کارل فریډ ریچ

اریتوستنس

جورج کانتور

اسحاق نیوټن

ارشمیدس

محمد بن موسی

پیرک اندرویس

(c) ketabton.com: The Digital Library

فارما

وین ستهندریو

لایبینز

کووشی

وایرس ترس

هرمت

(c) ketabton.com: The Digital Library

## چاپ شوي کتابونه

- ❋ عمومي رياضي ( نوی نصاب )
- ❋ عمومي فزيک ( نوی نصاب )
- ❋ ابتدائيه رياضي او هندسه (نوی نصاب)

## تر چاپ لاندې کتابونه

- ❋ د فزيک د تمريناتو حل ( نوی نصاب)
- ❋ د رياضي د تمريناتو حل ( نوی نصاب)
- ❋ د عمومي رياضي ( فارسي ترجمه)
- ❋ عمومي هندسه
- ❋ د عمومي هندسې ( فارسي ترجمه )
- ❋ عمومي مثلثات
- ❋ عمومي رياضي ( فارسي ژباړه)
- ❋ عمومي فزيک ( فارسي ژباړه)


سپين غر تعليمي مرکز

ميهن خپرندويه ټولنه

پېښور - جلال آباد

0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library