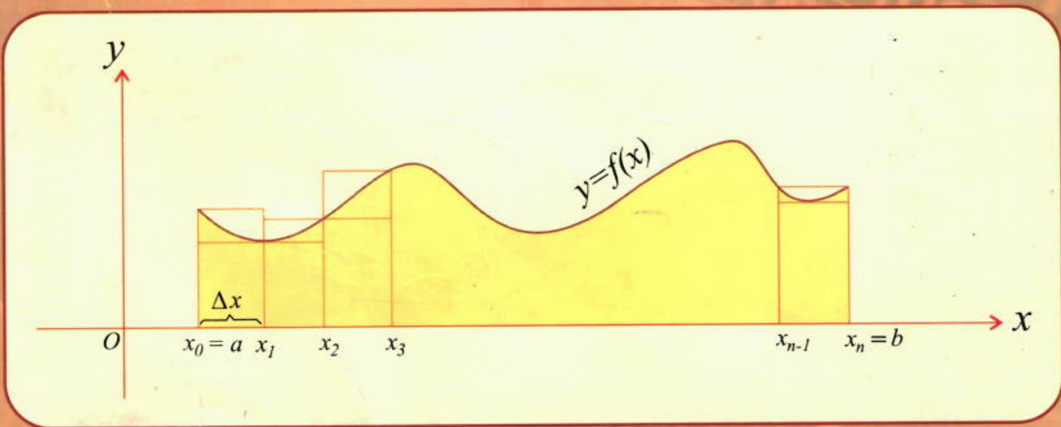
(نوی نصاب)

عمومي رياضي

له اووم ټولګي څخه تر دولسم ټولګي پورې



ارشمیدس

ارتوستنس

محمد بن موسی

اسحاق نیوټن

کوشي

Ketabton.com

مؤلف: استاد سردارمحمد (خوږیانی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږیانی)

سنګر کتابکور
0700202080
0700203080
کتاب مارکیټ. کندهار

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتاب پېژندنه

د کتاب نوم/

عمومي رياضي (نوی نصاب)

مؤلف/

سردار محمد (خوږياڼی)

ډيزاين/

الله يار تسل

خپرندوی/

ميهن خپرندويه ټولنه

چاپکال/

۱۳۹۵ل

چاپشمېر/

۱۰۰۰ټوکه

آدرس

ميهن خپرندويه ټولنه پېښور- جلال آباد

جلال آباد: اسحاقزی مارکيټ لاندې پوړ، لومړی دوکان

Email: Khorshidhimat@yahoo.com

Abdurashid.himat@gmail.com

Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱

۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

د چاپ حقوق له ميهن خپرندويې ټولنې سره خوندي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مقدمه

الحمد لله الذی فهمنا بعلوم الاشیاء والحوادث و علمنا بزیادات هم و النواقص و الصلوة و سلام علی رسوله بفهم الانسان باشرع فی الاعمال و المباحث.

اما بعد!

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهربانۍ باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه شوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لندیز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی د غه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر انتیګرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توګه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شویدي ځو ځو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غواړي که څه هم مونږ دا کتاب ځو ځو واره په غور سره کتلي او کمی او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود ؤ، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار-تالاشی چوک د حاجي زرخان پلازه

سردار محمد خوږیانی

د نصرت عالي لېسې د ریاضاتو استاد

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیک لړ

حساب

اول فصل

حساب........ 1
د حساب د علم موضوع........ 1
د مکمل اعدادو سیټ........ 1
د طبیعي اعدادو سیټ........ 2
د حساب د علم د زده کړې غرض........ 2
د حساب اصطلاحات........ 2
واحد........ 2
عدد........ 2
ارقام........ 4
طبقې........ 5
د صحیح عددونو څلور ګونې عملیې........ 6
1- د صحیح عددونو جمع........ 6
2- د صحیح عددونو تفریق........ 8
3- د صحیح عددونو ضرب........ 10
اضافي معلومات........ 12
4- د صحیح عددونو تقسیم........ 16

دویم فصل

کسر........ 21
اعشار کسر........ 21
د اعشار کسر څلور ګونې عملیې........ 21
عام کسر........ 24
د کسرونو مقایسه........ 26
تجنیس........ 26
د کسرونو اختصار........ 27
د عام کسر څلور ګونې عملیې........ 33

(c) ketabton.com: The Digital Library

کسر الکسر..37
د کسرونو تبادله..39
دریم فصل
طاقت لرونکی عددونه..42
تجزیه..44
جذر..49
د اعدادو سیستمونه..59
د 2 په قاعده د اعدادو سیستم..60
د 5 په قاعده د اعدادو سیستم..61
څلورم فصل
نسبت..63
تناسب..83
پنځم فصل
فیصد..72
تخفیف..73
أحدیت..75
ربحه..76
تنزیل..79
مشارکت..80
شپږم فصل
سیټ..84
د سیټ د لیکلو طریقې..84
د سیټ اقسام..86
د روابطو له مخې د سیټونو اقسام..86
د سیټونو عملیې..89
الجبر
اول فصل
الجبر..93
د الجبر اصطلاحات..94

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم 95
د الجبري عددونو څلور ګوني عملیې 97
د پولینومونو څلور ګونې عملیې 100
د باقي مانده دعوه 102
ترکیبي تقسیم 104

دویم فصل

مساوات 106
مطابقت 106
تجزیه 110
الجبري کسرونه 116
د الجبري کسرو خواص 116
د الجبري کسرونو جمع 117
د الجبری کسرونو تفریق 117
د الجبري کسرونو اختصار 118
د الجبري کسرونو تقسیم 118
د کسرونو ګویا کول 119
قسمي کسرونه 122

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات 127
د معادلې اقسام 127
یو مجهوله اوله درجه معادله 127
د معادلې خواص 128
جذري معادلی 129

څلورم فصل

دوه مجهوله معادلی 133
د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل 133
متریکس 138
د متریکس ډولونه 139
د متریکسونو جمع 141

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکس تفریق............ 141
د دوه متریکسونو ضرب............ 143
د یوه متریکس ترانسپوز متریکس............ 144
دیترمینانت............ 145
د دیترمینانت د حل طریقه............ 145
د دیترمینانت خواص............ 147
الحاقي متریکس............ 148
پنځم فصل
دویمه درجه یومجهوله معادلې............ 151
د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې............ 152
دجذرو له مخې د یو مجهوله دویمه درجه معادلې جوړول............ 161
د دویمه درجه یومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول............ 162
د دیکارت قاعده............ 163
شپږم فصل
غېرمساوات............ 173
د غیرمساوات خواص............ 173
دغېرمساوات اقسام............ 175
مطلقه قیمت............ 177
دبېنوم داشاری ځېږل............ 177
د یو مجهوله غېرمساوات سیستم............ 183
دوه مجهوله غېرمساوات............ 184
ددوه مجهوله غېرمساوات سیستم............ 185
ددوه مجهوله غېرمساوات د سیستم د حل طریقه............ 185
یو مجهوله دویمه درجه غیرمساوات............ 186
ددویمه درجه غېرمساوات دحل طریقه............ 187
اووم فصل
پارامتریک معادلې............ 190
اتم فصل
اکسپوننشل (نمائي) معادلې............ 199

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوګاريتمي معادلې 203
دقاعدې د بدلولو فارمول 206
د لوګاريتم اقسام 207
د يوه عدد د لوګاريتم پيداکول 208
د يوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاريتم 209
انټي لوګاريتم 210
انټرپولېشن 211
کولوګاريتم 212
د لوګاريتمي معادلو د حل طريقه 213

لسم فصل

توابع 220
د تابع اقسام 221
ناطقه تابع 221
خطي تابع 221
دخطي تابع د تعريف ناحيه 222
د مستقيمې کرښې مېل 224
دمېل معادله 225
محوري معادله 227
پولينومي تابعګانې 231

يوولسم فصل

دويمه درجه تابع 233
د دويمه درجه تابع ګراف 233
د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم 233
د ګراف انتقال 235
هوموګرافيک تابع 248
مجانب 248
د هوموګرافيک تابع د ګراف ترسيم 250
اکسپونېنشل تابع 253
لوګاريتمي تابع 255

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد........257
حسابي ردیف........257
د حسابي ردیف فارمول........257
حسابي ردیف ته د حدونو داخلول........259
هندسي ردیف........260
د هندسي ردیف فارمول........260
د هندسي ردیف خصوصیات........262
هارمونیکي ردیف........263
سلسلې........265
حسابي سلسله........265
د حسابي سلسلې فارمول........265
د مسلسلو عددونو فارمول........266
دجفتو عددو فارمول........267
د طاق عددونو فارمول........267
هندسي سلسله........269
د هندسي سلسلې فارمول........269

دیارلسم فصل

د ریاضي استقراء........274

څوارلسم فصل

فکتوریل........277
د بینوم قضیه........279

پنځلسم فصل

لیمیټ........281
انټروال........281
د لیمیټ تعریف........288
د لیمیټ د استعمال ځایونه........284
د لیمیټ پیدا کول........285
په (∞) کې د یوی تابع لیمیټ........287

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليميټ قضيې........ 288
ابهام........ 295
د ابهام رفع کول........ 295
د مثلثاتي تابعګانو ليميټ........ 302
د تابعګانو متماديت (اتصال)........ 305
متمادي تابع........ 305
غير متمادي تابعګانې........ 305
د متماديت شرطونه........ 306
د ښي لاس ليميټ........ 307
د چپ لاس ليميټ........ 307
د متمادي تابعګانو خواص........ 309
شپاړلسم فصل
مشتق........ 311
منحنی يا وسطي تعبير........ 312
د يوې تابع مشتق........ 313
د مشتق تعريف........ 314
د مشتق هندسي تعبير........ 315
د مشتق قوانين........ 318
د يوې طاقت لرونکې تابع مشتق........ 318
د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق........ 319
د دوه تابعګانو د تفاضل مشتق........ 320
د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق........ 321
د دوه تابعګانو د حاصل تقسيم مشتق........ 322
د جذري تابع مشتق........ 324
د مرکبې تابع مشتق........ 326
د مثلثاتي تابعګانو مشتق........ 329
ضمني مشتقات........ 333
د تابع دويم ضمني مشتق........ 334
متوالي مشتقات........ 336

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د استعمال ځایونه........ 337
د یوې تابع بحراني ټکي........ 339
د انعطاف نقطه........ 340
د تابع د ګراف د ترسیم طریقه........ 343
د انعطاف د نقطې پیدا کول........ 344
د دویمه درجه تابع ګراف........ 345
هوموګرافیک تابع........ 348
د مجانب د ټاکلو عمومي لار........ 351
د دریمه درجه یومجهوله تابع ګراف........ 352
د رول قضیه........ 355
د متوسط قیمت قضیه........ 357
د لوهپیتال قاعده........ 358
دبحراني ټکو تطبیق........ 359

اولسم فصل

انتیګرال........ 363
د ریمان مجموعه........ 363
د انتیګرال مفهوم........ 368
د انتیګرال اقسام........ 368
غیرمعین انتیګرال........ 368
د غیر معین انتیګرال خواص........ 369
معین انتیګرال........ 373
د معین انتیګرال خواص........ 375
دانتیګرال او مشتق اساسي قضیې........ 382
په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول........ 385
قسمي انتیګرالونه........ 386
دلوګاریتمي او اکسپوننشل تابعګانو مشتق........ 387
د اعشاري لوګاریتم مشتق........ 388
د معکوسو تابعګانو مشتق........ 392
د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق........ 392

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه........ 394
د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه........ 396
د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال........ 397
د منحني سطحې د مساحت پیدا کول........ 401
دکروي اجسامو دحجمو محاسبه........ 410
د انتیګرال پواسطه د کرې د حجم پیدا کول........ 411
د انتیګرال پواسطه د مخروط دحجم پیدا کول........ 411
د انتیګرال پواسطه دبیضوي دحجم پیدا کول........ 412
د قوس د اوږدوالي محاسبه........ 416
تفاضلي معادلې........ 419
د دیفرینشیال ترتیب........ 420
د دیفرینشیال معادلې درجه........ 420
خطي دیفرینشیال معادلې........ 421

احصائیه

اتلسم فصل

احصائیه........ 425
د اطلاعاتو د راټولو طریقه........ 425
ټولنه او جامعه........ 426
تصادفي نمونه........ 426
تصادفي متحول او دولونه یې........ 426
دفریکونسي جدول........ 427
انځوریز ګراف یا تصویري ګراف........ 427
موډ........ 428
اوسط........ 428
د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول........ 429
د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه........ 429
ؤله ایز (تجمعي) کثرت........ 430
نسبي کثرت........ 430
میله اي ګراف........ 431

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمنکسری کرښی ګراف......431
د ګسسته یا غیر متصلو داتا ګانو اوسط......432
د جدول په مرسته د ښېتو داتاګانو اوسط......433
د داتاګانو د ګیډۍ کولو طریقه......434
وسعت......434
د ګیډۍ اوږدوالی......434
میله ئي ګراف......434
د متصلو داتاګانو دسته بندي......434
وزني اوسط یا منځنی قیمت......435
مستطیلي ګراف......436
دایروي ګراف......437
میانه......438
د تحول ساحه......438
د انحراف اوسط......439
د څوضلعي فریکونسي ګراف......440
د ساقی او پاڼی ګراف......441
ربعی......442
صندوقچه یي ګراف......443
ربعي انحراف......446
واریانس......446
معیاري انحراف (مطلق تیتوالی)......448
دبدلون ضریب یانسبي پراګنده ګي......450
په نورمال منحني کی تیتوالی......451
د نورماله توزیع مشخصات......452
څومتحوله ټولنې......453
دپراګنده ګی ګراف......454
پیوستون او دپیوستون ضریب......454
د خطي میلان معادله......456
د احتمال د تابع توزیع......459

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت 461
د پواسن داحتمال توزيع 462
د نورمال توزيع 463
نمونه اخيستل 467
د نمونې د اوسط توزيع 468

احتمالات

نوولسم فصل

احتمالات 471
چانس 471
تصادفي پېښه 471
تجربوي احتمال 471
نظري احتمال 471
نسبي کثرت او احتمال 472
په نمونه يي فضا کي برابر او نابرابر چانس 472
د يويې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه 472
د احتمال قاعدې 474
ونه ايز دياګرام 475
د ضرب د حاصل لومړی قاعده 475
د ناڅاپي پېښو اتحاد 476
د ناڅاپي پېښو تقاطع 477
د سيټونو او مډل جوړونه 478
د شمېرنې اصل 479
ترتيب (پرموټېشن) 480
ترکيب 480
وريشن (تبديل) 481
د بينوم قضيه 483
د دوه جمله يي احتمال 484
متمادي او غېر متمادي فضاګانې 486
هم چانسه پېښې 487

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال..488

مشروط احتمال..488

د ناڅاپه پېښو استقلالیت..493

شلم فصل

موهومي عددونه..495

د اعدادو سیټونه..496

دموهومي عددونو څلورګوني عملیې..497

صفري مختلط عدد..498

د مختلطو عددونو څلورګوني عملیې..498

د مختلط عدد مزدوج..500

د مختلط عدد ضري معکوس..500

دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت..501

دمختلطو عددونود دویم جذر پیدا کول..505

یوویشتم فصل

د ریاضي منطق..507

د ریاضي استدلال..507

تمثیلي استدلال..507

استقرائي استدلال..507

استنتاجي استدلال..509

دحکم د نفی کولو استدلال..509

د ریاضي منطق او د بیان استنتاج..510

د بیانونو ترکیب..510

(c) ketabton.com: The Digital Library

حساب

(c) ketabton.com: The Digital Library

[illegible]

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

رياضي

رياضي د رياض څخه اخيستل شويده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتي ده رياض د روضة مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه يا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کيفيتو ، کميتو ، تغيراتو ، ارتباطاتو او تاثيراتو څخه بحث کوي.

رياضي ډېرې څانگې لري لکه :

1- حساب	2- الجبر	3- نجوم
4- هندسه	5- مثلثات	6- علم هيئت

او داسې نور.

څرنگه چې زمونږ د وطن په تعليمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول ليکل شوي دي نو مونږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شيان په دی کتاب کې ليکو.

1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايې او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې يوه عمليه اجراء کوي او مجهول عدد پيدا کوي.

د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سيټ دی .

د مکمل اعدادو سيټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايې.

$$0 \longrightarrow \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.

د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخيستل، خرڅول، په صحيح ډول د دوا ګانو ترکيب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غير په فزيک، کيميا، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

د حساب اصطلاحات:

واحد:

د هر شي يوې دانې ته واحد وايي. لکه يو موټر، يوه طياره يوه کښتۍ او داسې نور.

عدد:

واحد يا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي. لکه (1)، 13، 159 او داسې نور.

عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د يوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه، 107 شاګردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسيميږي جفت عددونه دي لکه 170، 532، 714، 326، 748 او داسې نور،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ويشل کيږي لکه: 3، 41، 587 او داسې نور.

5- لمړني عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ويشل کيږي په نورو عددو پوره نه ويشل کيږی. لکه 2، 3، 5، 7 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دی. دا عددونه یو یوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273 -192) ق م کی یې یونان کی ژوند کاوه په یوه جدول کې پیدا کړی ؤ.

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه یې په یوه مربعي جدول کې ولیکل بیا یې (2) پرېښودل او هغه عددونه چې په (2) ویشل کیدل حذف کړل. بیا یې (3) پرېښودل او هغه عددونه چې په (3) ویشل کیدل حذف کړل په همدې ترتیب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ویشل کیدل حذف یې کړل په اخر کې یې په جدول کی پاتی شوي عددونه چې 25 عددونه وه په یوه پاڼه کې ولیکل او لمړني عددونه یې وبلل. عددونه دا دي.

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47 ، 53 ، 59 ، 61 ، 67، 71، 73، 79، 83 ، 89 ، 97

6- مرکب عددونه : هغه عددونه چې له ځان او یوه څخه په غیر په نورو عددو هم ویشل کیږي مرکب عددونه بلل کیږي. لکه 4 ، 6 ، 8 ، 9 ، 10 او داسې نور .

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د یوه عدد ټول واحدادت پوره وي دغه عدد ته تام عدد وایې لکه 12 هنداوني ، 15 روپۍ.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې یو واحد یې نیم ګړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هندوانې، $17\frac{1}{2}$ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج وویشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وایې لکه $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، چې $0.75 = \frac{3}{4}$ او $0.4 = \frac{2}{5}$ کیږي.

b- غیر مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي مګر د خارج قسمت رقمونه یې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$ او داسې نور .

چې $0.33\overline{3} = \frac{1}{3}$ کیږي او $0.166\overline{6} = \frac{1}{6}$ کیږی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- غیر مختوم غیر متوالي کسر: که د یوه کسر صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي او دخارج قسمت رقمونه یې هم تکراري نه وي دی کسر ته غیر مختوم غیر متوالي کسر وایې لکه $\frac{13}{47}$ چې ... $\frac{13}{47} = 0.27659574468085$ کیږي.

9- ناطق عدد: صحیح عدد، متوالي کسر او مختوم کسر ناطق عددونه دي. لکه 15 ، 28 ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غیر ناطق عدد: غیر مختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غیر ناطق عددونه دي لکه $\frac{13}{49}$ ، $\frac{11}{47}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

ارقام:

د اعدادو د لیکنې سمبول ته رقم وایې.

په ډېرو ممالکو کې د اعدادو د لیکنې لپاره سمبولونه ټاکل شوي دي چې په همغه ممالکو کې استعمالیږي. مګر هغه رقمونه چې د نړۍ په زیاتو ممالکو کې استعمالیږي دري دي.

1- رومي رقمونه　　2- هندو عربي رقمونه　　3- اریک رقمونه.

1- رومي رقمونه :

د هندو عربیک رقمو تر لیکنې د مخه رومي رقمونه زیات استعمالیدل. اوس رومي رقمونه په کتابونو کې د مختلفو مقاصدو لپاره استعمالیږي. خو په حسابي او الجبري عملیو کې نه استعمالیږي I د یو لپاره V د 5 لپاره X د 10 لپاره L د 50 لپاره C د 100 لپاره D د 500 لپاره او M د 1000 لپاره په سمبولیک ډول استعمالیږي.

که یو رقم دري واره ځنګ په ځنګ ولیکل شي جمع کیږي لکه II دوه دي III دري دي که X دري واره ولیکل شي (30) کیږي که L دري واره ولیکل شي 150 کیږي که دوه مختلف عددونه ځنګ په ځنګ ولیکل شي که د ښي خوا عدد زیات ؤ د چپې خوا عدد ور څخه منفي کیږي IV چې څلور دي IX نه دی $XL = 40$ دي $XC = 90$ دي او که د چپې خوا عدد زیات ؤ د ښې خوا عدد ور سره جمع کیږي.

$VI = 6$ ، $VII = 7$ او $VIII = 8$ دي $XIX = 19$ او $CX = 110$ ، $LX = 60$ دي $CXXX = 130$ او $MDCXIX = 1619$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي. دې رقمو ته شرقي رقمونه هم وايي. اریک رقمونه په لاندي ډول دي. ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹

ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربیک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصریانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هندیانو لیکل دي دغه رقمو ته غربي رقمونه هم وايي دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0 ، 1، 2، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 دا رقمونه په دوه برخو ويشل شويدي.

1- معنی دار رقمونه 2- بې معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمو ته معنی دار رقمونه وايي .

2- بې معنی رقم : صفر بې معنی رقم دې ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه . 0000000

او که د عدد چپې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیریږي او نه کمیږي .

لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقې : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلي دي چې هره طبقه درې مرتبې ده هره طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شویدي.

1- احادو طبقه	9- کوادریلیون	17- اوکتیلیون
2- زرو طبقه	10- کوادریلیارد	18- اوکتیلیارد
3- میلیون طبقه	11 - کوینتیلیون	19- نونیلیون
4- میلیاردو طبقه	12- کوینتیلیارد	20- نونیلیارد
5- بیلیون طبقه	13- سکستیلیون	21- د سیلیون
6- بیلیاردو طبقه	14- سکستیلیارد	22- دسیلیارد
7- تریلون طبقه	15- سپتیلیون	
8- تریلیارد طبقه	16- سپتیلیارد	

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شویدي یعنې تر تریلیارد پورې طبقې استعمال شویدي.

د عدد لوستل : عدد د ښي خوا څخه په طبقو ویشو او د چپې خوا څخه یې لولو اول د طبقې عدد لولو بیا دطبقې نوم اخلو. که طبقه یا مرتبه صفر وه نوم یې نه اخیستل کیږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ویل کیږي څلورسوه اوپنځوس تریلیارده دری سوه اواوه څلویښت تریلونه اته سوه اوپنځه ویشت بیلیارده شپږسوه اویوبیلونه دوه سوه اوڅلوردېرش میلیارده څلورمیلونه اواته سوه اویو.

د عددو لیکل : عدد د چپې خوا څخه لیکل کیږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کی لیکل کیږي که د کومی طبقې یا مرتبې نوم وانه خیستل شي پر ځای صفرونه لیکل کیږي لکه.

درې سوه څوارلس تریلیارده اوه تریلیونه نه ویشت بیلونه یو سل او دولس میلیارده نه څلویښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

د صحیح عددونو څلور ګونې عملیې:

1- د صحیح عددونو جمع:

جمع په لغت کې یو ځای کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شیانو یو ځای کولو ته جمع وایي.

هغه عددونه چې جمع کیږي د جمع عوامل ورته وایي او هر عدد ته عامل وایي او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتیجه کې لاس ته راځي. د جمع حاصل ورته وایي.

د جمع د عملیې طریقه :

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بیا د یویز مرتبو رقمونه جمع کوو که دجمع حاصل یې دوه رقمي شو لمړی رقم یې لیکو او دویم رقم یې دلسیز مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} +456783456 \\ 789432187 \\ \hline 1246215643 \end{array}$$

د جمع د عمليې ميزان:

1- د جمع ميزان په جمع :

عوامل د لاندې خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} \underline{12349391} \\ +7894321 \\ 2578092 \\ 1876978 \\ \hline 12349391 \end{array}$$

2- د جمع ميزان په تفريق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه يو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} +\ 489785 \\ 675974 \\ \hline 1165759 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1165759 \\ 675974 \\ \hline 489785 \end{array}$$

3- د جمع ميزان په طرح نه :

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو . بيا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحيح حل شويدی.

$$\begin{array}{r} +\ 5689247 \\ 7563785 \\ \hline 13253032 \end{array}$$

1 ╳ 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجمع دعمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلي د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.

لکه:

+451	+238
238	451
689	689

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په ګروپو ويشو د هر ګروپ د جمع حاصل پيدا کوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.

4- د جمع دعمليې خنثی عنصر صفر دی.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقې ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچنی عدد ته مفروق وايي د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.

د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يويز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يويز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې دلسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدي ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ 14987675 \\ \hline 63414463 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تفریق د عملیې میزان:

1- د تفریق میزان په جمع :

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -48356782 \\ \underline{17987998} \\ 30368784 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +30368784 \\ \underline{17987998} \\ 48356782 \end{array}$$

2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغي سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ \underline{1789756798} \\ 6064564748 \end{array}$$

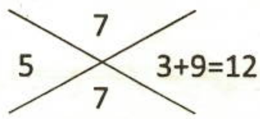
میزان

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ \underline{6064564748} \\ 1789756798 \end{array}$$

3- د تفریق میزان په طرح نه :

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل یط مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو . او منفي کوو یې او په دریم طرف کې یې لیکو بیا د تفریق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو د دریم او څلوزم عددونه مساوي وه سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -43756832109 \\ \underline{12898098734} \\ 30858733375 \end{array}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مفروق منه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم ؤ د مفروق منه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بیا د مفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.

د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق منه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 250 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

2- که مفروق منه ثابت وي مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 150 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منه زیات شي د تفریق حاصل ډیریږي.

$$\begin{array}{r} -500 \\ 200 \\ \hline 300 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منه کم شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کې تغیر نه راځي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ 250 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د مساوی عددونو د جمع لنډې طریقې ته ضرب وایي. د ضرب په عملیه کې اول عدد ته مضروب فیه او د دویم عدد ته مضروب وایي. په مضروب فیه کې د مضروب د ضرب په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عمليې طريقه:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو. بيا د مضروف دويم رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

$$\begin{array}{r} \times\ 4587 \\ 896 \\ \hline 27522 \\ 41283 \\ 36696 \\ \hline 4109952 \end{array}$$

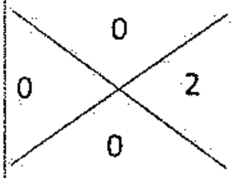
د ضرب د عمليې ميزان:

1- د ضرب ميزان په تقسيم:

د ضرب حاصل په مضروب فيه ويشو که مضروب لاس ته راغی سوال صحيح حل شوی دی او يا د ضرب حاصل په مضورب ويشو که مضروف فيه لاس ته راغي سوال حل شوی دې.

2- د ضرب ميزان په طرح نه :

مضروب فيه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د مضروب فيه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو او ضربوو يې که د ضرب حاصل يې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو يې په دريم طرف کې يې ليکو بيا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو که د دريم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحيح دی.



$$\begin{array}{r} \times\ 56783 \\ 5238 \\ \hline 454264 \\ 170349 \\ 113566 \\ 283915 \\ \hline 297429354 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب د عمليې اساسي اصول:

1- د اعدادو سيټ د ضرب د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.
2- د ضرب عمليه د تبديلی د قانون پيروي کوي.
3- د ضرب عمليه د اتحادي قانون پيروي کوی.
4- د ضرب عمليه د توزيعي خاصيت پيروي کوي.
5- د ضرب دعمليې خنثی عنصر (1) دی.

اضافي معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصة الحساب کې ليکلې دي. موږ د شاګردانو د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدين محمد بن الحسين چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زيږيدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شويدی اصلاً د لبنان د عامل په لبنان کې يو غر دی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده:

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

يو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفريق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$
$$10 - 9 = 1$$
$$1 \times 7 = 7$$
$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$
$$10 \times 4 = 40$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$40 + 8 = 48$$

دریمه قاعده:

د يو رقمي او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو يو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې يې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه يې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$
$$16 \times 10 = 160$$
$$10 - 7 = 3$$
$$3 \times 9 = 27$$
$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$
$$15 \times 10 = 150$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$150 - 14 = 136$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورمه قاعده:

د 10 او 20 تر منځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد ديويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$18 \times 3 = 21$$
$$21 \times 10 = 210$$
$$3 \times 8 = 24$$
$$210 + 24 = 234$$

پنځمه قاعده :

په 5 ، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نيمايي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه :

$$5 \times 28 = 10 \times 14 = 140$$
$$50 \times 36 = 100 \times 18 = 1800$$
$$500 \times 32 = 1000 \times 16 = 16000$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 تر منځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$7 \times 5 = 35$$
$$35 + 59 = 94$$
$$94 \times 10 = 940$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$940 + 63 = 1003$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسيز يې مساوي وي.

د يوه عدد يويز د بل عدد سره جمع کوو او په لسيز رقم کې يې ضربوو او 10 چنده کوو يې او د يويز رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$68 + 3 = 71$$
$$71 \times 6 = 426$$
$$426 \times 10 = 4260$$
$$4260 + 24 = 4284$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسيز مرتبې يې مختلفي وي.

د کوچني عدد لسيز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د يويزمرتبی او دلوی عدد د لسيز مرتبی د ضرب حاصل ور سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$69 \times 2 = 138$$
$$7 \times 6 = 42$$
$$138 + 42 = 180$$
$$180 \times 10 = 1800$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$1800 + 63 = 1863$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$87 \times 3 = 261$$
$$5 \times 8 = 40$$
$$261 + 40 = 301$$
$$301 \times 10 = 3010$$
$$5 \times 7 = 35$$
$$3010 + 35 = 3045$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 47 او 95 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$380 + 63 = 443$$
$$443 \times 10 = 4430$$
$$7 \times 5 = 35$$
$$4430 + 35 = 4465$$

4- د صحیح عددونو تقسیم:

تقسیم په لغت کې ویشلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد څخه د مساوي عددونو دتفریقولو لنډي طریقې ته تقسیم وایي.

هغه عدد چه ویشل کیږي مقسوم بلل کیږي هغه عدد چې مقسوم پرې ویشل کیږي مقسوم علیه بلل کیږي په مقسوم علیه باندې د مقسوم د تقسیمیدو په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کیږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم علیه څخه کمه شي او په مقسوم علیه نه ویشل کیږي باقي بلل کیږي.

د تقسیم د عملیې طریقه:

د مقسوم علیه مرتبې شمېرو د مقسوم د چپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوو د مقسوم علیه سره یې مقایسه کوو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو یې. د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو رقم راکښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې او که کم ؤ خارج قسمت ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه یو بل رقم راکښته کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا د مقسوم علیه څخه کم شي دغې کمې شوې برخې ته باقي وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library


```
456340189 | 56342
450736    |------
--------- | 8099
 560418
 507078
---------
  533409
  507078
---------
   26331
```

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم دعملیې میزان په ضرب:

خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال صحیح دی.

```
    × 56342                   +456313858
       8099                        26331
    -------                   ----------
     507078                    456340189
    507078
   00000
 450736
 ----------
 45631385 8
```

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه :

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم **علیه د** طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو **او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر** (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي **د طرح نه حاصل ور** سره **جمع کوو** که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې **په دریم طرف کې یې لیکو بیا** مقسوم طرح نه کوو په **څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول** سوال صحیح حل شوی دی.

7+6=13

```
    4
8   ×   2
    4
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوټ: که د تقسیم عملیې باقي نه لرل او یا یې باقي تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

893001	197
788	4534
1050	
985	
650	
591	
591	
394	
197	

893001	4532
4532	197
44980	
40788	
39214	
31724	
197	

د تقسیم د عملیې اساسي اصول:

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په همغه عدد کې ضربیږي. لکه:

60	8
56	7
4	

300	50
280	7
20	

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په همغه عدد تقسیمیږي. مثال:

25	2
2	12
5	
4	
1	

250	20
20	12
50	
40	
10	

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دوارو خارج قسمتو مجموعه ده .

مثال:

```
1280 | 80
 80  |----
---- | 16
 480
 480
----
 xxx
```

```
2000 | 80
 160 |----
---- | 25
 400
 400
----
 xxx
```

```
3280 | 80
 320 |----
---- | 41
  80
  80
----
 xxx
```

```
+1280
 2000
-----
 3280
```

4- که د دوو عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دوارو خارج قسمتو تفاضل دی.

```
-2000
 1280
-----
  720
```

```
720 | 80
720 |----
----| 9
xxx
```

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مګر 50 په 6 نه ویشل کیږي مګر $2400 = 48 \times 50$ په 6 ویشل کیږي.

```
2400 | 6
 24  |----
---- | 400
  00
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- د دري عددو مجموعه 180 ده د اول او دويم مجموعه 105 ده د دويم او دريم مجموعه 135 ده عددونه پيدا کړئ؟

2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.

3- د دوه ښارو تر منځ فاصله $900km$ ده يو موټر د يو ښار څخه د $85km$ په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانيږي او دويم موټر د دويم ښار څخه د $95km$ په سرعت اول ښار ته روانيږي ووايا ست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.

4- عبدالوهاب دوه تانه رخت له يوه جنسه يو په $9000Rs$ او بل په $10500Rs$ واخيستل د تانونو فرق 5 متره دی ووايا ست چې هر تان څو متره دی.

5- يو سړي دوه بوجۍ مميز له يوه جنسه يو په 37800 روپۍ او بل بوجۍ يې په $31500Rs$ واخيستل که د بوجيو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پيدا کړئ؟

6- دوه طياري له يوه ميدان څخه په يوه وخت کې پرواز کوي د يوې سرعت $500km/_h$ او د بلې سرعت $750km/_h$ دی يوه د شرق او بله د غرب خواته ځي پس له 2 ساعتو به يې په منځ کې فاصله څومره شي؟

7- يو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي يو د شمال خواته او بل جنوب خواته ځي د يوه سرعت $70km/_h$ او د بلې سرعت $90km/_h$ دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله $960km$ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم فصل

کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وايي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وویشل شي دي عمليې ته کسر وايي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر   2- عام کسر

1- اعشار کسر:

که واحد په 10 يا د 10 په طاقت وویشل شي دی کسر ته اعشار کسر وايي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ويشل شويدی او 3 برخې ور څخه اخيستل شويدی.

0.13 واحد په 100 برخو ويشل شويدی او 13 برخې ترې اخيستل شويدی. 0.007 واحد په 1000 برخو ويشل شويدی او 7 برخې ور څخه اخيستل شويدی.

د اعشار کسر څلور ګونې عمليې:

1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې یو تر بل لاندې ليکو چې صحيح عدد د صحيح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بيا يې د صحيح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +87965.38 \\ \underline{32887.45} \\ 120852.83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +7678.3 \\ \underline{6845.83} \\ 14524.13 \end{array}$$

ميزان يې د صحيح عددونو د جمع د ميزان غوندې دي.

2- د اعشار کسر تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې صحيح عدد د صحيح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بيا يې د صحيح عددو د تفريق په شان تفريقوو.

$$\begin{array}{r} -5345.870 \\ \underline{2758.985} \\ 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.87 \\ \underline{2758.985} \\ 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1467.23 \\ \underline{894.85} \\ 572.38 \end{array}$$

ميزان يې د صحيح عددونو د تفريق د ميزان غوندې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو. د صحيح عددونو د ضرب په شان يې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل ښخه د مضروب او مضروب فيه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بيلوو د راکړ شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

```
     4563.85
      3278.3
     1369155
    3651080
   3194695
   912770
 1369155
 14961669.455
```

ميزان يې د صحيح عددونو د ضرب د ميزان غوندې دی.

4- د اعشار کسر تقسيم:

د اعشار کسر تقسيم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاريه وي او په مقسوم عليه که نه وي.

لکه

$$4587.5 \;\big|\; 345$$

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو کله چې اعشاريې ته ورسيږو اعشاريه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کښته کوو عمليې ته تر درې اعشاري رقمو پورې ادامه ورکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

```
4587.5 | 345
345    | 13.297
1137
1035
1025
 690
 3350
 3105
  2450
  2415
    35
```

2- حالت: چې په مقسوم علیه کې اعشاریه وي په مقسوم کې نه وي.

لکه:

7562 | 34.2

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو او د صحیح عدد د تقسیم په شان یې تقسیموو که باقي وکړل باقي ته صفر ږدو او خارج قسمت کې اعشاریه ږدو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

756920 | 347

3- چې په مقسوم او مقسوم علیه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته درې حالته موجود دي.

الف: چې د مقسوم او مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وي لکه:

7843.82 | 9.23

د مقسوم او مقسوم علیه دواړو څخه اعشاریه حذفوو د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو که عملیې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ږدو او په خارج قسمت کې اعشاریه لیکو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

784382 | 923

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زیات او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

845.234 | 85.7

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو او د مقسوم عليه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاريه مخ ته ورو بيا يې د اعشار كسر د تقسيم د اول حالت په څېر تقسيموو.

$$8452.34 \;|\; 857$$

ج: چې د مقسوم عليه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زيات وي لکه.

$$87635.3 \;|\; 0.456$$

د مقسوم او مقسوم عليه څخه اعشاريه حذفوو اود مقسوم عليه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

$$87635300 \;|\; 456$$

د صحيح عددونو د تقسيم په شان يې تقسيموو.

ميزان يې د صحيح عددونو د تقسيم د ميزان غوندې دی.

2- عام كسر:

كه واحد د 10 او او 10 د طاقت څخه په غېر په نورو عددو وويشل شي دی كسر ته عام كسر وايي لکه $\frac{2}{3}$، $\frac{5}{11}$، $\frac{7}{99}$، $\frac{4}{101}$، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام كسر په څلور قسمه دی.

1- اصل كسر يا واقعي كسر   2- واحد كسر

3- غېر واجب كسر   4- واجب كسر يا كسري عدد يا مخلوط كسر

1- واقعي كسر: هغه كسر دی چې صورت يې له مخرج يې ډېر وي.

لکه $\frac{5}{13}$، $\frac{7}{19}$، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد كسر: هغه كسر دی چې صورت او مخرج يې مساوي وي لکه $\frac{8}{8}$، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر واجب کسر : هغه کسر دی چې صورت يې ډېر او مخرج يې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې دیوه صحيح عدداو يوه اصل کسرڅخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.

غير واجبول:

په غير واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غير واجبول وايي.

طريقه يې داسې ده چې مخرج په صحيح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرج يې ليکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غير واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7}=\frac{7\times 9+1}{7}=\frac{63+1}{7}=\frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غير واجب يې کړئ؟

$$8\frac{3}{5}=\frac{5\times 8+3}{5}=\frac{40+3}{5}=\frac{43}{5}$$

تصحيح:

په واجب کسر باندې د غير واجب کسر بدلولو ته تصحيح وايي .

طريقه يې داسې ده چې صورت په مخرج ويشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غير واجب کسر دی واجب يې کړئ؟

```
 27 | 5
 25 | 5
----
  2
```

$$\frac{27}{5}=5\frac{2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- غیر واجب یې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$ 2- $11\frac{6}{7}$ 3- $8\frac{2}{5}$ $4-9\frac{1}{8}$

2- تصحیح یې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$ 2- $\frac{48}{5}$ 3- $\frac{77}{8}$ 4- $\frac{46}{11}$ 5- $\frac{117}{11}$

د کسرونو مقایسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرجونه یې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرج یې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرجونه یې مساوي وي.

لکه:

$$\frac{4}{7} ، \frac{3}{7} ، \frac{2}{7} ، \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت یې ډېر وي.

$$\frac{4}{7}>\frac{3}{7}>\frac{2}{7}>\frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرجونه مختلف وي د دې کسرو د مقایسې لپاره کسرونه تجنیسوو.

تجنیس :

تجنیس په لغت کې هم جنس کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې که د یوه کسر صورت او مخرج د بل کسر په مخرج کې ضرب شي دې عملیې ته تجنیس وایي.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقایسه کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 9}{7 \times 9} = \frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9} = \frac{5 \times 7}{9 \times 7} = \frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63} > \frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$$

تمرین :

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

1- $\frac{6}{11}$ او $\frac{9}{16}$ 2- $\frac{7}{9}$ او $\frac{8}{11}$ 3- $\frac{2}{5}$ او $\frac{3}{7}$ 4- $\frac{5}{7}$ او $\frac{7}{9}$ او $\frac{9}{11}$

د کسرونو اختصار :

اختصار په لغت کې لنډولو ته وایې.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرج په یوه عدد ویشلو ته اختصار وایې.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرج په (3) ویشو.

$$\frac{\overset{4}{12}}{\underset{5}{15}} = \frac{4}{5}$$

صورت او مخرج په 7 ویشو.

$$\frac{\overset{5}{35}}{\underset{9}{63}} = \frac{5}{9}$$

صورت او مخرج په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{\overset{\overset{5}{20}}{120}}{\underset{\underset{6}{24}}{144}} = \frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

صورت او مخرج په 12 ويشو او بيا يې په (2) ويشو.

$$\frac{\frac{120}{10}}{\frac{144}{12}} = \frac{\frac{10}{5}}{\frac{12}{6}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسيم د قابليتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا جفت وي په (2) ويشل کيږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد رقمو مجموعه په 3 ويشل کيدله دا عدد په (3) ويشل کيږي.

لکه 11124 ، 1032 ، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقمونه صفرونه وه يا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ويشل کيږي. نو دا ټول په څلور ويشل کيږي . لکه 300 ، 712 ، 520 ، 316 ، 316 ، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا 5 وي دا عدد په 5 ويشل کيږي لکه 310 ، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ويش قابليت :که يو عدد په 2 او 3 ويشل کيدلو دا عدد په (6) هم ويشل کيږي لکه 312 ، 414 ، 276 ، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په (7) ويشل کيږي.

لکه: 359156 په 7 ويشل کيږي او که نه:

$$\begin{array}{r} 359156 \\ \underline{12} \\ 35903 \\ \underline{6} \\ 3584 \\ \underline{8} \\ 350 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې 350 په 7 ویشل کیږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ویشل کیږی.

7- په (8) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه یا داسې درې عددونه وه چې په 8 ویشل کیدل نو دا ټول عدد په (8) ویشل کیږي.

لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.

8- په (9) باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ویشل کیداله نو دا عدد په 9 ویشل کیږي.

لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.

9- په 10 باندې د ویش قابلیت : که د یوه عدد لمړی صفر وي په (10) ویشل کیږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.

10- په 11 باندې د ویش قابلیت: د طاق مرتبو رقمونه بیل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بیل جمع کوو یو دبل څخه یې منفي کوو که د تفریق حاصل صفر یا داسې عدد شو چې په 11 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 11 ویشل کیږی.

لکه : 558998

11- په 12 باندې د ویش قابلیت: که یو عدد په 3 او 4 ویش کیدلو دا عدد په 12 هم ویشل کیږی لکه 8016

12- په 13 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده یې د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ویشل کیدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ویشل کیږی.

لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.

13- په 17 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتیب تر اخره عملیې ته ادامه ورکوو که په اخرکی صفر یا داسې یو عدد لاس ته راغی چې په 17 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 17 ویشل کیږي.

لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- په 19 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد په لاس راغی چې په 19 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 19 ویشل کیږی لکه (871701) اوداسې نور.

15- په 23 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متباقي سره جمع کوو عملیې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ویشل کیږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ویش قابلیت: لمړی رقم حذفوو حذف شوي دري چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ویشل کیدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ویشل کیږی.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ویشل کیږی لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد په لاس راغی په 37 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 37 ویشل کیږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عملیې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ویشل کیږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کیږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخرني عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کیږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغلي چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کیږي لکه 24220311 ، 13383825 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتې عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کیږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کیږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتې عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر ؤ نو دا عدد په 67 ویشل کیږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

26- په 71 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو حذف شوي اوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که د عمليې په اخر کې که صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ويشل کيږي نو دا ټول په 71 ويشل کيږي.

لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 22 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ويشل کيږي.

لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 8 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغي چې په 79 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 79 ويشل کيږي.

20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 25 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو عمليه تر اخره اجراء کوو که اخرني عدد په 83 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 83 ويشل کيږي.

لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ويش قابليت : لمړی رقم حذفوو د حذف شوي (9) چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ويشل کيږي.

لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسيم قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 29 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليه تر اجره اجراء کوو که اخرني عدد صفر شو او يا داسې يو عدد شو چې په 97 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ويشل کيږي.

لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عام کسر څلور ګوني عملیې

1- د عام کسر جمع او تفریق :

د څو کسرو د جمع کولو او تفریقولو لپاره لمړی مخرج مشترک پیدا کوو مخرج مشترک د هر کسر په مخرج ویشو د هغه کسر په صورت کې یې ضربوو د مخرج مشترک پر سر یې لیکو د جمع په سوال کې د جمع علامه لیکو .او د تفریق په سوال کې د تفریق علامه لیکو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل یا د تفریق حاصل لاس ته راځي.

خو د مخرج مشترک د پیدا کولو لپاره د مخرجو پیژندل ضرور دي.

مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه : مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وایې.

$$4\frac{5}{9}+3\frac{7}{9}+8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9}+\frac{34}{9}+\frac{80}{9}=\frac{41+34+80}{9}=\frac{155}{9}=17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r|l} 155 & 9 \\ \underline{9} & 17 \\ 65 & \\ \underline{63} & \\ 2 & \end{array}$$

$$19\frac{3}{5}-8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5}-\frac{44}{5}=\frac{98-44}{5}=\frac{54}{5}=10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \underline{5} & 10 \\ 4 & \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې لوي مخرج په کوچني مخرج پوره تقسیم شي لکه:

$$5\frac{7}{12}+8\frac{3}{4}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخرج مشترک يې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12}+\frac{35}{4}+\frac{47}{6}+\frac{17}{2}=\frac{67+105+94+102}{12}=\frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12}=30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ \underline{36} & 30 \\ 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8}-\frac{19}{4}=\frac{93-38}{8}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \underline{48} & 6 \\ 7 & \end{array}$$

3- **متوافق مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي لکه $8\frac{5}{9}+7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک يې په ذو اضعاف اقل پيدا کيږي.

$$15\frac{5}{6}-7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \underline{96} & 8 \\ 1 & \end{array}$$

$$2\,\Big)\;\frac{95}{6}+\frac{31}{4}=\frac{190-93}{12}=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}$$

$$3 \quad 2$$

4- **متباين مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي لکه

$$9\frac{2}{3}+7\frac{3}{4}+7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک يې په حاصل ضرب پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}+\frac{31}{4}+\frac{37}{5}=\frac{580+456+444}{60}=\frac{1480}{60}=24\frac{40}{60}=24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 1480 & 60 \\ \underline{120} & 24 \\ 280 & \\ \underline{240} & \\ 40 & \end{array}$$

$$19\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2}-\frac{26}{3}=\frac{117-52}{6}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 6 \\ \underline{6} & 10 \\ 5 & \end{array}$$

تمرین :

لاندې سوالونه حل کړئ

1. $9\frac{4}{11}+8\frac{5}{11}+4\frac{7}{11}$
2. $12\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
3. $9\frac{5}{6}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
4. $14\frac{5}{8}-7\frac{1}{2}$
5. $6\frac{2}{9}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
6. $8\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}$

2- د عام کسر ضرب:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو يې بیا صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

1- $9\frac{2}{3}\times 5\frac{1}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{29}{3}\times\frac{21}{4}=\frac{29\times21}{3\times4}=\frac{609}{12}=50\frac{9}{12}=50\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 609 & 12 \\ \underline{60} & 50 \\ 9 & \end{array}$$

تمرین:

لاندې سوالونه حل کړئ؟

-1 $12\frac{3}{4}\times8\frac{7}{9}$

-2 $6\frac{1}{8}\times\frac{11}{13}$

-3 $2\times4\frac{3}{4}$

-4 $6\frac{1}{8}\times7$

3- د عام کسرتقسیم:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو یې. بیا د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوؤ.

-1 $19\frac{1}{2}\div3\frac{1}{8}$

$$\frac{39}{2}\div\frac{25}{8}=\frac{39}{2}\times\frac{8}{25}=\frac{312}{50}=6\frac{12}{50}=6\frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r|l} 312 & 50 \\ \underline{300} & 6 \\ 12 & \end{array}$$

-2 $8\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}$

$$\frac{33}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{99}{8}=12\frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 8 \\ \underline{8} & 12 \\ 19 & \\ \underline{16} & \\ 3 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $15\frac{4}{9} \div 3$

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 27 \\ \underline{135} & 5 \\ 4 & \end{array}$$

4- $8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$

تمرین:

1- $20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6}$

2- $41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5}$

3- $16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$

4- $111 \div 1\frac{1}{2}$

5- $14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$

کسر الکسر یا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي.

لکه:

$\frac{\frac{2}{3}}{7}$ یا $\frac{5}{\frac{3}{4}}$ ، $\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفینو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطینو حاصل ضرب په مخرج کې لیکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}=\frac{1\times 2}{3\times 7}=\frac{2}{21}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times 5}{3\times 1}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}=\frac{7\times 13}{8\times 11}=\frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسر ورته وایې.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرين: لاندې کسرونه ساده کړئ؟

1- $\dfrac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$

2- $\dfrac{9\frac{1}{8}+5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$

3- $\dfrac{11\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$

4- $\dfrac{4\frac{1}{2}\times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4}\div 2\frac{1}{3}}$

5- $\dfrac{6+7\frac{1}{2}}{9-3\frac{1}{4}}$

6- $\dfrac{\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسرونو تبادله :

1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \underline{40} & \overline{0.8} \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \underline{6} & \overline{0.16} \\ 40 & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \underline{24} & \overline{0.375} \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ xx & \end{array}$$

2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر :

د اعشاري رقمو لاندې خط کشوو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندې صفرونه ږدو او د اعشاریې د علامې په عوض یو لیکو او اختصار وؤ یې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ.

$$\frac{0.375}{1000} = \frac{\cancel{375}}{\cancel{1000}} = \frac{3}{8}$$

(375 → 75 → 15 → 3 ؛ 1000 → 200 → 40 → 8)

2- مثال: $0.\overline{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهیږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شویدی د 0.3 لاندې خط کشوو بیا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10} = \frac{3 \times 3 + 1}{10 \times 3} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

یا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 لیکو

$$\frac{0.3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

مثال: $0.1\overline{6}$ عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100} = \frac{16 \times 6 + 4}{100 \times 6} = \frac{96 + 4}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

تمرین:

1- اعشار کسر ته یې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$ 2- $\frac{3}{5}$ 3- $\frac{7}{8}$ 4- $\frac{5}{6}$ 5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته یې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$ 2- $0.7\overline{3}$ 3- $0.95\overline{45}$ 4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$ 6- $0.4\overline{16}$ 7- $0.9\overline{1}$ 8- $0.\overline{814}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه:

1- احمد د یوې هنداونې $\frac{3}{7}$ برخه واخیسته پاتې شوې برخه یې پیدا کړئ؟

2- د تیلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د $200li$ ګنجایش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تیل څومره وي؟

3- د غوړيو د بيلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړيو څخه ډکه ده د ډکې برخې دريمه برخه يې $30kg$ ده د بيلر ګنجايش څو دی؟

4- احمد د $200\frac{1}{2}$ روپو بوره د $300\frac{1}{4}$ روپۍ يې چای د $700\frac{3}{4}$ روپۍ غوښه $30\frac{1}{2}$ روپۍ يې مالګه او اورلګيت واخيست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟

5- امين $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخيسته که غوښه کيلو ګرام په $300\frac{1}{4}$ روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخيستي دي؟

6- چای خرڅوونکی د چايو يو پيټی چې $50kg$ چای پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چای عمود ته يې $3\frac{1}{4}kg$ چای او يو دکاندار ورڅخه $20\frac{1}{4}$ کيلو ګارم چای واخيستی دوست چې په پيټي کې څومره چای پاتې دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم فصل

طاقت، تجزيه او جذر

طاقت لرونکي عددونه :

هغه عددونه دي چې څو واره په خپل ځان کې ضرب شوي وي.

لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربيږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وايي او د ضربيدو کرتو ته توان وايي.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

د طاقت قوانين:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي . د قاعدوڅخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لروکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې سره ضربوو او د توانو څخه يو توان راخلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مساوي او توانونه يې مختلف وي د قاعدو څخه يوه قاعده ليکو او توانونه يې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسيم په حال کې وي قاعدې يې مختلفي او توانونه يې مساوي وي قاعدې يې يو پر بل ليکو او د توانو څخه يو توان راخلو.

1- $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $\frac{16^7}{12^7} = (\frac{16}{12})^7 = (\frac{4}{3})^7$

3- $\frac{5^8}{3^8} = (\frac{5}{3})^8$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه یې ضربیږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر یو کیږي.

$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$

$5^0 = 1$

$\frac{5^3}{5^3} = 1 \ldots\ldots\ldots I$

$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \ldots\ldots\ldots II$

د I او II رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي. یعني $5^0 = 1$ کیږي.

2- که یو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرج ته یاد مخرج څخه صورت ته ویوړل شي د توان علامه یې تغیر خوري.

$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$

$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجزيه :

تجزيه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه مرکب عدد د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

د تجزيې طريقه:

عدد ليکو خط يې لاندې کشوو چپې خواته يې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد ليکو چې د راکړ شوي عدد په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راکړ شوی پدې لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې ليکو په همدې ترتيب عمليې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوؤ تر څو چې د عدد په ستون کې يو لاس ته راشي. د عمودي خط د چپې خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربي عوامل دي.

2	450
3	225
3	75
5	25
5	5
	1

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزيه کړئ؟

3	55125
3	18375
5	6125
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

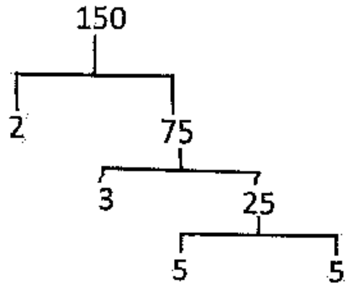
$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیا ګرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسې ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول دمرکب عدد ضربي عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاګرام په طریقه تجزیه کړئ؟



$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم:دڅوعددولوی مشتر ک قاسم هغه عدد دی چې ترهغه په بل لوی عددباندې دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچني مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندې تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی . ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندې وویشل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه تجزیه کوو په ضربي عواملو کې يې مشترک او غير مشترک پيدا کوو په مشترکو ضربي عواملو کې د کوچني توان والاضربي عوامل راخلو ضربوويې لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربي عواملو کې د لوړ توان والاضربي او غير مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پيدا کړئ؟

2	150
3	75
5	25
5	5
	1

2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچنی مشترک مضرب (L.C.M) پيدا کړئ؟

2	660
2	330
3	165
5	55
11	11
	1

2	840
2	420
2	210
3	105
5	35
7	7
	1

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$
$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین :

د لاندې عددونو ل ، مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 630 او 450

2- 780 او 540

3- 960 او 660

5- 1440 او 1260

د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچني عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقي وکړي مقسوم علیه په باقي ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقي صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دی

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قسام او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس به طریقه پیدا کړئ؟

1080 | 780
780 | 1
300

780 | 300
600 | 2
180

300 | 180
180 | 1
120

180 | 120
120 | 1
60

120 | 60
120 | 2

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي.

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پيدا کوؤ.

$$L.C.M = \frac{\overset{13}{780 \times 1080}}{\underset{1}{60}} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

په يوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پيدا کول:

عددونه په يوه کرښه کې ليکو خط ور لاندې کشوو چپې خواته يې عمودي خط رسموؤ د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد ليکو چې د دوي په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې ليکو تر هغو پورې عمليې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي د عمليې په اخر کې که د عمودي خط د چپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پيدا کړئ؟

2	780	1080
2	390	540
3	195	270
5	65	90
	13	18

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرين:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقليدس په طريقه پيدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې عددونو کوچنی مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 960 او 1530

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر :

جذر په لغت کې ولې، ریښه یا جرړې ته وایې.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کیږي.

د یو عدد دویم جذر : هغه عدد دی چې د (2)په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي . لکه:

1- $\sqrt{64} = 8$
$8^2 = 64$
2- $\sqrt{169} = 13$
$13^2 = 169$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د دري په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$\sqrt[3]{64} = 4$

نو $64 = 4^3$ کیږي.

ددویم جذر پیدا کول:

دیوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د تجزیې پواسطه   2- په عمومي طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د تجزيي پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا كول:

عدد تجزيه كوو په مساوي ضربي عواملو كې دوه ، دوه جوړه كوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو او ضربوو يي د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا كړئ؟

2	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
3	3	9
	3	3
		1

$$324 = 2 \times 3^{2}$$

ديوه عدد د دريم جذر پيدا كول په

عدد تجزيه كوو مساوي ضربي عوامل ئې درې،درې جوړه كوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو ضربوو يي د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا كړئ؟

	2	1000
2	2	500
	2	250
	5	125
5	5	25
	5	5
		1

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يو عدد څلورم جذر:

عدد تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوؤ، د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي.

مثال: 1296 څلورم جذر پيدا کړئ؟

2	2	1296
	2	648
	2	324
	2	162
3	3	81
	3	27
	3	9
	3	3
		1

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزيې پواسطه ، پنځم ، شپږم او نور جذرونه پيدا کولای شو.

2- په عمومي ډول د يوه عدد د دويم جذر پيدا کول:

عدد ليکو ښي خواته يې د تقسيم علامه او چپې خواته يې يو عمودي خط رسموؤ بيا د عدد د ښي خوا څخه دوه ، دوه مرتبې جوړه کوؤ اخر ته به هم يادوه مرتبې جوړه شي او يا به يوه مرتبه يواځې پاتې شي په دواړه حالتو کې يو داسې عدد پيدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او يا لږ کم شي دا عدد د تقسيم د علامې په سر او د عمودي خط چپې خواته ليکو او سره ضربوو يې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخرني جوړې يا اخرني عدد لاندې ليکو منفي کوو يې د تفريق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څير يې استعمالوو د عمودي خط د چپې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم عليه کار ور څخه اخلو مقسوم په مقسوم عليه ويشو حاصل يې د خارج قسمت د مخکينې عدد مخې ته او د عمودي خط د چپې د خوا د عدد مخې ته ليکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چپې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د مقسوم لاندې ليکو او منفي کوو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکښته کوو د عمودي خط د چپې نوی رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عملیې باقي ونکړل د تقسیم د عملیې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عملیې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$$\sqrt{209764} = 458$$

```
   4  | 20 97 64   | 458
  85  | 16         |
 805  |   497
      |   425
      |    7264
      |    7264
      |    xxxx
```

$$\sqrt{502681} = 709$$

```
    7 | 50 26 81   | 709
 1409 | 49         |
      |  12681
      |  12681
      |   xxxx
```

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$

2- $\sqrt{318096} = ?$

3- $\sqrt{734449} = ?$

4- $\sqrt{2047.5625} = ?$

5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

تقریبي جذر :

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شویدی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایي د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه   2- د اوسط په طریقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- په عمومي طريقه :

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوؤ که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ردو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلی جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

3	128968	359.1
65	9	
709	389	
7169	325	
	6468	
	6381	
	8600	
	7169	
	باقي 1431	

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه :

د کوچنيو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسي ده د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچنی عدد ته نژدې ؤ نو جذر يې د کوچنی عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راکړ شوي عددتقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيداکوو $2.5 = \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2}$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2.5+2}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$$

2.25 د 5 تقريبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقريبي 2.25جذر دی د 7 او 8 تقريبي جذر 2.75 دی.

د اعشاري عدد دويم جذر پيدا کول:

صحيح عدد يې د ښي خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه يې د چپې خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه يې طاق وي مخې ته يو صفر ږدو. کله چې د اعشار يې د علامې څخه اوړو اعشاريه خارج قسمت ته وړو.

مثال: 903.6036 دويم جذر پيدا کړئ؟

3	9 03.6036	30.06
6006	9	
	036036	
	36036	
	xxxxx	

تمرين:

لاندې عددو تقريبي جذر په عمومي طريقه پيدا کړئ؟

1- 4716   2- 35811   3-7504   4- 9814   5- 6763

2- د لاندې عددو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کړئ؟

1- 11   2- 13   3- 19   4- 29   5-34

3- د لاندې اعشاري عدد دويم جذر پيدا کړئ؟

1- 457.96   2- 1229.9049   3- 337444.81   4- 48830.25

5- 2605.0816   6- 64.048009   7- 2711.2849

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذر قوانین:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي. که وغواړو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددو يې بدلووو طاقت قوانين پرې تطبيقوو اخري عدد بيرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^{31}}$$
$$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}} = 2^{\frac{15+10+6}{30}} = 2^{\frac{31}{30}} = \sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي. د طاقت د قوانينو سره سم کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5} = \sqrt[7]{2 \times 3 \times 5} = \sqrt[7]{30}$$
$$2^{\frac{1}{7}} \times 3^{\frac{1}{7}} \times 5^{\frac{1}{7}} = (2 \times 3 \times 5)^{\frac{1}{7}} = 30^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{30}$$

3-که دوه جذري عددونه د تقسيم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي د طاقت د قوانينو په اساس کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \sqrt[35]{5^4}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}} = 5^{\frac{7-3}{21}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسيم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي د طاقت د قوانينو سر سم يې تر يوه جذر لاندې ليکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = (\frac{5}{6})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندې عدد لاس ته راځي

$$(\sqrt[7]{5})^7 = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^{7} = \left(5^{\frac{1}{7}}\right)^{7} = 5^{\frac{1}{7}\times\frac{7}{1}} = 5^{\frac{7}{7}} = 5^{1} = 5$$

6- كه يو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانينو سره سم يې تر يوه جذر لاندې كوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left\{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2}$$

تمرين:

تر يوه جذر يې لاندې كړئ؟

1- $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[5]{3}$ 2- $\sqrt[7]{2} \times \sqrt[7]{3} \times \sqrt[7]{5}$ 3- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2}}$

4- $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{7}}$ 5- $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}$

د حسابي افادو د قيمت پيدا كول:

حسابي افاده: كه په يوه حسابي جمله كې څو عمليې (جمع ، تفريق ، ضرب ، تقسيم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قيمت د پيدا كولو لپاره لمړى طاقت او جذر د منځه وړو بيا قوسونه خلاصوو دريم قدم كې د ضرب او تقسيم عمليې او په اخر د جمع او تفريق عمليې اجراء كوو.

قوس: يو سمبول دى چې څو عددونه تر يوه حكم لاندې كوي قوسونه په درې قسمه دي.

1- كوچني قوسونه چې شكل يې ( ) دى.

2- منځنى قوسونه چې شكل يې { } دى.

3- لوى قوسونه چې شكل يې [ ] دى.

مثال:

$$(8-11)(4-5)+8-2\div 2-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3(-1)+8-1-11$$
$$3+8-12$$
$$11-12=-1$$

هم درجه کول:

که څو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندې عددونه مختلفې او درجې یې هم مختلفې وي که وغواړو چې تر یوه جذر یې لاندې کړو لمړی یې هم درجه کوو.
طریقه یې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د همغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt[5]{3}\times\sqrt{2}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل : لمړی یې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5}\times\sqrt[10]{3^2}=\sqrt[10]{2^5\times3^2}=\sqrt[10]{32\times9}=\sqrt[10]{288}$$

2- $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt{3}}$ هم درجه یې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}}=\sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین : هم درجه یې کړئ؟

1- $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{2}$ 2- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{2}$ 3- $\sqrt[3]{4\times}\sqrt[4]{5}$ 4- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

5- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}}$ 6- $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

همغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوی وي او د جذر درجې یې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt[3]{2}+11\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(7+11+6)\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$24\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$(24-15)\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$

2- $5\sqrt{32}+7\sqrt{128}+5\sqrt{8}-20\sqrt{2}$ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟

$5\sqrt{16\times 2}+7\sqrt{64\times 2}+5\sqrt{4\times 2}-20\sqrt{2}$

$5\times 4\sqrt{2}+7\times 8\sqrt{2}+5\times 2\sqrt{2}-20\sqrt{2}$

$(20+56+10-20)\sqrt{2}=66\sqrt{2}$

تمرين:

لاندې جذري عددونه جمع او تفريق کړئ؟

1- $11\sqrt{5}+19\sqrt{5}+8\sqrt{5}-25\sqrt{5}$

2- $\sqrt{128}+3\sqrt{8}-5\sqrt{32}$

3- $13\sqrt{27}+5\sqrt{243}-20\sqrt{3}$

ګويا کول:

که د يوه کسر په صورت يا مخرج کې جذري حد يا عدد موجود وي کولای شو چې ګويا يې کړو. مګر مشهور په رياضي کې د مخرج ګويا کول دي د کسر د مخرج ګويا کول په حساب کې دوه حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$. صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوؤ.

$$\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}=\frac{5\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

2- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{3}{\sqrt[5]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د ګويا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر د درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{2}{\sqrt[5]{12}\times\sqrt[5]{12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12\times 12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرین : ګویا یې کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 2- $\frac{3}{\sqrt{12}}$ 3- $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 4- $\frac{15}{\sqrt{5}}$ 5- $\frac{2}{\sqrt{2}}$

6- $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}}$ 8- $\frac{12}{\sqrt[5]{3}}$ 9- $\frac{14}{\sqrt[5]{7}}$ 10- $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

د اعدادو سیستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه لیکل شویدی نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعمالیږي د 10 په قاعده د اعدادو سیستم او یا اعشاري سیستم بلل کیږي.

مثلاً 5918 یو عدد راکړ شویدی د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چه رقمونه یې څلور دي نو راکړ شوي عدد څلور ځایه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې لیکو.

$$5918=5000+900+10+8$$
$$=5\times 10^3+9\times 10^2+1\times 10^1+8\times 10^0$$

که ضریبونه څنګ په څنګ په ترتیب سره ولیکل شي نو بیرته لمړنی عدد لاس ته راځي.

همدغه ډول که راکړ شوی عدد په مسلسله توګه په 10 وویشو او باقیات د تقسیم په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته ولیکو. او بیا دباقیاتو د ستون رقمونه په افقي کرښه کې داسې ولیکو چې د ستون د سر رقم یې په سر کې راشي. او نور رقمونه یې په ترتیب سره ورپسې ولیکل شي بیرته راکړ شوی عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

10	5918	
10	591	8
10	59	1
10	5	9
	0	5

$$5918_{10} = 5918$$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپیوټري معایناتو کې د امراضو د تشخیص لپاره دوه نور سیستمونه هم لیکل شویدي چې د 2 په قاعده د اعدادو سیستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سیستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سیستم:

که وغواړو چې یو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ویشو باقیات یې د تقسیم د عملیې په مقابل کې دپاس څخه کښته خواته لیکو که د باقیاتو د ستون رقمونه په افقي ډول ولیکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

2	31	
2	15	1
2	7	1
2	3	1
2	1	1
	0	1

$$31_{10} = 11111_2$$

یا دا چې د طاقت د قوانینو څخه استفاده کوو.

$$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$
$$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$$
$$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$$
$$31_{10} = 11111_2$$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2)دي چې عبارت له (0,1) څخه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوئ؟

حل:

5	251	
5	50	1
5	10	0
5	2	0
	0	2

$$251_{10} = 2001_5$$

$$251 = 2 \times 125 + 1$$

$$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$

$$251 = 2001_5$$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

33-1　　47 -2　　65 -3

77-4　　71-5　　97-6

لاندې عددونه د 5 په قاعده باندې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

211-1　　314 -2　　97 -3

86 -4　　98 -5　　101 -6

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: 111011_2 د 10 قاعدې ته واړوئ.

$$1\times 2^5+1\times 2^4+1\times 2^3+0\times 2^2+1\times 2^1+1\times 2^0$$
$$32+16+8+0+2+1=59$$
$$59_{10}=111011_2$$

د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول.

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمړی رقم په 5^0کې دریم رقم 5^1 کې .... په همدې ترتیب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه یې جمع کوؤ د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: 32104_5 د 10 قاعدې ته واړو.

$$3\times 5^4+2\times 5^3+1\times 5^2+0\times 5^1+4\times 5^0$$
$$3\times 625+2\times 125+1\times 25+0\times 5+4\times 1$$
$$1875+250+25+0+4=2154$$

تمرین:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 101111_2 2- 111011_2 3- 111111_2

4- 1010001_2 5- 100011_2

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- 231_5 2- 341_5 3- 423_5 4- 143_5 5- 234_5

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم فصل

نسبت او تناسب

نسبت:

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

a ته اول حد یا صورت یا مقدم وايي b ته دویم حد یا مخرج یا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فیصد په شکل او د اعشار کسر په شکل هم لیکلای شو.

اوله قاعده - د نسبت پیدا کول: که دوه عددونه راکړ شوي وي او وغواړو چې نسبت یې پیدا کړو یو پر بل یې لیکو او اختصاروو یې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دویم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت یې پیدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دویمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او اول حد معلوم وي دویم حد معلوم نه وي. دویم حد په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\text{دویم حد} = \text{اول حد} \div \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{د محمود روپۍ} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$

$\text{احمد روپۍ} = 430$ $\text{د محمود روپۍ} = 688Rs$

$\text{د محمود روپۍ} = ?$

دریمه قاده: چې د دوه کمیتو نسبت او دویم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

$$\text{اول حد} = \text{دویم حد} \times \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپۍ 688 دي د احمد روپۍ څو دي؟

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{احمد روپۍ} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$

$\text{محمود روپۍ} = 688$ $\text{احمد روپۍ} = 430Rs$

$\text{احمد روپۍ} = ?$

څلورمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې یې ضرب کړو دویم حد لاس ته راځي.

مثال:- د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پیسو مجموعه 4080 ده د هر یوه روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپۍ}}{\text{د انور روپۍ}} = \frac{3}{5}$$

$\text{مجموعه} = 4080$ $\text{اکرم روپۍ} = \frac{3\times4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$

$\text{د اکرم روپۍ} = ?$ $\text{انور روپۍ} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$

$\text{د انور روپۍ} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او تفاضل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پیسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پیسو فرق یې 750 دی د هر یوه پیسې څو دي؟

نسبت $= \frac{6}{11}$

تفاضل $= 750$

عبدالهادي روپۍ =?

عبدالباري =?

عبدالهادي روپۍ $= \frac{6 \times 750}{11 - 6} = \frac{4500}{5} = 900$

عبدالباري روپۍ $= \frac{11 \times 750}{11 - 6} = \frac{8250}{5} = 1650$

شپږمه قاعده : چې د دوه کمیتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ویشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال:- د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل یې 2240 دی د هر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

نسبت $= \frac{5}{7}$

د ضرب حاصل $= 2240$

د احمد روپۍ $= 5\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40$

د محمد روپۍ $= 7\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه یا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرج د دویم کسر صورت په همدې ترتیب اخره وي دی کسروته معکوس نسبت وایې لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتود ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{\cancel{c}} \times \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}} \times \frac{\cancel{d}}{e} = \frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پیسو نسبت $\frac{3}{4}$ دی د محمود او حامد د پیسو نسبت $\frac{5}{7}$ دی که د احمد روپی 300 وي د حامد روپی څو دی؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپی}}{\text{دمحمودروپی}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{نسبت} = \frac{\text{محمود روپی}}{\text{حامد روپی}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\cancel{\text{محمود}}} \times \frac{\cancel{\text{محمود}}}{\text{حامد}} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$$

$\text{احمد روپی} = 300Rs$ $\quad$ $\text{نسبت} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$ $\quad$ $\text{د حامد روپی} = 300 \div \frac{15}{28}$

$\text{حامد روپی} = ?$

$\text{دحامد روپی} = 300 \times \frac{28}{15} = 20 \times 28 = 560$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- یو سړي 42 منه ممیز د 70 منه نخودو سره ګډوي نسبت یې پیدا کړئ؟

2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟

3- یو دکاندار دوه قسمه چای سره ګډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که د ګډ شوي چای تفاضل 50 منه وي د چای د هر قسم مقدار پیدا کړئ؟

4- د میو او وریجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وریجې 50 منه وي مې به څومره وي او څومره مې زیاتې شي چې نسبت یې $\frac{3}{8}$ شي؟

5- د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل یې 36000 دی د هر یوه روپۍ څو دي؟

6- د بادامو او پستې د قیمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پیستې د یو من قیمت 12800 دی د بادامو من په څو دی؟

7- د احمد او اکرم د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپۍ 3000 وي د انور روپۍ به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

لکه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ يا $a:b::c:d$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدوته وسطين وايي.

a او d طرفين دي b او c وسطين دي.

د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$$
$$2 \times 24 = 3 \times 16$$
$$48 = 48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نوی نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي دتناسب خواص تغير نه خوري .

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په دريو حالتو کې مطالعه کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر يې دوه وي لکه $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زيات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وايي.

لکه .... $\frac{5}{8}=\frac{35}{56}=\frac{45}{72}$

2- د حدو د ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په ډېریدو د بل نسبت مربوطه حد ډېریدلو او په کمیدلو سره يې کمیدلو دی تناسب ته مستقیم تناسب وايي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12}=\frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمیدو سره د بل نسبت مربوطه حد ډېریدولو او په ډېریدو سره يې کمیدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وايي.

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي

$$\frac{12}{6}=\frac{18}{36}$$

3- د حدو د ورکیدو له کبله دتناسب اقسام:

د حدو د ورکېدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- څلورم تناسب: که په یوه تناسب کې یوه حد ورک ؤ دی تناسب ته څلورم تناسب وایي لکه:

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصیت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دریم تناسب: که په یوه تناسب کې وسطین مساوي وي دی تناسب ته دریم تناسب وایي.

مثال: د 5 او 30 دریم تناسب پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{30}=\frac{30}{x}$$

$$x=\frac{30 \times 30}{5}=\frac{900}{5}=180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په یو تناسب کې طرفین معلوم او وسطین معلوم نه وي دې تناسب ته هندسي وسط وایي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{x}=\frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5 \times 180 \qquad x^2 = 900 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{900}$$

$$x = 30$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی وواياست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي؟

2- اته کسه يو کار په 20 ورځو کوي وواياست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

3- احمد يو کار په 4 ورځو او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې دواړه به يې په شريکه په څو ورځو کې وکړي؟

4- احمد او محمود په شريکه يو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد يې يوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به يې په څو ورځو کې وکړي؟

5- احمد يو کار په 6 ورځو کې محمود يې په 9 ورځو کې او حامد يې په 12 ورځو کې کوي وواياست چې ټول به يې په څو ورځو کې سرته ورسوي؟

6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او يو کار په 15 ورځو کې خلاصوي ووايه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟

7- د 8 او 12 دريم تناسب پيدا کړئ؟

8- د 8 او 18 هندسي وسط څو دي؟

9- د 20 او 80 هندسي وسط پيدا کړئ؟

10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او يوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي. وواياست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او يوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

فیصد:

د 100 له قراره د يوې تجارتي معاملې د ګټې يا تاوان معلومولو ته فيصد وايي.

يا داچه په يوه مرکبه ماده، مخلوط يا محلول کې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فيصد وايي.

د فيصد فارمولونه دا دي.

$$ګټه = \frac{سرمایه \times نرخ}{100}$$

په مرکبه ماده يا مخلوط يا محلول کې د هغوي مقدار د سرمايې حيثيت لري د اجزاو فيصدي نرخ دی او په ټوله ماده کې د هغه جز مقدار د ګټې حيثيت لري.

$$نرخ = \frac{ګټه \times 100}{سرمایه}$$

$$سرمایه = \frac{ګټه \times 100}{نرخ}$$

مثال: 8000 روپۍ ګټه د 3 فيصد په نرخ پيدا کړئ؟

$$ګټه = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: يو سړي په 12000 روپيو کې 960 روپۍ وګټلې نرخ کې څو دی؟

$$سرمایه = 12000Rs$$

$$ګټه = 960Rs$$

$$نرخ = ?$$

$$نرخ = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 6% په نرخ ګټلي سرمایه یې پیدا کړئ؟

ګټه $= 15000$

نرخ $= 6$

سرمایه $= ?$

$$\text{سرمایه} = \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$$

$$\text{سرمایه} = 250000$$

4- د یوه سړي د ګټې او سرمایې مجموعه $28000Rs$ ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او ګټه یې معلومه کړئ؟

حل:

ګټه او سرمایه $= 28000Rs$

نرخ $= 12$

سرمایه $= ?$

ګټه $= ?$

$$100 + 12 = 112$$

$$\frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$$

$$x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$$

$$\text{سرمایه} = x = 250000Rs$$

$$\text{ګټه} = 28000 - 25000 = 3000$$

$$\text{ګټه} = 3000$$

پوښتنه:- په $40kg$ مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پریږدي. تخفیف بلل کیږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندې دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د ګټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{تخفيف} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{نرخ}}$$

اصلي قيمت −
تخفيف
―――――
فعلي قيمت

مثال: د يوه موټر اصلي قيمت $300000Rs$ دی خرڅوونکی اخيستونکی ته په 100 کې 8 روپۍ پرېښودی تخفيف او اصلي قيمت يې پيدا کړئ؟

$\text{اصلي قيمت} = 300000$

$\text{نرخ} = 8\%$

$\text{تخفيف} = ?$

$\text{فعلي قيمت} = ?$

$$\text{تخفيف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

$\text{تخفيف} = 24000$

$\text{فعلي قيمت} = 300000 - 24000 = 276000Rs$

2- د يوه اس اصلي قيمت $240000Rs$ دي که تخفيف يې $16800Rs$ وي نرخ يې پيدا کړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7 \qquad \text{نرخ} = 7$$

3- د يوه موټر تخفيف $80000Rs$ دی نرخ يې 8 دی اصلي قيمت يې څو دی؟

$\text{تخفيف} = 80000R_s$

$\text{نرخ} = 8$

$\text{اصلي قيمت} = ?$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000R_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

احدیت:

په لغت کې تنهايي او يوازي والي ته وايي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شيانو د مجموعي قيمت څخه د يوه شي د قيمت پيدا کولو ته احديت وايي.

طريقه يې داسې ده چې مجموعي قيمت د شيانو په شمېر ويشو.

$$\text{احدیت} = \frac{\text{مجموعي قيمت}}{\text{د شيانو شمېر}}$$

مثال: يو خياط په څلور ورځو کې 28 کميسونه وګنډل ووايياست چې په يوه ورځ کې به يې څو کميسونه ګنډلي وي؟

ورځې	کميسونه
$\frac{4}{1}$	$\frac{28}{x}$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په يوه ورځ کې يې 7 کميسونه ګنډلي دي.

2- يو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په $240Rs$ کيږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنګه سوالونه په تناسب کې ډېر اسنه حل کيږي خو د احديت په طريقه داسې حليږي اول د يو پنسل قيمت پيدا کوو بيا يې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قيمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$\text{د 7 پنسلو قيمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قيمت 360 روپۍ وي د يو متر رخت قيمت څو دی او بيا د 5 مترو قيمت يې پيدا کړئ؟

$$\text{د يوه متر قيمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$\text{د 5 مترو قيمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربحه يا ربح:

ربح په لغت کې سود يا ګټې ته وايي.

او په اصطلاح کې په يوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د يوې سرمايې د ګټې د پيدا کولو طريقې ته ربح وايي. ربح په دوه ډوله ده.

1- ساده ربح 2- مرکبه ربحه

1- ساده ربحه:

هغه ربحه ده چه د مودې تر رسيدلو وروسته ګټه اخيستل کيږي او سرمايه بيا په ربحه اچول کيږي

د ساده ربحې فارمولونه څلور دي.

$$ربح = \frac{سرمايه \times موده \times نرخ}{12 \times 100}$$

$$نرخ = \frac{1200 \times ربح}{موده \times سرمايه}$$

$$موده = \frac{1200 \times ربحه}{سرمايه \times نرخ}$$

$$سرمايه = \frac{1200 \times ربحه}{موده \times نرخ}$$

مثال: د 20000 روپيو ربحه د 15٪ په نرخ په 8 مياشتو کې پيدا کړئ؟

$$ربحه = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000 \qquad ربحه = 2000Rs$$

مثال: يو سړی د 8 مياشتو لپاره $20000Rs$ په مرابحه واچوي پس له 8 مياشتو يې ربحه $2000Rs$ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

$$نرخ = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15 \qquad نرخ = 15\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 20000 روپیو ربحه د 15٪ په نرخ 2000 روپۍ ده موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \qquad \text{موده} = 8 \text{ میاشتې}$$

مثال: یو سړي یوه سرمایه په مراجعه واچوله پس له 8 میاشتو یې د 15٪ په نرخ 2000 روپۍ ربحه واخیسته سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$\text{سرمایه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمایه} = 20000\text{Rs}$$

2- مرکبه ربحه :

که د مرابحې د وخت تر را رسیدلو وروسته ربحه او سرمایه بیا په ربحه واچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وایي.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1+r)^n$$

A د سرمایې او ربحې مجموعه ده C اولنۍ سرمایه ده r نرخ دی او n د کلونو شمېر دی.

C سرمایه او Cr گټه او A د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$
$$A_1 = C(1+r)$$
$$A_2 = C(1+r) + C(1+r)r$$
$$A_2 = C(1+r)(1+r) = c(1+r)^2$$
$$A_3 = C(1+r)^2 + C(1+r)^2 r$$
$$A_3 = C(1+r)^2(1+r) = C(1+r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د n کلو د سرمایې او ربحې مجموعه پیدا کړو.

په عمومي صورت لیکو چې:

$$A = C(1+r)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو سړي $50000Rs$ د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ربحه واچولی کته او سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$A = 50000(1+\frac{5}{100})^3$$

$$A = 50000(\frac{100+5}{100})^3$$

$$A = 50000\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000\left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5\times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرین:

1- د 10000 روپیو ربحه 8٪ په نرخ په 9 میاشتو کې څو ده ؟

2- د 50000 روپیو کټه په 6 میاشتو کې 5250 روپۍ شوه نرخ یې پیدا کړئ؟

3- د 20000 روپیو کټه د اوه میاشتو په موده کې 1750 روپۍ ده نرخ یې څو دی؟

4- د 18000 او کټ د 18٪ په نرخ 1750 روپۍ ده موده یې پیدا کړئ؟

5- لوی سرمایې په 8 میاشتو کې د 15٪ په نرخ 3000 کټې سرمایه څو ده ؟

6- احمد 5000 روپۍ د 20٪ په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ربحه واچولې کټه او سرمایه یې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تنزيل:

تنزيل په لغت کې کښېنته کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې هغه پيسې چې سند خرڅوونکي يې سند اخيستونکي ته په يوه ټاکلي موده کې د معلوم نرخ له مخې پرېږدي تنزيل بلل کيږي.

د تنزيل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزيل} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزيل} - \text{اصلي قيمت} = \text{فعلي قيمت}$$

مثال: د سند اصلي قيمت $300000Rs$ دی مودې ته يې 9 مياشتې دي نرخ يې 15٪ دي تنزيل يې څو دي؟

$$\text{تنزيل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قيمت 50000 دی په 9 مياشتو کې يې تنزيل $3000Rs$ دی نرخ يې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8 \qquad \text{نرخ} = 8$$

3- د 20000 د تنزيل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده يې پيدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6 \qquad \text{شپږ مياشتې} = \text{موده}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د یوه سند تنزیل د 15% په نرخ چې موديٍ ته یې 6 میاشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قیمت څو دی؟

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قیمت} = 45000Rs$$

تمرین:

1- د یوه سند اصلي قیمت $450000Rs$ موديٍ ته یې 6 میاشتې پاتې دي د 15% په نرخ یې تنزیل څو دی؟

2- د یوه سند اصلي قیمت $75000Rs$ دی د 4% په نرخ یې تنزیل $2250Rs$ شو موديٍ ته یې څومره وخت پاتې دی.

3- د یو سند اصلي قیمت $90000Rs$ دی موديٍ ته یې 8 میاشتې دی که تنزیل $3000Rs$ وي نرخ یې پیدا کړئ؟

4- د یوه سند تنزیل په 8 میاشتو کې د 7% په نرخ $5600Rs$ شوي اصلي قیمت یې څو دي.

مشارکت:

که څو کسه په یوه تجارتي معامله لاس پورې کړي ګټه او تاوان یې سره شریک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وایي.

د شراکت د ګټې تقسیم په څلور حالتو کې مطالعه کوؤ.

اول حالت:

چې سرمایې او موديٍ یې مساوي وي. ګټه په نفرو ویشل کیږي.

مثال: احمد ، محمود او حامد هر یوه $500000Rs$لري د حمل په اول یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره پورې $900000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه څو ده.

حل:

$$\text{د هریوه ګټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت:

چې مودې یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي ګټه د سرمایو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد $60000Rs$ لري په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې $300000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ.

د احمد سرمایه $= 40000Rs$ 1/حمل

د محمود سرمایه $= 50000Rs$ 1/حمل

د حامد سرمایه $= 60000Rs$ 1/حمل

ګټه $= 300000Rs$

د هر یوه ګټه $=?$ $4 + 5 + 6 = 15$

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

د احمد ګټه $= 4 \times 20000Rs = 80000Rs$

د محمود ګټه $= 5 \times 20000Rs = 100000Rs$

د حامد ګټه $= 6 \times 20000Rs = 120000Rs$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي ګټه د مودو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد $150000Rs$ لرلې د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د $150000Rs$ په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د $150000Rs$ په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library -

حل:

احمد	150000	1/ حمل/	12
محمود	150000	1/ اسد/	8
حامد	150000	1/عقرب/	$\frac{5}{25}$

گټه = 500000

د هر یوه گټه =?

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

د احمد گټه = $12 \times 20000 = 240000$

د محمود گټه = $8 \times 20000 = 16000$

د حامد گټه = $5 \times 20000 = 100000$

څلورم حالت:

چې مودې او سرمايې مختلفې وي.

د هر سړي موده د هغه به سرمايه کې ضربيږي د ضرب حاصلونه يې جمع کيږي گټه په دغه مجموعه ويشل کيږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايې په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لرلی د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وگټلی د هر يوه گټه څو ده؟

احمد	= 50000	1/حمل/
محمود	= 80000	1/ميزان/
گټه	= 216000	

د هر يوه گټه =?

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$2000 = \frac{216000}{108} = \text{د قسط اندازه}$$

$$120000 = 2000 \times 60 = \text{د احمد ګټه}$$

$$96000 = 2000 \times 48 = \text{د محمود ګټه}$$

تمرین:

1- څلور کسان هر یو 200000 روپۍ لرلې په اول د حمل یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې [illegible] روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه څو ده؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلې د حمل په اول یې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپیو په سرمایه په اول دسنبله ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 120000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلې په اول د ثور یې تجارت شروع کړ د کال تر اخره یې 150000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلې په اول د جوزا یې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپیو په سرمایه په اول د میزان ور سره شریک شو د کال تر اخره یې 112000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

سیټ (Set):

سیټ یو انګلیسي لفظ دی چې مفهوم یې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

په اصطلاح کې سیټ د هغو شیانو مجموعه یا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخیص وړ وي.

سیټ د الفباء د غټو تورو پواسطه ښودل کېږي لکه A ، B ، C ، M ، .... او داسې نور.

د سیټ نظریه د Gorge cantor (1845 – 1919) م پواسطه په ریاضي کې داخل او معرفي شوه.

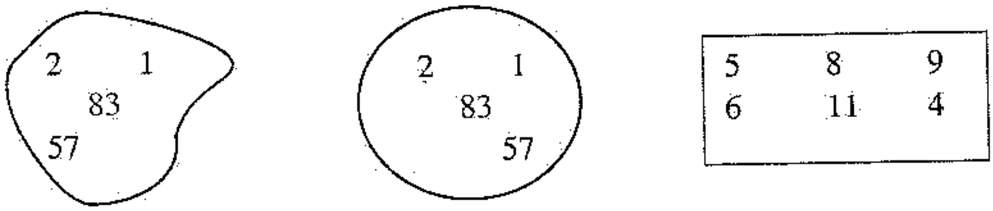
د سیټ عناصر Element of set:

په سیټ کې شاملو شیانو ته د سیټ عناصر وایي. مثلاً $A = \{2,3,a,b\}$

چې 2، 3، a او b د سیټ عناصر دي.

د سیټ نمایش:

Venn برطانوي عالم سیټ د هندسي او غیر هندسي شکلو پواسطه رواج کړ چې دسیټ دغه نمایش Venn diagram وایي.



د سیټ د لیکلو طریقې:

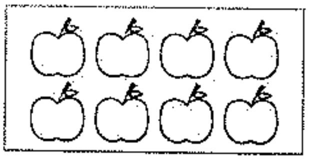
د سیټ د لیکلو طریقې څلور دي.

1- Picture Method:

پدې میتود کې د سیټ د عناصرو شکلونه رسموي دا میتود په کښته ټولګیو کې استعمالیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:



2- د Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفي میتود پواسطه لیکل کیږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کیږي

د E ژبې د بې اوازه تورو سیټ په A ښیو.

$$A = \{\text{د } E \text{ بې اوازه توری}\}$$

$$B = \{\text{حسابي ارقام}\}$$

3- د Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي.

لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په (x) ښیي فرضاً د A د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو x د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کیږي چې د A د سیټ عناصر x دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیټ اقسام:

سیټ په څلور قسمه دي.

1- خالي سیټ
2- یو عنصره سیټ
3- معین سیټ
4- غیر معین سیټ

1- خالي سیټ: هغه سیټ چه عناصر نلري د خالي سیټ په نوم یادیږي لکه $A = \{\ \}$ خالي سیټ د ϕ د علامې پواسطه ښودل کیږي.

2- یو عنصره سیټ: که کوم سیټ یو عنصر ولري دې سیټ ته یو عنصره سیټ وایې. لکه $B = \{3\}$ یا $A = \{\text{لمر}\}$

3- معین سیټ: هغه سیټ چې عناصر یې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سیټ.

$$A = \{0,1,2,3,,4,5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غیر معین سیټ :

هغه سیټ چې عناصرئي د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبعي اعدادو سیټ.

$$A = \{IN \text{ د طبیعي اعدادو سیټ}\}$$
$$B = \{IR\}$$

د روابطو له مخې د سیټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سیټونه په 8 اته قسمه دي.

1- فرعي سیټ　2- کلي سیټ　3- مکمله سیټ
4- طاقت لرونکي سیټ　5- مساوي سیټونه　6- معادل سیټونه
7- منفصل سیټونه　8- غیر منفصل سیټونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- فرعي سيټ: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د B د سيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي نو د B سيټ د A د سيټ فرعي سيټ بلل کيږي لکه

$A = \{x \epsilon IR / 1 < x < 12\}$ او د $B = \{4,6,8,10\}$

ځرنګه چې د B د سيټ هر عنصر په A کې شامل دی نو د B سيټ د A د سيټ فرعي سيټ دی او داسې ليکل کيږي. $B \subset A$

فرعي سيټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعي سيټ b- غير واقعي فرعي سيټ

a- واقعي فرعي سيټ: که ديوه سيټ ټول عناصر په بل سيټ کې شامل وي او په دويم سيټ کې داسې عناصر وي چې په لمړی سيټ کې نه وي.لکه:

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ او د $B = \{3,4,5,6\}$ نو $B \subset A$

b- غير واقعي فرعي سيټ: که دوه داسې سيټونه ولرو چې د اول سيټ ټول عناصر په دويم سيټ کې او د دويم سيټ هر عنصر په اول سيټ کې شامل وي دغه سيټونه يو دبل غير واقعي فرعي سيټونه دي. لکه:

$A = \{2,4,6,8,10\}$ او $B = \{10,8,2,6,4\}$ نو $B \subseteq A$ او $A \subseteq B$.

2- کلي سيټ: که يو سيټ څو فرعي سيټونه ولري دې سيټ ته کلي سيټ وايي لکه $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ چې $B = \{3,4\}$ او $C = \{5,6,7\}$ او د $D = \{8,9,10\}$ فرعي سيټونه دي نو د A سيټ کلي سيټ وي.

3- مکمله سيټ: که يو کلي سيټ يو واقعي سيټ ولري نو د کلي سيټ د پاتې عناصرو سيټ د فرعي سيټ مکمله سيټ دی.

مثلاً $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ او $B = \{2,3,4,5,6\}$ دوه سټونه لرو چې $B \subset A$ دی نو د B د سيټ مکمله سيټ چې په B' ښودل کيږي عبارت $B' = \{7,8,9,10,11,12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سيټونه: هر کلي سيټ د خپلو فرعي سيټونو طاقت لرونکي سيټ يا $Power\ Set$ دی لکه $A = \{\Delta, \odot, \boxdot\}$ او $A_1 = \{\Delta\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A_2 = \{\odot\}$ ، $A_3 = \{\boxdot\}$ ، $A_4 = \{\triangle,\odot\}$ ، $A_5 = \{\triangle,\boxdot\}$ ، $A_6 = \{\odot,\boxdot\}$ ،
$A_7 = \{\triangle,\odot,\boxdot\}$ او $A_8 = \{\}$

ستونه لرو چې A سيټ ئي کلي سيټ او نور يې فرعي سيټونه دي.

يعني $P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

د يوه سيټ د فرعي سيټونو شمېر د 2^n پواسطه بيدا کيږي n د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د B د سيټ عناصر څلور دي د فرعي سيټونو شمېر يې پيدا کړئ؟

$n = 4$

$P(B) = ?$

$P(B) = 2^n$

$P(B) = 2^4 = 16$

$P(B) = 16$

5- مساوي سيټونه: که د A او B دوه داسې سيټونه ولرو چې د A د سيټ هر عنصر د B په سيټ کې او د B دسيټ هر عنصر د A په سيټ کې شامل وي . نو دې سيټونو ته مساوي سيټونه وايې.

يعني که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

6- معادل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4,5,8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

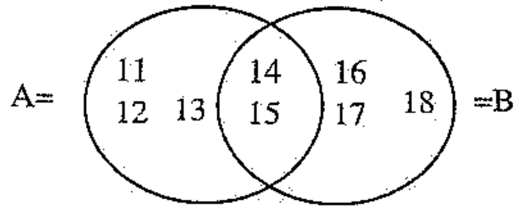
7- منفصل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د هر سيټ هيڅ عنصر په بل سيټ کې نه وي.

لکه $A = \{1,3,5,7,99,11,13\}$ او $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

8- غير منفصل سيټونه: که د دوه يا څو سيټونو يو يا څو عناصر سره شريک وي دې سيټونو ته غير منفصل سيټونه وايې.

لکه $A = \{11,12,13,14,15\}$ او $B = \{14,15,16,17,18\}$ چې $\{14,15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د A او B سيټونه غير منفصل دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د سیټونو عملیې:

په حساب کې د سیټونو عملیې درې دي.

1- د سیټونو اتحاد 2- د سیټونو تقاطع 3- د سیټونو تفاضل

1- دسیټونو اتحاد:

د دوه یا ډیرو سیټونو اتحاد د هغه عناصرو سیټ دی چې اقلاً هغه عناصر په دغه سیټونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضې په دوه یا درې سیټونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$B = \{8,9,10,11,12,13\}$ او $A = \{4,5,6,7,8,9\}$

$A \cup B = \{4,5,6,7,8,9\} \cup \{8,9,10,11,12,13\} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$

$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$

2- د سیټونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په دوه یا څو سیټونو کې شامل وي. لکه $A = \{3,4,5,6,7\}$ او $B = \{6,7,8,9,10\}$

$$A \cap B = \{6,7\}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

3- د سیټونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$B = \{4,5,6,7,8,9\}$ او $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3\}$$

$$A - B = \{1,2,3\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول فصل

الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شویدی چې جبر د مات هډوکي ترلو ته وایي.

او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په IR سره ښودل کیږي.

د حقیقي اعدادو سیټ IR:

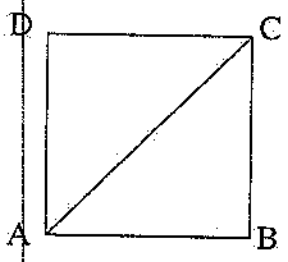
د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وایي.

$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وایي که ناطق عدد په Q او غیر ناطق په Q' وښیو نو $IR = [Q \cup Q']$

صحیح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوی چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقې څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبداء واقع وي د دې مربع مساحت $1cm^2$ دي که د A نقطه د C سره وصل کړو نو AC د مربع وتر لاس ته راځي چې.



$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1r$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پيدا کولو لپاره د A نقطه مرکز نيسو او د $\overline{AC} = \sqrt{2}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او يوه دايره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړي دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتيب کولای شو چې دغير ناطقو عدد و نقطې د عددو په کرښه پيدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غير ناطق عدد نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤد پرکارخوله په همدغه شعاع خلاصوواو قوس وهو د XX' د محور سره يې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د XX' د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه ليکل کيږي مګر په الجبر کې عدد او علامه دواړه يو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مګر -19 او $+19$ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعماليږي مګر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړيږي.

لکه $4x - 5$ ، $7x^2 + 6x + 7 = 0$ ، $y = 3x - 4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانين بشپړ شويدي زيادت نه قبلوي مګر الجبر د تمدن تابع دي د تخنيک او تکنالوژی د پرمختګ سره سم يې قوانين او فارمولونه ډيريږي او انکشاف کوي.

د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب ، تقسيم ، جذر او طاقت حالتو ته حد وايي.

لکه: -3 ، x ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، x^3 ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{-5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عین حروفو توانونه یې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ یا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ یا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفریق حالتو ته افاده وایي لکه $11x - 8$

یو حده افادې ته مونوم وایي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بینوم وایي. لکه $19x - 20$

درې حده افدې ته ترینوم وایي.لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دریو زیات حدونه ولري کثیر الحده افاده ورته وایي. لکه
$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$

په عمومي صورت د غه ټولو افادو ته پولینوم وایي.

پولینوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه یې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل یې دادي.

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$$

د پولینوم د هر حد ضریب د همغه پولینوم د توان په نوم یادیږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$a_5 = 7$, $a_4 = -12$, $a_3 = 13$, $a_2 = 0$, $a_1 = -2$, $a_0 = 15$

پولینوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولینوم: هغه پولینوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې موجود وي لکه $7 + 8x^4 - 8x^2 + 20x^3 - 7x$ پدې پولینوم کې کوچني توان صفر دی او لوړ توان یې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1 ، 2 ، 3 دي چې درې واړه پکې موجود دي نو پورتنې پولینوم کامل پولینوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- ناقص پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه يکې موجود نه وي لکه .

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې يې حرف موجود نه وي. لکه:

$$7x^3 + 4x^2 + 11x + 8$$

$$\frac{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}{5}$$

4- کسري پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه :

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1}, \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3}, \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس په صعودي يا نزولي ډول ترتيب شوي وي.

لکه $2 - 4x + 11x^2 + 8x^3 + 8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غير منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس ترتيب شوي نه وي.

لکه: $3x - 8x^3 + 7 + 3x^2$

7- ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $7x^2 - 31x + \sqrt{2}$.

8- غير ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي. لکه :

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه يې کسري کيږي.

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غير ناطق پولينوم ته ملتي نوم هم وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف يې ترجذر لاندې وي که دطاقت په شکل وليکل شي توانونه يې کسري کيږي.

د مونوم درجه: د يو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دريمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله يا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ يو $3+2=5$ درجه مونوم دی.

د پولينوم درجه: *Degree of a Polynome* د پولينوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولينوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2+5x^2y^3+8x^3y^4$ چې اومه درجه پولينوم دی. $8x^3+5x^2-4x+2$ يو دريمه درجه پولينوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې يې مساوي وي. لکه $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

که په يوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قيمت د هغه حد د توان څخه پيدا کوو چې توان يې معلوم وي.

لکه $x^3+x^my+x^ny^2+y^3$

حل:

$m+1=3 \qquad m=3-1 \qquad m=2$

$n+2=3 \qquad n=3-2 \qquad n=1$

د الجبري عددونو څلور ګوني عمليې

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو. هم علامه عددونه جمع کيږي او علامه يې شريکه علامه ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} -435 \\ -387 \\ \hline -822 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +215 \\ +416 \\ \hline +631 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلف العلامه عددونه يو د بل څخه منفي کيږي او علامه د لوی عدد ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ \underline{-416} \\ -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ \underline{-168} \\ +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفريق:

مفروق د مفروق منه لاندي داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بيا د مفروق علامو ته تغير ورکوو. او د جمعې عمليه پرې اجراء کوؤ.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \underline{\pm 263} \\ +468 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -216 \\ \underline{\mp 418} \\ +202 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -485 \\ \underline{\pm 316} \\ -801 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +465 \\ \underline{\mp 317} \\ +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو.

د علامو ضربول په يوه جدول کې مطالعه کوو.

د عين علامو د ضرب حاصل مثبت دی.	$+ \times + = +$ $- \times - = +$
او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی.	$+ \times - = -$ $- \times + = -$

د $+ = - \times -$ ثبوت:

اول د $+ = - \times -$ ثبوت په عدد:

$$5 \times 8 = 40$$

$$(6-1)(9-1) = 40$$

$$54 - 6 - 9 \boxdot 1 = 40$$

$$54 - 15 \boxdot 1 = 40$$

$$39 \boxdot 1 = 40$$

که په خالي خانه کې + علامه وليکل شي د مساوات دواړه خواوي مساوي کيږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1) = +1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم د + =− × − ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$
$$(-a)(-b) = x \ldots\ldots\ldots\ldots I$$
$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$
$$-a(-b + b) = x - ab$$
$$-a(0) = x - ab$$
$$0 = x - ab$$
$$ab = x$$

په I رابطه کې د x په عوض ab وضع کوو.

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې + =− × − کیږي.

د − =− × + ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$
$$(+3)(+3) = 9$$
$$(+3)(+2) = 6$$
$$(+3)(+1) = 3$$
$$(+3)(\ 0\ ) = 0$$
$$(+3)(-1) = -3$$
$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې − =− × +

مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$
$$(-8)(-9) = 72$$
$$(-5)(+3) = -5$$
$$(+4)(-7) = -28$$

−13	+3	−9	+8
− 5	−4	+3	+7
+65	−12	−27	+56

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبري عددونو تقسیم:

علامه په علامه او عدد په عدد ویشو لمړی د علامو خارج قسمت په یوه جدول کې مطالعه کوؤ.

$\frac{+}{+} = +$ $\frac{-}{-} = +$ $\frac{+}{-} = -$ $\frac{-}{+} = -$

$\frac{+18}{+3} = +6$ $\frac{-15}{-5} = +3$ $\frac{+12}{-6} = -2$ $\frac{-10}{+2} = -5$

د پولینومونو څلور ګونې عملیې

1- د پولینومونو جمع:

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې مشابه حدونه یو تر بل لاندې راشي بیا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه مشابه حدونه یو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3 + 8x^2 - 11x + 8 \\ \underline{11x^3 + 9x^2 + 15x - 3} \\ 18x^3 + 17x^2 + 4x + 5 \end{array}$$

2- د پولینومونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې مشابه حدونه یو د بل لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ور کوؤ او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4 - 15x^3 + 8x^2 - 20x + 8 \\ \underline{\pm 35x^4 \pm 9x^3 \pm 11x^2 \pm 9x \mp 16} \\ -22x^4 - 24x^3 - 3x^2 - 29x + 24 \end{array}$$

3- د پولینومونو ضرب :

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو بیا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوؤ د پولینومونو دضرب حاصل لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\ 7x^2 - 8x + 9 \\ \hline 21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \qquad\qquad\qquad \\ - 24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \qquad \\ 27x^3 - 45x^2 + 63x - 63 \\ \hline 21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63 \end{array}$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوونې د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کښته کوو نوی مقسوم جوړو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتي شوي برخې ته باقي وایې.

مثال:

$$\begin{array}{r|l} 72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21 & 8x^2 + 7x - 3 \\ \cline{2-2} \pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3 \qquad\qquad\qquad & 9x^3 + 4x^2 - 5x + 7 \\ \hline 3\ 2x^4 - 12x^3 + 9x^2 \qquad\qquad & \\ \pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2 \qquad\qquad & \\ \hline -40x^3 + 21x^2 + 64x \qquad & \\ \mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x \qquad & \\ \hline 56x^2 + 49x - 21 & \\ \pm 56x^2 \pm 49x \mp 21 & \\ \hline \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده دعوه :

د صحيح عددونود تقسيم ميزان په لاندې ډول دی

باقي + خارج قسمت × مقسوم عليه = مقسوم

که مقسوم په $P(x)$ اومقسوم عليه په $(x-a)$ اوخارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په R وښيونو ليکو چې

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د x په عوض a وضع کوو نو :

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

$$Q(a) = R$$

دی دعوی ته د باقيمانده دعوه يا $Remainder's\ Theorem$ وائي.

مثال: وښياست چه $x+2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ د پولينوم جذر دی او که نه دی؟

حل : د $x+2$ جذر پيدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Longrightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولينوم کې د x په عوض (-2) وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو (-2) د پولينوم جذر دی او $x+2$ د پولينوم فکتور دی.

$$P(-2) = 3(-\ 2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$$

$$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$$

$$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$$

$$P(-2) = -28 + 28$$

$$P(-2) = 0$$

$$R = 0$$

$x+2$ د $P(x)$ د پولينوم فکتور دی او (-2) ئي جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: هغه افاده پیدا کړئ چه په $x-1$ باندی ووېشل شي باقي ئي (-3) شي او که په $x+2$ باندې ووېشل شي باقي ئي -9 شي.

$p(x) = ax + b$

$p(1) = a.1 + b = -3$

$p(-2) = a(-2) + b = -9$

$a + b = -3$

$\mp 2a \pm = \mp 9$

$3a = 6$

$3a = 6 \Rightarrow a = 2$

$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$

$b = -5$

مطلوبه افاده $(2x-5)$ ده.

تمرین:

1- جمع يې کړئ؟

a-
$$\begin{array}{r} 11x^3 - 11x^2 + 7x - 9 \\ 8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \\ \underline{9x^3 - 4x^2 + x - 2} \end{array}$$

b-
$$\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 16 \\ 7x^2 - 20x + 8 \\ \underline{5x^2 + 3x - 11} \end{array}$$

2- تفريق کړئ؟

a-
$$\begin{array}{r} 8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15 \\ \underline{7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20} \end{array}$$

b-
$$\begin{array}{r} 11x^3 - 13x^2 + 20x - 8 \\ \underline{5x^3 + 15x^2 + 8x + 11} \end{array}$$

3- ضرب يې کړئ؟

a-
$$\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \\ \underline{7x^2 - 8x + 6} \end{array}$$

b-
$$\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 7 \\ \underline{3x^2 + 7x - 8} \end{array}$$

c-
$$\begin{array}{r} 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \\ \underline{3x^3 - 8x^2 + 6x - 8} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تقسيم يې کړئ؟

$$\frac{15x^5+16x^4-73x^3+101x^2-5x+6}{3x^2+8x-6} - a$$

$$\frac{21x^4+67x^3-58x^2-119x+77}{7x^2+6x-11} - b$$

$$\frac{35x^6-59x^5+36x^4+35x^3-74x^2+60x-24}{5x^3-7x^2+6x-3} - c$$

$$\frac{16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4}{2x+37} - d$$

ترکيبي تقسيم $Synthetic\ Division$

هغه تقسيم دی چه د خارج قسمت د ضريبو د پيدا کولو لپاره د مقسوم ضريبونه ټول په يوه وار استعماليږي.

طريقه يې داسې ده چه د مقسوم ضريبونه په يوه افقي کرښه کې ليکود کرښې په اخر کې په يوه کنج کې د قيمت ليکو بيا يوی کرښې ته ځای پريږدو او يو خط کشوو دمقسوم د پولينوم د اول حد ضريب بې له کوم تغيره راکښته کوو. د x په قيمت کې يې ضربوو د دويم حد دضريب لاندې يې ليکو او ورسره جمع کوو يې. د جمع حاصل د x په قيمت کې ضربوو. په همدې ترتيب تر اخره اجرائت کوو. د خط لاندې اخرنی عدد د R قيمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضريبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجی څخه يوه کمه ده.

که R=0 وي نو $x\text{-}a$ د مقسوم دپولينوم فکټور دی. او د قيمت د پولينوم جذر دې.

مثال:-د ترکيبي تقسيم پواسطه وښياست چه $(x-2)$ د $P(x)=x^4+6x^3-8x^2-12x-8$ د پولينوم فکټور دی.

1	+6	-8	-12	-8	2
	2	16	16	8	
1	8	8	4	0	

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولينوم فکټور دی او (2) د پولينوم جذر دی او $q(x)=x^3+8x^2+8x+4$ د خارج قسمت پولينوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که بینوم د $(x-a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x+a)$ شکل لرلوو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $\left(\pm\frac{b}{a}\right)$ لیکل کیږي نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

تمرین

1 : د باقیمانده دعوی پواسطه یې حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x+3)$ وویشل شي باقي یې (-24) شي او که په $(2x-3)$ وویشل شي باقي یې (-6) شي

2 : د ترکیبي تقسیم پواسطه یې حل کړئ؟

a: $\dfrac{x^4-6x^3+15x^2-6x-40}{x-3}$

b: $\dfrac{2x^4-13x^3+4x^2+24x-28}{2x+3}$

c: $\dfrac{6x^3+4x^2-84x-9}{x+4}$

d: $\dfrac{12x^4-x^3-20x^2+8}{3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم فصل

مساوات

د دوه افادو د عددي قيمتو برابرى ته مساوات وايي.

مساوات په دوه قسمه دى.

1- مطابقت 2- شرطيه مساوات يا معادله

1- مطابقت:

مطابقت هغه مساوات دى چې د مجهول په ټولو قيمتو باندې يې دواړه خواوي مساوي وي.

د اسانتيا لپاره مطابقتونه په شپږو ګروپو کې مطالعه کوو.

1 ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a+b)^n$ شمکل ولري.

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n+1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې يې مثبت دي په اول حد کې د a توان n د b توان صفر دى په نورو حدو کې د a د توان څخه يو کميږي b ته ورکول کيږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان n شي د اول حد ضريب يو دى د دويم حد ضريب n دى د نورو حدو د ضريبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکيني حد ضريب د a په توان کې ضربوو د مخکينو حدو په شمېر يې ويشو.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$
$$(a+b)^9 = ?$$
$$(a+b)^{10} = ?$$
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \dots\dots + nab^{n-1} + b^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a-b)^n$ شکل ولري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول ګروپ د مطابقتو په څېر دي. صرف د اول ګروپ د ټول حدو علامې مثبت دی او د دویم ګروب د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتیب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$(a-b)^9 = ?$

$(a-b)^{10} = ?$

$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 \ldots\ldots + nab^{n-1} - b^n$

3- دریم ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړه حدو د قاعدو تفاضل دی دویم قوس n حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر څو چې د a توان صفر او د b توان $(n-1)$ شي.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$
$a^7 - b^7 = (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$

|

|

|

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

4- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n طاق وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دویم قوس n حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي. په اول حد کې د a توان $n-1$ دی د b توان صفر دی په نورو حدو کې د a د توان څخه یو کمیږي b ته ورکول کیږي تر څو چې د a توان صفر شي او د b توان $n-1$ شي.

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^4 + b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$
$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$
$a^6 + b^6 = (a + b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$
$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

$a^9 + b^9 = ?$

$a^{11} + b^{11} = ?$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او n جفت وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي د هر قوس اول حد د دواړو حدودقاعدو مجموعه ده او دویم حد یې د دواړو حدو د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چند جذر دی.

$a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$
$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = \left(a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$

$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$

شپږم ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري دري لمړي حدونه یې مربعګاني دي دري وروستي حدونه یې د دوه حدو د حاصل ضرب دوه چند دي.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

1: $(2x + 3y)^2 = (2x)^3 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

2: $(4x - 5y)^4 = (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4$

$= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4$

3: $(2x + 3y + 5z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y$

$+2 \times 2x \times 5y + 2 \times 3y \times 5z$

$= 4x^2 + 9y^2 + 25y^2 + 12xy + 20xz + 30yz$

2- مثال: تجزیه یې کړئ؟

1: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

5: $9x^4 + 36y^4 = (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = \left(3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}\right)$

$(3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2})$

$(3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy)$

تمرین:

انکشاف ورکړئ

1- $(3x + 5y)^2$ 2- $(2x + 7y)^3$ 3- $(4x + 5y)^4$

4- $(4x - 5y)^5$ 5- $(3x - 7y)^4$ 6- $(2x - 3y)^6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- $7x^2-9y^2$ 8- $8m^3-125n^3$ 9- $\frac{8}{125}x^3-\frac{216}{1331}y^3$

10- $8x^3+27y^3$ 11- $64m^3+1000n^3$ 12- $\frac{125}{216}x^3+\frac{729}{1728}y^3$

13- $4x^2+y^2$ 14- $16x^4+256y^4$ 15- $\frac{81}{625}m^4+\frac{1296}{2401}n^4$

16- $(2x+3y+5z)^2$ 17- $(3x+2y-5z)^2$ 18- $(\frac{2}{8}x-\frac{4}{5}y-\frac{7}{8}z)^2$

تجزيه:

تجزيه په لغت کې توټه ، توټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوې افادې د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

1- د مشترک نيولو پواسطه د يوی افادې تجزيه کول:

که د يوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد يا حرف شامل وي دا شامل مشترک نيسو د قوس د باندې يې ليکو بيا د افادې هر حد په دې مشترک ويشو د قوس په داخل کې يې ليکو افاده تجزيه کيږي.

1: $3x^2-15=3(x^2-5)$

2: $5x^2-15x+10=5(x^2-3x+2)$

3: $4x^3+24x^2-36x=4x(x^2+6x-9)$

4: $\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x=\frac{1}{4}x(x-3)$

2- د a^2-b^2 د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $4x^2-25y^2=(2x)^2-(5y)^2=(2x-5y)(2x+5y)$

2: $\frac{4}{25}m^2-\frac{9}{49}n^2=\left(\frac{2}{5}m\right)^2-\left(\frac{3}{7}n\right)^2=\left(\frac{2}{5}m-\frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m+\frac{3}{7}n\right)$

3: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{49}=\left(\frac{x}{6}\right)^2-\left(\frac{y}{7}\right)^2=\left(\frac{x}{6}-\frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6}+\frac{y}{7}\right)$

3- د a^3-b^3 د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $8x^3-27y^3=(2x)^3-(3y)^3=(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

2: $64x^3-125y^3=(4x)^3-(5y)^3=(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$

3: $216m^3-343n^3=(6m)^3-(7n)^3=(6m-7n)(36m^2+42mn+49n^2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

$$1:\ 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2:\ 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3$$

$$= (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3:\ \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترینوم:

دري حده افادې ته ترینوم وايي.

عمومي شکل یې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترینوم تجزیه:

د ترینوم تجزیه په دوه حالته کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي

2- $a \neq 1$ وي.

1- چې $a = 1$ وي ترینوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترینوم د دغه شکل د تجزیې لپاره داسې دوه عدده پیدا کوو چې د ضرب حاصل یې c او د جمع حاصل یې b شي. فرضاً m او n داسې دوه عددونه دي.

یعنې $b = m + n$ او $c = mn$ دی نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

گروپ بندي کوو یې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$

$$(x + m)(x + n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال:

$x^2 + 11x + 30$
$x^2 + 5x + 6x + 30$
$x(x + 5) + 6(x + 5)$
$(x + 5)(x + 6)$

2- مثال :

$x^2 - 11x + 30$
$x^2 - 5x + 6x + 30$
$x(x - 5) - 6(x - 5)$
$(x - 5)(x - 6)$

نوټ: که په ترینوم کې د (c)علامه $(+)$وه هغه عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي هم علامه دي بیا د b علامی ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د b علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

1: $x^2 + 15x + 36$
$x^2 + 12x + 3x + 36$
$x(x + 12) + 3(x + 12)$
$(x + 12)(x + 3)$
2: $x^2 - 13x + 40$
$x^2 - 8x - 5x + 40$
$x(x - 8) - 5(x - 8)$
$(x - 8)(x - 5)$

2- که په ترینوم کې د c علامه منفي وه نو عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي مختلف العلامه دي بیا د b علامې ته ګورو که د b علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د b علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

1: $x^2 + 5x - 66$
$x^2 - 6x + 11x - 66$
$x(x - 6) + 11(x - 6)$
$(x - 6)(x + 11)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2: $x^2 - 5x - 66$

$x^2 - 11x + 6x - 66$

$x(x - 11) + 6(x - 11)$

$(x - 11)(x + 6)$

تمرین:

1- $x^2 + 15x + 44$　　2- $x^2 + 19x + 70$　　3- $x^2 + 29x + 180$

4- $x^2 - 16x + 55$　　5- $x^2 - 21x + 90$　　6- $x^2 - 13x + 36$

7- $x^2 + 6x - 135$　　8- $x^2 + 11x - 210$　　9- $x^2 + 31x - 630$

10- $x^2 - 7x - 170$　　11- $x^2 - 9x - 400$　　12- $x^2 - 25x - 186$

2- حالت چې $a \neq 1$ وي.

د ترینوم د دغه حالت د تجزیې لپاره داسې دوه عددونه پیدا کوو چې دضرب حاصل یې ac او د جمع حاصل یې b شي؟

1. $3x^2 + 11x + 10$
   $ac = 3(10) = 30$
   $b = 11$
   $3x^2 + 6x + 5x + 10$
   $3x(x + 2) + 5(x + 2)$
   $(x + 2)(3x + 5)$
2. $5x^2 - 19x + 12$
   $ac = 5(12) = 60$
   $b = -19$
   $5x^2 - 15x - 4x + 12$
   $5x(x - 3) - 4(x - 3)$
   $(x - 3)(5x - 4)$
3. $7x^2 + 3x - 34$
   $ac = 7(-34) = -238$
   $7x^2 - 14x \quad x - 34$
   $7x(x - 2) + 17(x - 2)$
   $(x - 2)(7x + 17)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $11x^2 - 23x - 30$
$ac = 11(-30) = 330$
$b = -23$
$11x^2 - 33x + 10x - 3$
$11x(x-3) + 10(x-3)$
$(x-3)(10x+10)$

تمرين:

لاندې ترينومونه حل کړئ؟

$5x^2 + 11x + 2$ -1	$7x^2 + 24x + 9$ -2	$3x^2 + 31x + 80$ -3
$7x^2 - 19x + 10$ -4	$5x^2 - 22x + 21$ -5	$2x^2 - 17x + 35$ -6
$3x^2 + 2x - 33$-7	$4x^2 + 7x - 57$-8	$7x^2 + 3x - 34$-9
$5x^2 - 10x - 54$-10	$7x^2 - 11x - 30$-11	$8x^2 - 23x - 85$-12

د ګروپ بندۍ پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

که د يوې افادې حدونه تر درې حدو زيات وه او په ټولو حدو کې يو کوم حرف يا عدد شامل نه ؤ مګر په بعضو حدو کې شامل ؤ دغسې افاده په ګروپو ويشو په هر ګروپ کې شامل مشترک نيسو تر مشترک نيولو وروسته بايد قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نيسو افاده په قوسو تجزيه کيږي:

$x^3 + 5x^2 + 3x + 15$
$x^2(x+5) + 3(x+5)$
$(x+5)(x^2+3)$

د تجزيې د استعمال ځايونه:

تجزيه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پيدا کولو لپاره استعماليږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راکړ شوي افادې تقسيم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ويشل کيږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچني مشترک مضرب L.C.M:

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنۍ افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمیږي او تر دې بله کوچنۍ افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمیږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملوکې یې مشترک او غیرمشترک پیدا کووکه په مشترکو ضربي عواملوکې د (کوچني) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1: $(x^2 + 2x)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

1: $(x^2 + 2x)^2 = \{x(x+2)\}^2 = x^2(x+2)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x+2)(2x-1)$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x+2)(2x-7)$

$G.C.D = x(x+2) = x^2 + 2x$

$L.C.M = x^2(x+2)^2(2x-1)(2x-7)$

تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

1- $2ax^3 - 4a^3x - 6a^3$

2- $ax^2 + 2a^2x + a^3$

3- $3a^2(x+a)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري کسرونه

الجبري کسر هغه افاده ده چې په مخرج کې یې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2+3x-2}{x}\ ,\qquad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه 2- غیر ناطق الجبري کسرونه

2- ناطق الجبري کسرونه :

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه کوچنی وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ یا $\frac{2}{x+3}$

b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه زیاته یا ورسره مساوي وي. لکه:

$$\frac{4x^2+5x-1}{x^2+3x-4}, \frac{3x^2+5x+3}{x+5}$$

2- غیر ناطق الجبري کسرونه :

هغه کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي.

لکه $\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2}$ ، $\frac{x+5}{\sqrt{x}+3}$

د الجبري کسرو خواص:

1- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)}=\frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}{\frac{x^2+5x+6}{x+3}}=\frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}}=\frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرج علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y}=+\frac{x}{-y}=+\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$$

د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرج مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوو

$$1:\quad \frac{x}{x+5}+\frac{3x-1}{x+5}-\frac{x+3}{x+5}=\frac{x+3x-1-x-3}{x+5}=\frac{3x-4}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+7}{x+2}=\frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

$$3:\quad \frac{x}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{x(x+2)+(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$$

$$=\frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

د الجبری کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړ د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرج سره اختصاریدلو اختصاروو بیا یې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x+3}{x+1}\times\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2: $\dfrac{x^2-2x}{x+2}\times\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+3x-10}=\dfrac{x(x-2)}{x+2}\times\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)}=\dfrac{x(x+1)}{x+5}$

$=\dfrac{x^2+x}{x+5}$

د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرج تجزیه کړو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرج څخه حذفوو.

1: $\dfrac{x^2+3x-28}{x^2+9x+14}=\dfrac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)}=\dfrac{x-4}{x+2}$

2: $\dfrac{x^2+3x}{x^2+11x+24}=\dfrac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)}=\dfrac{x}{x+8}$

د الجبري کسرونو تقسیم:

د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

1: $\dfrac{x^2+13x+30}{x+5}\div\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+6x+15}$

$\dfrac{x^2+13x+30}{x+5}\times\dfrac{x^2+6x+5}{x^2+8x+15}$

$\dfrac{(x+3)(x+10)}{x+5}\times\dfrac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\dfrac{(x+10)(x+1)}{x+5}=\dfrac{x^2+11x+10}{x+5}$

2: $\dfrac{x^2-11x+18}{x-3}\div\dfrac{x^2+7x-18}{x^2-9}$

$\dfrac{x^2-11x+18}{x-3}\times\dfrac{x^2-9}{x^2+7x-18}$

$\dfrac{(x-2)(x-9)}{x-3}\times\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)}=\dfrac{(x-9)(x+3)}{x+9}=\dfrac{x^2-6x-27}{x+9}$

تمرین:

1- لاندي کسرونه جمع کړئ؟

1- $\dfrac{2x-3y}{6y^2}+\dfrac{18xy-9y^2}{9y^2}$ 2- $\dfrac{x+5}{x^2}+\dfrac{x-3}{x}-\dfrac{x+7}{x^3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $\frac{x+11}{x+3}+\frac{x-1}{x+2}$ 4- $\frac{2x+1}{x^2-16}+\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}$

5- $\frac{x}{x+5}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{x-2}{x+5}$ 6- $\frac{2}{x+7}+\frac{3}{x-7}$

2- لاندې کسرونه اختصار کړئ؟

1- $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$ 2- $\frac{x^2+5x-24}{x+8}$ 3- $\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22}$

3- لاندې کسرونه ضرب کړئ؟

1- $\frac{x^2+5x+6}{x+5}\times\frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6}$ 2- $\frac{x^2+x}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

3- $\frac{x^2-3x-28}{x-7}\times\frac{x+5}{x+4}$ 4- $\frac{x^2+3x-40}{x+8}\times\frac{x-3}{x+5}$

4- لاندې کسرونه تقسیم کړئ؟

1- $\frac{x^2+13x+6}{x+5}\div\frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35}$ 2- $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+1}{x}$

3- $\frac{x^2}{x-1}\div\frac{x}{x^2-1}$ 4- $\frac{x}{x+3}\div\frac{x^2}{x^2-9}$

5- $\frac{x+5}{x}\div\frac{x+5}{x}$

د کسرونو ګویا کول

د یوه کسر د صورت یا مخرج څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر ګویا کول وایې. معمول په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي.

د کسر د مخرج ګویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې (2) وي. لکه $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{x}=3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}}=\frac{2\times\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\times\sqrt{2x}}=\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}^2}=\frac{2\sqrt{2x}}{2x}=\frac{\sqrt{2x}}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}\times\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2}=\frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې دکسر په مخرج کې يو جذري حل موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ ، $\frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ ، $\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو د گويا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x\times x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x}=\sqrt[3]{x^2}$$

$$2-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x\times x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3-\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x}\times\sqrt[7]{x^6}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x\times x^6}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{x}=2x\sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخرج کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه يې (2) وي.

لکه $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ او داسې نور.

صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}$$
$$=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2:\quad \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{11}^2}$$
$$=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11}=\sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3:\quad \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- چې د کسر په مخرج کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې يې د (2)څخه زياتي وي .

لکه: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$ ، $\frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزيي دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو او که د منځ علامه يې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزيي دويم قوس کې صورت او مخرج ضربوو.

$$1:\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}=\frac{1\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5x^2}-\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{x-5}$$

$$2:\quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}=\frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}$$

$$=\frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[5]{3x^4}+\sqrt[5]{9x^3}-\sqrt[5]{27x^2}+\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{3x^4}-\sqrt[5]{9x^3}+\sqrt[5]{27x^2}-\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{243}}$$

$$=\frac{(x+3)(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}}{x+3}$$

$$=\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}$$

تمرين:

د لاندې کسرو مخرجونه ګويا کړئ؟

$\frac{2}{\sqrt{x}}$-1 $\frac{x}{\sqrt{x}}$-2 $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$-3 $\frac{3x}{\sqrt{x}}$-4 $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$-5

$\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$-6 $\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}}$-7 $\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}$-8 $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$-9 $\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$-10

$\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$-11 $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$-12 $\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}}$-13 $\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$-14 $\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$-15

(c) ketabton.com: The Digital Library

قسمي کسرونه:

که د دوه کسرونو د مجموعې څخه يو واقعي کسر جوړ شي. دغه کسرونه د واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}=\frac{2(x+5)+3(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5}=\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

$\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$ يو واقعي کسر دی د $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ کسرونه يې قسمي کسرونه دي.

د يوه واقعي کسر د قسمي کسرو پيدا کول:

د قسمي کسرو د پيدا کولو لپاره د واقعي کسر مخرج تجزيه کوو د مخرج د ضربي عواملو شمېر د قسمي کسرونو شمېر ښيي. د مخرج د ضربي عواملو په لحاظ د واقعي کسر د قسمي کسرو پيدا کول په څلورو حالتو کې مطالعه کوؤ.

1- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غير تکراري بينومونه وي هر بينوم د يوه کسر مخرج دی صورت يې د الفباء په غټو حروفو ښيو عمليې پرې اجراء کوو د حروفو قيمتونه پيدا کوو د هغوي په عوض يې وضع کوو د واقعي کسر قسمي کسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{8x+51}{(x+6)(x+7)}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو $8x+51=A(x+7)+B(x+6)$

د A او B د قيمتو د پيدا کولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د A او د B قيمتونه پيدا کوو نو د هر قوس جذر پيدا کوو.

$$x+7=0$$
$$x=-7$$

-7 د x په عوض وضع کوؤ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$8(-7) + 51 = A(-7+7) + B(-7+6)$$
$$-56 + 51 = A(0) + B(-1)$$
$$-5 = 0 - B$$
$$-B = -5 \qquad B = 5$$
$$x + 6 = 0 \qquad x = -6$$

6- په معادله کې د x په عوض وضع کوؤ.

$$8(-6) + 51 = A(-6+7) + B(-6+6)$$
$$-48 + 51 = A(1) + B(0)$$
$$3 = A \qquad A = 3$$

د A په عوض 3 او د B په عوض 5 وضع کوؤ.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عینیت پواسطه:

$$8x + 51 = A(x+7) + B(x+6)$$
$$8x + 51 = Ax + 7A + Bx + 6B$$
$$8x + 51 = Ax + Bx + 7A + 6B$$
$$8x + 51 = (A+B)x + 7A + 6B$$

په عینیت کې د مشابه حدو ضریبونه مساوي وي.

$$A + B = 8$$
$$7A + 6B = 51$$

$$7A + 7B = 56$$
$$-7A \pm 6B = \pm 51$$
$$B = 5$$

$$A + B = 8 \rightarrow A = 8 - 5 = 3$$
$$A = 3$$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بینومونه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2+12x+2=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$

$$=Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx$$

$$=Ax^2+Bx^2+2Ax+Bx+Cx+A$$

$$5x^2+12x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

$$A+B=5$$

$$2A+B+C=12$$

$$A=2$$

$$A+B=5\to 2+B=5 \qquad B=5-2=3$$

$$B=3$$

$$2A+B+C=12$$

$$2\times 2+3+C=12$$

$$4+3+C=12$$

$$7+C=12$$

$$C=12-7$$

$$C=5$$

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غير تکراري ترينومونه وي. او د تجزيې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترينوم وي په صورت کې يې بينوم ليکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+7}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو.

$$5x^2+20x+21=A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=(A+B)x^2+(5A+C)x+7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5\Rightarrow 3+B=5\Longrightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5\times 3+C=20$$

$$15+c=20 \qquad C=20-15$$

$$C=5$$

$$\frac{3}{x}+\frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه يې داسې پيدا کوؤ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+3x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$=\frac{(Ax+B)(x^2+3x+5)+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax^3+3Ax^2+5Ax++Bx^2+3Bx+5B+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو :

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+3Ax^2+Bx^2+5Ax+3Bx+Cx+D+5B$$

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+(3A+B)x^2+(5A+3B+C)x+D+5B$$

$$A=2$$

$$3A+B=7$$

$$3\times 2+B=7\Longrightarrow 6+B=7\Longrightarrow B=7-6$$

$$B=1$$

$$5A+3B+C=14$$

$$5\times 2+3\times 1+C=14$$

$$10+3+C=14$$

$$3+C=14$$

$$C=14-13$$

$$C=1$$

$$5B+D=5$$

$$5\times 1+D=5$$

$$5+D=5$$

$$D=5-5$$

$$D=0$$

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+5}+\frac{x}{(x^2+3x+5)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم فصل

معادله یا شرطیه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قیمتو یې دواړه خواوي مساوي وي.

لکه $5x+3=13$ چې د $x=2$ لپاره یې دواړه خواوي مساوي دي.

دغسې مساوات ته شرطیه مساوات وایي.

د معادلې اقسام:

معادله ډېر قسمونه لري.

1- یو مجهوله اوله درجه معادله
2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
3- درې مجهوله اوله درجه معادله
4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
5- یو مجهوله دویمه درجه معادله
6- یو مجهوله دریمه درجه معادله
7- یو مجهوله څلورمه درجه معادله
8- جذري معادلې
9- اکسپونینشل معادلې
10- لوګاریتمي معادلې
11- مثلثاتي معادلې

اول: یو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې هم یوه وي.

عمومي شکل یې دا دی $ax+b$ چه a او b ثابت عددونه دي او x مجهول دی څرنګه چې د x توان یو دی نو ځکه ورته یو مجهوله اوله درجه معادله وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلې خواص:

1- که د معادلې د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي په معادله کې تغیر نه راځي.

2- که د معادلې د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي په معادله کې تغیر نه راځي.

3- که د معادلې دواړه خواوي په عین عدد کې ضرب شي په معادله کې تغیر نه راځي.

4- که د معادلې دواړه خواوي په عین عدد تقسیم شي په معادله کې تغیر نه راځي.

5- که د معادلې دواړه خواوي په عین توان رفع شي په معادلې کې تغیر نه راځي.

6- که د معادلې دواړه خواوي تر عین جذر لاندې شي په معادله کې تغیر نه راځي.

د یو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طریقه:

که د معادلې دواړه خواو ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښي خواته او مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د یوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کیږي که مثبت وي منفي کیږي که منفي وي مثبت کیږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربیږي.

مثال:

1: $x+5=8 \qquad x=8-5 \qquad x=3$

2: $x-7=11 \qquad x=11+7 \qquad x=18$

3: $3x=36 \qquad \frac{3x}{3}=\frac{36}{3} \qquad x=12$

4: $\frac{x}{5}=4 \qquad 5\times\frac{x}{5}=4\times 5 \qquad x=20$

5: $\frac{5}{x}-3=-2 \qquad \frac{5}{x}=-2+3 \qquad \frac{5}{x}=\frac{1}{1} \qquad x=5$

6: $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}+\frac{2}{x}=36$

$\frac{3+7+2}{x}=36$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{12}{x} = 36$ $\qquad$ $\frac{12}{x} = \frac{36}{1}$ $\qquad$ $36x = 12$

$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36}$ $\qquad$ $x = \frac{1}{3}$

جذري معادلی

هغه معادلی دي چې مجهول يې تر جذر لاندې وي

لکه $\qquad \sqrt{3x+30} + 11 = 17$

د جذري معادلو دحل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوی خواته پرېږدو نور جذري او غېرجذري حدونه د مساوات بلی خواته ورو. بيا د مساوات دواړه خواوی د جذر په درجه رفع کوو جذر د منځه ځي که بيا هم په معادله کې جذر موجود و عمليه تکراروو .

1- مثال:

$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$

$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$

$\sqrt{5x-4} = 6$

$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2 = 6^2$

$5x - 4 = 36$

$5x = 36 + 4 = 40 \Longrightarrow 5x = 40 \Longrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Longrightarrow x = 8$

$x = 8$

2- مثال:

$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$

$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$

$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{5x+6}\right)^2$

$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x + 108 = -20\sqrt{5x+6}$$

$$\frac{2x+108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x+6}}{2}$$

$$x + 54 = -10\sqrt{5x+6}$$

$$(x+54)^2 = \left(-10\sqrt{5x+6}\right)^2$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x+6)$$

$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$

$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$

$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$

$$\acute{\Delta} = 38416 - 2316 = 36100$$

$$\acute{\Delta} = 36100$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$

$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$

$$x_2 = \frac{196 - 190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+4} = -1 \sqrt{3x-1} = \sqrt{3x+4} - 1$$

$$\left(\sqrt{3x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+4} - 1\right)^2$$

$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1$$

$$2\sqrt{3x+4} = 6$$

$$\left(2\sqrt{3x+4}\right)^2 = 6^2$$

$$4(3x+4) = 36$$

$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$

$$3x = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- مثال:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-7}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}\right)^2$$

$$x=\frac{441}{x-7}-2\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}\times\sqrt{x-7}\right)+x-7$$

$$\frac{441}{x-7}-49=0\Rightarrow 49x-343=441\Rightarrow 49x=441+343=784$$

$$49x=784$$

$$\frac{49x}{49}=\frac{784}{49}\ \Rightarrow x=16$$

$$x=16$$

تمرين

لاندې جذري معادلې حل کړئ

1. $\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+9}=0$ $\qquad x=1$
2. $\frac{2x^2-128}{\sqrt{3+x^2}}=0$ $\qquad x=8$
3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{91}{\sqrt{x+13}}$ $\qquad x=36$
4. $\frac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$ $\qquad x=\frac{81}{a}$
5. $\sqrt[5]{x+8}=\sqrt[10]{x^2+64x+36}$ $\qquad x=\frac{7}{12}$
6. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\qquad x=81$
7. $\sqrt{x+13}-\sqrt{2x+1}=0$ $\qquad x=12$
8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ $\qquad x=\frac{16}{25}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $\sqrt{x} + 5 = 6 - \sqrt{x+7}$ $\qquad x = 9$

10. $2(x+2) = 1 + \sqrt{4x^2 + 9x + 14}$ $\qquad x = \frac{5}{3}$

تمرين:

1. $\frac{5-x}{4} + \frac{x}{8} = 1$
2. $\frac{2}{x} - 3 = \frac{3}{x} - 8$
3. $\frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x-3} = 6$
4. $\frac{x}{2} - \frac{2x-8}{5} + \frac{4}{5} = 3$
5. $\frac{x-1}{4} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} + x - 4 = 4$
6. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم فصل

دوه مجهوله معادلی

هغه معادلي دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان يې يو وي عمومي شکل يې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

a_1 ، a_2 ، b_2 ، b_2 ، c_1 او c_2 ثابت عددونه دي x او y مجهولونه دي څرنګه چې د هر مجهول توان يو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلې وايي.

مناقشه:

1- كه $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم زيات حلونه لري.

2- كه $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم حل نلري.

3- كه $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سيستم يو حل لري.

د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلي په (6) طريقو حليږي.

1- د جمع يا افناء په طريقه:

په دواړو معادلو كې د يوه مجهول ضريبونه مساوي كوو. كه هم علامه ود معادلې يو د بل څخه منفي كوو او كه مختلف العلامه وه معادلې جمع كوو پدې ترتيب د دوه مجهوله معادلو سيستم په يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قيمت يې پيدا كوو بيا دا جذر د سيستم په يوه معادله كې وضع كوو د دويم مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سيستم حل كړئ؟

$$7x + 8y = 38$$
$$5x + 3y = 19$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5(7x + 8y = 38)$$
$$7(5x + 3y = 19)$$
$$35x + 40y = 190$$
$$\pm 35x \pm 21y = \pm 133$$
$$19y = 57$$
$$y = 3$$
$$7x + 8y = 38$$
$$7x + 8 \times 3 = 38$$
$$7x + 24 = 38$$
$$7x = 38 - 24$$
$$7x = 14$$
$$x = 2$$

2- مثال:

$$3x - 5y = 2$$
$$4x + 2y = 20$$
$$2(3x - 5y = 2)$$
$$5(4x + 2y = 20)$$
$$6x - 10y = 4$$
$$20x + 10y = 100$$
$$26x = 104$$
$$x = 4$$
$$4(4) + 2y = 20$$
$$16 + 2y = 20$$
$$2y = 20 - 16$$
$$2y = 4$$
$$y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقه حل کړئ؟

1- $\begin{cases} 5x + 4y = 32 \\ 8x - y = 29 \end{cases}$

2- $\begin{cases} 6x - 8y = 4 \\ 7x - 2y = 12 \end{cases}$

3- $\begin{cases} 6x + 3y = 21 \\ 5x + 7y = 26 \end{cases}$

4- $\begin{cases} 9x - 2y = -3 \\ 4x + 3y = 57 \end{cases}$

2- په تعویضي طریقه د دوه مجهوله معادلو حل:

د یوې معادلې څخه د یو مجهول قیمت د بل له جنسه پیدا کوو او په بله معادله کې یې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سیستم په یو مجهوله معادله بدلېږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دا قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

مثال:

$$\begin{cases} 3x - 11y = 10 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}$$

$$x = \frac{11y + 10}{3}$$

$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$

$$44y + 40 + 6y = 90$$

$$50y = 50$$

$$y = 1$$

$$3x - 11y = 10$$

$$3x - 11 \times 1 = 10$$

$$3x - 11 = 10$$

$$3x = 10 + 11$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين:

لاندې سيستمونه په تعويضي طريقه حل کړئ؟

-1
$$\begin{aligned}3x + 13y &= 25\\ 2x + 2y &= 10\end{aligned}$$

-2
$$\begin{aligned}6x - 5y &= 20\\ 7x + 3y &= 41\end{aligned}$$

-3
$$\begin{aligned}11x + 5y &= 53\\ 8x - 9y &= -12\end{aligned}$$

-4
$$\begin{aligned}x - 2y &= 1\\ 2x + y &= 12\end{aligned}$$

3- د مساوات په طريقه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دواړو معادلو څخه د يو مجهول قيمت د بل مجهول له جنسه پيدا کوو او سره مساوي کوو يې د دوه مجهوله معادلو سيستم په اوله درجه يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوو د مجهول قيمت يې پيدا کوو د مجهول دغه قيمت د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال : لاندې سيستم حل کړئ؟

$$\begin{aligned}3x + 7y &= 19\\ 5x - 2y &= 18\end{aligned}$$

$$3x + 7y = 19 \qquad\qquad 5x - 2y = 18$$

$$3x = 19 - 7y \qquad\qquad 5x = 18 + 2y$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \ldots\ldots I \qquad\qquad x = \frac{18 + 2y}{5} \ldots\ldots II$$

څرنګه چې په I او II نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه يې هم مساوي دي نو ليکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad ; \quad x = 4$$

تمرین:

-1 $\begin{array}{l} 4x + 2y = 14 \\ 15x - y = 10 \end{array}$ -2 $\begin{array}{l} 7x - 3y = 5 \\ 8x - 4y = 0 \end{array}$

-3 $\begin{array}{l} 11x + 6y = 40 \\ 2x + 9y = 31 \end{array}$ -4 $\begin{array}{l} 9x - 3y = 21 \\ 8x + 7y = 38 \end{array}$

4-د دیترمینانت په طریقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

دیترمینانت په لغت کې (معین یا ثابت) ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتیب ته د یترمینانت وایي لکه $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

د دیترمینانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل :

د x او y د ضریبو دیترمینانت په D ښیو او قیمت یې پیدا کوو . د x د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په D_x یې ښیو قیمت یې پیدا کوو بیا د D په دیتر مینانت د y د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په D_y یې نیسو او قیمت یې پیدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د x قیمت لاس ته راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د y قیمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{array}{l} 3x - 5y = 2 \\ 5x + y = 22 \end{array}$ د دیترمینانت پواسطه حل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \qquad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \qquad D_y = 56$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{112}{28} = 4 \qquad x = 4$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{56}{28} = 2 \qquad y = 2$$

5- دګراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په ( ) صفحه د تابع په بحث کې وګورئ

6- د متريکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متريکس $(Matrixes)$:

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطيلي ته وايي ترتيب ته متريکس وايي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متريکس په غټو خروفو ښودل کيږي او هغه اعداد يا حروف چې په متريکس کې ليکل کيږي د متريکس د عناصرو په نوم ياديږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول ليکل شوي وي د متريکس د سطر په نوم ياديږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول ليکل شوي وي د متريکس د ستن په نوم ياديږي د سطرونو شمير په i او د ستونونو شمير په j ښيئ چې i او j طبيعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \dots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکس مرتبه:

که د متریکس د سطرونو شمېر m او د ستونو شمېر یې n وي دغه متریکس ته $m \times n$ مرتبه متریکس وایي.

او داسې لیکل کیږي $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$

مثال: لاندې متریکسونه حل کړئ؟

$(a_{ij})_{2\times2} = (i+j)_{2\times2}$ -1 $\qquad$ $(a_{ij})_{3\times2} = (i+j)_{3\times2}$ -2

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = i + j$ $\qquad$ $a_{12} = 1 + 2 = 3$ $\qquad$ $a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

په نتیجه کې لاندې متریکس لاس ته راځي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د متریکس ډولونه:

متریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري متریکس: هغه متریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \quad 5 \quad 9]_{1\times3}$

2- ستوني متریکس: هغه متریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3\times1}$

3- صفري متیریکس: هغه متریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; 0_{3\times2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي متیریکس: هغه متریکس دی چې د سطرونو شمېر یې د ستونو د شمېر سره مساوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

مربعي يا مستطيلي متريکسونه دوه قطرونه لري ، چې يوه ته اصلي قطر يا (Mean diagonal) او بل ته ($Minor\ diagonal$) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{nn} \ldots\ldots\ldots a_{12}$، a_{21} فرعي قطر دی.

لاندې متريکسونه څه ډول متريکسونه دي. 3×1 او 1×4

5- قطري متريکس: هغه متريکس دی چې د اصلي قطر څخه په غير نور عناصر يې صفرونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متريکس: که د قطري متريکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متريکس ته سکالر متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متريکس: که د قطري متريکس داسې قطر عناصر يو (1) وي نو دې متريکس ته واحد متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلثي متريکس: که د يوه متريکس د اصلي قطر لاندې او يا پورته عناصر صفرونه وي دې متريکس ته مثلثي متريککس وايي لکه.

پورتنی مثلثي متريکس په لاندې ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندې مثلثي متريکس دی.

په انګليسي کې ورته *Upper Tringolar matrix* او *Lower Tringolar matrix*
وايي.

متقابل يا متضاد متريکس:

هغه متريکسونه چې عناصر يې يو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m\times n} = A(-a_{ij})_{m\times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د متريکسونو جمع:

د متريکسونو په جمع کې د متريکسو د مرتبې مساوات ضرور دي يعنې که a_{ij} او b_{ij} دوه متريکسونه ولرو کولای شو چې دغه دوول متريکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ متريکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د متريکس تفريق:

په تفريق کې هم د متريکس د تفريقولو لپاره د متريکس د مرتبو مساوات ضرور دی.

که a_{ij} او b_{ij} وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متریکسونه راکړ شويدي $A - B$ متریکس پیدا کړئ؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-2) & -1-(-1) \\ 3-3 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & -1+1 \\ 3-3 & +1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

د متریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د متریکسونو جمع د تبدیلي د قانون پیروي کوي مګر د متریکسونو تفریق د تبدیلي د قانون پیروي نه کوي. لکه

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

2- د متریکسونو جمع او تفریق د تبدیلي د خاصیت پیروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مګر د متریکسونو په تفریق کې ی‌ې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

په متریکسونو کې د سکالر ضرب:

په یوه متریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو یعنې که $A = a_{ij}$ او $K \in IR$ وي نو KA د C سره مساوي دي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي KA پیدا کړئ؟

$$KA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times3 & 2\times6 \\ 2\times2 & 2\times1 & 2\times0 \\ 2\times1 & 2\times0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه متریکسونو ضرب :

د متریکس د ضرب لپاره باید د یوه متریکس د سطرونو شمیر د بل متریکس د ستونو د شمیر سره مساوي وي یعنی که $A = (a_{ij})_{m\times n}$ او $B = (b_{ij})_{n\times p}$ وي کولای شو چې ضرب یې کړو.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

طریقه یې داسې ده چې د یوه متریکس لمړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې یې لیکو او په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د متریکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

حل:

$$A\times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 + 2\times 0 + 1(-1) \\ -1\times 1 + 0\times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+1 \\ -1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$A\times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

$$A\times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2\times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1\times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A\times B = \begin{bmatrix} -6+4 & 8+3 \\ -3-8 & 4-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

د متریکس د ضرب خواص:

1- د متریکس ضرب عمیله د تبدیلی د قانون پیروي نه کوي یعني:

$$A\times B \neq B\times A$$

2- د متریکسونو ضرب د اتحادي خاصیت پیروي کوي

$$(A\times B)C = A(B\times C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د متریکسونو ضرب د توزیعي خاصیت پیروي کوي.

$$A(B + C) = AB + Ac$$

د یوه متریکس ترانسپوز متریکس:

که د یوه متریکس سطر په ستون او ستون یې په سطر بدل شي نوی متریکس ته ترانسپوز متریکس وایي.

که $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وي نو $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متریکس وایي په A^T ښودل کیږي.

که $A = A^T$ وي نو پدې صورت کې A ته متناظر متریکس وایي.

لکه $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ یو متناظر متریکس دی ځکه $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

د ترانسپوز متریکس خواص:

1- ترانسپوز متریکس د خپل لمړني متریکس سره مساوي وي.

$$(A^T)^T = A = \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ij})A$$

2- د دوه یا څو ترانسپوز متریکسو د جمع او تفریق حاصلونه د لمړنیو متریکسو د جمع د حاصلو او تفریق د حاصلو د ترانسپوزو سره مساوي دي.

$$(A \pm B \pm C \pm .\,.....)^T = A^T + B^T + C\,.........$$

3- $(AB)^T = A^T \times B^T$

4- $(\alpha A)^T = \alpha \times A^T$

5- $(-A)^T = -A^T$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیترمینانت

مربعي متریکس ته دیترمینانت وایي.

لکه که $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ متریکس ولرو نو $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ یو دیترمینانت دې او په $|A|$ سره ښودل کیږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطراو $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطر وایي.

د دیترمینانت محاسبه

د اصلي قطر څخه فرعي قطر منفي کوو $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$

مثال: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$ قیمت پیدا کړئ

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 7 \times 4 = 6 - 28 = -22$

د دیترمینانت د حل طریقه

دیترمینانت په دوه طریقو حلیږي.

1- دساروس په طریقه 2- دکرامر په طریقه

1- دساروس د دیترمینانت په طریقه لول

اول ستون او دریم سطر د منځه وړو او پاتې 2× 2 مرتبې دیترمینانت محاسبه کوو او دتقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31}$$

دویم ستون او دریم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې یې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم ستون او دريم سطر د منځه ورو. او دتقاطع په عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ ديترمينانت حل کړئ

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4\big(6 \times 2 - (-3 \times 1)\big) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دويم- د کرامر په طريقه:

د ديترمينانت دوه لمړي ستونونه د ديترمينانت د باندي ليکو د اصلي قطرو د مجموعې څخه د فرعي قطرو مجموعه منفي کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:
$$|B|=\begin{vmatrix}2&6&-3\\5&1&2\\4&-1&7\end{vmatrix}\begin{matrix}2&6\\5&1\\4&-1\end{matrix}$$

$$|B|=\{2\times1\times7+6\times2\times4+(-3)\times5(-1)\}$$
$$-\{6\times5\times7+2\times2(-1)+(-3)\times1\times4\}$$
$$|B|=(14+48+15)-(210-4-12)=77-(210-16)=77-194$$
$$=-117$$
$$|B|=-117$$

د دیترمینانت خواص

1-که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفر وي نو د دیترمینانت د صفر سره مساوي دی.

$$|B|=\begin{vmatrix}0&0&0\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=0 \quad \text{او} \quad |A|=\begin{vmatrix}0&a&d\\0&b&e\\0&c&f\end{vmatrix}=0$$

1- که د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت يې صفر دي

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&c\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=|A|=\begin{vmatrix}a&a&d\\b&b&e\\c&c&f\end{vmatrix}=0$$

2- که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A|=0$

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&c\\\lambda a&\lambda b&\lambda c\\d&e&f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a&b&c\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

3- د A د متریکس دیترمینانت د A^T دمتریکس د دیترمینانت سره مساوي دی.

د 2×2 مرتبي متریکس ضربي معکوس د معکوس متریکس سره د مربعي متریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د متريکس قيمت $|A| = 0$ وي نودی متريکس ته *Singular Matrix* وائي اوکه $|A| \neq 0$ وي نو دی متريکس ته *Non singular Matrix* وايي.

هغه متريکسونه چې معکوس لري .

1- چې متريکسونه مربعي وي يعنی د $A_{n\times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متريکسونه يو د بل معکوس دي .

حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ليدل کيږي چې $AB = BA = 1$ دي نو A او B يو د بل معکوس دي.

الحاقي متريکس Adjoin of Matrix

که د يوه متريکس د اصلي قطر د عناصرو ځايونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغير شي دغه متريکس ته الحاقي متريکس وايي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متريکس د يوه متريکس د معکوس متريکس د لاس ته راوړلو لپاره استعماليږي طريقه يې داسې ده چې دالحاقي متريکس د ديترمينانت دقيمت په معکوس کې ضربوو د راکړشوي متريکس معکوس متريکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}A}{|A|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل:- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ویلای شوچې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

تمرین

د لاندې متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

a: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

b: $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

د متریکس پواسطه ددوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1yc = c_1$$
$$\underline{a_2x + b_2y = c_2}$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دې غواړو چې دمتریکس پواسطه یې حل کړو د x او y د ضریبو متریکس په A ښیو $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په B ښیي. اود x او y متریکس په X ښیو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نو ليکو چې:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B \qquad \text{يا}$$

مثال: لاندې ددوه مجهوله معادلو سیستم د متریکس په طریقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x = 1 \quad \& \quad y = 2$

تمرين

لاندې د دوه مجهوله معادلو سیستمونه د متریکس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د ګوس Goose طریقه د افقاً طریقه ده.

په همدې ترتیب کولای شو چې څلورمجهوله،پنځه مجهوله او نورې څو مجهوله معادلې په مختلفو طریقو حل کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم فصل

دویمه درجه یومجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې یو مجهول ولري او د مجهول توان یې دوه وي. عمومي شکل یې دا دي:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې b, a او c ثابت عددونه دي (x) مجهول دي څرنګه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دویمه درجه یو مجهوله معادله وایي.

خصوصي حالتونه

1- که b=c=0 وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلې دواړه جذرونه صفر دي یعنی :

$$x_1 = 0 \qquad \& \qquad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

(x) مشترک نیسو او معادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بیا هر قوس په نوبت سره دصفر سره مساوي کوو او د معادلې جذرونه پیدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5x^2 + 11x = x(5x + 11) = 0$$

$$cx_1 = 0$$
$$5x + 11 = 0$$
$$5x = -11$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$
$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- كه $b = 0$ وي نو معادله لاندې شكل غوره كوي $ax^2 + c = 0$

د دغسې معادلو د حل كافي او لازمي شرط دادې چې a او c بايد مختلف العلامه وي .اوكه نه نو د حقيقي اعدادو په سيټ كې حل نلري .د مختلطو اعدادو په سيټ كې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل كړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرين

لاندې معادلې حل كړئ؟

1: $5x^2 + 21x = 0$ 2: $11x^2 - 22x = 0$ 3: $2x^2 + 28x = 0$

4: $7x^2 - 63 = 0$ 5: $4x^2 + 16 = 0$ 6: $-7x^2 + 28 = 0$

د دويمه درجه يو مجهوله معادلو د عمومي شكل د حل طريقې

دويمه درجه يو مجهوله معادلې په څلورو طريقو حليږي.

1- د تجزيې پواسطه ددويمه درجه يو مجهوله معادلو حلول

2- د تكميل مربع پواسطه ددويمه درجه يو مجهوله معادلوحلول

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د محمد بن موسی دفارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

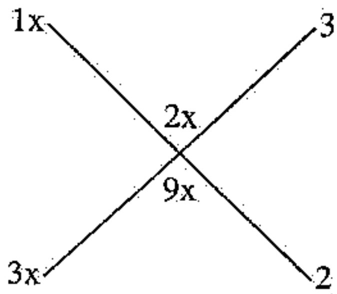
4- دګراف پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزیې پواسطه دیو مجهوله دویمه درجه معادلوحل:

(a) او (c) تجزیه کوو د ضربي عواملو څخه یي داسې یوه یوه جوړه ضربي عوامل راخلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه یي (b) شي بیا دغه ضربي عوامل په چارت کې لیکواو د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پیدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي

مثال:- $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزیې پواسطه حل کړئ.

$$a = 3 = 1.3 = -1(-3)$$
$$c = 6 = 2.3 = 1.6 = -2(-3) = -1(-6)$$
$$b = 11$$



$$(x + 3)(3x + 2) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x_{1=-3}$$
$$3x + 2 = 0$$
$$3x = -2$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکمیل مربع پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راکړشوی ده غواړو چې د تکمیل مربع پواسطه یي حل کړو ټول حدونه د x^2 په ضریب ویشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5x^2}{5}-\frac{17x}{5}+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x=-\frac{6}{5}$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\left(\frac{17}{10}\right)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2-\frac{6}{5}$$

$$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2=\frac{289}{100}-\frac{6}{5}=\frac{289-120}{100}=\frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{17}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x-\frac{17}{10}=\pm\frac{13}{10}$$

$$x=\frac{17}{10}\pm\frac{13}{10}=\frac{17\pm 13}{10}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=\frac{2}{5}=0.4$$

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

لمړي د محمد بن موسی فارمول ثبوتوو.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

داسانتیا لپاره b^2-4ac په Δ ښیو:

$$\Delta=b^2-4ac$$

نو:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

د (Δ) په باب دری حالته موجود دي .

1- چې $\Delta>0$ وي معادله دوه جذرونه لري اوجذرونه يې:

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پيدا کيږي.

2- چې $\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري اوجذر يې د $x=\frac{-b}{2a}$ پواسطه پيدا کيږي.

3- چې $\Delta<0$ وي معادله دحقيقي اعدادو په سيټ کې جذر نه لري.

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$7x^2-13x-24=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times7\times(-24)$$
$$\Delta=169+672=841$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)+\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13+29}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)-\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13-29}{14} = \frac{-16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$x_{1=3} \qquad x_2 = -\frac{8}{7}$$

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4\times 9\times 25 = 900 - 900 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله یوجذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{30}{2\times 9} = -\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2 + 3x + 10 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 2\times 10 = 9 - 80 = -71$$

څرنګه چې $0 > \Delta$ دي نو معادله جذر نه لري.

تمرين

لاندې معادلی د تجزيي پواسطه حل کړئ.

1: $3x^2 + 5x - 42 = 0$ 2: $7x^2 - 29x + 4 = 0$ 3: $2x^2 + 3x - 14 = 0$

لاندې معادلی دتکميل مربع پواسطه حل کړئ.

1: $11x^2 - 17x - 48 = 0$ 2: $13x^2 + 7x - 360 = 0$ 3: $8x^2 - 65x + 102 = 0$

لاندې معادلی د محمد بن موسی د فارمول پواسطه حل کړئ.

1: $2x^2 + 3x - 65 = 0$ 2: $9x^2 - 43x + 48 = 0$

3: $25x^2 - 11x - 192 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمحمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که b جفت وي د b نیمایي په $\acute{b}$ ښیو $\frac{b}{2}=\acute{b}$ او $b=2\acute{b}$ کیږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د b په عوض $(2\acute{b})$ لیکو:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2\acute{b})\pm\sqrt{(2\acute{b})^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm\pm\sqrt{4\acute{b}^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\acute{b}\pm\sqrt{4(\acute{b}^2-ac)}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm2\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}\right)}{2a}$$

$$=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\acute{b}^2-\text{ac}$ په $\acute{\Delta}$ ښیو یعنې:

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac$$

د $\acute{\Delta}$ په باب هم درې حالته موجود دي.

1- که $0<\acute{\Delta}$ وي معادله دوه جذره لري اوجذرونه یې د $x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي.

2- که $0=\acute{\Delta}$ وي معادله یوجذرلري، اوجذر یې د $x=\frac{-\acute{b}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي

3- که $0>\acute{\Delta}$ وي معادله جذرنه لري.

مثال:- $3x^2+14\text{x}-40=0$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-\text{ac}=7^2-3(-40)=49+120=169$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-14\pm13}{3}$$

$$x_1=-\frac{1}{3}\qquad x_2=-9$$

مثال:- $4x^2+12\text{x}+9=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\acute{\Delta} = 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = -\frac{\acute{b}}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad so \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندې معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\acute{\Delta} = -19$$

$$\acute{\Delta} < 0$$

معادله جذر نه لري.

تمرين

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د يو مجهوله دويمه درجه معادلو د جذرو او ضريبو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

دمحمد بن موسی فارمولونه ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2- د $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ ثبوت

د محمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

3: د $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$ ثبوت

$$x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 = (x_1 + x)^2$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

4: د $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$ ثبوت

$$x_1{}^3 + 3x_1{}^2x_2 + 3x_1x_2{}^2 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1{}^2x_2 - 3x_1x_2{}^2$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{3abc}{a^3}$$

5: د $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$ ثبوت

$$x_1{}^4 + 2x_1{}^2x_2{}^2 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2x_1{}^2x_2{}^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2(x_1 x_2)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

مثال: د لاندې معادلې د جذرونو مجموعه،د جذرونو د ضرب حاصل، دجذرو د مربعګانو مجموعه پیدا کړئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} == \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول

كه د يوې معادلې جذرونه راكړ شوي وي او وغواړو چې معادله يې پيدا كړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول كې وضع كوو د راكړشوو جذرو مربوطه معادله لاس ته راځي . د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي:-

1: $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$

2: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

د $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$ ثبوت

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

مثال:- د يوې معادلې جذرونه په ترتيب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله يې پيدا كړئ

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$x^2-(5-7)x+(5)(-7)=0$$
$$x^2-(-2)x-35=0$$
$$x^2+2x-35=0$$

تمرين

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1=3$ & $x_2=\frac{3}{5}$ 2: $x_1=\frac{7}{3}$ & $x_2=5$

3: $x_1=\sqrt{3}$ & $x_2=2$

د دويمه درجه يومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول

دجذرو علامی په يوه جدول مطالعه کوو

که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S>0$ وي دواړه جذرونه مثبت دي
که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P>0$ وي جذرونه هم علامه دي	که $S<0$ وي دواړه جذرونه منفي دي
که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $S>0$ وي لوی جذر مثبت دي
که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري	که $P<0$ وي جذرونه مختلف العلامه دي	که $S<0$ وي لوی جذر منفي دي
$\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري		که $S>0$ وي لوی جذر مثبت دي
$\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري		که $S<0$ وي لوی جذر منفي دي
$\Delta<0$ وي	معادله جذر نه لري	

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ دجذروعلامې مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$0 < \Delta$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف العلامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذر یي منفي دی.

د دیکارت قاعده

دیکارت ددویمه درجه معادلو د علامو تغیر ته تحول وایي.

دیکارت وایي:

1- که دویمه درجه معادلو دعلامو دوه تحوله لرل دمعادلی دواړه جذرونه مثبت دي

2- که د علامو تحول یو ؤ د معادلی یو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه ؤ نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه یي منفي دي.

لکه:

$5x^2 - 17x + 6 = 0$ دواړه جذرونه یي مثبت دي.

$3x^2 + 7x - 26 = 0$ یو جذر یي مثبت دي.

$x^2 + 169x + 4 = 0$ دواړه جذرونه یي منفي دي.

دهغه معادلو حلول چې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي:

شپږ قسمه معادلې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- دريمه درجه معادلې:

هغه دريمه درجه معادلې چې د $ax^3 + bx^2 + cx = 0$ شکل ولري.دداسې معادلود حل لپاره x مشترک نيسو.اومعادله د دوه فکتورو په حاصل ضرب بدلوو.هر فکتورد صفر سره مساوي کوودمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال:- $5x^3 + 3x^2 - 14x = 0$

$$x(5x^2 + 3x - 14) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$5x^2 + 3x - 14 = 0$$

$$\Delta= b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-14) = 9 + 280 = 289$$

$$\Delta= 289$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{289}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 17}{10}$$

$$x_2 = \frac{7}{5} \qquad x_3 = -2$$

2- څلورمه درجه معادلې:

هغه څلورمه درجه معادلې چې $ax^4 + bx^2 + c = 0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي.طريقه يې داسې ده چې x^2 په y شيوڅلورمه درجه معادله په دويمه درجه معادله بدليږي.دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دويمه درجه معادلې دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه يې مثبت او دوه يې منفي وي.

2- که د دويمه درجه معادلې يو جذر مثبت ؤ نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې يو يې مثبت اوبل يې منفي وي.

3- که دويمه درجه معادلې مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دويمه درجه معادلې جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال:- لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4 - 7x^2 - 20 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : x^2 په y ښیو نو $x^4 = y^2$ کیږي

$$3y^2 - 7y - 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$\Delta > 0$$

معادله دوه جذره لري یوجذر یې مثبت او بل یې منفي دې نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x^2 = y = y_1 = 4$$

$$x^2 = 4 \qquad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ

1- $4x^2 + 3x - 45 = 0$ 2- $7x^2 - 11x - 6 = 0$

3- $5x^2 + 13x + 6 = 0$ 4- $13x^2 + x - 14 = 0$

5- $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ 6- $7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$

3- جذري معادلې :

هغه جذري معادلې چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادلو بدلیدلای شي طریقه یې داسې ده چې $\sqrt{x}$ په y ښیو بیا دواړه خواوې مربع کوو چې $x = y^2$ کیږي او دویمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال :- $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دویمه درجه معادله بدله کړئ او حل یې کړئ؟

حل: $y = \sqrt{x}$ ښیو نو $x = y^2$ کیږي د (x) په عوض (y^2) او د $(\sqrt{x})$ په عوض (y) وضع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$
$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac$$
$$\acute{\Delta} = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$
$$\acute{\Delta} = 100$$
$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$
$$x_1 = 2 \qquad \& \qquad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلې چې توانونه يې کسري وي او د يو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي. لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په (y) ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو نو $\left(x^{\frac{2}{3}} = y^2\right)$ کيږي.

$$5y^2 + 3y - 26 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$$
$$\Delta = 529$$
$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$
$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \therefore \ y_1 = 2$$
$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \qquad \therefore \ y_2 = -2\frac{3}{5}$$
$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \qquad x^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$
$$x_1 = 8$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ.

1- $x^{\frac{2}{5}} + 3x^{\frac{1}{5}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵- هغه معادلې چې توانونه یې کسري وي:

هغه معادلې چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي.

$x^{\frac{m}{2n}}$ په y او $x^{\frac{m}{n}}$ په y^2 بنیو پورتنی معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$

دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول یا په کومه بله طریقه حلوو قیمتونه یې پیداکوو د y

د قیمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قیمت پیداکوو دمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال :- د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلې جذرونه پیدا کړئ؟

$x^{\frac{1}{3}} = y$ بنیو نو $x^{\frac{2}{3}} = y^2$ کیږي.

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$
$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$
$$\Delta = 289$$
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$
$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -\frac{11}{2}$$
$$\because\ x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \qquad \therefore\ x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \qquad \&\ x_1 = 27$$
$$\because\ x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \qquad \therefore\ x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2},$$
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$
$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرین :

لاندې معادلې دویمه درجه معادلو ته واړوئ؟

1: $5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0$ 2: $4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1: د (A)او (B) ددوه ښارو تر منځ فاصله (450) کېلومتره ده يو موټر سهار په اوه بجې په يوسرعت د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجې د $(x + 15)$ کېلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په يو وخت کې د (B)ښار ته ورسيدل د هر يوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x} - \frac{450}{x+15} = 1$$

$$\frac{450(x+15) - 450x}{x(x+15)} = 1$$

$$\frac{450x + 6750 - 450x}{x(x+15)} = 1$$

$$\frac{6750}{x(x+15)} = \frac{1}{1}$$

$$x^2 + 15x = 6750$$

$$x^2 + 15x - 6750 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (15)^2 - 4 \times 1 \times (-6750) = 225 + 27000 = 27225$$

$$\Delta = 27225$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-15 \pm \sqrt{27225}}{2 \times 1} = \frac{-15 \pm 165}{2}$$

$$x_1 = \frac{-15 + 165}{2} = \frac{150}{2} = 75$$

$$x_2 = \frac{-15 - 165}{2} = \frac{-180}{2} = -90$$

2- د يوه قايم الزاويه مثلث ضلعې په ترتيب سره $(x + 1)$ ، $(x + 2)$ او $(x + 3)$ دي دمثلث ضلعې پيدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2 \qquad \& \qquad x_2 = -2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳- د دوه مثلثو قاعدی مساوي دي د يوه ارتفاع د قاعدی څخه يو متر او د بل ارتفاع دقاعدی څخه دری متره زياته ده او د مساحتو تفاضل يي اوه مترمربع دی ذهر يوه مساحته قاعده او ارتفاع پيدا کړئ

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2}-\frac{x(x+1)}{2}=7$$
$$\frac{x^2+3x-x^2-x}{2}=7 \Rightarrow \frac{2x}{2}=7 \Rightarrow x=7$$

قاعده $x=7$

ارتفاع د کوچني مثلث $x+1=8$

ارتفاع د لوی مثلث $x+3=10$

۴- د يوه عدد د طرفينو د ضرب حاصل (323) عدد پيدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1)=323$$
$$x^2-1=323$$
$$x^2=323+1=324$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{324}$$
$$x=18$$

۵- ديوه مستطيل اوږدوالی تر سور دری متره زيات دی که مساحت يي (88) سانتي مترمربع وي سور او اوږدوالی يي پيدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3)=88$$

$$x^2+3x-88=0$$

$$\Delta=x^2-4ac=3^2-4\times1\times(-88)=$$
$$9+352=361$$

$$\Delta=361$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-3\pm\frac{\sqrt{361}}{2\times1}=\frac{-3\pm19}{2}\Rightarrow x_1=8\Rightarrow x_2=-11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- يو سړی د (A) د ښار څخه د (B) ښار ته په يوه سرعت روان شوبله ورځ يي په خپل سرعت کی دوه متره زيادت راوست نيم ساعت مخکی ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کېلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20(x+2)-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20x+40-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{40}{x^2+2x}=\frac{1}{2}$$
$$x^2+2x=80$$
$$x^2+2x-80=0$$
$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=1^2-1(-80)=1+80=81$$
$$\acute{\Delta}=81$$
$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{1}=-1\pm 9=8$$

$x=8$ اولنی سرعت

$x+2=10$ اخرنی سرعت

7- د يوې دايرې مساحت (154) سانتي مترمربع دې شعاع يې څو ده؟

حل:

$$\pi r^2=154$$
$$\frac{22}{7}r^2=154$$
$$\frac{7}{22}\times\frac{22}{7}r^2=154\times\frac{7}{22}$$
$$r^2=49$$
$$\sqrt{r^2}=\sqrt{49}$$
$$r=7$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

عبارتي سوالونه

1- د يوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدې څخه $(3cm)$ زياته ده مساحت يې $27cm^2$ دې قاعده او ارتفاع يې پيدا کړئ؟

2- د يوه مستطيل طول د هغه د سور څخه $(5cm)$ زيات دی مساحت يې $(24cm^2)$ دی سور او طول يې پيدا کړئ؟

3- دیوې دايرې مساحت (616) سانتي مترمربع ده شعاع يې څو ده؟

4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله $800m$ ده يو موټروان په يوه سرعت سره دا فاصله طی کوي دبېرته راتګ په وخت کی $5m$ په خپل سرعت کی تغير راولي يو ساعت مخکی را رسيږي دتګ او راتګ سرعت يې پيدا کړئ؟

5- احمد د محمود څخه يوه روپۍ زياته لري که د پيسو د ضرب حاصل يې (840) وي دهر يوه روپۍ پيدا کړئ؟

6- يو سړی په خپله ځمکه باندی دېوال تاووي د دېوال سور نيم متر دي که د دېوال تر تاوولو وروسته يې ځمکه $(29cm^2)$ کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکی مساحت څو وي؟

7- د يوې دايرې مساحت د هغې تر محيط (5) واره زيات دې ضلعه يې پيدا کړئ؟

8- د يوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $\left(\frac{82}{9}\right)$ ده عدد پيدا کړئ؟

9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟

10- د دوه مثلثو قاعدی مساوي دي ديوه ارتفاع دقاعدی څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدی څخه د دوه واحدو په اندازه زياته ده که مساحتونه يې جمع شي $(76cm^2)$ کيږي د مثلثو قاعدی او ارتفاعګانی پيدا کړئ؟

11- احمد دمحمود دری چنده کار کوي که دواړه په شريکه يو کار په (3) ورځو کی وکړي وواي
است چه هر يو به دا کار په څو ورځو کی وکړي؟

12- که د يوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کيږي عدد پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

13- که د یوه سړي اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ یې کټلي وي وواياست چه څو ورځې کار يې کړئ دئ؟

14- د یوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پیدا کړئ؟

15- د احمد او محمود د پیسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل یې (609) ده د هر یوه پیسې څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زیاتې او د محمود روپۍ (5)کمې شي د یوې ورځې د اجورې د ضرب حاصل یې (2475) روپۍ کیږي د هر یوه اجوره څو ده ؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لګیا دي احمد خپل کار تر محمود درې ورځې د مخه خلاصوي که په شریکه یې په دوه ورځو کې وکړي وواياست چه هر یو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

18- د مربع مساحت ($125316cm^2$)دی ضلعه یې پیدا کړئ؟

19- د یوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زیاته ده که مساحت یې ($675cm^2$) وي قاعده او ارتفاع به يې څو وي؟

20- یو موټر سهار په اته بجې حرکت کوي بل موټر یوساعت وروسته (10)کیلو متر سرعت په زیادت وریسې روان شوکه دواړه په یوه وخت کې مطلوب ته رسیږي که وهل شوې فاصله (900) کیلو متره وي د هریوه سرعت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم فصل

غیرمساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو نه برابري ته غیرمساوات وايي.

د غیر مساوات علامه دا (>) یا دا (<) ده هره افاده چې د دې علامې مخې ته لیکل شوې وي لویه ده تر هغه افادې چې د علامې شاته لیکل شوې وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

یا لکه $18 < 45$ او داسې نور.

د غیرمساوات خواص:

1- که د غیرمساوات د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$11 < 19$$
$$11 + 8 < 19 + 8$$
$$19 < 27$$

2- که د غیرمساوات د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$13 > 9$$
$$13 - 10 > 9 - 10$$
$$3 > -1$$

3- که دغیرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد کې ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$12 > 4$$
$$+2(12) > +2(4)$$
$$24 > 8$$

4- که د غیرمساوات دواړه خواوي په منفي عدد کې ضرب شي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$15 < 21$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15(-2) > 21(-2)$$
$$-30 > -42$$

5- که د غیرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$
$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$
$$3 < 5$$

که د غیرمساوات دواړه خواوې په منفي عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$
$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$
$$-15 < -12$$

7- که د غیرمساوات دواړه خواوې معکوس شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیرمساوات دواړه خواوې د طاق عدد په توان رفع شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$
$$(2)^3 > (-9)^3$$
$$8 > -729$$

9- که د غیرمساوات دواړه خواوې د جفت عدد په توان رفع شي دلته دری حالتونه موجود دي.

الف: که د غیرمساوات دواړه خواوې مثبت وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$
$$5^2 > 3^2$$
$$25 > 9$$

ب: که د غیرمساوات دواړه خواوې منفي وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-2 > -5$$
$$(-2)^2 < (-5)^2$$
$$4 < 25$$

ج: که د غیرمساوات د یوی خوا عدد مثبت او د بلی خوا عدد منفي وي دلته دري حالته موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$7 > -5$$
$$(7)^2 > (-5)^2$$
$$49 > 25$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$4 > -7$$
$$(4)^2 < (-7)^2$$
$$16 < 49$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غیرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$6 > -6$$
$$(6)^2 = (-6)^2$$

دغیر مساوات دحل سیټ:

د حقیقي اعدادو هغه سیټ چې په راکړشوی غیر مساوات کی صدق کوي د غیر مساوات د حل سیټ بلل کیږي.

دغیرمساوات اقسام

په دی کتاب کی موږ دري قسمه غیر مساواتونه مطالعه کوو.

1- یومجهوله اوله درجه غیر مساوات

2- دوه مجهوله اوله درجه غیرمساوات

3- یومجهوله دویمه درجه غیرمساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- يومجهوله اوله درجه غير مساوات:

هغه غيرمساوات دي چې مجهول يي يو او د مجهول درجه يي يوه وي عمومي شکل يي دا $ax + b \geq 0$. يا دا $ax + b \leq 0$ دی.

ديومجهوله غيرمساوات د حل طريقه:

معلوم دغيرمساوات ښی خواته او مجهول د غيرمساوات چپې خواته ورولازمي عمليي پری اجراء کوو په اخر کی د غيرمساوات دواړه خواوی د x په ضريب ويشو د غيرمساوات دحل سيټ لاس ته راځي.

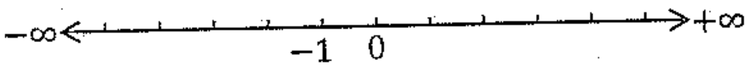
مثال: لاندي غيرمساوات حل کړئ.

$$3(4x + 11) - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$12x + 33 - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$10x + 39 \leq 15x + 44$$
$$10x - 15x \leq 44 - 39$$
$$-5x \leq 5$$
$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{5}{-5}$$
$$x \geq -1$$

د حل سيټ يي عبارت دی له:

$$A = \{x/-1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددو په کرښه داسې ښودل کيږي.



تمرين:

لاندي غيرمساواتونه حل کړئ.

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مطلقه قيمت:

د يوه الجبري عدد حسابي برخى ته دهغه الجبري عدد مطلقه قيمت وايي.د مطلقه قيمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقه قيمت يي مطلوب وي د عمود خطونو تر منځ ليكل كيږي. لكه $|-15|$ يا $|+15|$ چې دغه دواړه د مطلقه قيمت معنى وركوي او داسې ليكل كيږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غيرمساوات حل كړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: يو وار افاده د راكړشوي عدد څخه لويه او بيا يي دعدد د متناظرڅخه كوچنى فرضوو.

$3x - 11 > 19$

$3x > 19 + 11$

$3x > 30$

$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$

$x > 10$

$A = \{x/x > 10\}$

$3x - 11 < -19 \Rightarrow 3x < -19 + 11 \Rightarrow 3x < -8$

$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$

$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$

$C = A \cup B \left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$

دبينوم داشارى څېړل

د بينوم عمومي شكل$(ax + b)$ دې د بينوم داشارى د څېړلو لپاره (a) مشترك نيسو د قوس د باندى يي ليكو د بينوم هر حد په دى مشترك وېشو او د قوس په داخل كى يي ليكو.دقوس جذر پيدا كوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

دلته د (a) په باب دوه حالتونه موجود دي.

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$-$	0	$+$

دبینوم اشاره د جذر څخه کښته منفي اوپورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$x + \frac{b}{a}$	$-$	0	$+$
$a\left(x + \frac{b}{a}\right)$	$+$	0	$-$

د بینوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $(3x-6)$ اشاره وټاکئ؟

حل: $3x-6=0 \Rightarrow 3(x-2) \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	0	$+$
$3(x-2)$	$-$	0	$+$

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x+15$ اشاره وټاکئ ؟

حل:

$$-5x+15=-5(x-3)$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	0	$+$
$-5(x-3)$	$+$	0	$-$

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونو اشارې وټاکئ؟

1- $2x-12$ 2- $3-x$ 3- $-4x+12$

4- $4x-20$ 5- $-6x-18$

د هغه افادو د اشارو ټاکل چې د څو بینومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پیدا کوو او ضربوو یې د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي

مثال: $(4-x)(x+4)$ اشاره وټاکئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$4 - x = 0 \quad \Rightarrow -x = -4 \quad \Rightarrow x = 4$
$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$	-4		$+4$	$+\infty$
$4 - x$	+		+	0	−
$x + 4$	−	0	+		+
$(4 - x)(x + 4)$	−	0	+	0	−

دجذرو منځ کې د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کې منفي ده.

تمرين:

د لاندې بېنومونه د حاصل ضرب په شکل راکړشوي دي اشاره يې وڅېړئ؟

1- $(2x - 12)(3 - x)$
2- $(3 - x)(x + 7)$
3- $(-4x + 12)(x + 8)$
3- $(-6x - 18)(x + 5)$

دکسري افادو د اشارو څېړل:

د صورت او مخرج اشارې پيدا کوو او يو پر بل يې ويشو د کسر اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅېړئ؟

$x + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = -4$
$2x - 6 = 0$
$2x = 6 \quad \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \quad \Rightarrow x = 3$

x	$-\infty$	-4		3	$+\infty$
$x + 4$	−	0	+		+
$2x - 6$	−		−	0	+
$\frac{x+4}{2x-6}$	+	0	−	0	+

دجذرو منځ کې د کسر اشاره منفي او په خارج کې مثبت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین:

د لاندې کسرو اشارې وخیرئ:

1: $\dfrac{2x+6}{x-1}$ 2: $\dfrac{3x+4}{2-x}$

3: $\dfrac{x+2}{12x-18}$ 4: $\dfrac{-x-1}{1-2x}+3$

دهغه غیرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بینومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بینومو اشارې پیدا کوو او سره ضربوو یې دحاصل ضرب اشارې لاس ته راځي.دغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو هره اشاره چې دغیرمساوات دعلامې سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دې

مثال:

$$(x+3)(x-4)>0$$
$$x+3=0\Rightarrow x=-3$$
$$x-4=0\Rightarrow x=4$$

x	$-\infty$	-3		4	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x+3)(x-4)>0$	د حل سیټ		د حل سیټ نه دی		د حل سیټ

تمرین :

د لاندې غیرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ

1: $(x-8)(2-x)<0$ 2: $(3x-6)(12-x)>0$

3: $(x-1)(1-x)\leq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دهغه غیرمساوات دحل د سیټ پیدا کول چې د کسر په شکل وي:

دصورت او مخرج اشارې پیدا کوو دصورت اشاره د مخرج په اشاره ویشود کسر اشارې لاس ته راځي. دغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو د غیر مساوات د حل سیټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2}+1<0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2}<0$$

$$\frac{2x+2}{x-2}<0$$

$$2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$2x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\frac{2x+2}{x-2}<0$	د حل سیټ نه دی		د حل سیټ		د حل سیټ نه دی

تمرین:

د لاندې کسري غیرمساواتو دحل سیټ پیدا کړئ.

1: $\frac{2x+1}{x-1}+2>0$ 2: $\frac{4x+7}{2x-3}-1<0$

3: $\frac{x-6}{x+2}-2\geq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیو مجهوله غیرمساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیرمساواتو ته د یو مجهوله غیرمساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیټ پیدا کوو هغه سیټ چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د سیستم د حل سیټ دی.

مثال: د لاندي غیرمساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$
$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow 3x = 6 \quad \Rightarrow x = 2$

$5x + 20 = 0 \quad \Rightarrow 5x = -20 \quad \Rightarrow x = -4$

x	$-\infty$	-4		2	$+\infty$
$3x - 6 < 0$	$-$		$-$	0	$+$
$5x + 20 < 0$	$-$	0	$+$		$+$
	د حل سیټ				

تمرین:

په لاندي ډول دیو مجهوله غیرمساوات سیستمونه راکړ شویدي حل یې کړئ.

1- $7x - 11 > 0$ & $4x + 13 > 0$

2- 2: $13x + 2 > 0$ & $5x - 8 < 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مجهوله غیرمساوات

هغه غیرمساوات دی چې مجهولونه یې دوه او د هر مجهول درجه یې یوه وي عمومي شکل یې دا $ax + by \geq c$ یا دا $ax + by \leq c$ دې

د دغه رنګه غیرمساوات دحل د سیټ د لاس ته راوړلو لپاره دغیرمساوات ګراف رسموو ګراف مستوي په دوه برخو ویشي یوه برخه یې په غیرمساوات کې صدق کوي او بله برخه یې نه کوي دغه برخه یې کرښې،کرښې کوو بله برخه یې دغیر مساوات د حل سیټ دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غیرمساوات حل کړئ.

حل : غیرمساوات په مساوات بدلوو اوګراف یې رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

1- $x = 0$ نو:

$$2y = 6 \quad \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

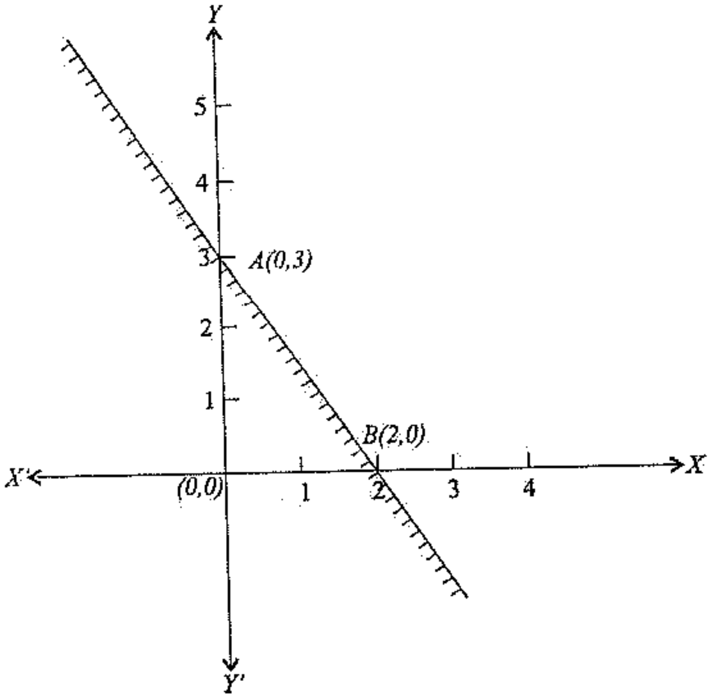
$$A(0,3)$$

2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مجهوله غیرمساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کې دوه غیرمساواتوته د غیرمساوات سیستم وایي.

لکه: $2x - 3y > 6$ او $3x + 5y < 15$

دغه دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وایي.

ددوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه:

غیرمساواتونه په مساواتو بدلوو اود هر مساوات گرېنه یعنی گراف رسموو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یې په مربوطه غیرمساوات کې صدق کوي.دهر غیرمساوات د حل سیټ پیدا کوو. څرنگه چې د غیرمساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یې په دواړو غیرمساواتو کې صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیټ دي.

-1

$$3x + 5y < 15 \qquad \Longrightarrow 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضوو نو:

$$5y = 15 \qquad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \qquad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \qquad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

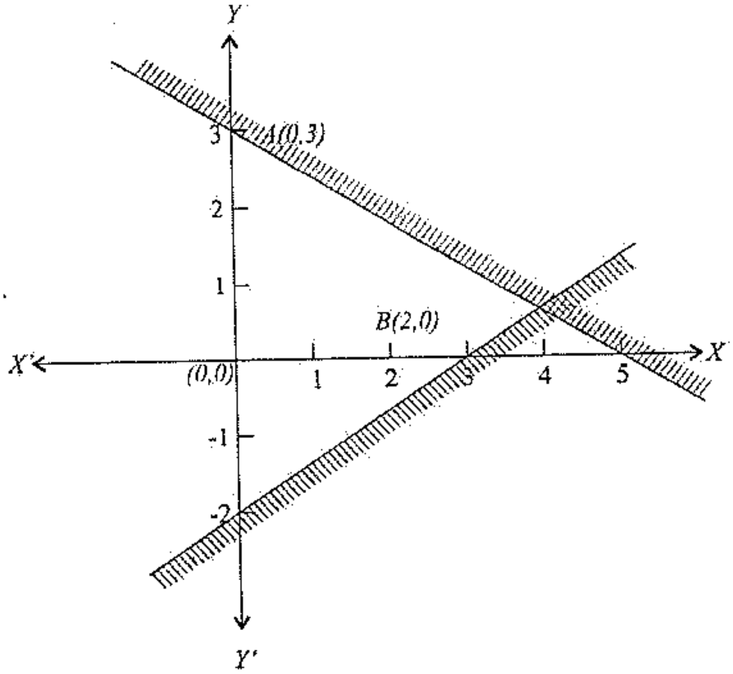
$$C(0,-2)$$

$$y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$



که درې دوه مجهوله غیرمساواتونه راکړ شوي وي د ګراف د ترسیم په وخت کې مثلث لاس ته راځي د څلور غیرمساواتونوڅخه څلور ضلعي په همدې ترتیب د دوه مجهوله غیرمساواتونو شمیر دمضلعګانو دضلعو شمیر رابښيږ.

یو مجهوله دویمه درجه غیرمساوات

هغه غیرمساوات دي چې مجهول یي یو او د مجهول درجه یي دوه وي عمومي شکل یي دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ یا دا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غیرمساوات د حل څخه مطلب د هغه سیټ پیدا کول دي چې په غیرمساوات کې وضع شي اوپه غیرمساوات کې صدق وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددویمه درجه غیرمساوات دحل طریقه

که د غیرمساوات دواړو خواو ته حدونه موجود وي ټول د غیر مساوات چپې خواته وړو لاژمي عملیي پرې اجراء کوو اود ترینوم شکل ته یي راړوو اوتجزیه کوویي. د هر قوس جذر پیدا کوو د حل سیټ یې په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د جدول په طریقه   2- د سیټ بلډر په طریقه

1- د جدول په طریقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپې خواته او لوی جذر ښی خواته لیکوکه د (a)علامه مثبت وه د جذر څخه کښته دقوس علامه منفي اوپورته مثبت ده اوکه د(a) علامه منفي وه نو د جذرڅخه کښته د قوسعلامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دویمه درجه غیرمساوات د حل سیټ پیدا کړئ.

$$3x^2+13x-38<0$$
$$3x^2-6x+19x-38<0$$
$$3x(x-2)+19(x-2)<0$$
$$(x-2)(3x+19)<0$$
$$x-2=0 \quad \Rightarrow x=2$$
$$3x+19=0 \quad \Rightarrow 3x=-19 \quad \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{-19}{3} \Rightarrow x=-\frac{19}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{19}{3}$		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$3x+19$	$-$	0	$+$		$+$
$(x-2)(3x+19)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$(x-2)(3x+19)<0$	د حل سیټ نه دی		د حل سیټ		د حل سیټ نه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

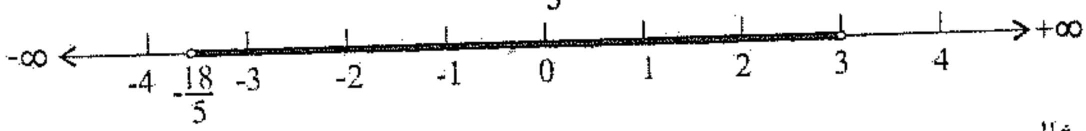
2- د سيټ بلډر په طريقه د دويمه درجه غېرمساوات حلول:

تر تجزيه کولو وروسته د غېرمساوات علامې ته ګورو که د غېرمساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي يو وار دواړه مثبت او بل وار دواړه منفي فرضوو. او که د غېرمساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف العلامه دي په نوبت سره يو مثبت او بل منفي فرضوو.

مثال: $5x^2 + 3x - 54 < 0$

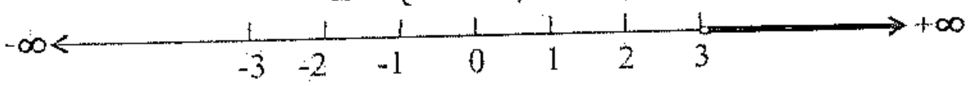
حل:

$$5x^2 - 15x + 18x - 54 < 0$$
$$5x(x-3) + 18(x-3) < 0$$
$$(x-3)(5x+18) < 0$$
$$x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3$$
$$5x + 18 > 0 \Longrightarrow 5x > -18 \Rightarrow \frac{5x}{5} > \frac{-18}{5} \Rightarrow x > -\frac{18}{5}$$
$$A = \{x \,/\, -\frac{18}{5} < x < 3\}$$



مثال:

$$3x^2 - 13x + 12 > 0$$
$$3x^2 - 9x - 4x + 12 > 0$$
$$3x(x-3) - 4(x-3) > 0$$
$$(x-3)(3x-4) > 0$$
$$x - 3 > 0 \qquad \Longrightarrow x > 3$$
$$3x - 4 > 0 \qquad \Longrightarrow 3x > 4$$
$$\frac{3x}{3} > \frac{4}{3} \qquad \Longrightarrow x > \frac{4}{3}$$
$$A = \{x \in I\mathcal{R} \,/\, x > 3\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین

لاندې دویمه درجه غیرمساواتونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$
2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$
3. $\frac{3x+1}{x+2} \leq 2x + 3$
4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$
5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$
6. $\frac{x+1}{x} > 2$
7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$
8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$
9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$
10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$
11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$
12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$
13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$
14. $7x^2 + 3x \geq 0$
15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم فصل

پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غیرمشخص مقدار ته وایي

اوپه اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول څخه په غیر یو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر اودغې معادلی ته پارامتریک معادله وایي. لکه:

$$(m+3)x^2+3(m-3)x-19m-6=0$$

د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلیږي.

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول

2- د پرامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولوپه هره طریقه حلیدله حلوو یې.

مګر ښه او اسانه طریقه یې د محمدبن موسی فارمول دی.

مثال: لاندې پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2+mx-(6m^2+10m+4)=0$$

حل:

$\Delta= b^2-4ac$

$\Delta= m^2-4\{-(6m^2+10m+4)$

$\Delta= m^2+24m^2+40m+16$

$\Delta= 25m^2+40m+16$

$\Delta= (5m+4)^2$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{(5m+4)^2}}{2\times1}=\frac{-m\pm(5m+4)}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-m+5m+4}{2} = \frac{4m+4}{2} = \frac{4(m+1)}{2} = 2(m+1) = 2m+2$$

$$x_1 = 2m+2$$

$$x_2 = \frac{-m-5m-4}{2} = \frac{-6m-4}{2} = \frac{2(-3m-2)}{2} = -3m-2$$

$$x_2 = -3m-2 = -(3m+2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د m له جنسه پیدا کړئ؟

$$1: (2m+1)x^2 + 2mx - (4m+1) = 0$$

2: $(m+4)x^2 + 6mx - (7m+4) = 0$

3: $(2m+4)x^2 + 4mx - (2m+4) = 0$

4: $x^2 + (2m+5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$

5: $x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$

2- د پارامتر د قیمت له مخې د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخې د پارامتر قیمت پیدا کوو اوپه معادله کې یې وضع کوو یو مجهوله دویمه درجه معادله لاس ته راځي. دغه معادله حلوو دمعادلې د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m-1)x^2 + (2m+1)x - 5m = 0$ په معادله کې د جذرو مجموعه $\left(-\frac{7}{2}\right)$ ده په معادله د (m) کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m+1}{m-1}$$

$$-\frac{2m+1}{m-1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \;\; \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \;\; \Rightarrow m = 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(m-1)x^2+(2m+1)x-5m=0$$
$$(3-1)x^2+(2\times 3+1)x-5\times 3=0$$
$$2x^2+7x-15=0$$
$$\Delta= b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-15)$$
$$\Delta= 49+120=169$$
$$\Delta= 169$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 13}{4}$$
$$x_1=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$ معادلی دجذرو دضرب حاصل (-15) معادله حل کړئ؟

حل:

$$x_1x_2=-15$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-15$$
$$\frac{c}{a}=\frac{-4m-3}{m-2}=-15 \;\Rightarrow -15m+30=-4m-3$$
$$-15m+4m=-3-30$$
$$-11m=-33$$
$$\frac{-11m}{-11}=\frac{-33}{-11}$$
$$m=3$$
$$(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$$
$$(3-2)x^2-(3-1)x-4\times 3-3=0$$
$$x^2-2x-15=0$$
$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2-ac=(-1)^2-1(-15)=1+15=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{\Delta}=16$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{16}}{1}=\frac{1\pm 4}{1}$$

$$x_1=\frac{1+4}{1}=\frac{5}{1}=5 \qquad \Rightarrow x_1=5$$

$$x_2=\frac{1-4}{1}=\frac{-3}{1}=-3 \qquad \Rightarrow x_2=-3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2-3mx+9m-1=0$ په معادله کې $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{12}{35}$ رابطه کې معادله حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=\frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}}=\frac{-b}{+c}=\frac{-(-3m)}{9m-1}=\frac{+3m}{9m-1}=\frac{12}{35}$$

$$108m-12=105m$$

$$108m-105m=12$$

$$3m=12$$

$$\frac{3m}{3}=\frac{12}{3} \quad \Rightarrow m=4$$

$$(m-3)x^2-3mx+9n-1=0$$

$$(4-3)x^2-3\times 4x+9\times 4-1=0$$

$$x^2-12x+35=0$$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=(-6)^2-1(35)=36-35=1$$

$$\acute{\Delta}=1$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{1}}{1}=6\pm 1$$

$$x_1=6+1=7 \quad \Rightarrow x_1=7$$

$$x_2=6-1=5 \quad \Rightarrow x_2=5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$ معادلی جذرونه د $(3x_1-1)(3x_2-1)=70$ په رابطه کی صدق کوي د معادلی جذرونه پیدا کړئ؟

حل:

$$(3x_1-1)(3x_2-1)=70$$
$$9x_1x_2-3x_1-3x_2+1=70$$
$$9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1=70$$
$$9\left(\frac{c}{a}\right)-3\left(\frac{-b}{a}\right)=70-1$$
$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right)-3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right)=69$$
$$\frac{45m}{m-1}-\frac{9m+3}{m-1}=69$$
$$\frac{45m-9m-3}{m-1}=69$$
$$\frac{36m-3}{m-1}=\frac{69}{1}$$
$$69m-69=36m-3$$
$$69m-36m=-3+69$$
$$33m=66 \qquad \Rightarrow m=2$$
$$(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$$
$$(2-1)x^2-(3\times2+1)x+5\times2=0$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times10=49-40=9$$
$$\Delta=9$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7\pm\sqrt{9})}{2\times1}=\frac{7\pm3}{2}$$
$$x_1=\frac{10}{2}=5 \ \Rightarrow\ x_1=5$$
$$x_2=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \ \Rightarrow x_2=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- مثال: د $(m-4)x^2-mx-5m+1=0$ په معادله کې د معادلې یو جذر (8) دی د m قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$(m-4)8^2-m\times 8-5m+1$$
$$(m-4)64-8m-5m+1=0$$
$$64m-256-13m+1=0$$
$$51m-255=0$$
$$51m=255 \quad \Rightarrow m=5$$

7- مثال: د m په کوم قیمت باندی $(m-2)x^2-(m-3)x-8m-1=0$ معادله دوه مساوي مختلف العلامه جذرونه لري؟

حل:

$$-\{-(m-3)\}=0$$
$$m-3=0 \quad \Rightarrow m=3$$

7- مثال: د (m) قیمت د $(2m-1)x^2-(2m+1)x+2m-4=0$ څخه داسې پیدا کړئ چه د معادلې یو جذر صفر وي؟

حل: هغه وخت د معادلې یو جذر صفر کیږي چه $c=0$ شي

$$-(2m+1)=0$$
$$2m-4=0 \;\Rightarrow 2m=4 \;\Rightarrow \frac{2m}{2}=\frac{4}{2}=2$$
$$m=2$$

8- مثال: د (m) په کوم قیمت $(2m+1)x^2-(7m+2)x+6m+1=0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چه $\Delta=0$ شي.

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(7m+2)\}^2-4(2m+1)(6m+1)$$
$$\Delta=49m^2+28m+4-48m^2-32m-4$$
$$\Delta=m^2-4m$$
$$\Delta=0 \quad \therefore \quad m^2-4m=0 \Rightarrow m(m-4)=0$$
$$m_1=0$$
$$m-4=0 \quad \Rightarrow m=4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9- مثال: د پە (m)کومو قیمتو باندی $(m-1)x^2-(2m+2)x+2m-5=0$ معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چه $a=c$ شي

$$m-1=2m-5$$
$$m-2m=-5+1$$
$$-m=-4 \quad \Rightarrow m=4$$

10- مثال: د(m) پە کومو قیمتونو باندی $(m+1)x^2-mx-4m=0$ معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه لري؟

حل:- کله چه $p<0$ وي

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4m}{m+1}<0$$
$$(m+1)^2\left(\frac{-4m}{m+1}\right)<0\times(m+1)^2$$
$$-4m(m+1)<0$$
$$-4m<0$$
$$\frac{-4m}{-4}>\frac{0}{-4}$$
$$m>0$$
$$m+1>0 \quad \Rightarrow m>-1$$
$$A=\{m\in IR/m>-1\}$$

11- مثال: د (m) پە کومو قیمتونو باندی $(m-3)x^2-(m-2)x-2m+8=0$ معادله دوه حقیقي جذرونه لري؟

حل:- کله چه $(\Delta>0)$ تر صفر وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-2)\}^2-4(m-3)(-2m+8)$$
$$\Delta=m^2-4m+4+8m^2-32m-24m+96$$
$$\Delta=9m^2-60m+100=(3m-10)^2$$
$$\Delta>0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3m-10)^2>0$$
$$3m-10>0$$
$$3m>10 \quad \Rightarrow m>\frac{10}{3}$$
$$A=\{m\in IR\ /\ m>\frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د (m) په کوم قیمت د $(m-2)x^2-(m-1)x-5m=0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل:- کله چه $(b\ \&\ c)$ دواړه منفي وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-5)\}^2-4(m-2)(-6m)$$
$$\Delta=m^2-10m+25+24m^2-40m$$
$$\Delta=25m^2-50m+25=(5m-5)^2$$

$$\Delta=(5m-5)^2\Rightarrow\Delta=5m-5\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow 5m-5>0\Rightarrow 5m>+5\Rightarrow m>1$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-\{-(m-5)\pm\sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)}=\frac{m-5\pm(5m-5)}{2(m-2)}$$
$$x_1=\frac{m-5+5m-5}{2(m-2)}=\frac{6m-10}{2m-4}$$
$$x_2=\frac{m-5-5m+5}{2m-4}=\frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د (m) قیمت داسې تعین چه معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه ولري.

1: $x^2-5x-3m+1=0$

2: $(2+3)x^2-mx-25m+4=0$

3: $mx^2-2(m+1)x+m+15=0$

4: $mx^2-(2m+1)x+m=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$

6: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د (m) قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه موهومي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم فصل

اکسپوننشل (نمائي) معادلې

اکسپوننشل معادلې هغه معادلې دي چه توان يې مجهول وي عمومي شکل يې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د (1) وي يعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزايده ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

داکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو او معلوم دمساوات ښي خواته وړو.لازمی عمليي پرې اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسی طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدې يې سره مساوي وي.نو توانونه يې هم مساويدې دلته څو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کې توان مونوم يا بينوم وي نو يو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه يې پيدا کوو

1- مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$
$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$
$$2 \times 3^x = 18 \quad \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \quad \Rightarrow 3^x = 9 \quad \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدې يې مساوي دي نو توانونه يې هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$
$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$
$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$
$$3^x\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x\left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Rightarrow 3^x\left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{3}{5}\left\{3^x\left(\frac{5}{3}\right)\right\}=45\times\frac{3}{5}$$
$$3^x=27=3^3$$
$$3^x=3^3$$
$$x=3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کې دوه یا څو حده وي قاعدې یې مساوي اود یوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلې په دویمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلې حلوو اود جذرو له مخې یې د اکسپوننشل معادلې جذرونه پیدا کوو.

مثال:

$$3^{2x}-3^x=702$$
$$(3^x)^2-3^x=702$$

$3^x=y$ وضع کوو.

$$y^2-y-702=0$$
$$(y-27)(y+26)=0$$
$$y_1=27$$
$$x_2=-26$$
$$y_1=3^x=27=3^3$$
$$3^x=3^3$$
$$x=3$$
$$y_2=3^x=-26$$

د اکسپوننشل معادلې دومېن همېشه مثبت وي نود (y_2) د قیمت څخه د معادلې جذرنه پیدا کیږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کې دوه یا څو حدونه موجود وي او توانونه یې جذري حدونه وي .دغه ډول معادلې هم په دویمه درجه یو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}}=4\cdot3^{\sqrt{9x}}-3$$
$$27^{2\sqrt{x}}-4\cdot3^{3\sqrt{x}}+3=0$$
$$27^{2\sqrt{x}}-4\cdot27^{\sqrt{x}}+3=0$$
$$\left(27^{\sqrt{x}}\right)^2-4\cdot27^{\sqrt{x}}+3=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = 27^{\sqrt{x}}$ وضع کوو.

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$
$$(y-1)(y-3) = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$
$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$
$$\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow x = 0$$
$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Longrightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$
$$3\sqrt{x} = 1 \quad \Longrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{9}$$
$$S = \left\{x \in IR / x = 0 \vee x = \frac{1}{9}\right\}$$

4- چه دوه داسې اکسپوننشل معادلې راکړ شویوي چه چپ طرف یې د دوه داسې طاقت لرونکوعددو د ضرب حاصل وي چه قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي دغسې معادلې په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$
$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$
$$2^{x+y} = 2^4$$

$$\begin{array}{c} 2^{x+y} = 2^4 \\ \underline{2^{2x+3y} = 2^{15}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x + y = 4 \\ \underline{2x + 3y = 15} \end{array}$$

$$2(x + y = 4)$$
$$\begin{array}{r} 2x + 2y = 8 \\ \underline{\pm 2x \pm 3y = \pm 15} \\ -y = -7 \end{array}$$
$$y = 7$$
$$x + 7 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = 4 - 7 = -3$$
$$x = -3$$

تمرين

1. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$
2. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$
3. $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$
4. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$
5. $\frac{1-2^x}{2^x} = 1$
6. $4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$
7. $5^{2y} - 5^y - 600 = 0$
8. $\begin{cases} 3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} = 243 \end{cases}$
9. $9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$
10. $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$
11. $\begin{cases} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024 \end{cases}$
12. $\frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$
13. $2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم فصل

لوګاریتمي معادلې Logarithm's Equation:

لوګاریتم په لغت کې د متناسبو عددو شمېرلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د اکسپوننشل معادلو معکوسې معادلې ته لوګارتمي معادله وایي.

فرضاً $(b = a^x)$ یوه اکسپوننشل معادله لرو معکوسه معادله یې لوګاریتمي معادله ده.

چه داسې لیکل کیږي.

$$log_a b = x$$

a ته د $log\ b$ قاعده وایي.

کولای شو چه اکسپوننشل تابع په لوګاریتمي تابع او لوګاریتمي تابع په اکسپوننشل تابع بدله کړو. لکه $(x = 2^3)$ یوه اکسپوننشل تابع ده لوګاریتمي تابع یې عبارت له $(log_2 x = 3)$ څخه ده.

اوهمدا ډول $(log_2 8 = x)$ یوه لوګاریتمي تابع ده اکسپوننشل تابع یې عبارت له $(8 = 2^x)$ څخه ده.

د لوګاریتم خواص:

1- د (1) لوګاریتم د هر مثبت عدد په قاعده باندې صفر (0) کیږي.

$$\begin{pmatrix} log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$$

2- د هر مثبت لوګاریتم په خپله قاعده باندې (1) کیږي. $\begin{pmatrix} log_b b = .1 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ دا ځکه چه $(b = b^1)$ کیږي.

مثال:

$$log_x x = 1 \qquad log_8 8 = 1$$

3- د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په خپله قاعده باندې د توان څخه عبارت دی. $\begin{pmatrix} log_b b^r = r \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ ځکه چه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^r = b^r$$

4- د یوه حاصل ضرب لوګاریتم په یوه قاعده باندی دضربي عواملو د لوګاریتمو د مجموعی سره مساوي دي په همغه قاعده باندی:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N.$$

$$log_a M = x \qquad M = a^X$$

$$log_a N = y \qquad N = a^Y$$

اکسپونشل معادلی طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

دچپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a MN = x + y$$

$$log_a MN = log_a M + log_a N$$

1- مثال: $log_2(2x) =?$ لوګاریتم پیدا کړئ

حل:

$$log_2(2x) = log_2 2 + log_2 x = 1 + log_2 x$$

2- مثال:لاندې لوګاریتم پیدا کړئ؟

$$log_x(xy) =?$$

$$log_x(xy) = log_x x + log_x y = 1 + log_x y$$

5- د یوه خارج قسمت لوګاریتم په یوه قاعده باندی د صورت او مخرج د لوګاریتمو د تفاضل سره مساوي دی په همغه قاعده باندی.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_A N$$

$$log_a M = x \qquad M = a^x$$

$$log_a N = y \qquad N = a^y$$

اکسپونشل معادلی طرف په طرف یو پر بل ویشو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$$

د چپ طرف لوګاریتم نیسو.

$$log_a\frac{M}{N}=x-y=log_a M-log_a N$$

1- مثال: لاندې لوګاریتم حل کړئ؟

$$log_2\frac{x}{2}=?$$

$$log_2\frac{x}{2}=log_2 x-log_2 2=log_2 x-1$$

2- مثال:

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=log_x x+log_x 5-log_x y$$

$$log_x\frac{5x}{y}=log_x(5x)-log_x y=1+log_x 5-log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په بله قاعده ونیول شي لوګاریتم یې عبارت دي توان ضرب یې د هغه لوګاریتم په همغه قاعده.

$$log_b M^r=r\,log_b M$$
$$log_b M=x$$
$$M=b^x$$
$$M^r=(b^x)^r\Rightarrow M^r=b^{rx}$$
$$log_b M^r=rx$$
$$log_b M^r=r\,log_b M$$

1- مثال:

$$log_3 81^7=?$$
$$log_3 81^7=7\,log_3 81=7\,log_3 3^4=4\times 7\,log_3 3=28\times 1=28$$

2- مثال:

$$log_3(3x)^5=?$$
$$log_3(3x)^5=5\,log_3(3x)=5(log_3 3+log_3 x)$$
$$=5(1+log_3 x)=5+5\,log_3 x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7- دیوه عدد لوګاریتم د یوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندی عبارت دي د قاعدی د توان معکوس ضرب یي دهغه عدد لوګاریتم د قاعدی دقاعدی په قاعده.

$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a m$$
$$x = \log_{a^b} M$$
$$(a^b)^x = M$$
$$(a^x)^b = M \implies \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \implies a^x = \sqrt[b]{M}$$
$$x = \log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b}\log_a M$$
$$\log_{a^b} M = \frac{1}{b}\log_a M$$

مثال:

$$\log_{16} 32 = ?$$
$$\log_{16} 32 = \log_{2^4} 32 = \frac{1}{4}\log_2 32$$
$$= \frac{1}{4}\log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4}\log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$
$$\log_{16} 32 = \frac{5}{4}$$

دقاعدی د بدلولو فارمول:

که د یوه عدد لوګاریتم په یو ه قاعده غوښتل شوی وي مګر په دغه قاعده باندی د راکړ شوي عدد د لوګاریتم پیدا کول مشکل وي نو د راکړشوي عدد او د لوګاریتم د قاعدی لوګاریتم په یوه بله قاعده باندی پیدا کوو د عدد لوګاریتم د لوګاریتم د قاعدی په لوګاریتم ویشو د راکړ شوي عدد لوګاریتم په را کړشوی قاعده باندی لاس ته راځي.

مثلاً $\log_b M$ غوښتل شوی دی لوګاریتم یي د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

ثبوت: $\log_b M$ په x ښیو.

$$\log_b M = x \implies M = b^x$$
$$\log_a M = \log_a b^x = x\log_a b$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_a M = \log_b M \log_a b$$
$$\frac{\log_b M \log_a b}{\log_a b} = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$

1- مثال:

$$\log_{27} 81 = ?$$
$$\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} = \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

2- مثال:

$$\log_{32} 128 = ?$$
$$\log_{32} 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^7}{\log_2 2^5} = \frac{7 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5}$$

د لوګاریتم اقسام

لوګاریتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی.

1- اعشاري لوګاریتم یا معمولي لوګاریتم *Common logarithm*

2- طبعي لوګاریتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوګاریتم:

که د لوګاریتم قاعده (10) وه دی لوګاریتم ته اعشاري لوګاریتم وايي.

$\log x$

2- طبعي لوګاریتم:

هغه لوګاریتم دی چه قاعده یي (e) وي.

څرنګه چه د دوارو قسمو قاعدې معلومې دي نو قاعده یي نه لیکل کیږي.

$\ln x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ديوه عدد د لوګاريتم پيداکول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غېر د نورو عددو لوګاريتم دوه برخې لري.يوه برخه يې صحيح او بله برخه يې اعشاري ده .صحيح برخې ته کرکترستيک ($Characteristic$) او اعشاري برخې ته يې مانتيس ($Mantesa$) وايي .کرکترستيک د محاسبې پواسطه او مانتيس د جدول او يا د حساب د ماشين پواسطه پيدا کيږي.که دطاقت لرونکي عدد قاعده لس وي يوازې کرکترستيک لري او مانتيس نه لري

1- مثال : ?= $log(1000000)$ څو دی؟

$$log(1000000) = log\,10^6 = 6$$

کرکترستيک د ارقامو د شمېر څخه يو کم وي.

2- مثال: ?= $log(0.000000001)$ څو دی؟

$$log(0.000000001) = log\,10^{-9} = -9$$

کرکترستيک يې د اعشاريې د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمېر سره مساوي دی او علامه يې منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه ؤ نو دغه عدد مانتيس او کرکترستيک دواړه لري.لکه $log(4560000)$ د داسې عدد د لوګاريتم د پيدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسې اعشاري عدد بدلوو چه يو رقم يې صحيح او نور رقمونه يې اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمېر ته ګورو عدد اوه رقمي دی نو په ($10^6 = 1000000$) کې يې ضربوو په دې ترتيب کولای شو چه کرکترستيک يې پيدا کړو.

$$log(4560000) = log(4.56 + 10^6) = log\,4.56 + log\,10^6 = log\,4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکترستيک دی.مانتيس يې د ($log\,4.56$) څخه لاس ته راوړو.طريقه يې داسې ده چه (6) د درې رقمي عددو د لوګاريتمي دجدول په پورتنۍ کرښه کې پيدا کووا او (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کې پيداکوو او د مخکيني ليکل شوي عدد شاته يې ليکو بيا کرکترستيک ته ګورو که مثبت ؤ نو د کرکترستيک په اندازه د جدول څخه د پيدا شوي عدد مخې ته صفرونه ږدو. اوکه کرکترستيک منفي ؤ د پيدا شوي عدد شاته د اعشاريې د علامې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

$$log(4560000) = log\,4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$
$$log(4560000) = 6.6590$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او مانتیس یي مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسر یي بدلوو او د مخکیني سوال په څېر یي حلوو

مثال: $log(0.00567)$ پیداکړئ؟

حل:

$$log(0.00567) = log(5.67 \times 10^{-3}) = log\,5.67 + log\,10^{-3}$$
$$= log\,5.67 - 3 = 0.3690 - 3$$

د راکړشوي عدد لوګاریتم $(0.3690 - 3)$ دی مګر که وغواړو چه د کرکترستیک او مانتیس څخه یو عدد جوړ کړو نود کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی$(\bar{3}.3690)$ او که وغواړو چه مانتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او دمانتیس څخه یي منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$
$$log(0.00567) = 0.3690 - 3 = \bar{3}.3690 = -2.6310$$

تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000
2- $log\,5890000$
3- $log\,69200$
4- $log\,73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- $log\,0.00234$
2- $log\,0.0598$
3- $log\,0.000568$
4- $log\,0.008$

د صفر لوګاریتم:

$$0 = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty}$$
$$log_{10}\,0 = -\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتي لوګاريتم:

هر عدد د خپل لوګاريتم انتي لوګاريتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $\text{anti}\log 3 = 1000$ دی.

انتي لوګاريتم پيدا کول:

مانتيس په جدول کی پيدا کووهغه عدد چه د مانتيس په ستون کی ليکل شوی دي ليکو بيا هغه عدد د مانتيس په کرښه کی دی په لسيز او سليز مرتبو کی ليکو کرکترستيک ته ګوروکه مثبت ؤ کرکترستيک د عدد د ارقامو دشمېر څخه يو کم دی يعنی تر کرکترستيک يو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستيک منفي و نو دعدد شاته د کرکترستيک په اندازه د اعشاريي دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$\text{antilog}(2.3690) = ?$$
$$\text{anti}\log(0.3690) = 2.338837239$$
$$\text{anti}\log(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$\text{anti}\log 6^{-}.3710 = ?$$
$$\text{anti}\log 0.3710 = 2.35$$
$$\text{anti}\log(6^{-}.3710) = 0.00000235$$

تمرين:

1- $\text{anti}\log(3.4581)$ 2- $\text{anti}\log(2^{-}.6589)$

4- $\text{anti}\log(0.7551 - 4)$ 3- $\text{anti}\log(-4.2907)$

د لوګ $(\log)$ اولن $(\ln)$ پيدا کول يو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول ليکو:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M \cdot \log_a b = \log_a M$$

د (a) په عوض (10) او د (b) په عوض (e) ليکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log_e M \cdot \log_{10} e = \log_{10} M$$
$$\ln M \cdot \log 2.72 = \log M$$
$$\ln M \cdot 0.4343 = \log M$$

مثال: ($\ln 6.73 = 1.9066$) دی ($\log 6.73$) پیدا کړئ؟

حل:

$$\log M = \ln M \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = \ln 6.73 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$
$$\log 6.73 = 0.8280$$

د $\log$ څخه د $\ln$ د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوی په (0.4343) ویشو.

$$\frac{\ln M \cdot 0.4343}{0.4343} = \frac{\log M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343}\log M$$
$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$
$$\ln M = 2.3026 \cdot \log M$$

مثال:

$$\ln 563 = ?$$
$$\ln 563 = \log 563 \cdot 2.3026$$
$$\ln 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

انترپولېشن Interpolation:

انترپولېشن په نوي عبارت باندی د یوی موضوع بیانولو ته وایي.

او په اصطلاح کی انترپولېشن هغه عملیه ده چه د هغه عددو لوګاریتم پیدا کوي چه لوګاریتمي جدول یي ترتیب شوی نه وي طریقه یي داسی ده چه عدد لیکو مانتیس یي په یوه حرف ښیو د راکړشوي عدد څخه لاندی باندی عددونه په دری رقمي عدد کی پیدا کوو او لیکویي اومانتیس یي د جدول څخه لیکو په دی ترتیب شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي بیا د دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کی څلور عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د مانتیس سره یي جمع کوود راکړشوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- log 4567 پیدا کړئ؟

$$0.01\left[0.007\begin{pmatrix}log\,4.57 & 0.6599\\ log\,4.567 & m\\ log\,4.56 & 0.6589\end{pmatrix}d\right]0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007}=\frac{d}{0.0010}\Longrightarrow d=\frac{0.01\cdot 0.0010}{0.007}=\frac{10}{7000}=\frac{1}{700}=0.00143$$

$$d=0.00143$$
$$m-0.6589=0.00143$$
$$m=0.00143+0.6589=0.6603$$
$$log\,4567=3.6603$$

دانترپولېشن پواسطه د انتي لوګاریتم پیدا کول:

د انتي لوګاریتم د پیدا کولو لپاره مانتیس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه ؤ نو د دغه مانتیس انتي لوګاریتم په یوه حرف ښیو د مانتیس څخه لاندې باندې مانتیسونه په جدول کې پیدا کوو په نتیجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یې مجهول وي پیا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدلیږي. چه یو به یې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پیدا کوو اود کوچني عدد د انتي لوګاریتم سره یې جمع کوو د راکړشوي لوګاریتم انتي لوګ لاس ته راځي.

مثال:- دیوه عدد لوګاریتم (3.7351) دی انتي لوګ یې پیدا کړئ؟

$$0.01\left[d\begin{pmatrix}5.44 & 0.735\\ m & 0.7352\\ 5.43 & 0.7348\end{pmatrix}0.0004\right]0.0008$$

$$\frac{0.01}{d}=\frac{0.0008}{0.0004}$$

$$d=\frac{0.0004\cdot 0.01}{0.0008}=\frac{4}{800}=\frac{1}{200}=0.005$$

$$m-5.43=d$$
$$m=d+5.43$$
$$m=0.005+5.43$$
$$m=5.435$$

کولوګاریتم *Cologarthm*:

د یوه عدد د معکوس لوګاریتم ته د هغه عدد کولوګاریتم وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً (a) او $\left(\frac{1}{a}\right)$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $\left(\frac{1}{a}\right)$ لوګاریتم د (a) د کولوګاریتم په نوم نوم یادیږي.

$$co\log a = \log\frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a$$
$$co\log a = -\log a$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوګاریتم دهغه عدد منفي لوګاریتم دي.

د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه:

د لوګاریتمي معادلو په حلولو کې د لوګارتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$\log_a(x+6) - \log_a(x+2) = \log_a x$$
$$\log_a\frac{x+6}{x+2} = \log_a x$$
$$\frac{x+6}{x+2} = x$$
$$x^2 + 2x = x + 6$$
$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$$
$$\Delta = 25$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2\log x} = 10x$$
$$\log x^{2\log x} = \log 10x$$
$$2\log x \times \log x = \log 10x \Longrightarrow 2\log^2 x = \log 10 + \log x$$
$$2\log^2 x - \log x - 1 = 0$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$log\, x = y = y_1 = 1$$

$$log_{10}\, x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \qquad x_1 = 10$$

$$log_{10}\, x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$log_{10}\, x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{log(35 - x^3)}{log(5 - x)} = 3$$

$$3\,log(5 - x) = log(35 - x^3)$$

$$log(5 - x)^3 = log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$log_5\left(log_{10}\sqrt{x^2 + 19}\right) = 0$$

$$log_{10}\sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\sqrt{x^2+19}\right)^2 = 10^2$$
$$x^2 + 19 = 100$$
$$x^2 = 100 - 19 = 81$$
$$x^2 = 81$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$
$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$log_3 x + log_9 x + log_{27} x = 5.5$$
$$log_3 x + log_{3^2} x + log_{3^3} x = 5.5$$
$$log_3 x + \frac{1}{2} log_3 x + \frac{1}{3} log_3 x = 5.5$$
$$log_3 x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$
$$log_3 x \left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x \left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \qquad \Rightarrow \frac{11}{6} log_3 x = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$
$$log_3 x = 3$$
$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$log_2(11x - 1) = 5$$
$$11x - 1 = 2^5$$
$$11x = 32 + 1 = 33$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$
$$x = 11$$

7- مثال:

$$log_3(2^x - 7) = 2$$
$$2^x - 7 = 2$$
$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x = 3$

8- مثال:

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$
$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$
$$5^2 = (x^3)^2$$
$$x^3 = 5$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{5}$$

9- مثال:

$$\log_{10}\sqrt{x+1} + \log_{10}\sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$
$$\log_{10}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$
$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$
$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$
$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 1 = 25 \quad \Longrightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$
$$x^2 = 26 \quad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

10- مثال:

$$\log(x^2 - 1) - \log(x + 1) = \log 2$$
$$\mathrm{Log}\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \log 2$$
$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = 2 \quad \Longrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 \quad \Longrightarrow x - 1 = 2 \;,\; x = 3$$

11- مثال:

$$x^{\log_{10} x} = 10$$
$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$
$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow \log^2{}_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow x = 10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12- مثال:

$$log_3(x+1) - log_3(x-1) = 1$$
$$\frac{x+1}{x-1} = 3^1 \quad \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \quad \Rightarrow x+1 = 3x-3$$
$$x - 3x = -3 - 1 \quad \Rightarrow -2x = -4 \quad \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

13- مثال:

$$log_4(3x-3) = log_2 3$$
$$log_{2^2}(3x-3) = log_2 3$$
$$\frac{1}{2} log_2(3x-3) = log_2 3$$
$$log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} = log_2 3$$
$$\sqrt{3x-3} = 3 \quad \Rightarrow \sqrt{(3x-3)}^2 = 3^2$$
$$3x - 3 = 9 \quad \Rightarrow 3x = 9 + 3 = 12 \Rightarrow\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

14- مثال:

$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = log_2 4$$
$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = log_2 2^2 \Rightarrow log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2\, log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$
$$log_3\left(2+\frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7$$
$$\frac{1}{x} = 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

15- مثال:

$$log\sqrt{x} + log\, x^{\frac{3}{2}} = log\, 100$$
$$log\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3} = log\, 100 \Rightarrow log\sqrt{x \cdot x^3} = log\, 100$$
$$x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 10$$

16- مثال:

$$log_{(x^2-x+4)}(x^2 + 5x - 1) = 1$$
$$x^2 + 5x - 1 = x^2 - x + 4 \qquad \Rightarrow 5x - 1 = -x + 4$$
$$\Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

17- مثال:

$$log_9 3 \cdot log_2 x = 1$$
$$log_{3^2} 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} log_3 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot log_2 x$$
$$= log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$$

x^(1/2)=2^1⟹x^(1/2)=2⟹(x^(1/2))^2=2^2⟹ x=4

18- مثال:

$$log_3 log_2(x-1) = 2$$
$$log_2(x-1) = 3^2 \Longrightarrow x - 1 = 2^9 \Longrightarrow x = 2^9 + 1$$
$$= 513 \Longrightarrow x = 513$$

19- مثال:

$$log_{10} x = \frac{log_3 12}{log_3 10}$$
$$log_{10} x = log_{10} 12$$
$$x = 12$$

20- مثال:

$$3^{log_4 16} = 27^x$$
$$3^{log_4 16} = 3^{3x}$$
$$log_4 16 = 3x \Longrightarrow 16 = 4^{3x} \Longrightarrow 2^4 = 2^{6x} \Longrightarrow 6x = 4 \Longrightarrow x = \frac{4}{6}$$
$$x = \frac{2}{3}$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ؟

1) $x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

2) $\log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$

3) $\log(x-3) = 1 - \log x$

4) $\ln(y+1) = \ln(y-7) + \ln 4$

5) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نجیب

6) $\log_2 x + \log_3 x = 1$

7) $\log_3 x + \log_5 x = \log_{10} 15$

8) $\log^2{}_2 (x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = -3 \\ \log_{10} x^3 - \log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ \log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم فصل

توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وایي.

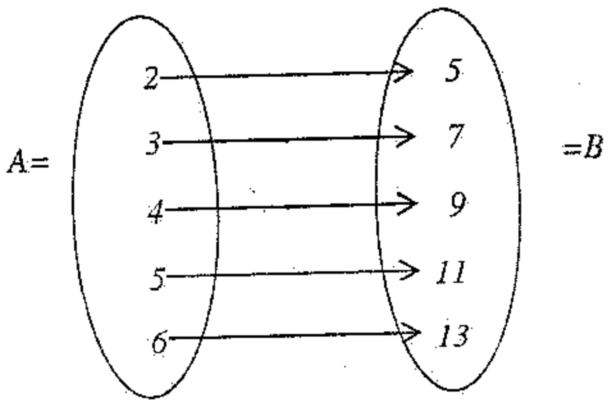
او په اصطلاح کې که د (A) او (B) دوه داسې سیټونه ولروچه د (A) دسیټ هر عنصر د (B) د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطې ته تابع وایي.

لکه: $A = (2,3,4,5,6)$ او $B = (5,7,9,11,13)$

سیټونه د لاندې رابطې پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وایي.



په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه ،د قیمتونو سیټ اویا ډومین $(Domain)$ وایي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ ، رنج $(Range)$ او کوډومین $(Codomain)$ وایي.

رنج : د تعریف د ناحیې د عناصرو دتصویرونو سیټ ته رنج وایي.

کوډومین: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومین وایي.

کله کله د ډومین ټول عناصر د کوډومین د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دې صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومین دی.لکه پورتني سیټونه .

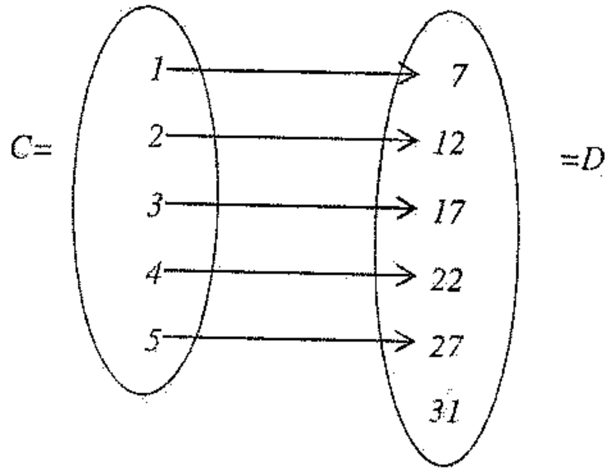
او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدې صورت کې د دویم

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیټ هغه عناصر چه د اول سیټ د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیټ یا رنج بلل کیږي.
او د دویم سیټ ټول عناصر د کوډومېن په نوم یادیږي.

$$C = (1,2,3,4,5)$$

$$D = (7,12,17,22,27,31)$$



په دغه حالت کې د رنج او کوډومېن تر منځ لاندې رابطه موجود ده.

$$Range \subseteq Codomain$$

د تابع اقسام:

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع   2- ترانسندنتل تابع

1- ناطقه تابع:

خطي تابع ، دویمه درجه تابع او هوموګرافیک تابعګانی ناطقی تابعګانی دي.

a- خطي تابع:

هغه تابع ده چه ګراف یې مستقیم خط وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = ax + b$$

$$y = mx + b$$

(a) او (b) ثابت عددونه دي (x) متحول دی (y) د (x) تابع دی. a او m دواړه یو شی دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دخطي تابع د تعريف ناحيه :

د خطي تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی په (IR) سره يي ښيي يعني:

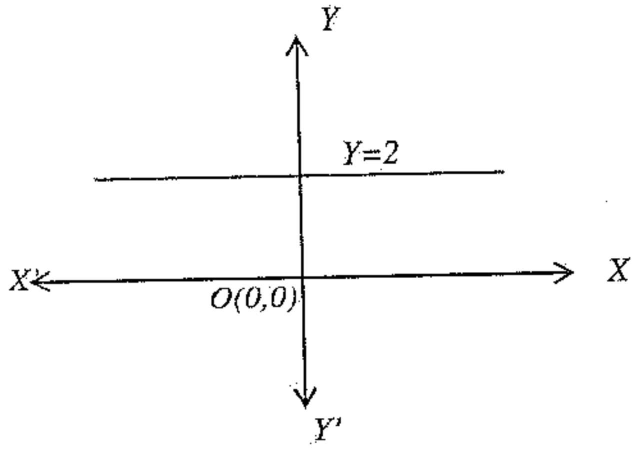
$$IR = (-\infty ، +\infty)$$

د خطي تابع میل د (x) ضریب یعنی (m) دی.

خصوصي حالتونه:

1- که په يوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابته تابع وايي.ګراف يي د $X\acute{X}$ د محورسره موازي دی.

مثال:- $Y = 2$ ګراف رسم کړئ؟



2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

$$y = mx + b \Rightarrow 1.x + 0 = x$$

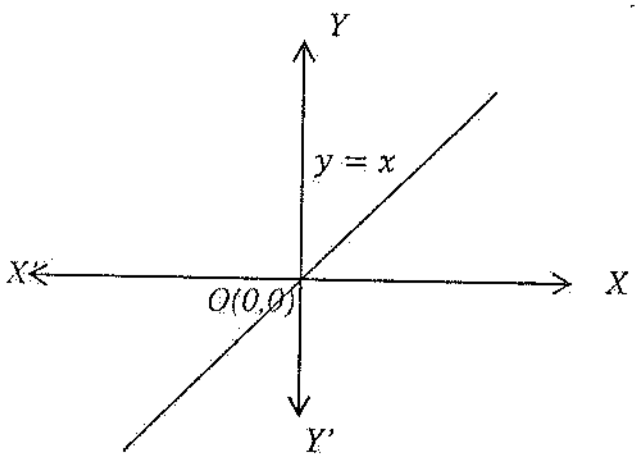
$$y = x$$

دغې تابع ته د عينيت تابع وايي ګراف يي اوله او دريمه ربعه نيمايي کوي .

مثال:- $y = x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دخطي تابع د عمومي شکل د گراف ترسيم:

1- د $X\acute{X}$ محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د گراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $X = 0$ فرضوو.

پيدا شوي نقطې وصلوو د راکړشوی تابع گراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع گراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کيږي نود (YY') د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

2- $y = 0$ فرضوو نو:

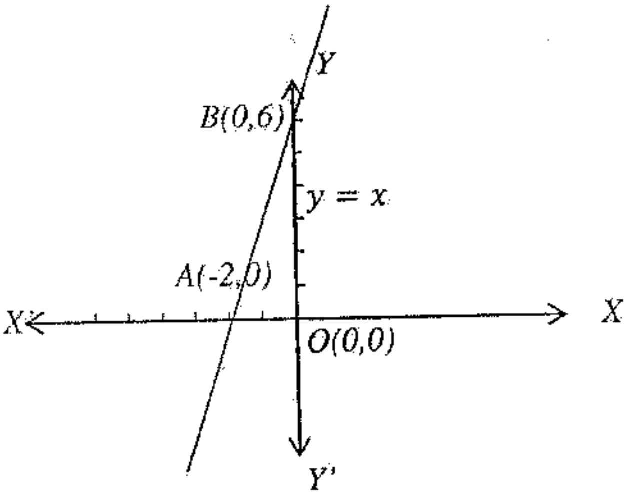
$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د (XX') د محور سره د گراف د تقاطع نقطه ده د وضعيه کميتونو د محورونو په مستوي کې يې د وضعيه کميتونو د محورونو پر مخ يي پيدا کوو او و صلوو يې غوښتل شوی گراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



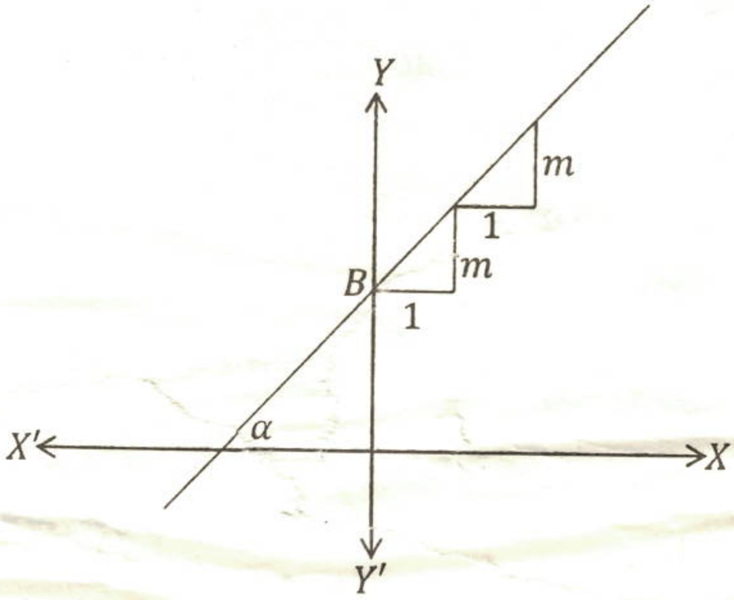
د مستقيمې کرښې مېل:

د مستقيمې کرښې مېل د هغه زاويې تانجانت دی چه مستقيمه کرښه يې د $X\acute{X}$ د محور سره جوړوي.

په عمومي صورت د متحول ضريب د مستقيمې کرښې مېل دی.ددی خبرې دثبوت لپاره د وضعيه کميتونو په مستوي کې د وضعيه کميتونو محورونه د (Δ)د مستقيم پواسطه قطع کوو چه د $Y\acute{Y}$ محور د B په نقطه کې قطع کړي او $X\acute{X}$ د محور سره د (α) په اندازه زاويه جوړه کړي بيا د $X\acute{X}$او $Y\acute{Y}$ د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د (m) په اندازه توټې را بېلو او د (α) د زاويې تانجانت پيدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقيمې کرښې مېل دی.

$$\tan\alpha = \frac{m}{1} = m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



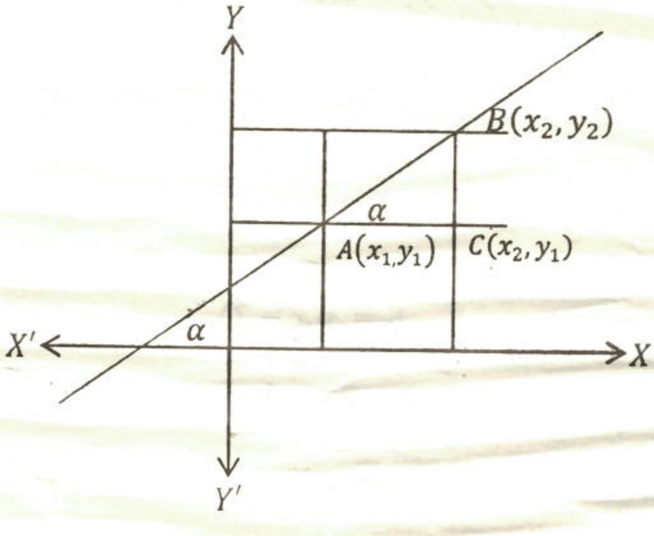
دمیل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطې د مستقیمې دوه نقطې دي

د (A) او (B) د نقطو څخه د $X\acute{X}$ او $Y\acute{Y}$ د محورو سره موازي خطونه رسموو چه یو

او $B(X_2, Y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د ABC

په مثلث کې د α دزاويي تانجانت پيدا کوو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ ديوى مستقيمى كرښى دوه نقطى دي مېل يي پيدا كړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-9}{-2-5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقيمى كرښې معادله چه مېل او يوه نقطه يي معلومه وي:

د مستقيمى كرښى عمومي معادله ليكو.

$$y = mx + b \ldots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د يوې مستقيمى كرښى يوه نقطه ده په عمومي معادله كې يي وضع كوو.

$$y_1 = mx_1 + b \cdots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطى څخه منفي كوو.

$$\begin{array}{c} y = mx + b \\ \underline{\pm y_1 = \pm mx_1 \pm b} \\ y - y_1 = mx - mx_1 \end{array}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقيمى كرښى معادله پيدا كړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = 3(x - 2)$$
$$y = 3x - 6 + 5$$
$$y = 3x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیمې کرښې د معادلې پیدا کول چه دوه نقطې یې معلومې وي:

د هغه مستقیمې کرښې معادله لیکو چه میل او یوه نقطه یې معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د (m) په عوض یې قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چه دوه نقطې یې $A(-4,14)$ او $B(4,8)$ وي.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)}\{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4}(x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8}(x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}(x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

معادله یې په لاندې ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د $X\acute{X}$ دمحور سره یې د تقاطع نقطه $A(a,0)$ ده او د $Y\acute{Y}$ سره یې د تقاطع نقطه $B(0,b)$ ده دا نقطې په هغه معادله کې وضع کوو چه دوه نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{b}{-a}(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

$$\frac{-bx}{-ab} - \frac{ay}{-ab} = \frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

مثال: د يوې مستقيمې کرښې دوه نقطې $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله يې پيدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 1$$

$$\frac{2x + y}{10} = 1$$

$$y = -2x + 10$$

تمرين:

1- په لاندې ډول د کرښونقطې راکړ شويدي مېل يې پيدا کړئ؟

1- $A(3,5)$, $B(4,-11)$ 2- $C(9,3)$, $D(2,7)$
3- $E(9,3)$, $F(3,-5)$

2- په لاندې ډول د مستقيمې کرښې يوه نقطه او مېل راکړشوی دي معادله يې پيدا کړئ؟

1- $A(5,4)$, $m = 4$ 2- $B(5,8)$, $m = 2$

3- $C(-3,7)$, $m = \frac{1}{2}$

3- په لاندې ډول دمستقيمې کرښې دوه نقطې راکړ شويدي معادله يې پيدا کړئ؟

1: $A(3,4)$, $B(6,2)$ 2: $C(8,12)$, $D(4,-7)$
3: $E(2,-1)$, $F(3,-4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- په لاندي ډول د محورېنوسره د مستقیمی کرښی د تقاطع نقطی راکړشویدي محوري معادلی یي پیدا کړئ؟

1- $A(4,0)$, $B(0,8)$ 2- $C(3,0)$, $D(0,12)$

3- $E(8,0)$, $F(0,24)$

جفته تابع :

که یوه تابع د او لپاره یو شان وي دی تابع ته جفته تابع وایي. لکه $y = x^2$ چې

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

یعنی:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع :

هغه تابع ده چه او لپاره یو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چه د (x) او لپاره یو شان نه ده یعني د (x) لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو $f(x) \neq f(-x)$ نو دغه تابع طاق تابع ده.

معکوسه تابع:

دوه تابعګانی هغه وخت یو د بل معکوسی دي چه د یوی ډومېن دبلی کوډومېن وي او کوډومېن دبلی تابع ډومېن وي .

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د (x) قیمت د (y) له جنسه پیداکوو اوبیا د (x)او (y) ځایونه بدلوو معکوسه تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پیدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$
$$3x = y + 7$$
$$x = \frac{y + 7}{3}$$
$$y = \frac{x + 7}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مرکبه تابع:

هغه تابع ده چه متحول يي د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع ،تابع ته مرکبه تابع وايي.

که وغواړو چه د دوه تابعګانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو يوه تابع په بله تابع کی د متحول په عوض وضع کوو. مرکبه تابع لاس ته راځي او داسی ليکل کيږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعګانی راکړشويدي fog او gof پيدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x^2 - 1)^2 - 5 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 5$$
$$= 27x^2 - 18x + 1 - 5$$

$$gof = 27x^2 - 18x - 4$$

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه

د مرکبې تابع د تعريف ناحيه د اولی تابع د تعريف د ناحيي د هغه عناصرو سيټ دی چه په مرکبه تابع کې تصوير ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعګانې لرو چې $domf(x) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، hof او foh او ډومېنونه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h\left(\sqrt{4x - 1}\right) = \left(\sqrt{4x - 1}\right)^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \qquad ; \ domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$foh = f\{h(x)\} = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{4x^2 + 4 \times \frac{1}{4} - 1}$$
$$= \sqrt{4x^2 + 1 - 1}$$
$$foh = 2x \quad ; \quad domf\{h(x)\} = IR$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو معکوسې تابعګانې پیدا کړئ؟

$1\text{-}\ y = 4x - 3$ $\qquad$ $2\text{-}\ y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$

$3\text{-}\ y = x - \frac{1}{2}$ $\qquad$ $4\text{-}\ y = 5x - 8$

د لاندې تابعګانو ترکیب او دومېنونه پیدا کړئ؟

$1\text{-}\ f(x) = 3x - 4\ ,\ g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

$2\text{-}\ f(x) = x^2 + 1\ ,\ h(x) = \sqrt{x}$

پولینومي تابعګانې

څو شاخه ای تابعګانو ته پولینومي تابع وایي.لکه

$$y = \begin{cases} x + 1 & : x < -2 \\ x + 3 & : x > 2 \\ x - 1 & : x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \quad : x > 2$$

x	3	4
y	6	7

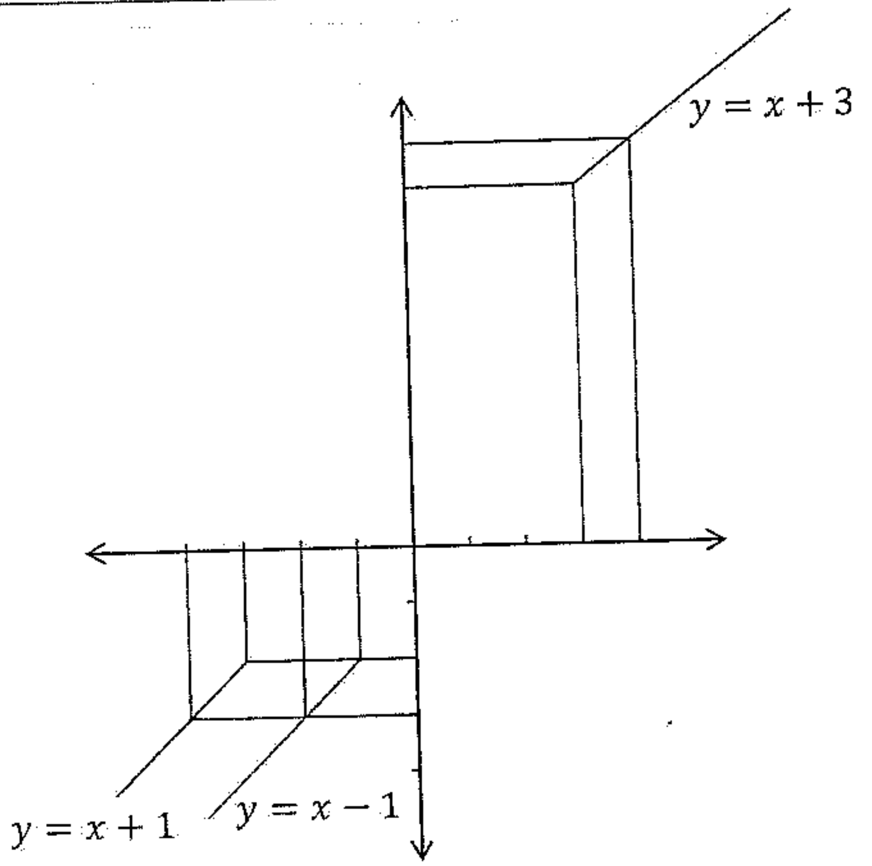
$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

x	−4	−3
y	−3	−2

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

x	−2	−1
y	−3	−2

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين

د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = \begin{cases} x+2 & : x > 3 \\ x-2 & : x < 3 \end{cases}$

2- $y = \begin{cases} x-1 & : x > 2 \\ x+1 & : x < 2 \\ x+2 & : x > 5 \end{cases}$

3- $y = \begin{cases} x+4 & : x < 2 \\ x-1 & : x > 0 \end{cases}$

4- $y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : x > 6 \end{cases}$

5- $y = \begin{cases} x+4 & " \ x < 3 \\ x-4 & " \ x > 3 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم فصل

دويمه درجه تابع

دويمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه يي دوه وي.

عمومي شکل يې دا دی.

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

a، b او c ثابت عددونه دي او (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه:

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی او په IR سره يې ښيي. د تعريف ناحيې ته د قيمتونوسيټ او ډومېن $(Domain)$ هم وايي.

د دويمه درجه تابع ګراف:

د دويمه درجه تابع ګراف ته پارابول وايي.

که په دويمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع ګراف اصغري نقطه لري اوه پارابول خوله پورته خواته خلاصيږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله کښته خواته خلاصيږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس $(Vertex)$ وايي.

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم:

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسيم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسيم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

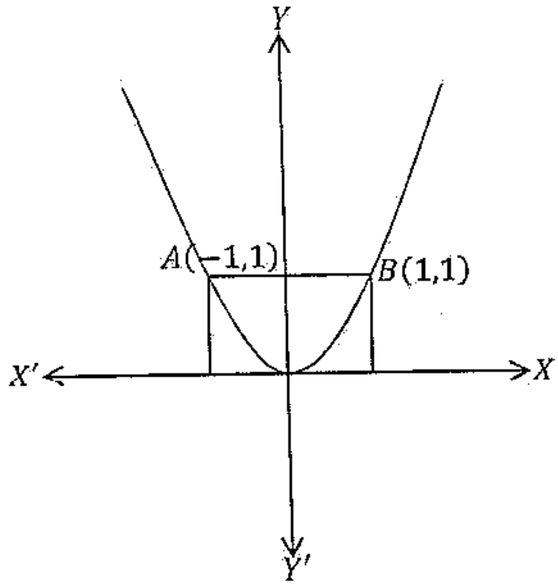
1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسیم:

x ته ځو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. بیا د تابع د ګراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال:- د $y = x^2$ ګراف رسم کړئ؟

x ته ځو قیمتونه ورکوو او د y قیمتونه پیدا کوو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو:

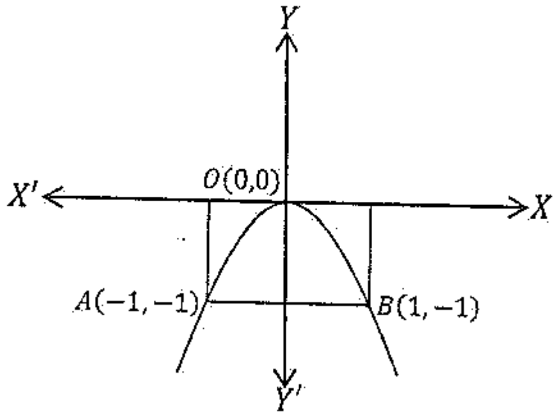
x	-1	0	1
y	-1	0	$+1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $y = -x^2$ د تابع گراف رسم کړئ؟

x	-1	0	$+1$
y	-1	0	$+1$



نوټ:

که $(a < 1)$وي نو د تابع گراف پلن او سورور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع گراف نري او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې گرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$ 2- $y = 2x^2$ 3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$ 5- $-\frac{2}{3}x^2$

د گراف انتقال:

د $(X\acute{X})$ او $(Y\acute{Y})$ په محورو باندې د تابع د گراف حرکت ته د تابع دګراف انتقال وایي.

1- د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع د گراف انتقال :

که وغواړو چه د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع گراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو او گراف یې رسموو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع گراف ته د (3) په اندازه چپې او ښی خواته انتقال ورکړئ؟

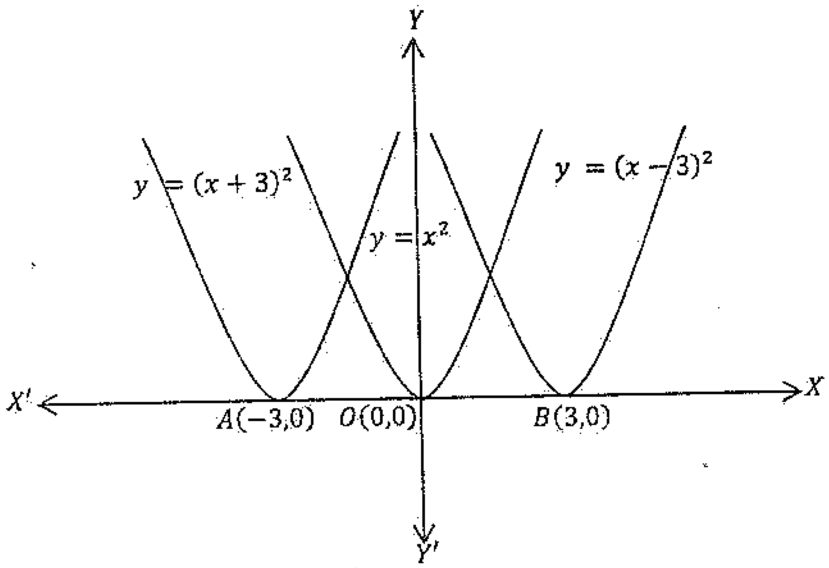
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: چپې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکوو نو 3 ورسره جمع کوو.

$$y = (x+3)^2$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$A(-3,0)$$

ښی خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x-3)^2$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



2- د YY' په محور باندې د تابع د ګراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د $(y\acute{y})$ په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه ګراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو (2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

... د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $y = 0$ فرضوو.

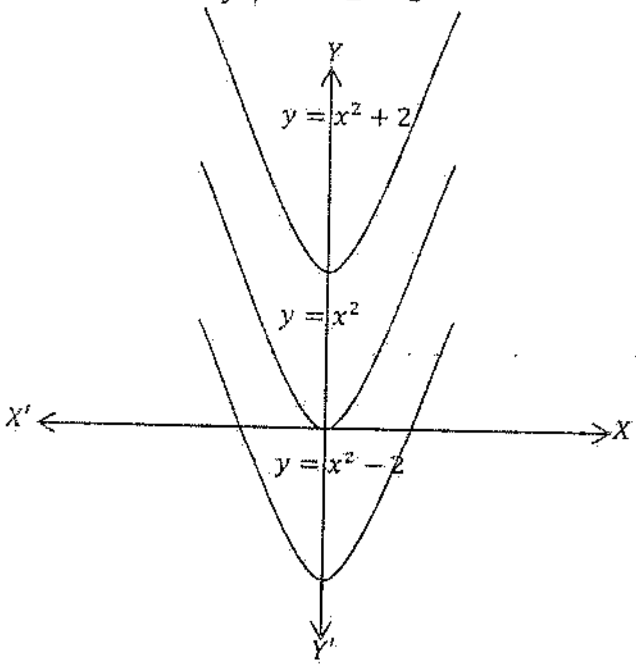
$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2$$

ځرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

د ګراف د ښه ترسیم لپاره (x) ته ځو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتیجه کې $y = 2$ کیږي چه د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.

x	-1	0	$+1$
y	3	2	3



تمرین:

لاندې تابعګانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع ګراف ته د (3) په اندازه ښي او چپې خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع ګراف ته د $\left(\frac{3}{2}\right)$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسيم:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې يې عبارت دي.

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-C}{A}}, 0\right)$$

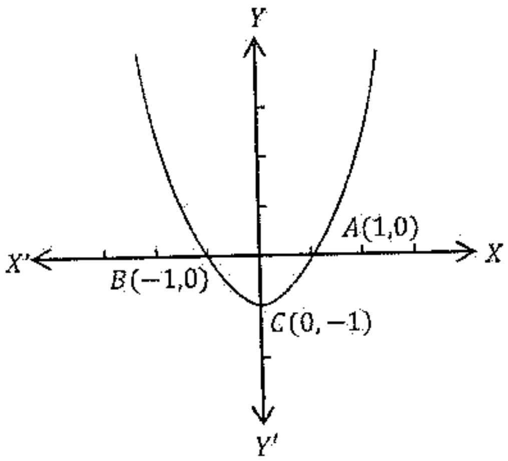
2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه يې عبارت ده له $M(0, C)$ دغه نقطه د تابع د ګراف راس هم دی.

د (A) نقطه د (C)سره او د (C) نقطه د (B) سره وصلوو د تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$x^2 - 1 = 0$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د xx' د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(1,0) \qquad B(-1,0)$$

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. چې $y = -1$ کيږي نو د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $(0,-1)C(0,-1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د xx' د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

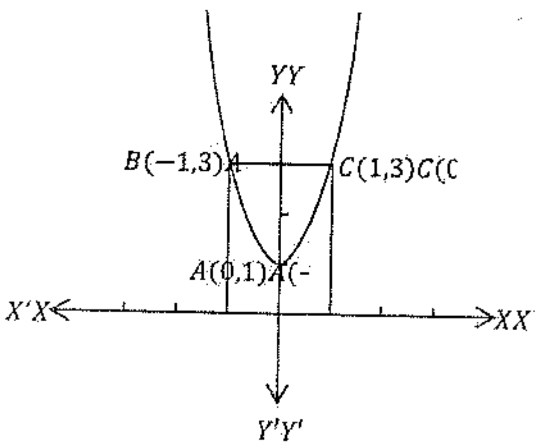
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,1)$$

د ګراف د دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمت پيدا کوو.

x	-1	0	$+1$
y	2	0	2

$B(-1,2) \qquad O(0,1) \qquad C(1,2)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

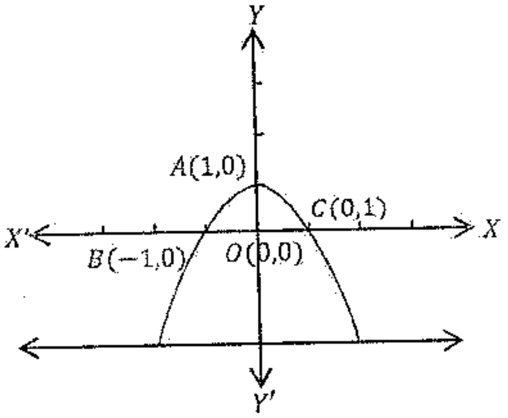
1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 + 1 = 0$
$-x^2 = -1$
$x^2 = 1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$

$A(1,0)$ $B(-1,0)$

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کیږي د تقاطع نقطه یي عبارت ده.

$C(0,1)$



مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$-x^2 - 1 = 0$
$-x^2 = 1$
$x^2 = -1$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چه منفي عدد جذر نلري نو د تابع ګراف د (XX') محور نه قطع کوي.

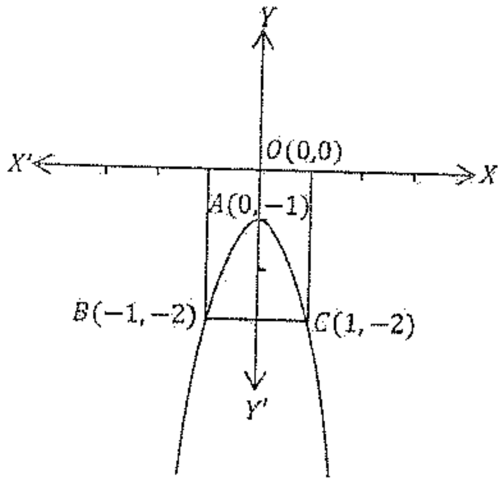
2- د YY' د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$ نو د X د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0, -1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمت پیدا کوو.

x	-1	0	1
y	-2	-1	-2

$B(-1, -2)$ $O(0,0)$ $C(1, -2)$



3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ د تابعګانو د ترسیم طریقه:

1- د (XX') د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $(y = 0)$ فرضوو، په نتیجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله لاس ته راځي . د دغه معادلې د حل لپاره د (Δ) قیمت پیدا کوو د (Δ) په باب درې حالته موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه یې د $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي او د تقاطع نقطې یې عبارت دي له : $A(X_1, 0)$ او $B(X_2, 0)$

b- که $(\Delta = 0)$ وي معادله یو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي $x = \frac{-b}{a}$ نو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له : $A(x, 0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c- که $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.په دغه حالت کې د پاره ددې چه د $(Y\acute{Y})$ د محور پوی او ښې خواته دګراف خط السیر تعین شي نو(x) ته یو منفي او یو مثبت قیمت ورکوو اود (y) قیمتونه پیدا کوو د $(Y\acute{Y})$ د محور پوی او ښی خواته دوه نقطې لاس ته راځي چه د تابع د ګراف خط السیر تعینوي.

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحورسره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوود $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع دګراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع د ګراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \qquad \therefore \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ کیږي.نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $0 < a$ وي بیا هم $0 > \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کیږي مګر $0 < a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ کیږي. دواړه خواو څخه $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{4ac-b^2}{4a}<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ او $x=\frac{-b}{2a}$ شي نو $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ کیږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y=2x^2-3x-2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د د قاطع نقطه پیدا کوو نو $y=0$ فرضوو.

$2x^2-3x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25$

$\Delta=1$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm5}{2\times2}=\frac{3\pm5}{4}$

$x_1=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2 \quad \therefore\ x_1=2$

$x_2=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \quad \therefore\ x_2=\frac{-1}{2}$

نو د محور سره دګراف د د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(2,0) \qquad B\left(\frac{-1}{2},0\right)$$

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y=0$ فرضوو. نو $y=6$ کیږي. نو

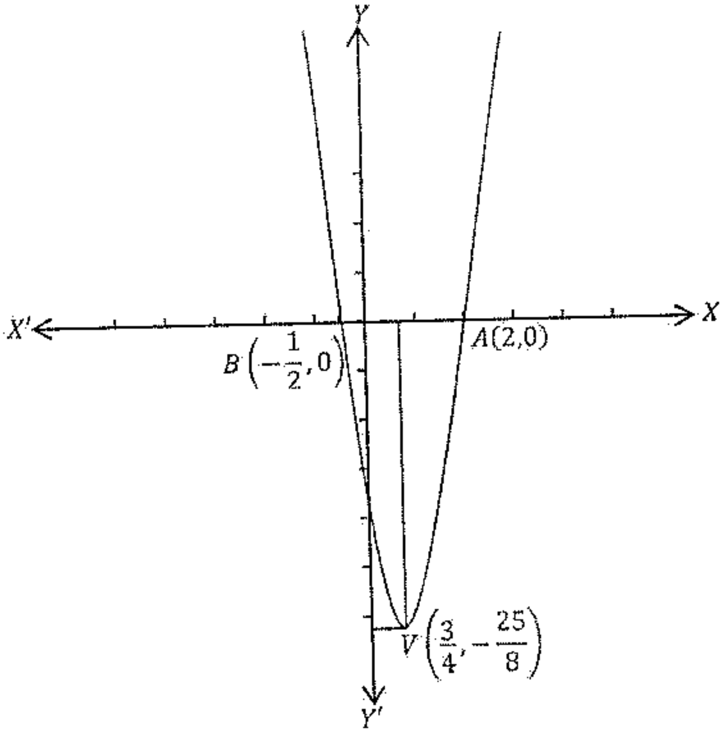
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0,-2)$

د تابع د ګراف د راس نقطه پیدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{4\times2\times(-2)-(-3)^2}{4\times2}=\frac{-16-9}{8}=-\frac{25}{8}\right)$$

$$V\left(\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$$



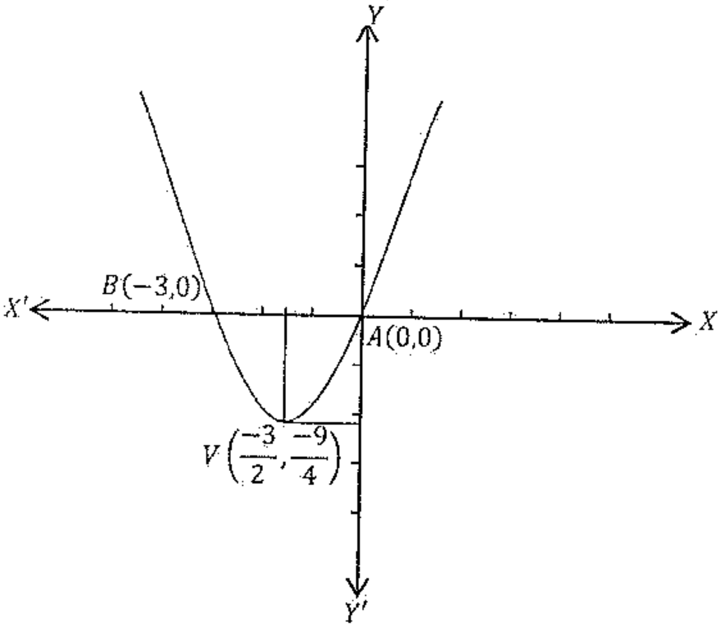
مثال: $y=x^2+3x$ گراف رسم کړئ؟

حل:

$y=0$
$x^2+3x=0$
$x(x+3)=0$
$x_1=0$
$x_2=-3$
$A(0,0)\qquad B(-3,0)$

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{4\times1\times0-3^2}{4\times1}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-9}{4}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ گراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad : \quad x_1 = 1 \qquad A(1,0)$$

$$X_2 = \frac{-4 - 2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad : \quad x_2 = 3 \qquad B(3,0)$$

2- $x = 0$ فرضوو نو:

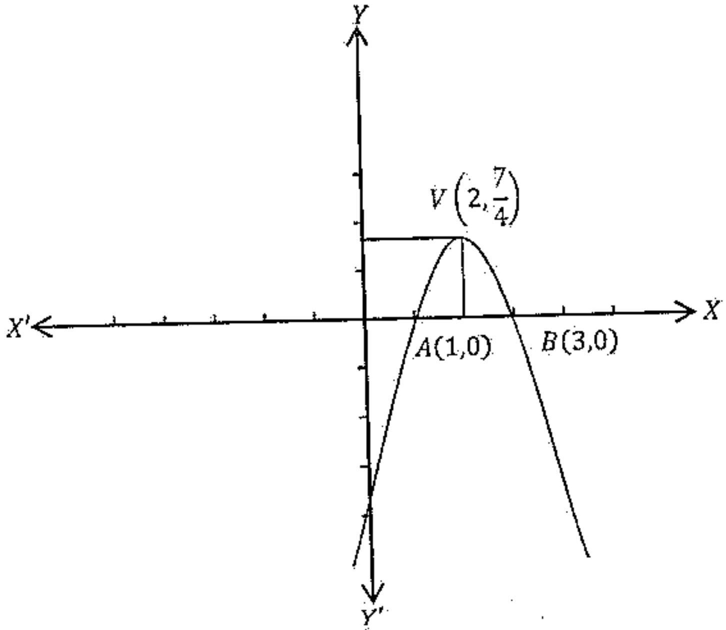
$y = -3 \qquad C(0,-3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصغري او اعظمي ټکي يې پيدا کوو:

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-4}{-2},\frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right)=\left(2.\frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2,\frac{7}{4}\right)$$



مثال: $y = x^2 + 2x + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times1 = 4-4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$A(-1,0)$$

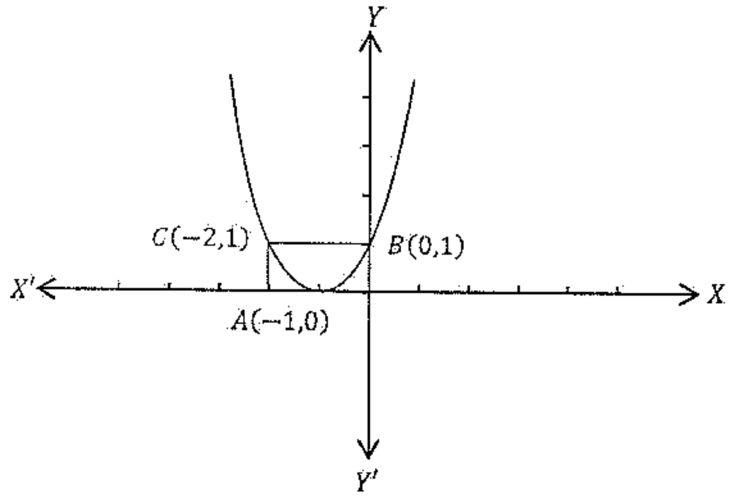
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- $x = 0$ فرضوو نو:

$$y = 1$$
$$B(0,1)$$

x	-2
y	4

$$C(-2,1)$$



تمرين:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2 + 6x$

2- $5x^2 - 13x + 6$

3- $4x^2 - 4x + 1$

4- $-x^2 + 5x - 6$

5- $-2x^2 - 3x + 14$

6- $3x^2$

7- $4x^2 + 8x$

8- $6x^2 + x - 57$

9- $11x^2 - 13x - 18$

10- $2x^2 - 6x$

11- $2x^2 + x - 21$

12- $-x^2 + 4$

13- $11x^2 - 13x - 18$

14- $3x^2 - x - 10$

15- $5x^2 + 2x - 51$

16- $-9x^2 + 17x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموګرافیک تابع

هغه تابع ده چه د بېنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي. عمومي شکل يې دا دي.

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}}$$ زوړ نصاب

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$ نوی نصاب

a، b، c او d ثابت عددونه دي (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

مجانب *Asymptotes*:

که د یو مستقیم او یوه منحني ترمنځ فاصله په لایتناهي(∞) کې صفرشي دا مستقیم د دی منحني مجانب دی.

مجانب په دری قسمه دی.

1- عمودي مجانب *Vertical Asymptotes*

2- افقي مجانب *Horizntil Asymptotes*

3- مایل مجانب *Slant or obligue Asymptotes*

1- عمودي مجانب:

هغه خط چه د (x) په فاصله باندی د $(Y\acute{Y})$د محور سره موازي رسمیږي د تابع د ګراف عمودي مجانب بلل میږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کوود عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$
$$cx+d=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$cx = -d$$
$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال:- د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Longrightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب :

هغه خط چه د(y) په ترتیب د$(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسمیږي د تابع د ګراف افقي مجانب دي.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرج ویشو خارج قسمت یې په (m) ښیو او باقي په (p) ښیو نو لیکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه یې مساوي دي نو صورتونه یې هم مساوي دي.

$$ax + b = mcx + md + p$$
$$a = mc \Longrightarrow m = \frac{a}{c}$$

دباقي د پیدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md + p = b \Longrightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc - ad}{c}$$
$$p = \frac{bc - ad}{c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $h(x)=\frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانده پيدا کړئ؟

حل:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{8}{4}=2$$
$$m=2$$
$$p=\frac{bc-ad}{c}=\frac{-3\times 4-8(-9)}{4}=\frac{-12+72}{4}=\frac{60}{4}=15$$

3- مايل مجانب $Slant\ or\ Obligue\ Asymptotes$:

که د يوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زياته وي دغه ډول تابعګانې مايل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ويشو.

مثال: د $g(x)=\frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب ، افقي مجانب، مايل مجانب يې پيدا کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x=\frac{-d}{c}=\frac{-2}{1}=-2$$

افقي مجانب نلري، مايل مجانب معادله يې دا ده.

$$\frac{6x^2-24}{x+2}=6x-12$$

د هوموګرافيک تابع د ګراف ترسيم:

1- عمودي مجانب پيدا کوو او رسمووېي.

2- افقي مجانب پيدا کوو او رسموو يې.

3- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف دتقاطع نقطه پيدا کوو.

4- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.

5- د ګراف د ښه دقيق ترسيم لپاره (x) ته څو قيمتونه ورکوو او د (y) قيمتونه پيدا کوو.

6- پيدا شوی نقطې دوضعيه کميتونود محورونو په مستوي کې پيدا کوو او وصلوو يې د راکړ شوی تابع ګراف لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $f(x) = \frac{2x+4}{x-2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:عمودي مجانب:

$$x = -\frac{d}{c} = -\left(\frac{-2}{1}\right) = \frac{2}{1} = 2$$

افقي مجانب:

$$m = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

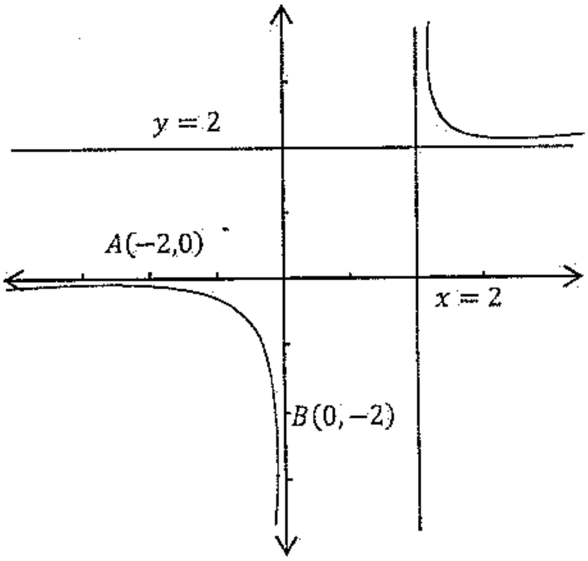
د $(X\acute{X})$ سره تقاطع پیدا کوونو $(y = 0)$ فرضوو:

$$\frac{2x+4}{x-2} = 0$$
$$(x-2)\left(\frac{2x+4}{x-2}\right) = 0(x-2)$$
$$2x + 4 = 0$$
$$2x = -4$$
$$\frac{2x}{2} = \frac{-4}{2}$$
$$x = -2 \quad \therefore \quad A(-2,0)$$

د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو.

نو $y = -2$ کیږي او د تقاطع نقطه یې: $B(0,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين:

دلاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

$1: G(x) = \frac{4x-3}{2x+1}$ $\quad 2: F(x) = \frac{2x-6}{3x+6}$ $\quad 3: h(x) = \frac{3x+9}{x-6}$

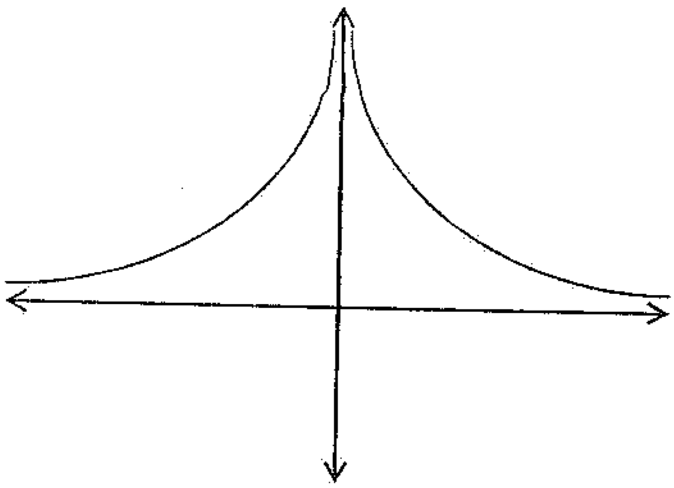
مثال: د $y = \frac{1}{x^2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	1	2
y	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$

$A\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ $\quad B(-1,1)$ $\quad C(1,1)$ $\quad D\left(2, \frac{1}{4}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$
2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$
3) $h(x) = x^2 - 9$
4) $y = 6^x$
5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

اکسپوننشل تابع $Exponintiol\ function$:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یې په توان کې وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = a^x$$

a ثابت عدد دی (x) متحول دی او (y) د (x) تابع دی.

که $(a > 1)$ وي تابع متزایده ده او که $(a < 1)$ وي نوتابع متناقصه ده.

د تعریف ناحیه یې د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یې د مثبت اعدادو سیټ دی. د ګراف د ترسیم لپاره یې (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیتونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یې د راکړشوې تابع ګراف لاس ته راځي.

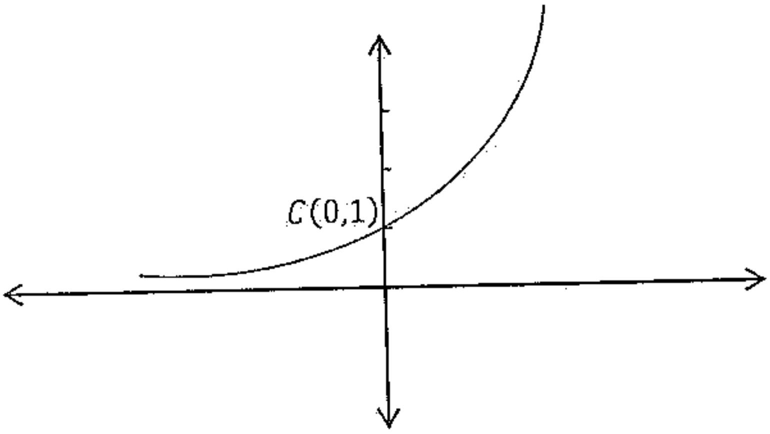
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $y = 2^x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ $C(0,1)$ $D(1,2)$ $E(2,4)$



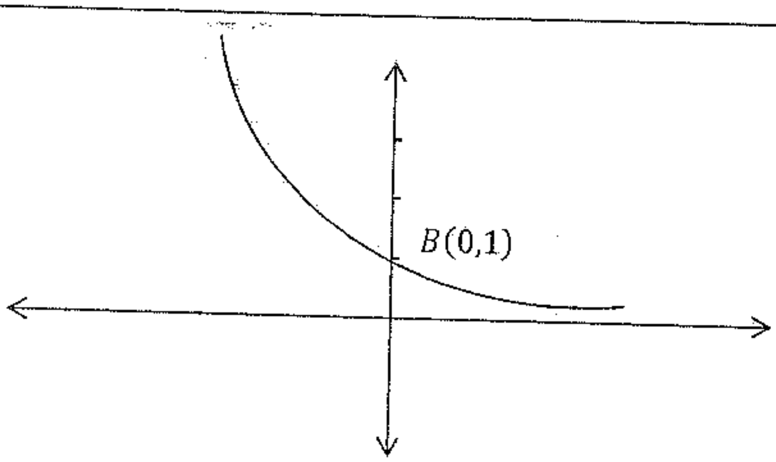
مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

x	-1	0	1	2
y	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$A(-1,2)$ $B(0,1)$ $C\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $D\left(2,\frac{1}{4}\right)$ $E\left(3,\frac{1}{8}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

$1\text{-}\ y = 3^x$ $\quad$ $2\text{-}\ y = 5^x$ $\quad$ $3\text{-}\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$4\text{-}\ \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$5\text{-}\ y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\quad$ $6\text{-}\ y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $\quad$ $7\text{-}\ y = 5^x$

$8\text{-}\ y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

لوګاریتمي تابع *Logarithmical functions*:

لوګاریتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعریف ناحیه یې د مکمل اعدادو سیټ دي او د تصویرونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ دی.ګراف یې په اوله او څلورمه ربعه کې رسمیږي.

د ګراف د ترسیم لپاره x ته څو قیمتونه ورکوو او د y قیمت پیدا کوو.

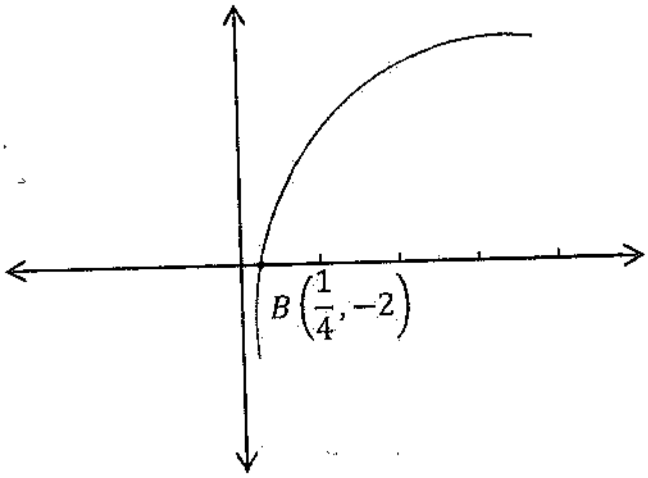
مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-3	-2	-1	0	1	2

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	−3	−2	−1	0	1	2

$A\left(\frac{1}{8},-3\right)$ $B\left(\frac{1}{4},-2\right)$ $C\left(\frac{1}{2},-1\right)$ $D(1,0)$ $E(2.1)$ $F(4,2)$



تمرين

دلاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $\log_3 x = y$ 2- $log_2 x = y$ 3- $log_4 x = y$

4- $\log_5 x = y$ 5- $log_2 x = y$ 6- $\log_8 x = y$

7- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ 8- $y = 3^{2x}$ 9- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دولسم فصل

ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټرسایکل باندې یو په بل پسې سپرېدلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوې قاعدې لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وایي.

لکه: 2,7,12,17,22

یا لکه: 5,15,75,375,1875

که د ردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7 , 21 , 63 ,189,567

او که د ردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه :

1, 5, 9, 13, 17 ...

دغیر معین ردیف په اخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په درې قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونیکي ردیف *Harmonecal Sequences*

1- حسابي ردیف :

هغه ردیف دی چه هر وروستني حد یې د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه کې لاس ته راځي. او یا دا چه د دوه عددو تفاضل یې ثابت وي. لکه:

7, 15, 23, 31, 39

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په (a_1) او مشترک تفاضل په (d) او دحدونو شمېر په (n) ښیو نو فارمول یې په لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ضریب ته متوجه شود (d) ضریب د حدو تر شمېر یو کم دې نو که د حدونو شمېر (n) وي نو د (d) ضریب به $(n-1)$ وي فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$a_1\,, a_1 + d\,, a_1 + 2d\,, a_1 + 3d\,, a_1 + 4d, \ldots + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (30) دې مشترک تفاضل يې (17) دی (51) حد يې څو دی؟

$a_1 = 30$
$d = 17$
$n = 51$
$a_{51} = ؟$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{51} = 30 + (51-1)17 = 30 + 50 \times 17$$
$$a_{51} = 30 + 850 = 880$$
$$a_{51} = 880$$

د (d) ، (a_1) او (n) فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: دیوه حسابي ردیف اول حد (15) دې (31) حد يې (585) دې مشترک تفاضل يې پیدا کړئ؟

$$d = \frac{585 - 15}{31 - 1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي ردیف منځني حد دطرفینو اوسط دې.

مثال:- د یوه حسابي ردیف (50)ام حد (1973) دی مشترک تفاضل يې (40) دی اول حد يې څو دې؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = 1973 - (50-1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$
$$a_1 = 13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (17) او اخري حدیي (2117) دی او مشترک تفاضل یي (21) دی د حدونو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوو یعنی په $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ کی دداخل شوي حدونه په (m) ښیواودوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض یي لیکو د (d) قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \quad \Longrightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال:- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ.

حل :

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

3 , 9.4 , 15.8 , 22.2 , 28.4 , 35

تمرین:

لاندې عبارتي سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د يوه حسابي رديف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه يي منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي رديف:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره ديوه ثابت عدد د ضربيدو په نتيجه کې په لاس راغلې وي يا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل يي ثابت وي. لکه :

2,8,32,128,512 ...

د هندسي رديف اول حد(a_1) په مشترک نسبت يي په (r) ښيي.

د هندسي رديف فارمول:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يي د مخکيني حد سره د يوه ثابت عدد د ضربېدو په نتيجه کې لاس ته راغلی وي او يا دا چه د دوه حدو تفاضل يي ثابت وي. لکه:

3, 12, 48, 192, 768

5, 10, 20, 40, 80, 160 ⋯

د هندسي رديف فامول:

اول حد يي په (a_1) او مشترک فصل په (r) او ورستنی حد په (a_n) ښيو نو .

$$a_1, a_x r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د (r) توان ته ځير شو د (r) توان د حدو د شمېرڅخه يو کم دې نوکه دحدونو شمېر (n)وي نو د (r) توان به $(n-1)$ وي نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \dots \dots a_1 r^{n-1}$$
$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یي $r = 3$ دي اوم حد (a_7) یي څو دي؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د (a_1)او (r)قیمتونه د لاندې فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دي مشترک نسبت یي $(r = 2)$ دی اول حد یي څو دي ؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دی اوم حد یي (5832) دی مشترک نسبت یي پیدا کړئ ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد$(a_1 = 10)$ دی (n) ام حد یي $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یي (2) دي د حدونو شمېر یي څو دی؟

حل :

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Longrightarrow 128 = 2^{n-1} \Longrightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Longrightarrow n = 7 + 1 = 8 \Longrightarrow n = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د يوه هندسي رديف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څوم حد يي $\frac{1}{16}$ دي؟

$a_1 = 2$ $\qquad a_1 r^{n-1} = a_n$

$a_2 = 1$ $\qquad 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$

$r = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a_n = \frac{1}{16}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$n = ?$ $\qquad n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \quad \Rightarrow n = 6$

د هندسي رديف خصوصيات:

1- په هندسي رديف کی هر حد دطرفينو د حاصل ضرب جذردي.

مثال: (3, 6,12,24,24) د يوه هندسي رديف حدونه دي نو ليکو چه :

$$\sqrt{3(12)} = 6 \qquad and \qquad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په يوه هندسي رديف کی اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدو د شمېر په توان رفع شي او دويم جذر يي ونيول شي د رديف ټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال :-لکه (2, 6, 18, 54) يو هندسي رديف دی نو د دويم خاصيت سره سم ليکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$
$$11664 = 11664$$

3- که يو هندسي رديف طاق حدونه ولري نو د منځني حدمربع يي د اول او اخر حدو د حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: (5, 10, 20, 40, 80) يو هندسي رديف دی نو د دريم خاصيت سره سم ليکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$
$$400 = 400$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي رديف کې د حدو داخلول:

که د يوه هندسي رديف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه يې منځ ته ورداخل کړو نو د هندسي رديف دفارمول څخه د (r) قيمت پيدا کوو. د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمېر (n) اوتر دخول وروسته د حدو شمېر $(m+2)$ دی نو د (n) په عوض په فارمول کې $(m+2)$ ليکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال: د يوه هندسي رديف دوه حدونه (3) او (96) دي څلور نور حدونه يې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \qquad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3,6, 12 ,24 , 48 , 96

مثال: درې داسې عددونه پيدا کړئ چه دويم حد يې د اول حد څخه د (3) په اندازه او دريم حد يې د دويم حد څخه د (6) په اندازه زيات وي او يو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x+9}{x+3} \Longrightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9$$

$$9x = 6x + 9 \Longrightarrow 9x - 6x = 9 \Longrightarrow 3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Longrightarrow x = 3$$

$$x = 3 \qquad x + 3 = 6 \qquad x + 6 = 9$$

3- هارمونيکي رديف:

د حسابي رديف معکوس ته هارمونيکي رديف وايي. مثلاً لاندې رديف يوحسابي رديف دی. لکه:

(2,4,6,8 ,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دغه رديف معکوس رديف عبارت له $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ څخه دي دغه رديف ته هارمونيکي رديف وايي.

مثال: په يوه هارمونيکي رديف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d = -3$ دی ترادف يې جوړ کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{4},\frac{1}{4}-3,\frac{1}{4}-6,\frac{1}{4}-9,\frac{1}{4}-12,\cdots$$

$$\frac{1}{4},\frac{1-12}{4},\frac{1-24}{4},\frac{1-36}{4}\ \cdots$$

$$\frac{1}{4},\frac{-11}{4},\frac{-23}{4},\frac{-35}{4}\ \cdots$$

د هارمونيکي رديف حسابي اوسط:

$\frac{1}{a_{n-1}},\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n+1}}$ د هارمونيکي رديف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$

$$a_n=\frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونيکي اوسط پيدا کړئ

حل: $a_n=\frac{2(2\times8)}{2+8}=\frac{32}{10}=3.2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سلسلی Series:

د ردیف د حدونو مجموعې ته سلسله وایي.

سلسلې په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله Arithmetc Series

2- هندسي سلسله Geometric Series

1- حسابي سلسله :

د حسابي ردیف د حدونو مجموعې ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلې فارمول:

د سلسلو مجموعه په S_n ښیي، او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسې لیکو چه اخر حد یې په سر کې راشي بیا یې د ولنې مجموعې سره جمع کوو.

$$S_n = \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \cdots + a_1$$
$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$
$$2S_n = \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$2S_n = n\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلې عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بېل، بېل ولیکو نو لاندې فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(d = 6)$ دی د (20) حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$
$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$
$S_{20} = 10(128) = 1280$
$S_{20} = 1280$

مثال : د یوه حسابي رديف اول حد $(a_1 = 11)$ او یوپنځوسم حد یې $(a_{51} = 10761)$ دی
د (51) حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

حل :

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
$S_{51} = \frac{51}{2}(11 + 311) = \frac{51}{2}(11 + 411) = \frac{51}{2}(422) = 51 \times 261 = 10761$
$S_{51} = 10761$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کی $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قیمتونه دحسابي په عمومي فارمول کی وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په یوه ټولګي کی 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره یوه دویم شاګرد سره دوه په همدې ترتیب تر اخره روپی دي وواياست چه د ټولو سره څو روپی دي؟

حل:

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$
$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دجفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کې $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلې په عمومي فارمول کې وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n+2) = \frac{n}{2}\times 2(n+1)$$
$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدې ترتیب تر اخره مرسته کړې وي وواياست چه ټولو به څو روپۍ ورکړې وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$
$$S_{100} = 100(100+1) = 100\times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کې اول حد (1) اومشترک تفاضل يي (2) دي دغه عددونه د حسابي سلسلی په عمومي فارمول کې وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2}\cdot 2n = n^2$$
$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$
$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد يې د حدونو په شمېر کې ضرب شي د حدونو مجموعه لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : د يوه حسابي رديف د حدونو شمېر 41 او منځني حد يې 145 دې د حدونو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دويمه تبصره:

همدا ډول د اول او اخر حدو مجموعه د منځني حد د دوه چند سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

مثال: د يوه حسابي رديف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځني حد يې $a_5 = 27$ دی د اول اخر مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

دريمه تبصره:

کله، کله د څو اولو حدو او په همغه شمېر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او اخر حد معلوم نه وي. د اول او اخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m}$$

m_1 د شپږو اولو حدو مجموعه او m_2 د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او (m) د حدو شمېر دی.

مثال: يو حسابي رديف n حدونه لري د 4 لمړيو حدو مجموعه يې 62 او د 4 وروستيو حدو مجموعه يې 482 ده د ټولو حدو مجموعه يې څو ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$S_{m_1} = 62$

$S_{m_2} = 482$

$m = 19$

$S_{19} = ?$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$
$$S_{19} = \frac{19}{2}(136) = 1292$$
$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله *Geometric Series*:

د هندسي رديف د حدونو مجموعی هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلی فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

دواړه خواوی په (r) کی ضربوو اوبیا (I) رابطه ورځخه منفي کوو.

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \cdots + a_1r^n \ldots\ldots\ldots II$$
$$\pm S_n = \pm a_1 \pm a_1r \pm a_1r^2 \pm a_1r^3 \pm \cdots \pm a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$
$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$
$$\frac{S_n(r-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$
$$S_n = \frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$$

دغه سلسلی ته متزایده سلسله وايي.

مثال: د يوی هندسي سلسلی $a_1 = 5$ او مسترک نسبت يي $r = 3$ دي د $n = 7$ حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7-1)}{3-1} = \frac{5(2187-1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$
$$S_7 = 5465$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او که د I رابطي څخه II رابطه منفي کړو نو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسلې ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي رديف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يي $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{32-1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$S_5 = 15.5$

مثال: د يوې هندسي سلسلې د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يي 5 دی مشترک نسبت يي څو دی؟

حل:

$a_1 = 8$ $\qquad$ $120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$

$S_8 = 120$ $\qquad$ $r^3 + r^2 + r + 1 = 15$

$n = 4$ $\qquad$ $r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$

$r = ?$

1	1	1	−14	2
	2	6	14	
1	3	7	0	

$r = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسي سلسلې پواسطه په عام کسر باندې د اعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلې فارمول لیکو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

په دغه فارمول کې $(r^n \to 0)$ صفر کیږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ کیږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چه اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\overline{3}$ اعشارکسردی . په عام کسر یې بدل کړئ؟

حل:

$a_1 = o.\overline{3} = \frac{3}{10}$

$r = \frac{1}{10}$

$n = \infty$ $\qquad S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10\times 3}{10\times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$S_n = ?$ $\qquad S_n = \frac{1}{3}$

مثال: $0.8\overline{3}$ اعشار کسر دی په عام کسر یې بدل کړئ؟

حل:

$a = \frac{8}{10}$

$a_1 = \frac{3}{100}$ $\qquad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10-1}{10}}$

$r = \frac{1}{10}$ $\qquad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10\times 3}{100\times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$

$S_n = ?$ $\qquad S_\infty = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين

1- د (20)او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پيدا کړئ چه لمړی رقم يې (3) وي؟

2- يو ديوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنګونه وهي وواياست چه په شواروز کی څو زنګونه وهي؟

3- د يوه حسابي رديف ددری حدومجموعه (33) او د ضرب حاصل يې (1287) دی عددونه يې پيدا کړئ؟

4- د يوه حسابي رديف د څلورو حدومجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه يې (214) ده عددونه پيدا کړئ؟

5- د يوه حسابي رديف څلورو حدو دضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل يې (2) دی عددونه پيدا کړئ؟

6- (3003) کسان په يوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی يو نفربيا دوه بيا دری.......په همدی ترتيب تر اخره ولاړ دي وواياست چه څو قطارونه جوړوي؟

7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟

8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟

9- a , b او c په کوم شرط په يوه حسابي رديف کی شامل دي؟

10- د يوه رديف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنيو حدو د ضرب حاصل يې(285) دی عدونه پيدا کړئ؟

11- (3) او (243) د يوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟

12- (221) په دری برخو داسی ووېشئ چه د دريم او اول حد تفاضل يې (136) وي؟

13- د يوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه يې(65) ده ابعاد يې پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځی (20) اجوره لري اوبل سړی اول ورځ یوه روپۍ په دویمه ورځ دوه روپۍ په همدی ترتیب تراخره روپۍ اخلي ووایاست چه په څویمه ورځ به ددوی پیسی مساوي شي ؟

15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یي دشپږو اولنیو حدو د مجموعی دوچنده دي که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یي(126) وي تصاعد معین کړئ؟

16- $0.\overline{123}$ ، $0.\overline{925}$، $0.\overline{27}$ کسرونه په عام کسر بدل کړئ؟

17- $0.1\overline{36}$, $0.41\overline{6}$, $0.6\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د یوه قایم الزاویه مثلث زاویي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړئ؟

19- د یوی څلور ضلعي زاویي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمی زاویي (9) برابره وي د هری زاویي پراخوالی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیارلسم فصل

د رياضي استقراء Induction of Math

د ټولو طبعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي.

څرنګه چه د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د (n) لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n+1)$ لپاره فارمول ثبوتوو

مثال: ثبوت کړئ چه $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی

حل: د (1) لپاره يې ثبوتوو:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\times 2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د (1) لپاره صحيح دی. د (n) لپاره يې صحيح فرضوو.

د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د (1)لپاره يې ثبوتوو.

$$1 = \frac{1(3 \times 1 - 1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو، د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو:

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) + \{3(n+1)-2\} = \frac{n(3n-1)}{2} + \{3(n+1)-2\}$$

$$S_n = \frac{3n^2 - n + 6n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 3n + 2n + 2}{2}$$

$$S_n = \frac{3n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$

$$S_n = \frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$

مثال: ثابت کړئ چه لاندې مساوات د هر طبعي (n)لپاره صحيح دی.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنی رابطه صحيح ده څکه چه:

$$1^2 = \frac{1}{6} \times 1(1+1)(2 \times 1 + 1) = \frac{1}{6}(2)(3) = \frac{1}{6} \times 6 = \frac{6}{6} = 1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو. او د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6(n+1)^2}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} = \frac{2n^3 + 4n^2 + 5n^2 + 10n + 3n + 6}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{2n^2(n+2) + 5n(n+2) + 3(n+2)}{6} = \frac{(n+2)(2n^2 + 5n + 3)}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(2n^2 + 2n + 3n + 3)}{6} = \frac{(n+2)\{2n(n+1) + 3(n+1)\}}{6}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6} = \frac{1}{6}(n+1)\{(n+1)+1\}\{2(n+1)+1\}$$

ثابته شوه چه پورتنی مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: ثبوت کړئ چه لاندی فارمول د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a+a^2+a^3+\cdots+a^n=\frac{a}{a-1}(a^n-1)\quad,\ a\neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يي ثبوتوو.

$$a=\frac{a}{a-1}(a^1-1)=\frac{a(a-1)}{a-1}=a$$

د لپاره يي صحيح فرضوو.

د لپاره يي ثبوتوو.

$$a+a^2+a^3+\cdots+a^n+a^{n+1}=\frac{a}{a-1}(a^n-1)+a^{n+1}$$

$$S_{n+1}=\frac{a(a^n-1)+a^{n+1}(a-1)}{a-1}=\frac{a^{n+1}-a+a^{n+2}-a^{n+1}}{a-1}=\frac{a^{n+2}-a}{a-1}$$

$$S_{n+1}=\frac{a(a^{n+1}-1)}{a-1}=\frac{a}{a-1}(a^{n+1}-1)$$

تمرين

لاندې فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

1) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}\cdot n^2(n+1)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3) $2+4+6+\cdots+2n=n^2+n$

4) $1^2+3^2+5^2+\cdots+(n)^2=\frac{1}{3}+n(2n-1)(2n+1)$

5) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

6) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

7) $4+4^2+4^3+\cdots+4^n=\frac{4}{3}(4^n-1)$

8) $1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}=\frac{1}{4}(5^n-1)$

9) $2+2^2+2^3+\cdots+2^n=2(2^n-1)$

10) $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 6+\cdots+n(n+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

11) $2+5+10+\cdots+(n^2+1)=\frac{n(2n^2+3n+7)}{6}$

12) $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\{a+(n-1)d\}=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څوارلسم فصل

فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وايي.

د فکتوریل علامه دا (!) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$$

قضیه: $0! = 1$ کیږي

ثبوت: پوهیږو چه که یو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسیم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس ته راځي. لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضیه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

په دغه قضیه کې باید د $k < n$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\binom{n}{n} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n-1} = n$ کیږي؟

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,\{n-(n-1)\}!} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!\cdot 1} = n$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ کیږي؟

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ کیږي؟

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,\{(n+1)-(n+1)\}!} = \binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ کیږي؟

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,\{n-(k-1)\}!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(k-1)!\cdot k(k+1)!\cdots n}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{(n-k)!\,(n-k+1)\cdots n}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{k(k+1)\cdots n}{(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\cdots n}{k!}$$

$$= \frac{k!\,\{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{k!\cdot\{k(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot\{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n\}}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1) \cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

د بینوم قضیه $Binomial\ Theorem$:

که چېرته (a) او b حقیقي عددونه او (n) یو طبعي عدد وي نو

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n \cdots 1$$

د ریاضي د استقراء پواسطه د پورتني قضيي ثبوت پورتنی قضیه د (1) لپاره ثبوتوو.

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 = \binom{1}{0} a^1 + \binom{1}{1} b^1$$

د (n) لپاره يې صحيح فرضوو.او د $(n+1)$ لپاره يي ثبوتوو.

د (1) مساوات دواړه خواوي په $(a+b)$ کې ضربوو.

$$(a+b)^n (a+b) = (a+b)\left\{\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n\right\}$$

$$= \binom{n}{0}(a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1}(a^n b + a^{n-1} b^2) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k}\left(a^{n-k+1} b^k + a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n}(ab^n + b^{n+1})\right)$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\} a^n b + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\} a^{n-1} b^2 + \cdots + \left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\} a^{n+1-k} b^k$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}$$

که دغه مجموعه په $\sum$ وښیونو لیکو چه

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د دوه جمله يي د دعوی په اساس انکشاف ورکړئ

$(x+y)^5$

$$(x+y)^5 = \sum_{n=1}^{5} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ کېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځلسم فصل

limit لیمیټ

انټروال Interval:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلې ته انټروال وايي.

انټروال په دري قسمه دي.

1- تړلی انټروال Closed Interval :

هغه انټروال دی چه د دواړو انجامو نقطی پکی شاملی وي.

اوپه غټو قوسو ښودل کیږي. لکه:

$$A = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,]$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي.

$$A = [x\epsilon IR/1 < x < 10]$$

2- نیم کښ انټروال Half Open Interval:

هغه انټروال دی چه د یوه انجام نقطه پکی شامله او د بل انجام نقطه پکی شامله نه وي. لکه:

$$A = [4, 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$$

اود سیټ په شکل داسی لیکل کیږي. $A = [x\epsilon IR/4 \leq x < 14]$

3- خلاص انټروال Open Interval:

هغه انټروال دې چه د دواړو انجامو نقطی پکی شاملی نه وي. لکه:

$$A = (4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16)$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي.

$$A = (x\epsilon IR/4 < x < 16)$$

مجاورت Vicinity:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که یوه نقطه د یوه انټروال په وسطي نقطه کی واقع وي نو دا انټروال ددی نقطی متناظر مجاورت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه (1)د (5)او (3) متناظر مجاورت دی. په یوه مجاورت کې هره نقطه زیات متناظر مجاورتونه لري.

د لیمیټ تعریف:

$Kart\ weierstras$ کارت ویرس ترس انګلیسي ریاضیدان چه په (1897 – 1815) م سنه کې اوسېده دلیمیټ تعریف داسې کړېدې.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی هغه عدد دې چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعریف په ناحیه یو داسی مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصویر د تابع د لیمیټ په مجاورت کی شامل وي.

یعنی د $F(x)$ دتابع لیمیټ د (a) په نقطه کی (b) دې په دی شرط چه د (b) دهر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کی د (D) یو داسی مجاورت موجود وي چه د(D) دهر عنصر تصویر په (N)کی شامل وي. او داسی لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع لیمیټ د $x \to 1$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x+3) = 5\cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د لیمیټ ثبوت په دوه طریقو کیږي.

1- د جدول پواسطه   2- د مجاورت په طریقه

1- د جدول په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

(x) ته د دواړه خواوڅخه قیمتونه ورکوواو د (y) قیمتونه پیدا کوو.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-12	-7	-2	3	8	13	16	23	28

دپورته جدول څخه معلومیږي چه (x)ته په هره اندازه چه (1) ته نژدی قیمت ورکړشي په همغه اندازه د (y)قیمت (8) ته نژدی کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

د تابع لیمیټ (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N=(8-\varepsilon,8+\varepsilon)$$

د (D) د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کې لیکو

$$8-\varepsilon<5x+3<8+\varepsilon$$
$$8-\varepsilon-3<5x<8+\varepsilon-3$$
$$5-\varepsilon<5x<5+\varepsilon$$
$$\frac{5}{5}-\frac{\varepsilon}{5}<\frac{5x}{5}<\frac{5}{5}+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$1-\frac{\varepsilon}{5}<x<1+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$D=\left(1-\frac{\varepsilon}{5},1+\frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5=\frac{1}{2}\right)$ قیمت ورکوو.

$$N=\left(8-0.5,8+0.5\right)$$
$$N=(7.5,8.5)$$
$$D=\left(1-\frac{\frac{1}{2}}{5},1+\frac{\frac{1}{2}}{5}\right)=\left(1-\frac{1}{10},1+\frac{1}{10}\right)=(0.9,1.1)$$
$$D=(0.9,1.1)$$
$$\lim_{x\to0.9}(5x+3)=5\times0.9+3=7.5$$
$$\lim_{1.1}(5x+3)=5.5+3=8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کې د تابع لیمیټ دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $2=\lim_{x\to1}\left(3-\frac{1}{x}\right)$ کېږي؟

$$N=(2-\varepsilon,2+\varepsilon)$$
$$2-\varepsilon<3-\frac{1}{x}<2+\varepsilon$$
$$2-3-\varepsilon<-\frac{1}{x}<2-3+\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1-\varepsilon < -\frac{1}{x} < -1+\varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)} > -x > \frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) = \left(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{5}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{1}-\frac{5}{4} = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{1}-\frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

د ليميټ د استعمال ځايونه *Utilization of limit*:

اسحق نيوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لايبنز (Leibniz) په (1646 -1716) م کالونو کې د ليميټ پواسطه د انتيګرال او ديفرينسيال مسايل حلول يعنې دليميټ داستعمال ډېر مهم ځايونه د ديفرينسيال اوانتيګرال د مسايلو حلول دي. او هم د مشتق تعريف دليميټ څخه په غير نامکن دی.

ارشميدس د دايرې دمحيط د اندازه کولو لپاره داسې محاطي مضلعګانې په دايره کې رسمولې چه ضلعې يې بې اندازه کوچنې وې په دې ترتيب يې د (2π) تقريبي قيمت پيداکړ .نوموړي هم د ليميټ د استعمال څخه استفاده کړې وه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیمیټ پیدا کول:

که وغواړو چه په یوه نقطه کی د یوی تابع لیمیټ پیدا کړو.نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ دتابع لیمیټ د $(x \to 3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(5x - 8) = 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع لیمیټ $(x \to -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع لیمیټ په $x \to 3$ کی پیداکړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\left(4 - \frac{5}{x+2}\right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

دصفر په نقطه کی د یوی تابع د لیمیټ پیدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع دلیمیټ پیدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی یي لیمیټ همدغه ثابت عدد دې.

مثال: $\lim_{x\to 0}(7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$

که په تابع کی ثابت عدد نه ؤ لیمیټ یي په صفر کی صفر دې.

مثال: $\lim_{x\to 0}(3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع لیمیټ:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت اومخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي لیمیټ یي په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب: چه په صورت کې ثابت عدد وي او په مخرج کې نه وي لیمیټ یې په صفر کې لایتناهي دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-4x+7}{2x^2-3x}=\frac{7}{0}=\infty$$

ج: چه په صورت کې ثابت عدد نه وي او په مخرج کې وي لیمیټ یې په صفر کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{2x^2+7x-11}=\frac{0}{-11}=0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کې ثابت عدد نه وي دلته بیا څو حالتونه موجود دي.

a- چه دصورت او مخرج دټیټ حد درجې مساوي وي لیمیټ یې په صفر کې د کوچني توان حدو دضریبونسبت دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3-6x^2+12x}{5x^3+3x^2-6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2-6x+12)}{x(5x^2+3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2-6x+12}{5x^2+3x-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

b- چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج د ټیټ حد د درجې څخه ډېره وي لیمیټ یې په صفر کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^4+5x^3-4x^2}{8x^3-4x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(11x^3+5x^2-4x)}{x(8x^2-4x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^3+5x^2-4x}{8x^2-4x-3}=\frac{0}{-3}=0$$

چه د کسر د صورت د ټیټ حد درجه د مخرج دټیټ حد د درجې څخه کمه وي لیمیټ یې په صفر کې (∞) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+5x^2-4x}{2x^4+2x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2+5x-4)}{x(2x^3+2x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+5x-4}{2x^3+2x^2+5x}$$

$$=\frac{-4}{0}=-\infty$$

په (∞) کې د یوی تابع لیمیټ:

په (∞) د یوې تابع لیمیټ په دوه حالته کی مطالعه کوو.

الف: په (∞) کی د تامی تابع لیمیټ : د تامی تابع لیمیټ په (∞) کی (∞) دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(3x^3-7x^2+7x-17)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}-\frac{17}{\infty^3}\right)=\lim_{x\to\infty}3x^3=3\cdot\infty^3=\infty$$

ب: په (∞) کی د کسري تابع لیمیټ: د کسري تابع لیمیټ په (∞) کی په دری حالته کی مطالعه کوو.

a- که دکسر د صورت درجه دمخرج د درجی څخه ډېره وه لیمیټ یې په (∞) کې (∞)دې.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x^2+6x-30}{2x^2+5x-21}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{21}{x^3}}=\frac{7-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{21}{\infty^3}}=\frac{7}{0}=\infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجی سره مساوي وي نولیمټ یې په (∞) کی د لوړ توان والاحدود ضریبو نسبت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-8x^2+6x-30}{2x^3+5x^2-21x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{8-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{2+\frac{5}{\infty}-\frac{21}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}=\frac{8}{2}=4$$

c- که د کسر دصورت درجه دمخرج د درجې څخه کمه وي لیمیټ یې په (∞) کې صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-8}{x^3+2x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

د لیمیټ قضیې $Theorms\ of\ limit$:

اوله قضیه:

د ثابتې تابع لیمیټ په یوه نقطه کې په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_{3} 12=12$$

دویمه قضیه:

د یوه عدد او یوې تابع د حاصل ضرب لیمیټ د تابع د لیمیټ اوثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=kb$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}6x^2=6\lim_{x\to 2}x^2=6\times 2^2=24$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریمه قضیه:

ددوه تابعګانو د مجموعی لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=b+c$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2+7x^3)=\lim_{x\to 2}5x^2+\lim_{x\to 2}7x^3$$
$$(5\cdot 2^2+7\cdot x^3)=5\cdot 2^2+7\cdot 2^3$$
$$(5\cdot 4+7\cdot 8)=5\cdot 4+7\cdot 8$$
$$(20+56)=20+56$$
$$(76)=76$$

ځلورمه قضیه:

ددوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot h(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}h(x)=b\cdot c$$

مثال:

$$\lim_{x\to -1}(x-1)^2=\lim_{x\to -1}(x-1)\cdot\lim_{x\to -1}(x-1)$$
$$=(-1-1)^2=(-1-1)\cdot(-1-1)$$
$$(-2)^2=(-2)(-2)\Rightarrow 4=4$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b}{c}$$

$$\left(\lim_{x\to a}g(x)=c\neq 0\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

شپږمه قضیه:

د یوی جذري تابع لیمیټ په یوه نقطه کی دتابع دلیمیټ دجذر سره مساوي دی په همغه نقطه کې:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^6}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}8x^6}=\sqrt[3]{8\cdot 2^6}=2\cdot 2^3=16$$

بې نهایت کوچنۍ تابع: که د یوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی صفر شي دی تابع ته بی نهایت کوچنۍ تابع وایي. لکه:

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

تبصره:

a- د بی نهایت کوچنۍ تابع گانو مجموعه یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

b- د بی نهایت کوچنۍ تابعگانو دضرب حاصل هم یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x\to a$ په صورت کی یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي نو:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$$

d- که چیری $\varepsilon(x)$ یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي او $u(x)\neq 0$ وي نو $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کی د $\lim_{x\to 3}(x^2-9)$ تابع لیمیټ پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=3^2-9=9-9=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع لیمیټ په $x\to\infty$ کې پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\cdot\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

1- د $\lim_{x\to a}f(x)=b$ ثبوت:

$\lim_{x\to a}f(x)=b+\varepsilon(x)$ فرضوو او دا چې $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ دي نو:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b$$

2- د $\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)=\{b_1+\varepsilon_1\}+\{b_2+\varepsilon_2\}$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2+\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}$$
$$\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2$$

3- د دوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کې د تابعګانو د لیمیټو دحاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$
$$\lim_{x\to a}f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a}g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2+b_1\varepsilon_2+b_2\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_1\cdot\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_2\varepsilon_1=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2$$

4- د دوه تابعګانو د نسبت لیمیټ په یوه نقطه کې د تابعګانو د لیمیټود نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

ثبوت:

$$f(x)=b_1+\varepsilon_1$$

$$g(x)=b_2+\varepsilon_2$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$=\frac{b_1b_2+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1+b_1b_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چه ε_1 او ε_2 ډېر کوچني مثبت عددونه دي نوصفر کيږي. نو ثابته شوه چه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د ساندويچ قضيه:

که $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ درې تابعګانې ولرو چه $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ وي که:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$$

نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ کيږي.

مثال: که $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\leq u(x)\leq\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو ? $\lim_{x\to 0}u(x)=$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=1=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نودسانډويچ د قضيي سره سم د $u(x)$ قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to a}u(x)=1$$

تمرین:

لاندې لیمیتونه حل کړئ؟

1- $\lim_{x\to0}(x^2-2x^2+5x+3)$

2- $\lim_{x\to-1}(x^2-2x-5)$

3- $\lim_{x\to0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4- $\lim_{x\to0}\frac{3x^3-4x^2+7x-14}{2x^2-11x+7}$

5- $\lim_{x\to0}\frac{4x^2-21x}{3x^3+5x^2+7x}$

6- $\lim_{x\to0}\frac{5x^3-4x^2}{7x^2-3x}$

7- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-3}{2x^2-3x+1}$

8- $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+5}{3x-1}$

9- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-11}{2x^3+3x^2-4x+7}$

10- $\lim_{x\to\infty}(4x^3-3x^2+4x-12)$

11- $\lim_{x\to3}\frac{3x^2-3x+7}{1+\frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x\to4}\left(\frac{x-3}{x-5}+\frac{x}{x+5}+\frac{x+4}{x}\right)$

اتمه قضیه:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

په داسې حال کې چه (n) يو طبعي عدد او (a) يو حقيقي عدد دي.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}x^{n-1}+a\lim_{x\to a}x^{n-2}+a^2\lim_{x\to a}x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}\lim_{x\to a}x+\lim_{x\to a}a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه قضيه د ټولو جذري افادود ليميټ د پيدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}{x-a}=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}a^{\frac{-(n-1)}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=?$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1-5}{5}}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x=y^6)$ او $a=b^6$ ښيو:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{y\to b}\frac{\sqrt[3]{y^6}-\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6}-\sqrt{b^6}}=\lim_{y\to b}\frac{y^2-b^2}{y^3-b^3}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{(y-b)(y+b)}{(y-b)(y^2+by+b^2)}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{y+b}{y^2+by+b^2}=\frac{b+b}{b^2+b^2+b^2}=\frac{2b}{3b^2}=\frac{2}{3b}$$

$$\therefore\quad b^6=a\quad\because\quad b=\sqrt[6]{a}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ابهام $Uncertainty$:

په اعدادو یا (∞) باندی د عملیو د نتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومي ته ابهام وائي.

مبهم اشکال په لاندی ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty}، \frac{0}{0}، 0\cdot\infty ، \infty-\infty ، 0^0، \infty^0، 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړیو شکلو یعنی $\left(\infty-\infty ، 0\cdot\infty ، \frac{\infty}{\infty} \frac{0}{0}\right)$ ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربیدو پواسطه

3- د تجزئي پواسطه

4- د لوهسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کی د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی ابهام منځ ته راشي صورت او مخرج په هغه متحول ویشو چه درجه یي لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{3}$$

2- د تجزیي پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی مبهم شکل غوره کړي او د تجزیي وړ وي تجزیه کوو یي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$
$$\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-6\cdot 2+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)-4(x-2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د یوی تابع ابهام د تقسیم او تجزیي پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی یی ضربوو.

مثال:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}^2-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\infty-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2 - 4}$$

$$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x\to3} (\sqrt{x+1}+2)$$

$$= \sqrt{3+1} + 2$$

$$\sqrt{4} + 2 = 2 + 2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x\to2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x\to2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{\frac{10x-4x^2-4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{(-4x^2+10x-4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{(-4x^2+2x+8x-4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{\{-2x(2x-1)+4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2\cdot2-1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\left(1^{\infty}، \infty^{0}، 0^{0}\right)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ کار اخیستل کیږي. چه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

د $e = 2.718281828$ عدد د یوه جرمني عالم ایولر $Euler$ پواسطه کشف شوېدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ایولر د فارمول شکل ته وروا ړوؤ نو $\frac{1}{\alpha}$ په x ښیو:

$$x=\frac{1}{\alpha}\Longrightarrow\because\ \ \alpha\to 0\quad\therefore\ \ x\to\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u=\frac{\alpha}{x}\quad\Longrightarrow\ \therefore\ \ x\to\infty\quad\because\quad u\to 0\ \ \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}}=\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u}=x\Longrightarrow u=\frac{1}{x}\quad\therefore\ \ u\to 0\quad\because x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}ln(1+x)\right\} = \lim_{x\to 0}\left\{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \qquad \therefore\ x\to 0 \quad \because\ u\longrightarrow\infty$$

$$= ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\} = lne = 1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

د سوال د حل لپاره (e^x-1) په (y) ښیو:

$$e^x-1 = y \Rightarrow e^x = 1+y \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+y) = x\ln e = \ln(1+y)$$

$$x = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y\to 0 \quad \because\ x\to\infty$$

$$= \frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

تبصره:

که یوه تابع د $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د لیمیټ د لاس ته راوړلو لپاره یې طبعي لوګاریتم نیسو او د پورتنیو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل یې لرلو د $(0\cdot\infty)$ شکل ته ئې را اړوو او د مخکینیو څلورو حالتو څخه چه په هر حالت ئې ابهام د منځه تللو ابهام ئې د منځه وړو.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \ln\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\{g(x)\ln f(x)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مبهم شکل عمومي حالت :-که $\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = 1^{\infty}$ وي په دې حالت کې (α) په $(u-1)$ ښيو:

$$(\alpha = u - 1)$$

$$\lim_{x\to a} u^{v} = \lim_{x\to a}(1+u-1)^{\frac{v}{u-1}\cdot u-1} = \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\cdot\alpha}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim_{x\to a}(v\alpha)}$$

ځرنګه چه $(\alpha = u-1)$ دی نو که $(u \to 1)$ وکړي په نتيجه کې $(\alpha \to 0)$ کوي په نتيجه کې ليکو چې:

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = \left\{\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim_{x\to a} v(u-1)} = e^{\lim_{x\to a} v(u-1)} = e^{p}$$

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = e^{p} \qquad , \qquad p = \lim_{x\to a}\{v(u-1)\}$$

1- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ پيدا کړئ؟

حل:

$$u = 1 + \frac{2}{x} \qquad , \qquad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = e^{p} \qquad , \qquad p = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left(1+\frac{2}{x}-1\right)\right\} = \lim_{x\to a} x\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = e^{p} = e^{2}$$

2- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قيمت محاسبه کړئ؟

حل: لمړی د ليميټ بڼه ليکو:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^{p}$$

$$p = \lim_{x\to a} v(u-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(1+\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}=e^{p}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^{p}$$

$$p=\lim_{x\to 0}\{v(u-1)\}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}(\cos x-1)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=1\cdot\frac{0}{1}=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+1)^{\frac{1}{x}}=e^{p}=e^{0}=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{4}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{8}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{4}{1}=4$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cos 2x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x$$

$$=-2\cdot 1\cdot 0=0$$

مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=?$

حل:

$$x-1=y\Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}ln(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=u\Rightarrow y=\frac{1}{u}\qquad\therefore\ y\to 0\quad\because\quad u\to\infty$$

$$\frac{1}{ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}=e$$

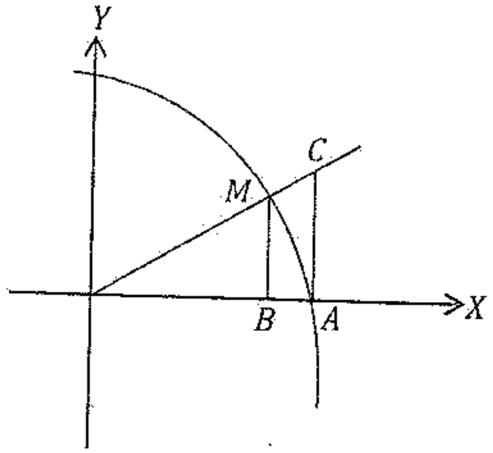
د مثلثاتي تابعګانو ليميټ *limit of Trigono metrical Functions*:

د يوې زاويې د ساين او هغه زاويې د نسبت ليميټ په صفر کی (1) دې. يعنې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:په یوه دایره کې یو داخلي او یو خارجي مثلثونه رسموو اوهم ددې مثلثو تر منځ یوه قطاع په نظر کې نیسو. مساحتونه ئي پیدا کوو او مقایسه کوويي.



$$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{MB} < \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\widehat{AM} < \frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AC}$$

$$\overline{OB} = \cos x \quad , \quad \overline{MB} = \sin x \quad , \quad \overline{OA} = 1 \quad , \widehat{AM} = x$$

$$\sin x\cos x < x < \tan x$$

$$\frac{\sin x\cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x\to 0}\cos x$$

د ساندویچ د قضیې سره سم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=?$

حل:

$$2x=\alpha \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore\ x\longrightarrow 0 \qquad \because \quad \alpha\longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot1=2$$

2- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{5\tan 2x}{7x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\lim_{x\to0}\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{5\cdot 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

3- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-(1-2sin^2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1-1+2sin^2x}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2sin^2x}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\sin x=2\cdot1\cdot0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{\frac{3x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to0}\cos 3x}}{5x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

5- مثال: $\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}$$

$$2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

6- مثال: $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-1-cosx+1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-cosx}$$

$$=\sqrt{2(1^2)-1}=\sqrt{2\cdot 1-1}=\sqrt{2-1}=1$$

د تابعګانو متمادیت (اتصال):

د اتصال له مخې تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع 2- غیر متمادي تابع

1- متمادي تابع :

هغه تابع ده چه دګراف د ترسیم په وخت کې یې د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنی ګراف یې پریکړون نه لري.په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپونشل تابع، لوګاریتمي تابع، د ساین او کوساین تابعګانې متمادي تابعګانی دي په دې شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلې نه وي .

2- غیر متمادي تابعګانی:

هغه تابعګانی دي چه ګراف یې څو ټوټې وي. لکه هوموګرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکېنټ او کوسیکېنټ تابعګانې.

کولای شو چې متمادي تابګانی په غیرمتمادي تابګانو بدلی کړو مګر نشو کولای چې غیر متمادي تابعګانی په متمادي تابعګانو بدلې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادیت شرطونه:

د متمادیت شرطونه درې دي.

1- د (a) نقطه باید په $\lim_{x\to a} f(x)$ کې شامل وي.

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیټ په یوه نقطه کې باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

که پورتني درې واړه شرطونه په یوه تابع کې موجود وه تابع متمادي ده او که د دغه درې شرطو څخه یو یې هم موجود نه و تابع متمادي نه ده غیرمتمادي ده.

1- مثال: وښیاست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \to 2$ په نقطه کې متمادي ده.

حل:

1- $2\epsilon dom f(x) \because 2 \in IR$

2- $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

3- $f(2) = 2^2 + 2\cdot 2 - 1 = 7$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادي ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $(x = -1)$ په ټکي کې وڅېړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په (-1) کې صفر کیږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفر کوي د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی $(-1 \notin dom f(x))$ نو تابع متمادي نه ده

د تابع د لیمیټ شرطونه :که دیوی تابع د ښي لاس لیمیټ د تابع دچپ لاس د لیمیټ سره مساوي وي نوتابع لیمیټ لري. اوکه د ښي لاس لیمیټ د چپ لاس د لیمیټ سره مساوي نه ؤ لیمیټ نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي لاس لیمیټ :

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د ښي لاس لیمیټ دې په دې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(a, a+\delta)$ یو خلاص انټروال موجود وي چه د دې انټروال د هر عنصر تصویرد (N) په مجاورت شامل وي او داسې لیکل کیږي.

$$\lim_{x\to a+} f(x)$$

د چپ لاس لیمیټ:

د (b) عدد د (a) په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د چپ لاس لیمیټ دې په دې شرط چه د (b) د هر مجاورت (N) لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(-\infty - a, a)$ یو انټروال موجود وي چه د دې مجاورت د هر عنصر تصویرد (N) په مجاورت کې شامل وي او داسې لیکل کیږي.

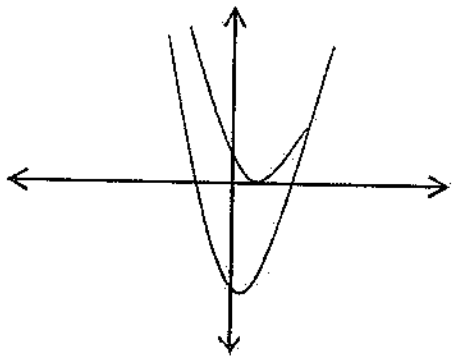
$$\lim_{x\to a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \quad x < 2 \\ x^2 - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} (x^2 - 3) = 1$$
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \exists$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; \ x\geq 1\\ 1-x & ; \ x<1\end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې یې متمادیت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}(2x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x\to 1} f(x)=\nexists$ تابع لیمیټ نه لري.

نو تابع د $(x=1)$ په نقطه کې غیر متمادي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x=a)$ په نقطه کې متمادي وي او $f(x)$ په $(x=g(a))$ کې متمادي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x=a)$ کې متمادي ده.

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(g(a))$$

2- د يوې طاقت لرونکې تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره لمړی دتابع لیمیټ پیدا کوو او بیا یې په همغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^a=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^a$$

3- د اکسپوننشل تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره قاعده دتابع دتوان دلیمیټ په توان لیکو.

$$\lim_{x\to a}(b)^{f(x)}=b^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

4- د لوګاریتمي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې دتابع دلیمیټ دلوګاریتم سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\log_b f(x)=\log_b \lim_{x\to a} f(x)$$

5- د يوې مثلثاتي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د هغه تابع دلیمیټ دمثلثاتي نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin\lim_{x\to a} f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي تابعګانو خواص:

که د دوه تابعګانو څخه هره یوه په یوه نقطه کې متمادي وي نو د دوی مجموعه ،تفاضل ، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کې متمادي دی.

مثال: که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعګانې متمادي وي نو ثبوت کړئ چې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$ هم متمادي دي.

حل:

$1: Df(x) = IR$
$2: \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$
$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

$1: Dg(x) = IR$
$2: \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$
$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

اوس د تابعګانو د مجموعې او حاصل ضرب متماديت څېړو.

الف:

$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$
$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$
$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$
$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$
$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = f(1) + g(1) = 6$

ب: د او تابعګانو د حاصل ضرب متماديت وڅېړئ؟

$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$

$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$

$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$

د تابعګانو حاصل ضرب هم متمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين

د لاندې تابعګانو لیمیټ پیدا کړئ؟

1: $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x+17)$

2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+3}{x+1}$

3: $\lim_{x\to1}(x^3+5x^2-11x+1)$

4: $\lim_{x\to1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاړسم فصل

مشتق

مشتق مفعوله صیغه ده د اشتقاق څخه اخیستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کی د مصدر څخه د نورو افعالو او اسماؤ اخیستلو ته اشتقاق وايي. د مشتق څخه مقصد د دوه یمی درجی ،دریمی درجی اوداسی نورو تابعګانو د میل پیدا کول دي.

د خطي تابع میل:

په خطي تابع کی د مستقیم خط میل د $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ پواسطه پیدا کیږي.

مثال: $A(3,7)$ او $B(5,9)$ د مستقیمی کرښی دوه نقطی دي میل یې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-7}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنګه چه په منحني خطو کی دوه نقطی په یوه استقامت واقع نه وي نو له همدی امله دمنحني خطو دمیل د پیدا کولو لپاره د مستقیم خط د میل څخه استفاده کوي.نو ځکه د منحني میل ته مشتق وايي.

مثلاً $f(x) = x^2$ یوه تابع راکړشوی ده د میل ددغه تابع د ګراف دوه نقطی په یوه استقامت وجود نلري نو په تقریبي ډول دوه نقطی پیداکواو میل یې لاسته راوړوفرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ دمنحني خط دوه نقطی دي نود مستقیم خط د میل څخه استفاده کوونو لیکو چه:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحني خط دهری اختیاري نقطی میل عبارت $\lim_{x\to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د ګراف میل د $P(3,-3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چې د $P(3,-3)$ په نقطه کې $x = 3$ دی نو کولای شو چه د میل په فارمول کې د (x) په عوض (3) وضع کړو.

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{2(3+h) - (3+h)^2 - (2 \cdot 3 - 3^2)}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{6 + 2h - (9 + 6h + h^2) - 6 + 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h - 9 - 6h - h^2 + 9}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{h(-4-h)}{h} = \lim_{h \to 0}(-4-h) = -4 \Rightarrow m = -4$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 - 1$ د تابع میل د $(x = -3)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \lim_{x \to -3} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{x \to -3} \frac{\{(-3+h)^3 - 1\} - \{(-3)^3 - 1\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-27 + 27h - 9h^2 + h^3 - 1 + 27 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 - 9h^2 + 27h}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{h(h^2 - 9h + 27)}{h} = \lim_{h \to 0}(h^2 - 9h + 27) = 27$$

منحنی یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعني:

$$S = f(t)$$

د t_1 او t_2 په وختونو کې د وهل شوو فاصلو تفاضل او وختو د تفاض نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وایي. یاداچه دتابع اومتحول دزیادت نسبت ته متوسط سرعت وایي.

$$\bar{v} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیټ ته لحظوي سرعت وایي

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کی متوسط تغیرات د [2,5] په انتروال کی پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2,4]$ په انتروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که (x) د (Δx) په اندازه زیادت وکړي نو (y) د (Δy) په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیټ ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنی تصور پیري فرماټ (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 – 1665)م کې کړی ؤ نوموړي خپلی لیکلنی د نړی ریاضیدانانو ته پیشنهاد کړلی. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 – 1727)م او جورج ویلیم لایبنز(1664 – 1715)م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کی ثابت او د ساینسدانانو کمیسون ته یي پیشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یي په ډېر ښه ډول وکړ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق تعریف:

د صفر په نقطه کې د تابع او متحول د زیادت دنسبت لیمیټ ته مشتق وايي. لکه $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ او په $\acute{f}(x)$ یا $\acute{y}$ ، $\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx}$ ښودل کیږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\acute{y}=\acute{f}(x)$$

1- مثال: د $f(x)=2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

2- مثال: د $f(x)=x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2\quad\Rightarrow\acute{f}(x)=3x^2$$

3- مثال: د $f(x)=\sqrt{x}\,;\,x\geq 0$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق د تعریف په مرسته وشمېرئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(2x^2+x)}{\Delta x}$$

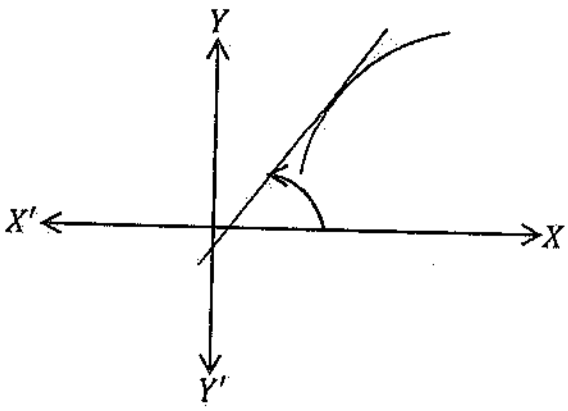
$$\lim_{\Delta\to x0}\frac{2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+x+\Delta x-2x^2-x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(4x+2\Delta x+1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x+1)=4x+1 \quad \Rightarrow f'(x)=4x+1$$

د مشتق هندسي تعبير

په یوه نقطه کې د یوه منحني خط مېل دهغه زاویې تانجانت دی چه مستقیمه کرښه یې د (XX') د محور دمثبت جهت سره جوړوي.



1- مثال: د هغه مماس مېل او معادله پیدا کړئ چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني باندې د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمیږي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{2(x+\Delta x)^3 - 1\} - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس میل $m = f'(x) = f'(1) = 6(1)^2 = 6 \cdot 1 = 6$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \quad \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس میل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې اوخصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع مشتق د (x_0) په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x_0)$$
$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{{x_0}^2} \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = -\frac{1}{{x_0}^2}$$

5- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\{4(x + \Delta x)^2 - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3 - 4x^2 + 3}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x}$$
$$\acute{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ؟

1- $f(x) = \sqrt{x + 1}$ 2- $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$ 4- $f(x) = \frac{2}{x^2+5x-7}$

5- $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 6- $f(x) = 5x - 1$

د مشتق قوانين:

اوله قضيه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض : $y = c$ يوه تابع لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \quad \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

د يوې طاقت لرونکی تابع مشتق:

مفروض : $y = f(x) = x^n$ يوه طاقت لرونکی تابع ده.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = \acute{f}(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$

$$\Delta y = (x + \Delta x - x)\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x \ + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x \ + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}$$

$$\acute{y} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعګانو د مجموعي مشتق د تابعګانو دمشتقو د مجموعي سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = u' + v'$

ثبوت: د تابعګانو د جمع حاصل په (y) ښیو:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y' = u' + v'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق

د دوه تابعګانو دتفاضل مشتق د تابعګانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض: (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$

ثبوت: د (u) او (v) تابعګانو تفاضل په (y) ښيو.

$$y = u - v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$
$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \qquad \& \qquad v = 1$$
$$\acute{u} = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$
$$\acute{v} = 0 \qquad \because \acute{y} = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2 \ , \quad v = -3x \ , \ w = 5$$
$$\acute{y} = \acute{u} + \acute{v} + \acute{w}$$
$$\acute{y} = (4x^2)\,' - (-3x)\,' + 5\,'$$
$$\acute{y} = 8x - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولی تابع مشتق ضرب دویمه تابع جمع د دویمې تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعګانی لرو.او د حاصل ضرب تابع يي په(y) ښيو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب : ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$
$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = v\acute{u} + \acute{v}u + 0 \cdot \acute{v}$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \quad \Rightarrow \acute{u} = 3x^2$$
$$v = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3x$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$
$$\acute{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$
$$\acute{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$u = 2x^2 - 5x + 7 \quad \Rightarrow \acute{u} = 4x - 5$$
$$v = 3x - 15 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$$
$$\acute{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$$
$$\acute{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$$

د حاصل تقسیم مشتق:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی دصورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندی.

مفروض: د (u) او (v) دوه تابعګانی لرود خارج قسمت تابع يي په (y) ښيو. نو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتوو چي:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{u} = 3$$
$$v = 1 - 2x \quad \Rightarrow \acute{v} = -2$$
$$y = \frac{u}{v} \quad \Rightarrow \acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3(1-2x) - \{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2} = \frac{3 - 6x + 4 + 6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x)=\frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 7x - 15 \quad \Rightarrow \acute{u} = 7$$
$$v = 2x^2 + 3x \quad \Rightarrow \acute{v} = 4x + 3$$
$$\acute{f}(x) = \frac{7(2x^2+3x) - (4x+3)(7x-15)}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{14x^2 + 21x - 28x^2 + 60x - 21x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{-14x^2 + 60x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$

3- مثال: د $y=\frac{x^2}{3x+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}$$
$$u = x^2 \quad \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه يې دوه وي. لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق يې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع .

فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ یوه تابع راکړ شوی ده.

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\acute{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال:- د $y = \sqrt{x}$ مشتق پيدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$\acute{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}\right]\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}\right]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: د $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}$ مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{6x^2-6x+4}{2\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}}$$

د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول يي د بل متحول تابع وي يا دا چه د تابع ، تابع ته مرکبه تابع وايي.لکه که د f تابع د $g(x)$ تابع وي او g د x تابع وي نودغه تابع ته مرکبه تابع وايي.

د مرکبې تابع د مشتق دفارمول د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول اجراَئت کوو.

$$\Delta y=\Delta y\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\acute{y}_{(x)}\Rightarrow\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\acute{y}_{(u)}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\acute{u}_{(x)}$$

$$\acute{y}_{(x)}=\acute{y}_{(u)}\cdot\acute{u}_{(x)}$$

نو په دې اساس که $y=u^n$ وي مشتق يي $\acute{y}=nu^{n-1}\cdot\acute{u}$ دى.

او که $y=\sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$\acute{y}=\frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- مثال :

$$y = (2x^2 - 1)^3$$
$$\acute{y} = 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x$$
$$= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x$$
$$\acute{y} = 48x^5 - 48x^3 + 12x$$

2- مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3- مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \acute{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

څلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$$\acute{y} = -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x$$
$$= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$$

نوټ:

که د (f) تابع د (x_0) په نقطه کې مشتق ولري نو $\acute{f}(x)$ دهغه مماس میل دی چه د $[x_0, f(x_0)]$ په نقطه په منحني باندی مماس وي.

مثال: د $f(x) = x^3$ دتابع میل د $x_0 = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: څرنګه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کيږي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو میل يې عبارت دی.

$$\acute{f}(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که يوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کی د مشتق ورو وي نو دا تابع په دې نقطه کی متمادي ده مګر ممکن يوه تابع په يوه نقطه کی متمادي وي مګر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ د تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ

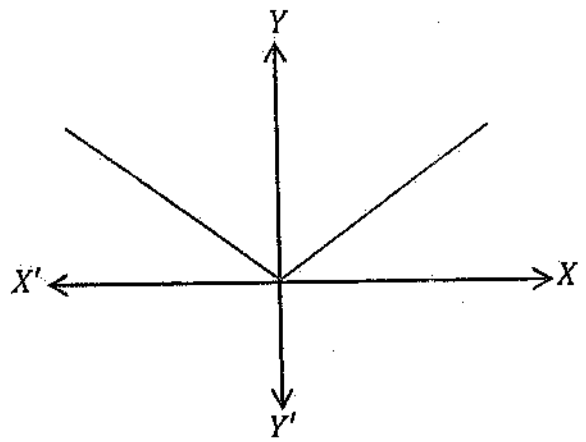
$$\acute{f}(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\acute{f}(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$$

لیمیټ نلري نو مشتق هم نلري.

$$f(x) = |x|$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابعګانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$y = \sin x$$
$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$
$$= 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x$$
$$\acute{y} = \cos x$$

که $f(x) = \sin u$ وي او (u) د (x) تابع وي نو مشتق يي عبارت دی له:

$$\acute{f}(x) = \acute{u}\cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sin 4x \\ u = 4x &\Rightarrow \acute{u} = 4 \\ \acute{f}(x) &= \acute{u}\cos u \end{aligned}\right| \qquad \acute{f}(x) = 4\cos 4x$$

2- مثال :- د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}$$
$$g(x) = x^3 \Rightarrow \acute{g}(x) = 3x^2$$
$$h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \acute{h}(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3-مثال: د $y=\frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u=\sin x \Rightarrow \acute{u}=\cos x$$
$$v=1+x \Rightarrow \acute{v}=1$$
$$\acute{y}=\frac{\cos x(1+x)-1\cdot\sin x}{(1+x)^2}$$

د $y=\cos x$ تابع مشتق:

د $y=\cos x$ تابع مشتق $\acute{y}=-\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y=\cos x$$
$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$
$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-y=\cos(x+\Delta x)-\cos x$$
$$\Delta y=-2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=-2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\Delta y=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$
$$y=\cos x\Rightarrow \acute{y}=-$$

پورتنی مشتق په لاندې ډول هم ثبوتولای شو.

$$sin^2x+cos^2x=1$$
$$\cos x=\sqrt{1-sin^2x}=(1-sin^2x)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\cos x)'=\frac{1}{2}(1-\sin^2x)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin x\cos x)=\frac{-2\sin x\cos x}{2(1-sin^2x)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{cos^2x}}$$
$$=-\frac{\sin x\cos x}{\cos x}=-\sin x$$

1-مثال: د $f(x)=\sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x)=\sin 2x=2\sin x\cos x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = \acute{u}v + \acute{v}u$

$\acute{f}(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$

$\acute{f}(x) = 2(cos^2x - sin^2x) = 2\cos 2x$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$y = x \Rightarrow \acute{y} = 1$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$

$\acute{f}(x) = 1 - (cos^2x - sin^2x) = 1 - \cos 2x$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$\acute{f}(x) = 2(2\sec 2x \tan 2x + 2sec^2 2x) = 4\sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$

د $y = \tan x$ تابع مشتق:

$y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = \dfrac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{cos^2x} = \dfrac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$

$\acute{y} = \dfrac{1}{cos^2x} = sec^2x$

څلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$y = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$u = \cos x \Rightarrow \acute{u} = -\sin x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$v = \sin x \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{sin^2 x} = \frac{-(sin^2 x + cos^2 x)}{sin^2 x}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{sin^2 x} = -csc^2 x \qquad \therefore \quad co\acute{t}gx = -csc^2 x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$u = 1 \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{cos^2 x} = \frac{\sin x}{cos^2 x}$$

$$\acute{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$u = 1 \Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \sin x \Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{sin^2 x} = \frac{-\cos x}{sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x}$$

$$\acute{y} = -\cot x \csc x \; v$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه تابع کې څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کې وي نو کله چه د دغه ډول تابعګانو مشتق پیدا کوو نو په نوبت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وايي او مشتق یي د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

لمړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'_{(x)} = \frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ رابطې څخه پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_{(x)} - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_{x} - (1)_x = 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_{y} - (1)_y = 1 - \frac{x}{1}\cos\frac{x}{y} - 0 = 1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x\cdot\cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کې د (x) او (y) قیمتونه وضع کوو چه $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi.1)} = \frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1 + \pi\cos\frac{\pi}{1}} = \frac{\cos\pi}{1 + \pi\cos\pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطې ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$

$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{f}_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$\acute{f}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = -2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دپورتنی تابع ضمني مشتق په لاندی ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5\acute{y} - \acute{y} - 2x = 0$$

$$\acute{y}(6y^5 - 1) = 2x$$

$$\acute{y} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

د تابع دويم ضمني مشتق:

که يوه دويمه درجه دوه مجهوله تابع راکړشوی وي او وغواړو چه دويم ضمني مشتق يې پيدا کړو نو اول ضمني مشتق يې د فارمول پواسطه پيدا کوو.او بيا د مشتق دفارمولو پواسطه دويم ضمني مشتق پيدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دويم ضمني مشتق پيدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\acute{f}_{(x)} = 2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = -2y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\acute{y}_{(x)}$ د رابطې $y''_{(x)}$ پيدا کوو

$$y''_{(x)} = \frac{\acute{x}y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y}\cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = -\frac{1}{y^3}$$

دويم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کی د (y) مشتق نظر (x) ته د $(1,1)$ په ټکي کی پيدا کړئ او د منحني د مماس معادله پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = 2x + y$$
$$\acute{f}_{(y)} = x + 2y$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad \Rightarrow x + 2y \neq 0$$
$$\acute{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2\cdot 1 + 1}{1 + 2\cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1\cdot(x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلې ضمني مشتق په لاندې ډول هم پيدا کولای شو.

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$
$$2x + y + x\acute{y} + 2y\acute{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\acute{y} = 0$$
$$\acute{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دريم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$
$$\acute{f}_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$
$$\acute{f}_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د يوی تابع دويم ،دريم، څلورم ··· او نور مشتقات ونيسو ترڅو چه مشتق يي صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دريم مشتق ونيسئ؟

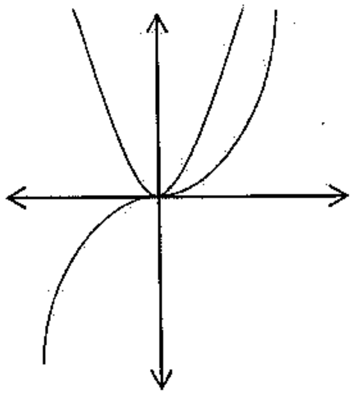
حل:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$f'_{(x)} = 3x^2 - 6x + 4$$
$$f''_{(x)} = 6x - 6$$
$$f'''_{(x)} = 6$$

دويم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پيدا کړئ؟ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

$$y' = x^2 \qquad y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دويم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نود $\left(y^{(9)}\right)^2 + y^2$ قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$y = \sin x + \cos x$
$\acute{y}_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$
$y''_{(x)} = -\sin x - \cos x$
$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$
$\vdots$
$y'(9)_{(x)} = \cos x - \sin x$
$\left(y^{(9)}\right)^2_{(x)} + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$
$= cos^2x - 2\sin x \cos x + sin^2x + sin^2x + 2\sin x \cos x + cos^2x$
$= 2sin^2x + 2cos^2x = 2(sin^2x + cos^2x) = 2 \cdot 1 = 2$

د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو دتزايد او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو، اصغري نقطو، اعظمي حجم، د لنډې فاصلې، اعظمي مساحت او داسې نورو شیانو دپیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعګانو د ګراف د ترسیم لپاره.

4- د مبهمو اشکالو دلیمیټ د پیداکولو لپاره.

لنډه دا چه د مشتق استعمال په فزیک، کیمیا، هندسه اونورو علومو کې زیات ګټور دی.

1- دتوابعو د تزاید او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a,b]$ په تړلې انتروال کې متمادي وي او په (a,b) انتروال کې مشتق ولري نو که $\acute{f}(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انتروال متزایده ده.او که $\acute{f}(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: وښیئ چه د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع ګراف متزاید دې؟

حل: څرنګه چه تابع تامه ده نو $domf(x) = IR$ دې مشتق یې په لاندې ډول دې.

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په مشتق کی د (x) په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کیږي نو $f'(x) > 0$ دی په نتیجه کی تابع متزایده ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انټروال کی متناقصه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده اومشتق لري د تناقص د انټروال د معلومولو لپاره $f'(x) < 0$ پیدا کوو.

$f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کی منفي دی نو تابع په همدی انټروال $(-1,1)$کی متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅیړئ؟

حل:

$D_{f(x)} = IR$
$f(x) = 5x - 4$
$f'(x) = 5 > 0$

تابع متزایده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انټروال کی متزایده او په کوم انټروال کی متناقصه ده.

حل: که $y' < 0$وي تابع متناقصه ده او که $y' > 0$ وي تابع متزایده ده.

$y = x^2$
$y' = 2x$
$y' < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$ د تناقص شرط
$y' > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$ د تزاید شرط

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	$+2$	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$+\infty$ ↘	4 ↘	1 ↘	0	1 ↗	4 ↗	$+\infty$ ↗

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې تابع بحراني ټکي

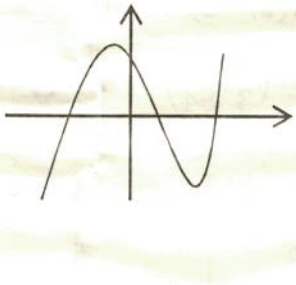
د یوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه $Maximum\ point$:

د تابع د ګراف تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه $Minimum\ point$:

د تابع دګراف تر ټولو ټيټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



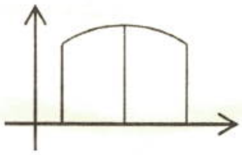
ثابته تابع :

هغه تابع ده چې مشتق يي صفر وي.

$y' > 0 \quad y' < 0$

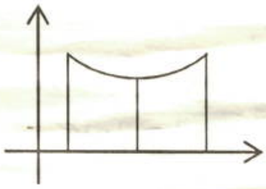
متزايده تابع :

که د (a, b) په فاصله کې $\acute{y} > 0$ وي، تابع متزايده ده.



متناقصه تابع :- که د (a, b) په فاصله کی $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده.

$\acute{y} < 0 \ \acute{y} > 0$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دې نقطه کې د تابع ګراف خپل جهت ته تغیرورکوي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ یوه تابع راکړ شوی ده ووایاست چه ددی تابع ګراف ځو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پیدا کوو اود (x) قیمتونه پیدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 7x + 2$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore \quad A(2,-2)$$ اصغري نقطه ده
$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad B\left(\frac{1}{3}, \frac{17}{54}\right)$$ اعظمي نقطه ده

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		2	$+\infty$
$\acute{f}(x)$	+	0	−	0	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{17}{54}$		-2		-2	$+\infty$

دویم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه یا نسبتي نقطه پیدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پیدا اوعلامی یې مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{1\cdot(x^2-2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-x^2-2x+2=0 \Leftarrow f(x)=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 2=4+8=12$

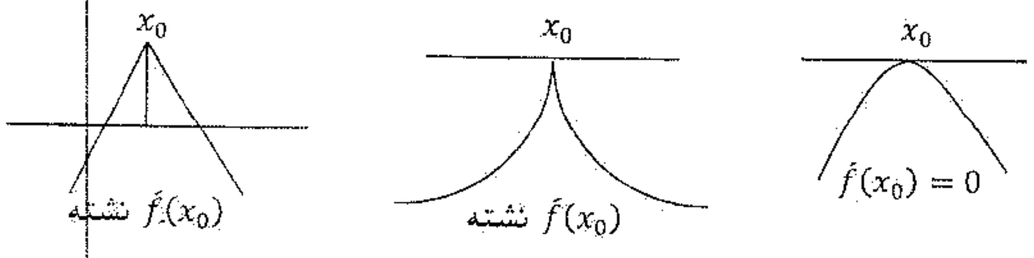
$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2(-1)}=\frac{2+\sqrt{3.4}}{-2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{-2}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{-2}=-2.73$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2(-1)}=\frac{2-\sqrt{3.4}}{-2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{-2}=0.73$

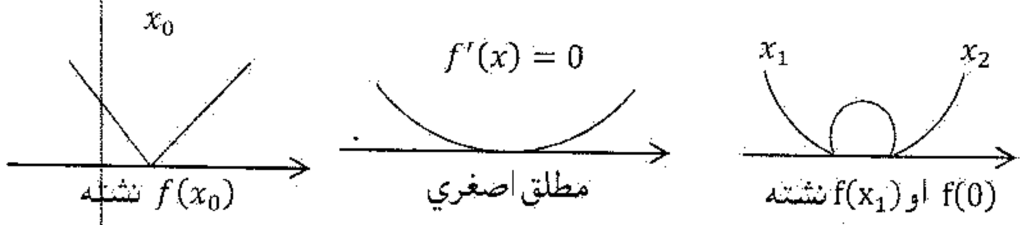
x		-3		-2.73		-1		0.73			
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f(x)$	↘	$\frac{2}{15}$	↘	min	↗	0	↗	max	↘	-2	↘

د کسر اشاره د جذرو منځ کې مثبت او په خارج منفي ده.

مطلق اعظمي $Maximum$ د $f(x)$ په تابع کې که د هر (x) لپاره $f(x)\le f(x_0)$ وي نو $(x_0,f(x_0))$ ټکي ته مطلق اعظمي وايي.



مطلق اصغري $Minimum$ که د $f(x)$ د تابع دتعریف د ناحیې د هر (x) لپاره $f(x)\ge f(x_0)$ وي نو $(x_0,f(x_0))$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

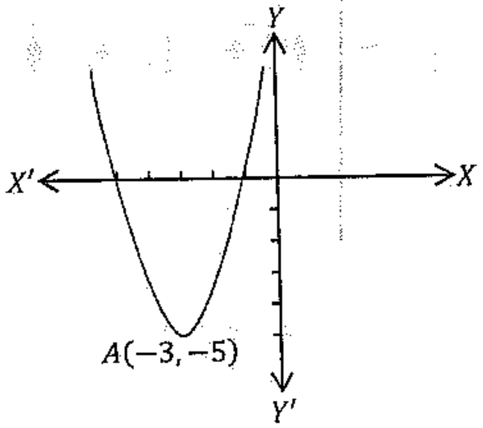
لمړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = x + 3 \quad \because \acute{f}(x) = 0 \quad \therefore \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$$

$A(-3, -5)$



دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ د تابع اعظمي او اصغري نقطې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3$$

په اعظمي او اصغري نقطو کی د تابع مشتق صفر وي.

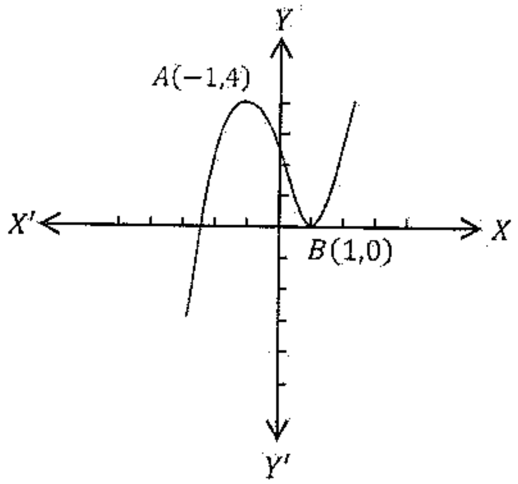
$$\acute{f}(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$$

اصغري ده $x_1 = 1 \quad \Rightarrow A(1,0)$

اعظمي ده $x_2 = -1 \quad \Rightarrow B(-1,4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د ګراف د ترسیم طریقه:

1- د تابع اتصال مطالعه کوو.

2- د محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیدا کوو.

3- د تزاید او تناقص د انټروال د معلومولو لپاره د مشتق اشارې مطالعه کوو.

4- د ګراف مجانبونه معلوموو.

5- د دقیق ترسیم لپاره (x) ته څو قیمتونه ورکوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

6- په جدول کې د تابع د ګراف وضعیت مطالعه کوو.

7- پیدا شوې نقطې د وضعیه کمیتونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو یې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$2 + x - x^2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \Delta = 9$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \ \ \& \ \ x_2 = \frac{-1 - 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې $A(-1,0)$ او $B(2,0)$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تابع د ګراف اعظمي یا اصغري نقطې د پیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$\acute{y} = 1 - 2x$$
$$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \;\Rightarrow -2x = -1 \;\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د (x) دغه قیمت په تابع کې وضع کوو د (y) قیمت لاس ته راوړو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه یا اعظمي ده یا اصغري ده.د تابع دویم مشتق پیدا کووکه $y'' > 0$ ؤاصغري نقطه ده اوکه $y'' < 0$ ؤ نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنګه چه همېشه منفي دې نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پیدا کول:

د تابع دویم مشتق نیسو او قیمت یې پیدا کوو بیا یې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعیه کمیات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{y} = 3x^2 + 18x - 6$$
$$y'' = 6x + 18$$
$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$
$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3,73)$ انعطاف نقطه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویمه درجه تابع ګراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

ډومېن يې د حقيقي اعدادو سیټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کی تابع متمادي ده. د تناظر محور يې د اول مشتق پواسطه پیدا کیږي.

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محوردی.

د راس د نقطې د پیدا کولو لپاره د تناظر په محور کی د x قیمت په تابع کی وضع کوو د راس د نقطېوضعیه کمیتونه لاس ته راځي.

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه يې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وي د تابع ګراف مقعر دی یعنی ګراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وي د تابع ګراف محدب دي یعنی ګراف اعظمي نقطه لري

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

2- د $X\acute{X}$ د محور سره د تقاطع نقطه پیدا کوو:

$$y = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

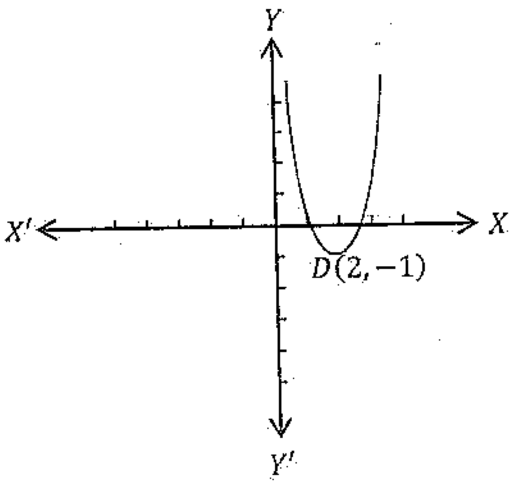
$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$
$$A(1,0) \quad , \quad B(3,0)$$

3- د $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع د تقاطع نقطه پيدا کوو.

$x=0$
$y=0-4\cdot 0+3$
$y=3$
$C(0,3)$

4- د بحراني نقطې دپيدا کولو لپاره د تابع مشتق نيسو او د (x) قيمت پيدا کوودا قيمت په تابع کې وضع کوو د (y) قيمت لاس ته راځي د (x) او (y) يوه جوړه قيمتونه بحراني نقطه تعينوي بيا يې دويم مشتق پيدا کوو که $y'' > 0$ ؤ بحراني نقطه اصغري ده او که $y'' < 0$ ؤ نوبحراني نقطه اعظمي ده.

$\acute{f}(x)=2x-4 \Rightarrow x=2$
$f(2)=2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1 \Rightarrow D(2,-1)$



دويم مثال: $f(x)=-x^2+2x+2$ د تابع تحولات مطالعه اوگراف يې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f=(-\infty,+\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د XẊ سره تقاطع:

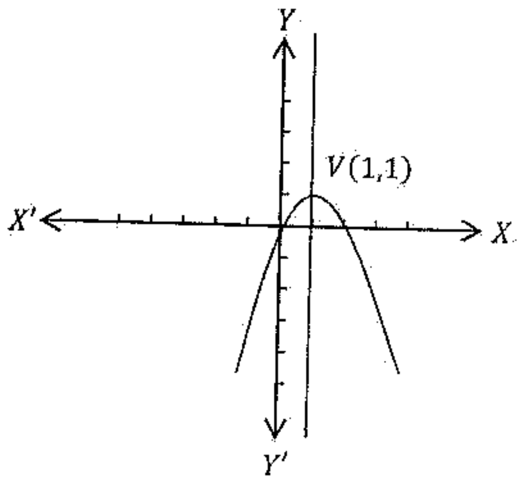
$f(x) = 0$
$-x^2 + 2x = 0$
$x(-x + 2) = 0$
$x_1 = 0$
$-x + 2 = 0$
$-x = -2 \Rightarrow x = 2$
$A(0,0)$ & $B(2,0)$

3- د YY′ سره تقاطع:

$x = 0$
$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$
$C(0,0)$

4- بحراني نقطه يې پيدا كوو. نومشتق يې نيسو.

$\acute{f}(x) = -2x + 2$
$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$
$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$
$V(1,1)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

هوموګرا فيک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوی وي عمومي شکل يې دادی

$$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} = \frac{ax+b}{cx+d}$$

مجانب:- $Asymptote$: که د يوه مستقيم او يوه منحني تر منځ فاصله په لايتناهي کی صفر شي دا مستقيم ددی منحني مجانب دي.

مجانب د منحني لپاره لاربښود دي.

مجانب په دری قسمه دی.

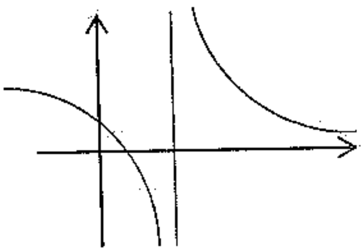
1- عمودي مجانب ($Vertical\ Asymptote$)

2- افقي مجانب ($Horizontal\ asymptote$)

3- مايل مجانب(Slant Asymptote)

1- عمودي مجانب:

که په يوه ثابت عدد کی د تابع ليميټ (∞) شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندی د $Y\acute{Y}$ د محور سره موازي رسميږي د تابع ګراف عمودي مجانب دی. يعني که $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.



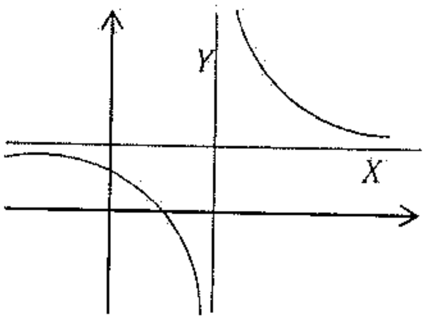
(c) ketabton.com: The Digital Library

2- افقي مجانب:

که په لايتناهي کې دیوې تابع لیمیټ یو ثابت عدد ؤ نو هغه خط چه ددې ثابت عدد په ترتیب د YY' د محور سره موازي رسمیږي د راکړشوې تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

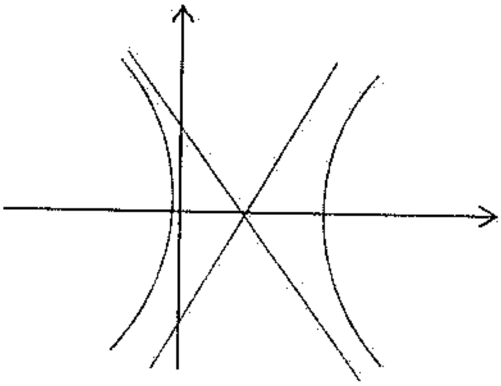
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د ګراف افقي مجانب دی.



3- مایل مجانب :Slant Asymptote

په کسري تابعګانو کې که دصورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه ډېره وه نو دغه ډول تابعګانی مایل مجانب لري دمایل مجانب دترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

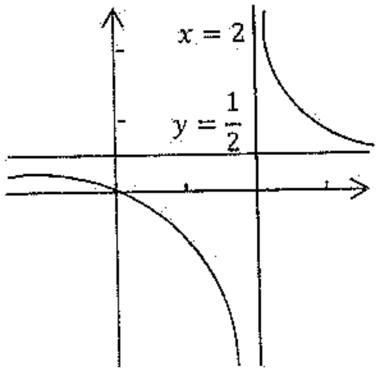
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2\cdot 2-4} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ عمودي مجانب دی.

مايل مجانب يې پيدا کوؤ.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}} = \frac{1+0}{2-0}\frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ افقي مجانب دی.



دويم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ؟

حل: مايل مجانب:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{2} \Rightarrow y = x+2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري ځکه د هری تابع ګراف چه مايل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

دريم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

عمودي مجانب

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

بالاخره $x=-1$ او $x=2$ عمودي مجانبونه دي.

مايل مجانب نلري.

د مجانب د ټاکلو عمومي لار:

1- که د $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموګرافیک تابع کی (m) دصورت درجه او (n) دمخرج درجه وي نو

الف: که $m<n$ وي نو د (x) محورافقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي نو $y=b$ افقي مجانب دی (b) د صورت اومخرج دمساوي درجووالا حدودضريبونو نسبت دې.

ج: که $m>n$ وي افقي مجانب نلري د مايل مجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج ددرجې څخه د واحد په اندازه ډېره وي مايل مجانب لري او افقي مجانب نلري.

مثال: $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزايد او تناقص په باب خپل نظر وليکئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{2\cdot x-1(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}=\frac{5}{x^2}$$
$$\acute{f}(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

تابع متزايده ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انعطاف نقطه يې داسې پيدا کيږي.

$$\acute{f}(x) = 0$$
$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$
$$f''(x) = 6ax + 2b$$
$$f''(x) = 0$$
$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$
$$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$$
$$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$$
$$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$$

1- مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅیړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

$$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2+4x+4)$$
$$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$$
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 6x$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$
$$f(0) = 0^3 + 3\cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$$

$A(0,-4)$ اصغري نقطه ده.

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$$
$$y_2 = 0$$

$B(-2,0)$ اعظمي نقطه ده.

انعطاف نقطه پيدا کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0$

$6x + 6 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$

$C(-1,-2)$ انعطاف نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$y = 0$

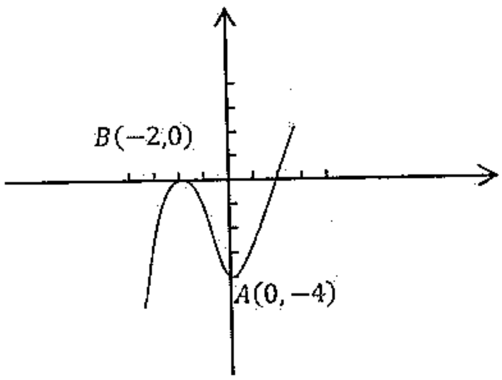
$(x-1)(x+2)^2 = 0$

$$\left.\begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \\ C(1,0) \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x=-2 \\ D(-2,0) \end{matrix}\right\}$$

د $Y\acute{Y}$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو $x = 0$ فرضوو.

$y = 0^3 + 3 \cdot x^2 - 4 = -4$

$E(0,-4)$



دويم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = -x^3 + 3x^2$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 6x = 0 \ \Rightarrow -3x(x-2)$

$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ \Rightarrow x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

$f(x) = 0$

$-x^3 + 3x^2 = 0 \ \Rightarrow -x^2(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$O(0,0) \ \Rightarrow B(3,0)$

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

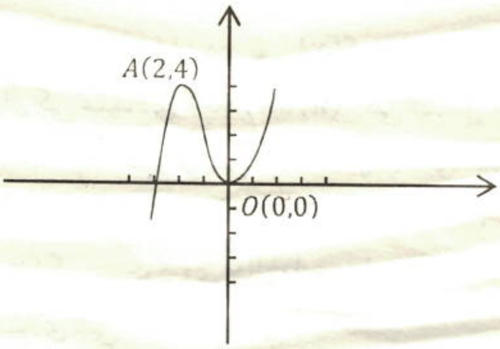
انعطاف نقطه پیدا کوو دویم جذر یې پیدا کوو.

$f''(x) = -6x + 6$

$x = 1$

$f(1) = 2$

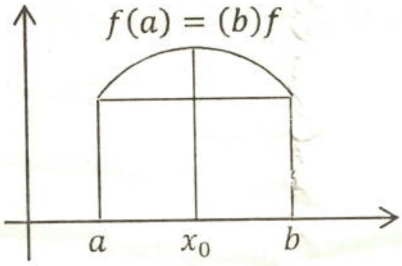
$C(1,2)$



د رول قضیه: *Theorem of Rolle:*

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ انټروال کې متمادي وي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نود $a < x < b$ په انټروال کې $(x_0, f(x_0))$ یو تکي شته چه $\acute{f}(x) = 0$ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي. نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- که تابع ثابته وي نو $\acute{f}(x) = 0$ دی.

2- که $f(x)$ تابع ثابته نه وي او $x_2, x_1 \in (a,b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نو تابع په $x_0 \in [a,b]$ نقطه کی $Maximum$ لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع يوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو کی $\acute{f}(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د $[a,b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د $Rolle$ قضيه پری تطبيق کړئ؟

حل: پوهيږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر (x) لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي اوپه $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نود $Rolle$ د قضيي سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلاً د (x_0) يوه نقطه بايد موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنګه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلی اقلاً يو حل بايد په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی دری ځله دا قيمتونه اخيستلای شي.

دويم مثال: د $[a,b] = [-1,1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ په تابع باندی د $Rolle$ قضيه تطبيق کړئ؟

حل: دانټروال د پيل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذيره نده مګرد رول قضيه پری دتطبيق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ متمادي ده او د $[-1,1]$ په انټروال کی د (x_0) يو عدد شته چه $\acute{f}(x_0) = 0$ شي اوهغه $x_0 = 0$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y}(x) = \frac{\acute{u}(x)}{2\sqrt{u}}$ څخه استفاده کوو.

$$\acute{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \acute{f}(0) = \frac{0}{\sqrt{1-0^2}} = 0$$

د متوسط قیمت قضیه:

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د (a,b) په انټروال کې دمشتق وړ وي نو د (a,b) په انټروال کې د (c) یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي.

$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$ یعنی $\acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت :- $f(x) - \acute{f}(x) \cdot x$ په $g(x)$ ښیو:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x$$

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot a = \frac{f(a)b - f(a)a - f(b)a + f(a)a}{b-a}$$

$$g(a) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \ldots\ldots\ldots I$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot b = \frac{f(b)b - f(b)a - f(b)b + f(a)b}{b-a}$$

$$g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b-a} \ldots\ldots\ldots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرګندیږي چه $g(a) = g(b)$ دی نو درول دقضیې سره سم د $[a,b]$ په انټروال کې د (c) یوداسې عدد شته چه $\acute{g}(c) = 0$ دی نو لیکو چه

$$\acute{g}(x) = \acute{f}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \acute{g}(c) = \acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\acute{g}(c) = 0$$

$$\acute{f}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow \acute{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b) - f(a) = \acute{f}(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x) = 2x^3 - 8x + 1$ په تابع کې دمتوسط قیمت قضیه د $[a,b] = [1,3]$ په انټروال کې وڅیړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انټروال کی متمادي ده او د $(1,3)$ په انټروال کی د مشتق وړ ده نو د متوسط قیمت د قضیې سره سم د $(1,3)$ په انټروال کی یو (x_0) شته چه

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{36}{2} = 18$$

د (c) دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 + 8 = 26 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{6}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{26}{6}} = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x = +\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کی شامل دی نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مګر $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انټروال کی شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کیږي.

د لوهپیټال قاعده:

که د کسري تابعګانو لیمیټ د $\left(\frac{0}{0}، \frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوپیټال په طریقه کولای شو چه لیمیټ یې پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی د تابع د مشتق دلیمیټ سره مساوي دی په همغه نقطه کی .که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود ؤ دویم مشتق یې نیسو په همدی ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کووتر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots\cdots$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \frac{2\cdot 2^2 + 2 - 10}{2^2 - 4} = \frac{8 + 2 - 10}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2 - 4x + 5x - 10}{x^2 - 2^2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2) + 5(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2} = \frac{2\cdot 2 + 5}{2 + 2} = \frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لمړی مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x+\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

دویم مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=4\cdot 3^3=4\cdot 27=108$$

دریم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

دبحراني ټکو تطبیق:

1- داسې دوه عددونه پیدا کړئ چه د جمع حاصل یي (20) اود ضرب حاصل یې اعظمي وي؟

حل:

اول عدد $=x$

دویم عدد $=20-x$

د ضرب حاصل $=f(x)=x(20-x)=20x-x^2$

$f'(x)=20-2x$

$f'(x)=0$

$20-2x=0\Rightarrow -2x=-20\Rightarrow x=10$

$f(10)=20\cdot 10-10^2=200-100=100$

$f(0)=20\cdot 0-0^2=0$

$f(20)=20\cdot 20-20^2=400-400=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اعظمي نقطه $[10،100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يي (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t-2)(t-3)$ ده متوسط سرعت يي د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځني سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4-3} = \frac{2-0}{4-3} = 2$$

3- د کرې دحجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{د کرې مساحت} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{sphere}}{A_{Sphere}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ رابطه موجود ده د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم ليکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د يوې مستطيلي ځمکې محيط (200) دی اعظمي مساحت يي پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د مستطيل طول} = x$$

$$\text{د مستطيل عرض} = y$$

$$\text{د مستطيل مساحت} = S$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$محیط = 2x + 2y = 200$

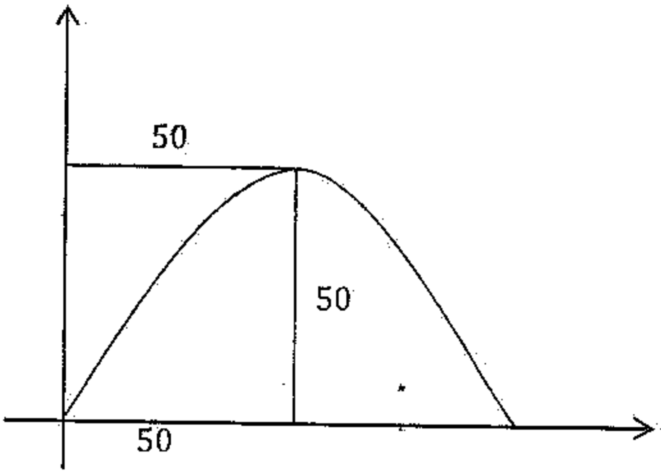
$محیط = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2 \quad ,D_f = IR$

د $[0.100]$ په انټروال کې د تابع اعظمي مساحت پیدا کوو.

$\acute{S} = 100 - 2x$

$\acute{S} = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$



6- د (A) ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحنی دپاسه حرکت کوي ووایاست چه څه وخت به د (A) او مبداء تر منځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$

$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$

$\acute{d}_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$

$\acute{d}_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{2x^4}{2}=\frac{8}{2} \quad \Rightarrow x^4=4 \quad \Rightarrow \sqrt[4]{x^4}=\sqrt[4]{4}=\sqrt[4]{2^2}$$

$x_1=\sqrt{2}$ & $x_2=-\sqrt{2}$

$$d_{\sqrt{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^2+\frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=2+\frac{4}{2}=4$$

$$d_{-\sqrt{2}}=4$$

يو مربع القاعده مكعب مستطيل لروچه د درى واړه بعدونو مجموعه يي (24)ده اعظمي حجم يي پيدا كړئ؟

حل: دقاعدى اوږدوالى په (x)او ارتفاع په (y) ښيو.

$$x+x+y=24 \ \Rightarrow y=24-2x$$
$$y\geq 0 \qquad \& \qquad 0\leq x\leq 12$$
$$V=x^2\cdot y=x^2(24-2x)=24x^2-2x^3$$
$$\acute{V}(x)=48x-6x^2 \quad \because \ \acute{V}(x)=0 \quad \therefore \quad 48x-6x^2=0$$
$$x(48-6x)=0 \qquad , \qquad x_1=0 \ \& \ x_2=8$$
$$V(0)=24\cdot 0^2-2\cdot 0^3=0$$
$$V(8)=24\cdot 8^2-2\cdot 8^3=1536-1024=512$$
$$V(12)=24\cdot 12^2-2\cdot 12^3=3456-3456=0$$

د مكعب مستطيل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه يي $(8cm)$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اولسم فصل

انتیگرال Integral

انتیگرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي.

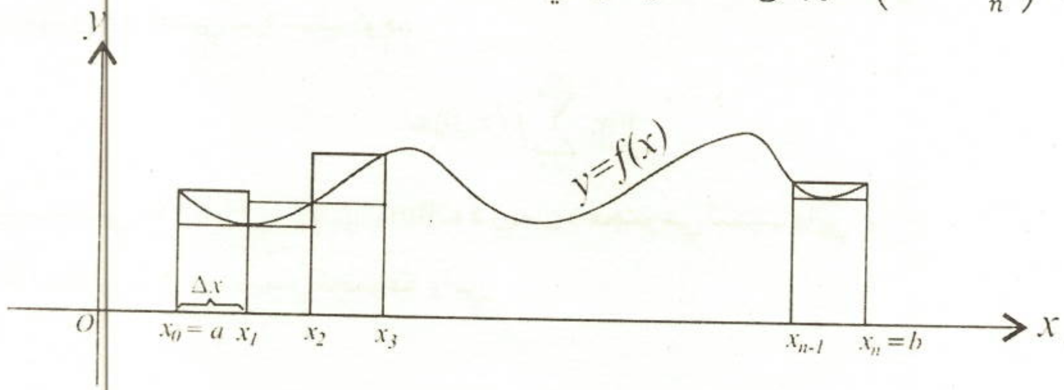
اوپه اصطلاح کی د مشتق دعمليي معکوسی عمليي ته انتیگرال وائي.یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقی ته انتیگرال وایي.

ارشیمیدس چه په (287 – 212)ق م کی یي ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او دجامداتو دحجمودمحاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیگرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه.ریمان (1866 – 1826) اولایبنز (1941 – 1875) معین انتیگرال کشف کړ.

دانتیگرال علامه لایبنز(∫) لیکلی ده. چه د ریمان دمجموعی (sum)د لمړي توري غزېدلی شکل دی.غېر معین انتیگرال لیووبل (1882 – 1809)کشف کړی دي. گانوس (1855 – 1777) دانتیگرال اولین جدول ترتیب کړي دي.د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیگرال په باب زیات پرمختگ وشو.

د ریمان مجموعه Riemann's sum:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انټروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده.دهغه سطحی د مساحت دپیدا کولو لپاره چه د $X\acute{X}$دمحور او $y = f(x)$ تابع دگراف تر منځ واقع دي که منظم هندسي شکل یي لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یي مساحت پیدا کیږي.او هندسي شکل یي نه لرلو نو د $[a , b]$ ترلی انټروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $\left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$ رابطی څخه لاس ته راځي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د هرمستطیل دهر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ لپاره په لاندې ډول دی.

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \cdots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \;, [x_1, x_2] \;, [x_2, x_3], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کې د لاندینیو مستطیلونو مساحت په $f(x_{i-1},)\Delta x$ او د پورتنیو مستطیلو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښیو نو لیکو چه:

$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونه مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په A وښیونو:

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

د رابطې د اطراف لیمیټ نیسو.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{N\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\,\Delta x$$

د ساندویچ د قضیې سره سم لیکوچه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

لیمیټ یعنې $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ریمان د مجموعې لیمیټ وایي.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ ته د ریمان مجموعه وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $[0.2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وویشئ د $y = x^2 + 1$ د منحني او (xx') د محور تر منځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $[0،2]$ انټروال په څلورو برابرو برخو ویشو.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطیل د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$x_0 = a = 0 \quad , \qquad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$x_2 = a + 2\Delta x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$

$x_4 = a + 4\Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$[x_0, x_1] \; , \qquad [x_1, x_2] \; , \qquad [x_2, x_3] \; , \qquad [x_3, x_4]$

$\left[0, \frac{1}{2}\right] \; , \qquad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \; , \qquad \left[1, \frac{3}{2}\right] \; , \qquad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

د ګراف د ترسیم لپاره د (x) قیمتونه په تابع کې وضع کوو او د (y) قیمتونه پیدا کوو.

$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 \qquad , \; A(0,1)$

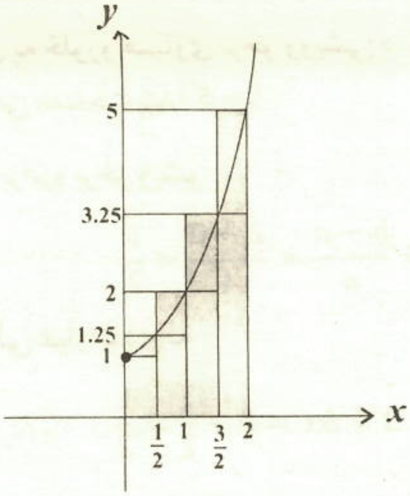
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25 \quad , \qquad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$

$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad , \quad C(1,2)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25 \qquad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$

$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \qquad\qquad E(2,5)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مجموعه د مساحتونو د لاندینیو مستطیلونو $= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2}$

$$= 3.75$$

مجموعه د مساحتونو د پورتنیو مستطیلونو $= 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2}$

$$= 5.75$$

$$3.75 < A < 5.75$$

دویم مثال: د $f(x) = 1 + x$ تابع د ریمان د مجموعی لیمیټ د $[1،10]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل: پوهیږو چه:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0,1,2,3,4,5 \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1 + \Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(a+x_i)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{9}{n}i\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9n^2+9n}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{2n^2+9n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{11n^2+9n}{2n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2+81n}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}\right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دویم مثال: د $[0,3]$ انټروال په شپږو مساوي برخو وویشئ او $y = 3x$ د مستقیم خط او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$x_0 = 0 \quad , x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad , x_2 = 3\Delta x = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{3}{2}$

$x_3 = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \quad , x_4 = 0 + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$

$x_5 = 0 + 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3 \quad , x_6 = 0 + 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$

$[x_0, x_1] \quad , [x_1, x_2] \quad , [x_2, x_3] \quad , [x_3, x_4] \quad , [x_4, x_5] \quad , [x_5, x_6]$

$[0,1] \quad , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad , \quad \left[2, \frac{5}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right] \quad , \left[3, \frac{7}{2}\right]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(0) = 0\,,\qquad A(0,0),\qquad f(1) = 3(1) = 3\qquad B(1,3)$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow C\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)\quad ,f(2) = 3\cdot 2 = 6\ \Rightarrow D(2,6)$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{2}\ \Rightarrow E\left(\frac{5}{2},\frac{15}{2}\right)\ ,f(3) = 3\cdot 3 = 9\ \Rightarrow F(3,9)$

د انتيګرال مفهوم $Concept\ of\ Integral$:

انتيګرال دهغه تابع پيدا کول دي چه مشتق يي موجود وي يا د ريمان د مجموعي ليميټ ته انتيګرال وايي.د انتيګرال علامه دا ($\int$)ده.چه د ريمان دمجموعي Sum د لمړي توري غزېدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int f(x)\,dx$$

چه دلته $f(x)$ داانتيګرال تابع ده او dx نظر (x) ته د $f(x)$ دتابع د انتيګرال متحول دي.

د انتيګرال اقسام:

انتيګرال په دوه قسمه دی.

1- غېرمعين انتيګرال

2- معين انتيګرال

1- غېرمعين انتيګرال $Indefinite\ Integral$:

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع يوه لمړنی تابع وي نو د $F(x)+c$ دتابعګانو سيټ د $f(x)$ دتابع غېرمعين انتيګرال دی. اوداسی ليکل کيږي.

$$\int f(x)dx = \quad F(x) + C$$

لمړی مثال: $\int xdx$ پيدا کړئ؟

حل:

$$\int xdx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + c = \frac{x^2}{2} + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx = \int x^{-\frac{3}{7}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4}\cdot xdx = \int \sqrt[8]{x^6}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{2}{6}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1}\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}}\cdot\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}\cdot\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4\cdot x^4} + c$$

$$= \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^8} + c$$

د غیر معین انتیګرال خواص:

لکه څرنګه چه د تابعګانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیر معین انتیګرال هم ځانګړي خواص لري چه بی د ثبوته منل شوي دي.

1- که (k) یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیګرال یي داسی پیدا کیږي.

$$\int kdx = k\int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتيګرال پيدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که a يو ثابت عدد او $f(x)$ يوه تابع وي نو:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتيګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي دتابعګانو دمجموعې اوتفاضل انتيګرال د تابعګانو د انتيګرالو د مجموعې اوتفاضل سره مساوي دی.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال:

$$\int (2x^2 + 3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8 - 2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتيګرال لاندې وي نو انتيګرال يې د ټولو حدونو د انتيګرالونو مجموعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \cdots + \int f_n(x)\, dx$$

مثال:

$$\int (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 + \int 9xdx + \int dx$$
$$\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + x + c$$

6- د دوه تابعګانو دحاصل ضرب انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$$

مثال: که چیرې $f(x) = x + 1$ او $g(x) = x - 2$ وي

الف: لمړی یې ضربوو بیایې انتیګرال نیسو

$$\int [f(x) \cdot g(x)]dx = \int [(x+1)(x-2)]dx$$
$$= \int (x^2 - x - 2)dx = \int x^2 dx - \int xdx - 2\int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$$

ب: د هرې تابع انتیګرال پیدا او بیا یې ضربوو

$$\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \int (x+1)dx \cdot \int (x-2)dx$$
$$= \left[\int xdx + \int dx\right]\left[\int xdx - 2\int dx\right]$$
$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) + c = \left(\frac{x^2 + 2x}{2}\right)\left(\frac{x^2 - 4x}{2}\right) + c$$
$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c \neq \left(\frac{x^2 + 2x}{2}\right)\left(\frac{x^2 - 4x}{2}\right) + c$$

7- د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعګانې راکړشوي دي.

ثبوتوو چې د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دي.

$$\int (x^2 + 2x + 1)dx = \int x^2 dx + \int 2x dx + \int dx$$

$$= \int x^2 dx + 2\int x dx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$\int (1 + x)dx = \int dx + \int x dx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int x dx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^2 m + dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعګانو د انتیګرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5 dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2\int (1-2x)^{-\frac{1}{5}} dx = 2 \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2\left(-\frac{1}{5}+1\right)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^x dx = e^x + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

مثال: $\int 4e^x dx = 4e^x + c$

د $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

$$\int 7^{4x-3}dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3}dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3}dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

معین انتیګرال *Definite Integral*

که چیرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $f(x)$ د تابع ریمان د مجموعې لیمیټ ته کله چه $n \to \infty$ او د فرعي انټروالونو اوږدوالی $\Delta x \to 0$ ته وکړي نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پورې انتیګرال ته معین انتیګرال وایي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(a) ته د انتیګرال لاندیني سرحد او (b) ته د انتیګرال پورتني سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2 dx$ معین انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

دویم مثال: د $y = 3$ مستقیم او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

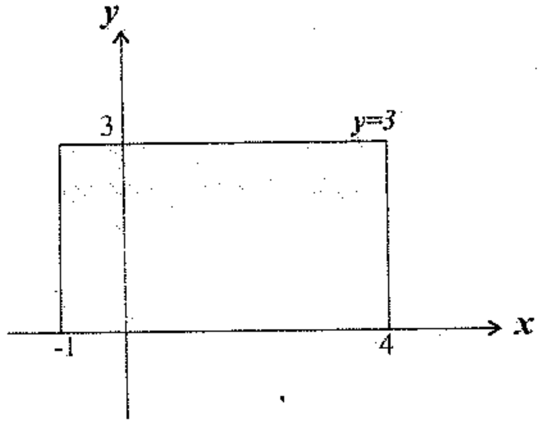
$\int_{-1}^{3} 3dx$ د مستطیل مساحت رانښیي.

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$

د انتیګرال پواسطه یې مساحت په لاندې ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^{3} 3dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقيم او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کی جوړيږي محاسبه کړئ

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$
$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال : د هغه سطحی مساحت پيدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د $[1,2]$ په انټروال کی محصور وي؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$
$$A_2 = 1(-1) = -1$$
$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$
$$\int_1^2 (-2x+1)dx = \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2$$
$$= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معین انتیګرال خواص $Properties\ of\ definite\ integral$:

1- د $[a,b]$ په انټروال کی د ثابتی تابع انتیګرال یعني $\int_a^b cdx$ عبارت دی.

$$\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال په (n) مساوي برخو ویشویعنی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر (x_i) لپاره د $i-$ ام انټروال څخه لرو.

$$f(x_i) = c \qquad , \qquad i = 1,2,3,\cdots n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4-3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد اویوی تابع د حاصل ضرب انتیګرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیګرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که د $[a,b]$ انټروال د x_i چه $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ وي په (n) مساوي برخو وویشونو د ریمان دمجموعی او انتیګرال دتعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = k \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4dx$ انتیگرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^{2} 4dx = 4\int_{-2}^{2} dx = 4[2-(-2)] = 4\cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع یوه لمړنۍ تابع او په $[a,b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = -\{-F(b)+F(a)\}$$

$$= -\{F(a)-F(b)\} = -\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$ انتیگرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{2}^{3} 2xdx = -\int_{3}^{2} 2xdx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $a = b$ وي نو انتیګرال یې صفر دی.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال: د $\int_{3}^{3} 3x^2dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{3}^{3} 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_{3}^{3} = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعګانو د مجموعې او تفاضل انتیګرال په یوه انټروال کې د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې او تفاضل د انتیګرالو سره مساوي دی په همغه انټروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانو انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې نیول شوی دي نو:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_{a}^{b} f(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_{a}^{b} \{f(x) \pm g(x)\}dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i) \pm g(x_i)\}\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \int_{a}^{b} f\,(x)dx \pm \int_{a}^{b} g(x_i)dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثالونه:

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx$$

$$= 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1 = 5$$

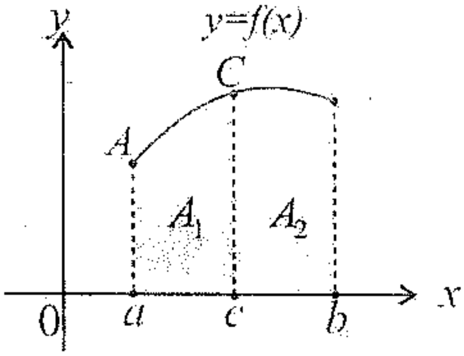
$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6- که چیرته د $f(x)$ یوه تابع چه په یوه تړلي انټروال چه د a , b او (c) ټکي پکی شامل وي او انتیګرال منونکي وي. نود ټول انټروال انتیګرال دانټروال دټوټو د انتیګرالو د مجموعی سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال د $[a,c]$ او $[b,c]$ په دوه انټروالو ویشو:



$A = \int_a^b f(x)dx$ د هغې سطحی مساحت دی چه د $f(x)$ دتابع د ګراف او $(X\acute{X})$ دمحور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کی واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_1 = \int_a^c f(x)dx \quad \text{او} \quad A_2 \int_c^b f(x)dx$$

د تابع د ګراف د تودو مساحت دی. نو ليکو چه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال:-که $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x)dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \le g(x)$ تابعګانی په $[a,b]$ کی انتیګرال منونکي وي او $g(x) \ge f(x)$ او $\Delta x \ge 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دې پس ليميټ يې هم مثبت وي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i) - f(x_i)]\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \ge 0$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښياست چه

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \le \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}dx \le \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \le (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اطراف په $(b-a)$ ويشو.

$$1-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\le 1+\frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}(b^2-a^2)\le \frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}<\frac{1}{6} \quad \Rightarrow -1<2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او (m) اصغري نقطه او (M) اعظمي نقطه وي نو

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ثبوت :

$$\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$$
$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

دغه قضيه د انتيګرال د تخميني قضيي په نوم ياديږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}$ انتيګرال په تخميني توګه حساب کړئ؟

څرنګه چه د $f(x)=e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M=f(0)=e^0=1$ مطلق اعظمي او $m=f(1)=e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو ليکو چه:

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
$$e^{-1}(1-0)\le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1(1-0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

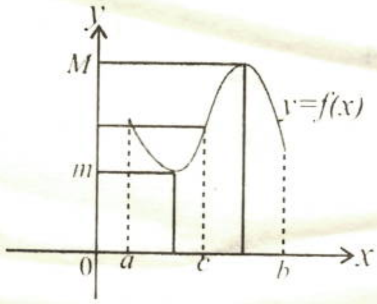
$$e^{-1} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \le \int_0^1 f(x)dx \le 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a,b]$ کې متمادي وي نو د (c) یو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



ثبوت: د $a < b$ لپاره د (m) او (M) قیمتونه په ترتیب سره د $[a,b]$ په انتروال کې د تابع اصغري او اعظمي نقطې دي او $c \in [a,b]$ دی

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دی نو $m \le k \le M$ دی او د هر (c) حقیقي عدد لپاره $a \le c \le b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته رابطه د متوسط قيمت درابطی په نوم ياديږي. $f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي.او حاصل ضرب يي د مستطيل مساحت دی. يعنې:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1,4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د (c)قيمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{64-1}{3}\right] = \frac{63}{3} = 21$$

د (x)په عوض (c) وضع کوواو د متوسط قيمت د قضيې څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

دانتيګرال او مشتق اساسي قضيې:

اوله قضيه :

که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي وي او(x) په دی انټروال شامل وي که $x \in [a,b]$ نوليکلای شو چه:

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a) - F(x) - F(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{F(x)\left.\right|_a^{x+h} - F(x)\left.\right|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بنيبو:

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F\left(t\left.\right|_a^{x+h} - F(t)\left.\right|_a^x\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیې څخه لیکو چه:

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\acute{F}(x) = f(g(x))\cdot \acute{g}(x)$$

$$\acute{F}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot (x^2+1)' = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$\acute{F}(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

دویمه قضیه:

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع اولنی تابع او د $[a, b]$ په انټروال کی متمادي وي په دی صورت کی لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: که $F(x) = \int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x \in [a, b]$ لپاره $\acute{F}(x) = f(x)$ دی د تابعگانو تفاضل په (k) ښیو:

$$f(x) - F(x) = k \Rightarrow f(x) = F(x) + k$$

$$\acute{F}(x) = \int_a^b f(t)dt = f(x) = F(x) + k$$

$$\int_a^b f(t)dt - F(x) = k \cdots 1$$

د (x) په عوض (a) وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt - F(a) = k \Rightarrow 0 - F(a) = k \Rightarrow k = -F(a)$$

د k قیمت په (1) رابطه کې وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt - F(x) = -F(a)$$

د (x) په عوض (b) وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

اخري رابطه د $\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$ شکل ښودل کیږي. دغه رابطه د اولنۍ تابع او $\int_a^b f(t)dt$ انتیگرال تر منځ رابطه ښیي چه د نیوټن (لایبنز) په نوم یادیږي.

مثال: $\int_0^1 x^2 dx$ انتیگرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2\, dx = F(1) - F(0) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \cdot 1^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تعویضي طریقی سره د انتیګرال نیول:

... انتیګرال دلاس ته راوړلو لپاره یي
$u = g(x)$ او $\acute{F}(x) = f(x)$ بنیيو $\frac{du}{dx} = \acute{g}(x)$ او $du = \acute{g}(x)dx$ بنیيو:

$$\int_a^b f\{g(x)\}\,\acute{g}(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x \quad , \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right)du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7}\frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{2-7}{14}\right] = -\frac{1}{5}\left[\frac{-5}{14}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3(1+2x^3)^5dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad , \quad x^2dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5dx = \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729-1}{6}\right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

پورته فارمول په غیر معین انتیګرال کی هم د تطبیق وړ دي.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = 1 - 4x^2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -8x \quad , \quad xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot xdx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}du\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دويم مثال: $\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx$ انتيګرال حساب کړئ؟

$$u = x^4 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 \quad , \quad x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3 \cos((x^4+2)dx) = \int cosux^3dx = \int cosu \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int cosudu = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

قسمي انتيګرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتيګرال کې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ بنيو او دحاصل ضرب مشتق يي پيدا کوو.

$$(u \cdot v)' = \acute{u}v + \acute{v}u \quad \Rightarrow \acute{v}u = (u \cdot v)' - \acute{u}v$$

$$\int \acute{v}\, udx = u \cdot v - \int \acute{u}\, vdx$$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

پورته رابطه په قسمي طريقه د غير معين انتيګرال فارمول دی.

که (u) او (v) تابعګانې د $[a, b]$ په انتروال کی تعريف شوی وي نود معين انتيګرال فارمول په قسمي طريقه په لاندی ډول دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b \acute{v}\, u dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx \quad \vee \quad \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

لمړی مثال : د $\int x \sin x dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$v = -\cos x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow dv = \sin x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = -x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x dx$$

$$h\int_a^b \acute{v}\, u dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx$$

$$\int_0^1 -xe^x\, dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

دلوګاریتمي او اکسپوننشل تابعګانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$\acute{f}(x) = (\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{x}{h} \ln\left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کیږي او څرنګه چه $h \to 0$ تقرب وکړي نو $u \to \infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\lim_{u\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = \frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

2- که $g(x) = a^x$ وي نو مشتق یې دلاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي

$$\acute{g}(x) = a^x \ln a$$
$$\ln y = \ln a^x = x \ln a$$
$$(\ln y)' = (x \ln a)'$$
$$\frac{\acute{y}}{y} = 1 \cdot \ln a + x \cdot 0 = \ln a$$
$$\acute{y} = y \ln a = a^x \ln a$$

د اعشاري لوګاریتم مشتق:

د $f(x) = \log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له :

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\acute{f}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کیږي او کله چه $h \to 0$ تقرب وکړي نو $u \to \infty$ تقرب کوي.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = \frac{1}{x}\log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$
$$\acute{f}(x) = \{\log_a g(x)\}' = \{\log_a g(x)\}' \cdot \acute{g}(x)$$
$$= \frac{1}{g(x)}\log_a e \cdot \acute{g}(x) = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = \acute{x} \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 1 \Rightarrow \acute{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \acute{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\acute{y} = \acute{u} \cdot a^u \ln a$$

3- که په لوګاریتمي تابعګانو کی د لوګاریتم قاعده د طبعي لوګاریتم څخه اعشاري لوګاریتم ته بدله شي نول لوګاریتمي عددونه دصورت څخه مخرج ته اویا د مخرج څخه صورت ته ځي لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\acute{u}}{u \log_e a} = \frac{\acute{u}}{u \ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \acute{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دویم مثال:

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال:

$$f(x) = \log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \log_a \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\log_a \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\}$$
$$\acute{f}(x) = \left(\log_a \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1) - \log_a(x^2-1)\}'$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\log_a e - \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_a e\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{x^2+1}\log_a e - \frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right\}$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2-1}\right)$$
$$= x\log_a e\left(\frac{x^2-1-x^2-1}{x^4-1}\right) = \frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} = \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}$$

$$\acute{f}(x) = \left(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)' = \frac{1}{2}\{\ln(x^2+1) - \ln(x^2-1)\}'$$

$$= \frac{1}{2}[\{\ln(x^2+1)\}' - \{\ln(x^2-1)\}']$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) = \frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y = e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (x^2+1)'\cdot e^{x^2+1} = 2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y = \sqrt[x]{2}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = \sqrt[x]{2}$$
$$ln\, y = ln\sqrt[x]{2} = ln\, 2^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}ln\, 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x}\ln 2\right)'$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot (\ln 2)' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln 2 \Rightarrow \acute{y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 \cdot y = -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[x]{2} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال : د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال :

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4 + 1}\log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4 + 1)\ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\frac{1}{x}\log_2 e}{\log_2 x}\log_3 e = \frac{1}{x \log_2 x \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x\frac{\log_e x}{\log_e 2} \cdot \ln 2 \ln 3}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{x\frac{\ln x}{\ln 2}\ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \ln x \ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2 + 1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\acute{y} = ?$

$x^2 + 1 = u$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{2x}{x^2+1}\log_{(x^2-1)} e$$

د معکوسو تابعګانو مشتق:

که دوه تابعګانی یو د بل معکوس وي نو مشتقونه يي هم يو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

یا:

$$\acute{y}_{(x)} = \frac{1}{\acute{x}_{(y)}}$$

نو د ضمني تابعګانو د مشتق له مخی لیکو.

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = \acute{y}_y \Rightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = 1 \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسی تابع له مخی پیدا کړئ؟

$$y = a^x \Rightarrow x = \log_a y$$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\ln a = a^x \ln a$$

د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعګانو مشتق دلاندی رابطو پواسطه پیدا کیږي.

1- $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2- $(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3- $(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4- $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-1

$$y = arc\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(arc\sin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-2

$$y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(arc\cos x)' = ?$$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2y}} \Longrightarrow (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-3

$$y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (arc\tan x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}}$$

$$= cos^2y = \frac{cos^2y}{1} = \frac{cos^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

$$= \frac{\frac{cos^2y}{cos^2y}}{\frac{sin^2y}{cos^2y} + \frac{cos^2y}{cos^2y}} = \frac{1}{tan^2y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

-4

$$y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{sin^2y}}$$

$$= -sin^2y = \frac{-sin^2y}{1} = \frac{-sin^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\frac{-sin^2y}{sin^2y}}{\frac{sin^2y}{sin^2y} + \frac{cos^2y}{sin^2y}} = \frac{-1}{1+cot^2y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لمړی مثال:- د $y = (arc\tan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = 5(arctanx)^4 \frac{1}{1+x^2}$$

دویم مثال:- د $y = \log_5(arc\tan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \{\log_5(arc\tan x)\}' = \log_5 u = \frac{\acute{u}}{u\ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arc\tan x\ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(arc\tan x\ln 5)}$$

دریم مثال:- د $y = arctane^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (arc\tan e^x)' = (arc\tan u)' = \frac{\acute{u}}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\acute{y}(0) = \frac{e^0}{1+e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د یوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی د مجموعی څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي. دواقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول دری حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسر د مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بېنومونه وي لکه

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x^2+x-2)+B(x^2-3x-10)+C(x^2-6x+5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$4x^2-x-39=(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C$$

$A+B+C=4$
$A-3B-6C=-1$
$-2A-10B+5C=-39$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم حالت :

چه دکسر د مخرج په ضربي عواملو کې تکراري بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$3x^2-6x+2=A(x^2-2x+1)+B(x^2-3x+2)+C(x-2)$$

$$3x^2-6x+2=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-2C$$

$$3x^2-6x+2=(A+B)x^2-(2A+3B-C)x+A+2B-2C$$

$A+B=3$

$-2A-3B$

$+C=-6$

$A+2B-2C=2$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

چه د کسرد مخرج ضربي عوامل غیرتکراري ترینومونه وي،په صورت کې یې بېنوم لیکل کیږي.

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$= 5x^2+8x+9 = (A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C$$

$A+C=5$

$A+B+2C=8$

$B+4C=9$

$A=3 \quad , \; B=1 \quad , \; C=1$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3X+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

د اکسپوننشل تابعګانو انتیګرالونه:

د $f(x) = e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرورچه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \;\; \& \;\; a \in IR$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$u = 1 \quad , \; \frac{du}{dx} = 0 \quad , \; du = 0 \cdot dx$

$v = a^x \quad , \; \frac{dv}{dx} = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad dv = \frac{a^x}{\ln a} dx$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لمړی مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}\cdot 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1}dx = ?$$

$$\int 3^{x+1}dx = \int 3^x \cdot 3dx = 3\int 3^x dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال:

که $(x \in IR^+)$ $\quad f(x) = \ln x$ وي نو انتیګرال يې په لاندې ډول دی.

$$\int \ln dx = x\ln x - x + C$$

که $(x, a \in IR^+)$ $\quad f(x) = \log_a x$ وي نو انتیګرال يې داسې پیدا کوو.

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\,dx = \int \ln x dx = x\log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x\ ,\quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e\quad ,du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$v = x\quad ,\quad \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\cdot\frac{1}{x}\log_a e\,dx = x\log_a x - \log_a e\int dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_A x dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx + \ln x dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

په تعویضي طریقه هم کولای شوچه د غیرمعین انتیګرال قیمت پیدا کړو.

لمړی مثال:

$$\int \frac{1}{2}e^{-2x-3}\, dx = ?$$

$$u = -2x - 3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -2 \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{1}{2}e^{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^{u}du = -\frac{1}{4}e^{u} + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x + 2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دریم مثال: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int f(xdx) = \int e^{2x}dx = ?$$

$$2x = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x)dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}du = \frac{e^{u}}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + C$$

څلورم مثال: د $f(x) = x\cdot \ln x^2$ انتیګرال حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(x)dx = \int (x\ln x^2)dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int f(x)dx = \int x\ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2}u \cdot \ln u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

معین انتیګرالونه هم په تعویضي طریقه حلولای شو.

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = ?$$

$$u = 2x \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = -1 \; , & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1 & , \; u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}[e^u]_{-2}^{2} = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_{1}^{2} 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$x = 1 \quad , \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2 \quad \quad u = x^2 = 4$$

$$\int_{1}^{2} 2x\ln x^2 dx = \int_{1}^{4} 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \int_{1}^{4} \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_{1}^{4} = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قسمي کسروپواسطه دواقعي کسرد انتيګرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د يوه واقعي کسر انتيګرال پيدا کړو نو لمړی يي قسمي کسرونه پيدا کوو بيا د قسمي کسرو انتيګرالونه پيدا کوو او جمع کوو يي.

لمړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$
$$=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$7x-12=(A+B)x-4A-2B$$
$$A+B=7$$
$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \cdots\cdots\cdots 1$$
$$A=7-B \Longrightarrow 4(7-B)+2B=12$$
$$28-4B+2B=12$$
$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$
$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int \frac{-1}{x-2}dx+\int \frac{8}{x-4}dx$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int \frac{1}{x-2}dx+8\int \frac{1}{x-4}dx$$
$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$
$$=\ln\{(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\}=\ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منحني سطحی د مساحت پیدا کول

Acconting area of curve plane

هغه مستوي چه د $(X\acute{X})$ د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د ګراف او $x = a$ او $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت یې دلاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انتروال کی مثبت اومتمادي وي یعنی $y = f(x) \geq 0$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ دتابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه پورتني طرف کی پروت دی او که $y = f(x) \leq 0$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ تابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه کښتني طرف کی پروت دی.

لمړی مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د ګراف او د $(Y\acute{Y})$ د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د ګراف بحراني ټکی او د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$x = 4 - y^2$

$\acute{x} = 0 - 2y = -2y$

په بحراني نقطه دتابع مشتق صفر وي نو $\acute{x} = 0$ نو:

$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

د (y) قیمت په اوله معادله کی وضع کوود (x) قیمت لاس ته راځي

$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$
$x = 4$

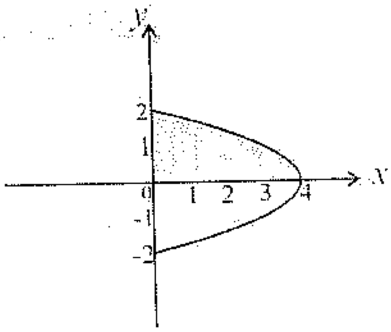
$A(4,0)$ نقطه بحراني نقطه ده.د $Y\acute{Y}$ دمحور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو او د y قیمت لاس ته راځي

$x = 0$

$4 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$B(0,2) \qquad C(0, -2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \int_{-2}^{2} (4 - Y^2) dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$A = 2\left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - 0\right] = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\frac{24-8}{3}\right) = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

دويم مثال: د $(X\acute{X})$ دمحور او $Y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ دتابع دګراف پواسطه د محصورۍ سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$\acute{y} = -x$

$\acute{y} = 0 \qquad x = 0$

$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو. $Y = 0$ فرضوو.

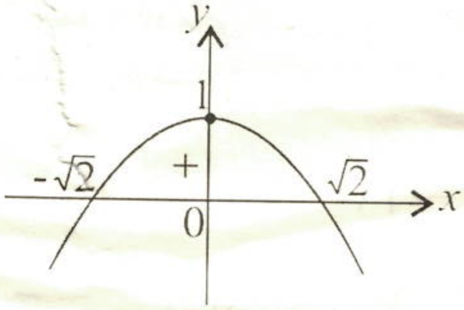
$y = 0$

$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \qquad \Rightarrow x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}, 0) \qquad\qquad C(-\sqrt{2}, 0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left(\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{2}}\right)$$

$$A=2\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}^3}{6}-0\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6}\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

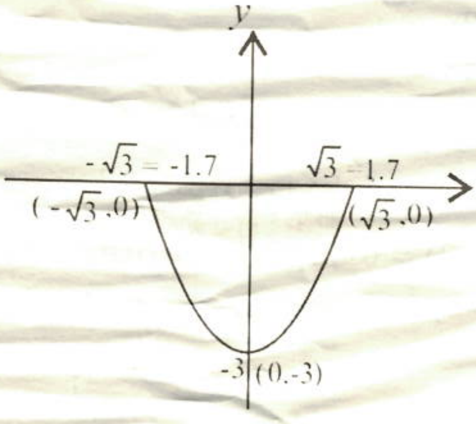
دريم مثال: د هغه سطحې مساحت پیدا کړئ چه د $y=x^2-3$ د تابع دګراف او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ محصوروي.

حل:

$y=x^2-3 \quad , \quad \acute{y}=2x$
$\acute{y}=0 \quad \therefore \ x=0$
$y=0^2-3=-3 \quad , \quad A(0,-3)$
$y=0$

$$x^2-3=0\Rightarrow x^2=3\Longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$B(\sqrt{3},0) \qquad C(-\sqrt{3},0)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چه ګراف يي د $y = x^2 - 3$ د محور لاندي واقع دى نو انتيګرال يي منفي دى. او ځرنګه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت يي د سر حداتو دنيمايي ځخه پيدا کوو.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = -2\int_{0}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)$$

$$= -2\left(\int_{0}^{\sqrt{3}} x^2dx - 3\int_{0}^{\sqrt{3}} dx\right) = -2\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\left[\sqrt{3}^3 - 0\right] - 3[\sqrt{3} - 0]\right) = -2\left(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7)$$

$$= -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع ګراف رسم کړئ او د منحني او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ فاصله پيدا کړئ؟

$$y = x^2 - 3x$$
$$\acute{y} = 2x - 3 \Rightarrow \acute{y} = 0$$
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$
$$y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4}$$

$A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ بحراني نقطه

ځرنګه چه $y'' = 2 > 0$ دى نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع د نقطى د پيدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \quad , x_1 = 0 \quad , O(0,0)$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad , \quad B(3,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4}$$

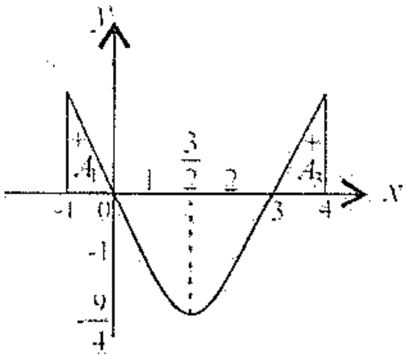
$$A = \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right) - \left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2\right\}\right] - \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right)\right]$$
$$+ \left[\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 - \left\{\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right\}\right]$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right) + \left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$



پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ د منحني او $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = 2$ او $x = -1$ تر منځ واقع وي.

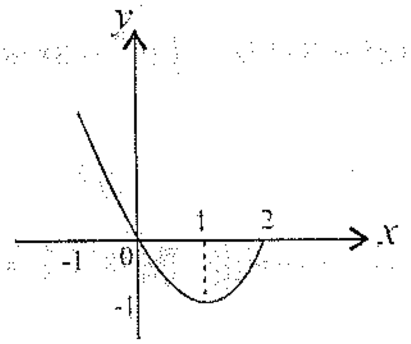
$\acute{y} = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$

$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2\cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$A(-1,1)$ بحراني نقطه

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع تقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$
$x_1 = 0 \quad , \quad O(0,0)$
$X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2 \quad , B(2,0)$

منحني د $[-1,2]$ په انټروال کی د مبداء څخه تیریږي یوه برخه یي د $[-1,0]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال یي مثبت دي. بله برخه یي د $[0,2]$ په انټروال کی د $(X\acute{X})$ دمحور په لاندینی برخه کی واقع دی او انټروال یي منفي دي.

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\right\} - \left\{\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)$$
$$= -\left(\frac{-1-3}{3}\right) - \left(\frac{8-12}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{-4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

د هغه سطحو دمساحت محاسبه چه دمنحني خطو پواسطه محاصره وي:

Accounting of area bounded by tow curves

د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوه منحنيګانو پواسطه د محصور شوي سطحی دمحاسبی لپاره که $f(x) > g(x)$ وي یعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ دتابع د پاسه واقع وي د پاسنی تابع د انتیګرال څخه د لاندینی تابع انتیګرال منفي کوو د محصور شوي سطحی مساحت لاس ته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]d = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

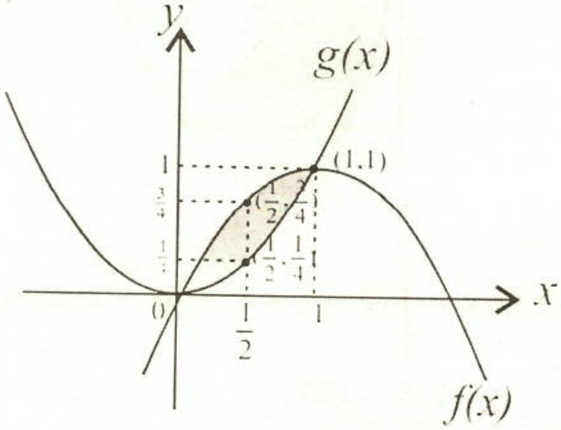
که د $G(x)$ تابع گراف د $f(x)$ تابع د گراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیګانو د ګرافونو تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل:- اول د منحنیګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$f(x) = 2x - x^2$
$g(x) = x^2$
$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow$
$2x - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0$
$2x(1 - x) = 0$
$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$1 - x = 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1$



د منحنیګانو د تقاطع نقطی عبارت دي $A(1,1)$ او $O(0,0)$ دي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx =$$

$$\left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال :د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعگانو د گرافونو تر منځ د سطحې مساحت پیدا کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 2 \\ g(x) &= 2 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

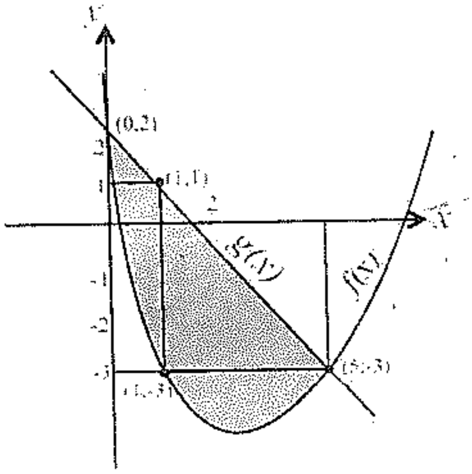
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0,2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5,-3)$$



$$A = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

دريم مثال:- د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعگانو د گرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-x^2 + 4x + 2 = x^2 - 2x + 2$

$-x^2 + 4x + 2 - x^2 + 2x - 2 = 0$

$-2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(-2x + 6) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0 \quad , \quad -2x + 6 = 0 \quad \Rightarrow -2x = -6 \Rightarrow x = 3$

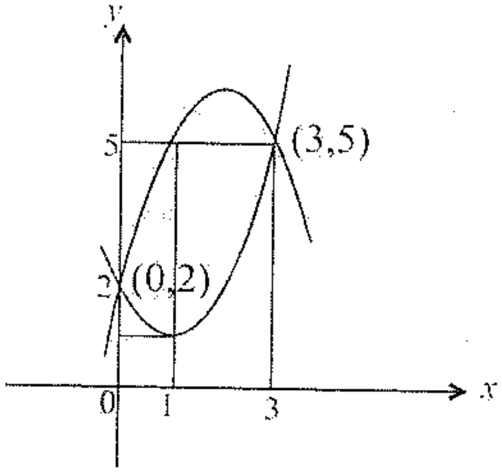
د منحنيګانو تقاطع نقطې عبارت دي $B(3,5) \quad , \quad A(0.2)$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx - \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^3$$

$$= -\frac{27}{3} + 18 + 6 - 0 - \frac{27}{3} + 9 - 6 + 0 = 9$$

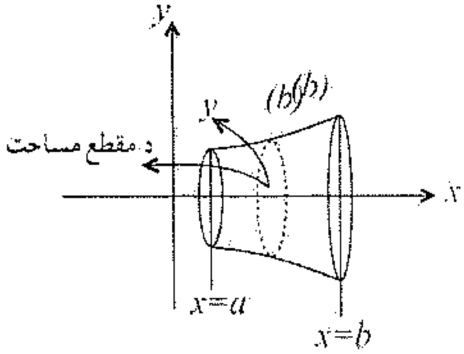


(c) ketabton.com: The Digital Library

د کروي اجسامو دحجمو محاسبه:

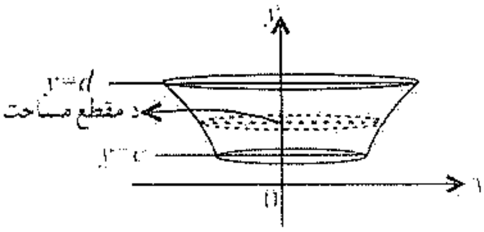
Accounting volume of Spherical things

که د $y = f(x)$ دتابع گراف منحني وي او د $x = a$ او $x = b$ دخطو منځ کی محصوروي د منحني خط د دوران په نتیجه کی استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع يي $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دايروي سطحی دي چه مساحتونه يي $A_{(x)} = \pi r^2$ دي او د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي دي شعاع يي $y = r$ ده د حجم فارمول يي د ريمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(x)}\Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع دمنحني گراف د $y = c$ او $y = d$ کرښو ترمنځ محصور وي مساحت يي نظر د $(Y\acute{Y})$ محور ته د $A_{(Y)} = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع يي $\Delta y = d - c$ ده او شعاع يي $y = r$ ده حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.



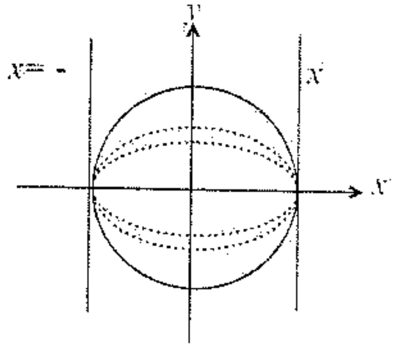
$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(y)}\Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi\{f(y)\}^2 dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال پواسطه د کری د حجم پیدا کول

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخیږي کره لاس ته راځي. د دایری معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمی کری حجم د دایری د معادلی څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو یي د کری حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= 2\pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] - 0 = 2\pi \left(\frac{3r^3 - r^3}{3}\right) = 2\pi \left(\frac{2r^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

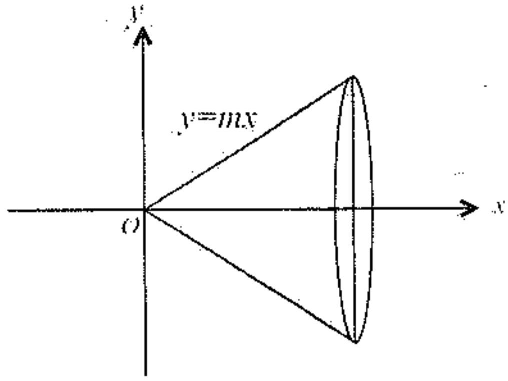
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

د انتیګرال پواسطه د مخروط دحجم پیدا کول

که د مستقیم د یوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط دهمدغه ثابتی نقطی په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_{a}^{b} \pi y^2 dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$$y = mx$$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

د مخروط حجم $= V = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$

د پورته شکل څخه معلوميږي چه د مخروط قاعده دايروي ده او شعاع يي د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي ده يعني $y//r$ اود مخروط ارتفاع (h) ده چه د (x) په محور باندی منطبق ده يعني $(x = h)$ نود $y = mx$ په رابطه کی يي قيمت ليکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

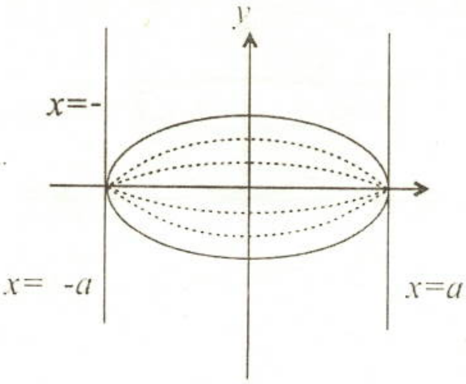
د انتيګرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول:

هغه بيضوي چه مرکز يي د وضعيه کميتونو په ميداء واقع وي معادله يي عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

دنيمی بيضوي حجم پيدا کوو او دوه چنده کوو يي د ټولی بيضوي حجم لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{b^2}\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx=2\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=2\pi\left[\left(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right)-0\right]=2\pi\left[b^2a-\frac{b^2a}{3}\right]$$

$$=2\pi\left[\frac{3ab^2-ab^2}{3}\right]=2\pi\left[\frac{2ab^2}{3}\right]$$

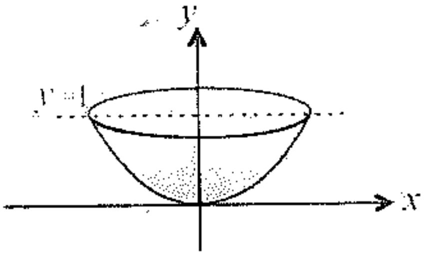
$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

که چېرته د الپس محراقونه د $(Y\acute{Y})$ د محور پر مخ پراته وي حجم يي د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y=x^2$ او $y=1$ کرښې تر منځ پروت وي او د $(Y\acute{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پيدا کړئ؟

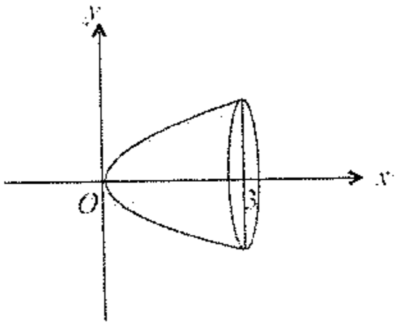
(c) ketabton.com: The Digital Library



$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy$

$= \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$

دويم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ او $y = 3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پيدا کړئ؟



$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9\pi$$

تبصره:

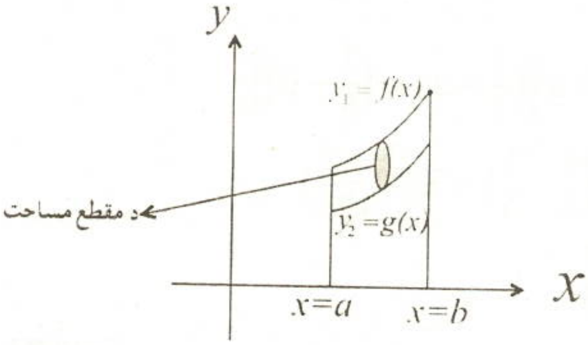
که $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابعګانې $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنيګانو او د $x = a$ او $x = b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$\Delta x =$ د استوانې ارتفاع

$A(x) = \left(\text{استوانې د مقطع مساحت}\right) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه استوانی د جحم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ دتابع گراف د $g(x)$ د تابع د گراف څخه پورته پروت وي

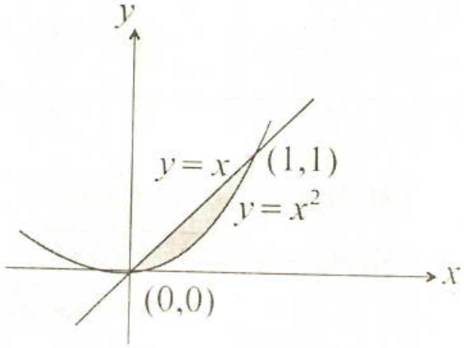


$$V = \int_a^b \pi({y_1}^2 - {y_2}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_1}^2 - {y_2}^2)dx$$

د هغه استوانی دحجم دفارمول پیدا کول چه د $g(x)$ دتابع گراف د $f(x)$ دتابع د گراف څخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_2}^2 - {y_1}^2)dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحني او $y = x$ د کرښی تر منځ د (x) د محور په شاوخوا تر منځ د دوران څخه لاس ته راځي.



$$\left.\begin{aligned} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \quad , \quad g(x) > f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx$$

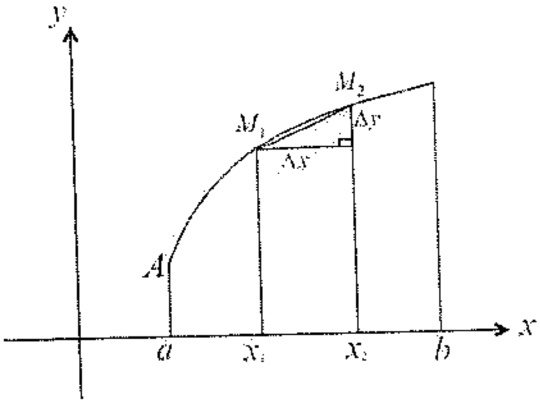
$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi \left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi \left(\frac{5-3}{15}\right)$$

$$V = \pi \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د AM_1 او M_1M_2 او M_2B په دری ټوټو ویشو د A, M_1, M_2 او د B د نقطو څخه په $(X\acute{X})$ عمودونه رسموو بیا M_1 د M_2 سره په یوه روښانه خط نښلوود M_1 څخه په M_2X_2 عمود رسموواو دتقاطع نقطه په H ښیو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوود فیثاغورث دقضیي سره لیکو



$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم لیکو چه:

$$\acute{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \acute{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \acute{f}(x)\Delta t \qquad \Delta y = \acute{g}(x)\Delta t$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\acute{f}(t)\Delta t\right)^2 + (\acute{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\left[\acute{f}(t)\right]^2 + [\acute{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعې څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\acute{f}(t)\right)^2 + \left(\acute{f}(t)\right)^2} \cdot \Delta t$$

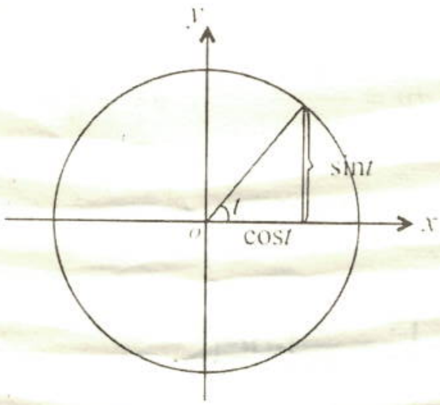
لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایرې محیط محاسبه کړئ؟

د دایرې پارامتریک معادله په لاندې ډول ده.

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

که $0 \le t \le \pi$ نو د دایرې نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^\pi \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2} \cdot dt$$



$$P = \int_0^\pi \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^\pi \sqrt{r^2 \sin^2 t + r^2 \cos^2 t} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^\pi \sqrt{r^2} \cdot dt$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r$ د دايرې نيمايي محيط

$2\pi r =$ د دايرې مکمل محيط

تبصره :

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \leq x \leq b$ انټروال کی راکړشوی ده د (x) دپارامتر په پام کی نيولو سره د منحني د قوس اوږدوالی داسی محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ دمنحني دقوس اوږدوالی په $0 \leq x \leq 4$ انټروال کی پيدا کړئ؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad , \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x \cdot dx}$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad , du = \frac{9}{4dx} \qquad , \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\frac{4}{9}du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړ شوی دي د (y) دپارامتر په پام کې نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ دمنحني د قوس اوږدوالي د $[1,4]$ په انټروال کې حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad f'(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4} y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \quad , \quad u = \frac{9}{4} y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4} y + 1\right)^3}\right]_1^4 \quad , \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}}\right]$$

تفاضلي معادلې *(Differential Equations)*:

هر هغه مساوات چه د يوی تابع مشتق او يوياځو مستقل اوغيرمستقل متحوله پکی موجود وي تفاضلي معادلی بلل کيږي. لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دغه تفاضلي معادلی ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.

که په يوه تفاضلي معادله کی ديوه غیرمستقل متحول معمولي مشتق نظرمستقل متحول ته ونیول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \quad , \quad (4x + y)dx + xdy = 0 \quad , \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زياتومستقلومتحولو ته ونیول شي دغسی ډيفرينشيال معادلی ته جزئي يا يوطرفه ډيفرينشيال معادلې وايي لکه:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5\frac{\partial u}{\partial y}$$

د ديفرينشيال ترتيب:

ديوی افادی دمشتق نيولو شمېرې ته د ديفرينشيال معادلی ترتيب وايي.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 4x$$

څرنګه چه دافادی څلورم مشتق نيول شوی دی نو د ديفرينشيال ترتيب (4) ده مشتق نيول د (d) دتوان څخه معلوميږي

د ديفرينشيال معادلی درجه :

د مشتق دلوړ ترتيب توان ته د ديفرينشيال معادلی درجه وايي.

که د ديفرينشيال معادلی توان کسري وي. توان يي بايد په صحيح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{(y''')^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني معادلې درجه (2) ده.

د $y'''=\sqrt{4+y'}$ یا $y''''=\sqrt{5x+3y}$ معادلو درجه یوه ده.

کله کله یوه دیفرینشیال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(\sin x)\frac{d^2y}{dx^3}-\cos xy=0$$

دپورته معادلې درجه معلومه نه ده.ځکه چه د (y) نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کې ده نو نه شو کولای چه دپولینوم په شکل یې ولیکواو نه یې مشتق پیدا کیږي.

خطي دیفرینشیال معادلې Linear Differential equation

هغه دیفرینشیال معادله ده چه د (y)اول مشتق یې موجود وي او د (y) او (y') دضرب حاصل یې معدوم وي. لکه:

$$2\frac{d^2y}{dx}+5\frac{dy}{dx}+3y=0$$

$$\frac{dy}{dx}-x^2y=3x$$

هغه دیفرینشیال معادلې چه خطي نه وي د غیرخطي معادلو یا $(non-linear\ equation)$ په نوم یادیږي. لکه:

$\frac{d^3y}{dx^3}+4y^2=0$ (د y توان $\neq 1$)

$\frac{d^2y}{dx^2}+7x\cdot\frac{dy}{dx}+12y=0$

$\frac{d^2y}{dx^2}+\sin xy=0$

$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2\frac{d^2y}{dx^2}+3y=0$

څرنګه چه د دغه معادلو پروګرام د لیسې د سویئي څخه لوړ دی د عالي ریاضیاتو په مستقل کتاب کې د دیفریشیال معادلو د تفصیل تصمیم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفیق غواړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتلسم فصل

احصائیه

احصائیه په لغت کی سرشماری ته وایي.

او په اصطلاح احصائیه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي کوي. قاعده یې داده چه نفوس ، حاصلات،او نور شیان محاسبه کوي او بیایي د عددو په شکل لیکي.

احصائیه ډېر قسمونه لري لکه اقتصادي احصائیه ،اخلاقي احصائیه ،سیاسي احصائیه ،د نفوسو احصائیه او داسی نور.

داتا $Data$:

راټول شوو معلوماتو ته داتا وایي.

د اطلاعاتو د راټولو طریقه:

اطلاعات معمولاًپه څلورو طریقو راټولیږي

1- د پوښتنو پواسطه

2-دلیکنو پواسطه

3- د لیدنی پواسطه

4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

که وغواړو چه د یوی کورنی د عایداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو که عایدات لږ وي کولای شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د لیکنی پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که د یوی کورنی عایدات زیات وي په ذهن کی یې حفظ مشکل وي نودلیک پواسطه یې دعایداتو اطلاعات راټولوو اوپه راجستر کی یې لیکو.چه د عایداتو اطلاعات وساتل شي او دمنځه لاړ نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د ليدنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

كه وغواړو چه د يوه شاګرد نمرو په هكله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طريقه داده چه نتايج يا اطلاعنامه وكتل شي او دنوموړي د نمرو په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربې پواسطه دااطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً ديوه مركب جسم داجزاؤ د ښه معلوماتو لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتيا وړ اطلاعات ترې لاس ته راځي.جامعه بلل كيږي .

پوښتنه: د جامعې د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وايي.

نمونه: دجامعې هغه برخه ده چه د جامعې د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره ترې پوښتنې كيږي او د جامعې خواص پكې موجود وي .لكه يو موټې وريجې د يو ګدام وريجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

دېه يوه صفت موصوف شيانو څخه د يوې برخې ټاكل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه بايد لاندې درې صفات ولري.

1- د نمونې دغړي په توګه د يوه شي يا يوه كس ټاكل بايد امكان ولري.

2- تر ټاكنې د مخه بايد د نمونې د غړو په هكله قضاوت ناممكن وي.

3- د نمونې ټول غړي بايد په نمونه كې برابره برخه ولري كه نمونه تصادفي وي اوكه نه. مثلاً كه د دولت په مامورينو كې د ښوونكو معاش دوه چنده شي نودا پېښه يوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه يې:

كه په يوه ټولنه كې د يوې موضوع په باب راټول شوي معلومات يا اطلاعات د يوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع يوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1- کیفي تصادفي متحول
2- مقداري تصادفي متحول

1- کیفي تصادفي متحول:

چه معلومات یې په توصیفي ډول بیانیږي عدد ته ضرورت نه لري.لکه د کارګرانو د سواد اندازه ، یا د یوه کلي دینداره خلک

2- مقداري تصادفي متحول :

هغه متحول دی چه د اطلاعاتو معلومات یې په شمېر سره کیږي. او په دوه ډوله دی.

الف: متصل مقداري تصادفي متحول ب: منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول :چه معلومات یې په عدد سره کیږي او د پرلپسې عددو تر منځ یې عدد پیدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسې عددو تر منځ یې عدد موجود وي.

دفریکونسي جدول *Table of frequncy*:

هغه جدول دی چه د داتاګانو معلومات پکې ترتیب شوی وي.که جدول په عمودي ډول ترتیب شوې وي دجدول د چپ طرف ستون داتاګانې یا معلومات ښیي او دښي طرف ستون یې د داتاګانو فریکونسي ښیي.لکه درنګونوجدول چه چپ طرف رنګونه یا داتا ښیي اوښي طرف فریکونسي ښیي.او که جدول په افقي ډول ترتیب شوی وي اول سطر د داتاګانو نمایندګي کوي اودویم سطر د هری داتا فریکونسي ښیي.

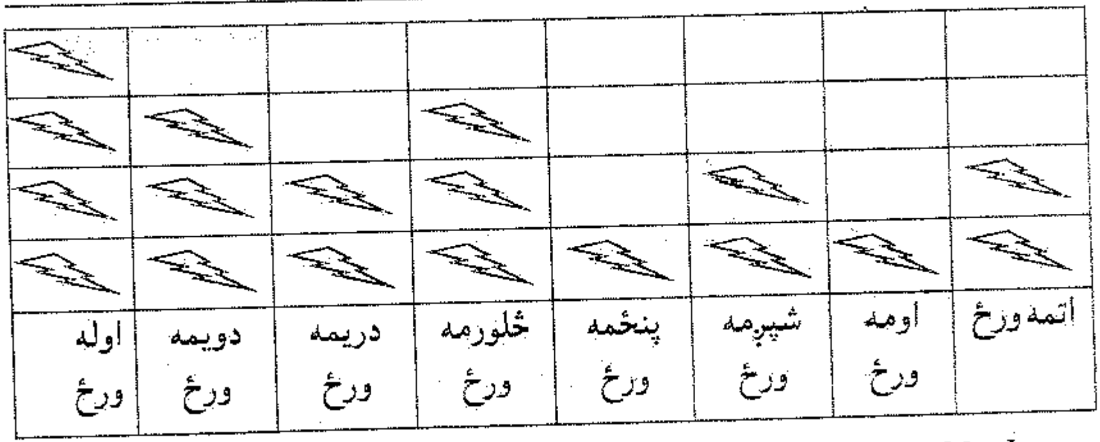
دکورنی غړي	1	2	3	4	5	6	7	8	مجموعه
دکورنی شمېر	4	7	9	8	6	2	3	1	40

انځوریز ګراف یا تصویري ګراف

که په راکړشوو معلوماتو باندی د ښې پېژندګلوی لپاره شکلونه یا سمبولونه په یوه جدول کی استعمال شي دغه ګراف د انځوریز ګراف په نوم یادیږي.

دشکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زیاتی اری خرڅی کړي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مود $Mode$:

د راټول شوو معلوماتو زیاتې فریکونسۍ ته مود وايي.

مود د مالونو په خرڅولو کې، د رایو په اچولو کې، د امتحان په نمرو او داسې نورو شیانو کې استعمالیږي.

اوسط $Mean$:

د اعدادو د مجموعې او شمېر نسبت ته اوسط وايي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

مثال: یو دکاندار په اوله ورځ څلور کتابونه په دویمه ورځ پنځه کتابونه په دریمه ورځ شپږ کتابونه خرڅ کړي دي وواياست چه په اوسط ډول یې د ورځې څو کتابونه خرڅ کړیدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{4 + 5 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول:

هغه جدول دي چه په هره طبقه کی د داتاګانوشمېر راښيي.

مثلاً دیوه ټولګي د شاګردانو د رياضي دمضمون نمرې په یوه جدول کی لیکل شوي دي دا نمرې په ګروپو ويشو او په هرګروپ کی دشاملو نمرو شمېرليکو په دغه شمېرکی زيات عدد ته د داتا کثرت وايي . اودی جدول ته د داتاګانو دکثرت جدول وايي که په جدول کی د داتاګانو دکثرت عدد کوچنی يا صفر وي. دجدول جوړول فايده نه کوي.

42	25	30	35	48	67	59	51	58	78
62	77	48	56	75	78	72	71	56	43
54	53	57	63	72	70	42	55	47	20
59	40	62	12	75	26	76	72	63	56

جدول يي داسی جوړيږي.

نمرې	شمېر
0 - 9	0
10 – 19	1
20 - 29	3
30 -39	2
40 -49	7
50 -59	11
60 -69	5
70 -79	11

د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصيتونه:

په يوه طبقه کی کوچني عدد ته ټيټ سرحد اوغټ عدد ته لوړسرحد وايي.هغه داتاګانی چه په يوه طبقه کی راځي د طبقې د وسعت په نوم يادېږي.د يوی طبقې د وسعت دپيدا کولو دطبقې سرحدات يو دبل څخه منفي کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$50 - 0 = 50$	د لمړی طبقې وسعت
$60 - 50 = 10$	د دویمی طبقې وسعت

ډله ایز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وايي.

مثلاً که د کال د هرې میاشتې د رخصتی ورځو ته کثرت ووایو نود ټول کال د رخصتیو مجموعه ډله ایز کثرت یا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وايي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو داتاگانو کثرت}}$$

مثال: په یوه ازموینه کی د دوه ټولګیو نمری په لاندی جدول کی راوړل شوي دي دا ټولګي د نمرو په لحاظ پرتله کړئ؟

مطلق کثرت	د الف ټولګی
6	10-30 ضعیف
10	50- 30 متوسط
4	70- 50 ښه

مطلق کثرت	د ب ټولګی
19	30- 10 ضعیف
25	50- 30 متوسط
16	70- 50 ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د دواړو ټولګیو نسبي کثرت پیدا کوو

د الف ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10- 30	6	$\frac{6}{20}$	30%
30-50	10	$\frac{10}{20}$	50%
50- 70	4	$\frac{4}{20}$	20%

د ب ټولګی	مطلق کثرت	نسبي کثرت	د نسبي کثرت فیصدي
10-30	19	$\frac{19}{60}$	31.6%
30-50	25	$\frac{25}{60}$	41.6%
50=70	16	$\frac{16}{60}$	26.6%

میله اي ګراف

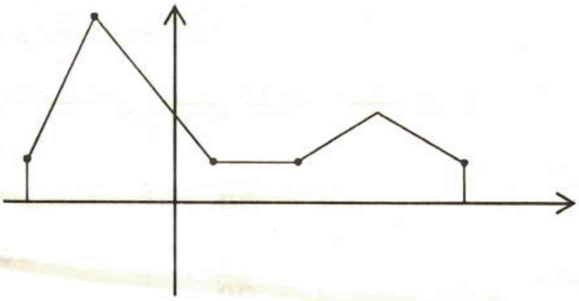
که د هری طبقی ګراف داسې رسم شي چه هر واحد یي یوه مربع وښودل شي اومربعګانی یو پر بل کېښودل شي دغه ګراف ته میله یي ګراف وایي.

مثلاً دځو کلونو دپنبی د حاصلاتو ګراف یا درنګونو ګراف چه هره مربع په یوه رنګ خوښوونکي دلالت وکړي.

دمنکسری کرښی ګراف:

داتا ګانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیتونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل یي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه ګراف ته د منکسری کرښی ګراف وایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د گسسته يا غېر متصلو داتا ګانو اوسط:

داتاګانی جمع کوو اود داتاګانو په شمېر يي ويشود داتاګانو اوسط په لاس راځي.د داتاګانو دتکرار په صورت کی د مکرری داتاګانی په فريکونسي کی ضربوو او جمع کوو يي د داتاګانو په شمېر يي ويشود داتاګانو اوسط په لاس راځي.که د داتاګانولمړی ګروپ په x_1 او فريکونسي يي په f_1 وښيو او اوسط په $\acute{x}$ وښيو نود اوسط فارمول په لاندی ډول دی

$$\acute{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{n}$$

مثال :د يوه شرکت دعايداتو اندازه په لاندی ډول ده.

دنده	د افغانيو په حساب مياشتنی عايد
رئيس	50000
دوه مرستيالان	40000
منشي	20000
دری متخصصان	30000
پنځه مامورين	25000
دوه خانه سامانه	10000

د شرکت مدير وايي چه بايداوسط عايدبايد 30000 وي ووايا ست چه دادعا درسته ده

$f \times x$	x	f	job
$1 \times 50000 = 50000$	50000	1	رئيس
$2 \times 40000 = 80000$	40000	2	مرستيال

(c) ketabton.com: The Digital Library

منشي	1	20000	$1 \times 20000 = 20000$
متخصصین	3	30000	$3 \times 30000 = 90000$
مامورین	5	25000	$5 \times 25000 = 125000$
خانه سامان	2	10000	$2 \times 10000 = 20000$

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\acute{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده .

د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاګانو ته نښتی داتاګانی وایي.که د دغه داتاګانوفریکونسیانی مختلفی وي.هغه داتاګانی چه فریکونسیانی یي نژدی وي په یوه ګروپ کی لیکواو د ګسسته داتاګانو د فارمول په څېر یي اوسط پیداکوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بوریو کی واچول اوویي ویل چه د بوریو وزن په اوسط ډول اوه منه دي.د ښاروالی له خوا بوری بیا وتلل شولی چه نتیجه یي په لاندی جدول کی درج ده.

د هری بوری وزن	د بوریو شمېر
6 - 6.5	11
6.5 - 7	14
7 - 7.5	12
7.5 - 8	8

د هر ګروپ اوسط د بوریو په شمېر کی ضربوو.اوسط یي پیدا کوو.

دبوریو وزن	دبوریو شمېر
6.25	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.75	14
7.25	12
7.75	8

د بوريووزن $x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8$

$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$

د بوريو شمېر $n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45$

په اوسط ډول د بوريو وزن $\acute{x} = \frac{312.25}{45} = 6.93\overline{8}$

د داتاګانو د ګېډۍ کولو طريقه

که د داتاګانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې ؤ کولای شو چه د داتاګانو څخه ګېډۍ جوړه کړو.

لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127

115 – 120

120 – 128

128 – 143

وسعت:

د لوئي داتا او کوچنۍ داتا تر منځ فاصلې ته وسعت وايي.

د ګېډۍ اوږدوالی:

که د داتاګانو وسعت دګېډيو په شمېر ووېشل شي دګېډۍ طول يااوږدوالی لاس ته راځي.

ميله ئي ګراف:

که مربعګانی يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي .ميله ئي ګراف لاس ته راځي.

د متصلو داتاګانو دسته بندي:

هم جنسه داتاګانو ته متصلې داتاګانی وايي . د دسته بندۍ لپاره يي هغه داتاګانی چه د واحداتو اندازه يي نژدی وي په يوه ګېډۍ کی ليکو.

د (15) ذده کوونکواوږدوالی په لاندی ډول ليکل شوی دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	.132	146

پورته داتاګانو څخه ګېډۍ جوړې کړئ.

د ذده کوونکو دونی اوږدوالی	دذده کوونکو شمېر
130 – 140	6
140 – 150	5
150 – 160	4

وزني اوسط یا منځنۍ قیمت:

هره داتا په مربوطه ضریب کې ضربوو او د داتاګانو په مجموعه یې ویشو.

$\bar{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ وزني اوسط

مثال : د خینو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي .لکه A, B. C, D, F چه $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري یو محصل لاندې لمبرې اخیستي دي.

مضمون	نمری	د کریدیتونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	D	3
ژبه	F	1

د محصل د نمرو اوسط څو دي؟

حل:

مضمون	حرفي نمری	د کریدیتوشمېر= x	عددي لمبری = w	$w \cdot x$
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيميا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بيولوژي	D	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	F	1	4	$4 \times 1 = 4$

د کريډيټونو شمېر $= n = 12$

$$\text{د نمرو اوسط} = \bar{x} = \frac{9 + 12 + 4 + 9 + 4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

مستطيلي ګراف

په مستطيلي ګراف کې د مستطيل قاعده د ډاټاګانو اتصال يا پيوستون راښيي. مساحت د ګېډې کثرت راښيي. که ګېډيو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت ليکو په دې حالت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور دی.

مثال: په يوه ټولګي کې د ذده کوونکو وزن په لاندې ډول دی.

د ذده کوونکو وزن په کېلوګرام	40 – 45	45 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 90
دذده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

وزن د $(X\acute{X})$ په محور ښيو او څرنګه چه $5kg$ د ټولو منځ کې مشترک دي نو د $(X\acute{X})$ په محورټول وزنونه په يوه واحد اندازه کوو $(40 - 45)$ په يوواحدښيو. د مستطيلو د ارتفاعګانو د پيدا کولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو.

$$40 - 50 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

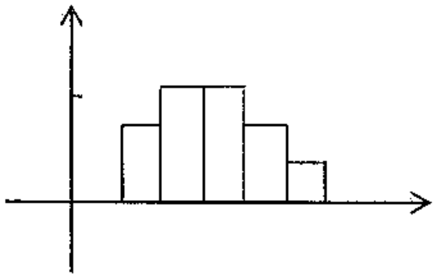
$$45 - 50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50 - 60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \rightarrow 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \rightarrow 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دایروي ګراف:

د دایرې په مرسته د ناڅاپي متحول د داتاګانو ښودلو ته دایروي ګراف وایي.

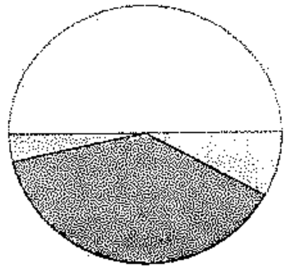
د کثرت د درجې د لاس ته راوړلو لپاره د داتاګانو کثرت د ټولو داتاګانو په شمېر لیکواو په (360°) کې یې ضربوو د هرې ګېډې مرکزي زاویه لاس ته راځي.

$$\text{کثرت د درجې له جنسه} = \frac{\text{د داتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال:- د یوې مؤسسې د کارکوونکو شمېر (200) کسه دي وظیفې یې د تحصیل د درجې له جنسه وېشلې دي.

د تحصیل درجه	کثرت	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$
ماشتر	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$
لیسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$

(c) ketabton.com: The Digital Library



میانه $Median$:

د داتاګانو د تحول وسطي عدد ته میانه وايي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سیټ په څیر يي ترتیبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد يي (3) دي.که د داتاګانو شمیر جفت وي.د منځنیو دوه داتاګانواوسط د داتاګانو میانه ده.لکه (10 4 3 9 6 2) چه میانه يي داسې پیدا کیږي.(10 9 [4 6] 3 2) چه $\frac{4+6}{2} = 5$ یعنی میانه يي (5) ده.

د تحول ساحه $Evolution\ of\ field$:

که د متحول د اوږدوالي تغیر په یوه ساحه کی ممکن وي دغه ساحی ته د تحول ساحه وايي.

په ټولنه کی د ساحی وسعت د ټولنې پراګنده ګي ښیي.په هره اندازه چه دا توپیر کم وي پراګنده ګي کمه ده او دټولنی د وګړو تر منځ نژدېکت زيات دي. که د تحول ساحه صفر وه نودټولنی د څېړنی ځانګړتیاوی برابری دي اوټولنه متجانسه ده.

مثال : په څلور میاشتنی ازموینه کی د دوه ډده کوونکو لمبری په لاندی ډول دي.

39 38 37 36 35 33 32 25 21 20
39 35 34 34 35 35 35 34 33 20

د دواړو سیټونو د تحول ساحه پیدا کړئ او ووایاست چه په کومه ګېډی کی پراګنده ګي زیاته ده ؟

حل:- د لوړو سرحدو څخه ټیټ سرحدونه منفي کوو.

$$39 - 20 = 19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مګر په اول ګروپ کی پراګنده ګي زیاته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انحراف اوسط *Average deviation*

د داتاګانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وايي

د داتاګانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدی امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کی د هغوی مطلقه قیمتونه جمع کوي.او په لاندی ډول جمع کیږي.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1-\acute{x}|+|x_2-\acute{x}|+\cdots+|x_n-\acute{x}|}{n}$$

مثال : د (40) تنو شاګردانو لمبری په لاندی جدول کی راکړشوي دي.

نمری	کثرت
$0-10$	2
$10-20$	7
$20-30$	4
$30-40$	5
$40-50$	10
$50-60$	12

د انحراف اوسط يي پیدا کړئ؟

$$\acute{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

f = کثرت	د داتاګانو اوسط	$f\cdot x$	$x-\acute{x}$	$f(x-\acute{x})$
2	5	10	$5-37.5=-32.5$	$2\times(-32.5)=-65$
7	15	105	$15-37.5=-22.5$	$7(-22.5)=-157.5$
4	25	100	$25-37.5=-12.5$	$4\times(-12.5)=-50$
5	35	175	$35-37.5=-2.5$	$5\times(-2.5)=-12.5$
10	45	450	$45-37.5=7.5$	$10\times7.5=75$
12	55	660	$55-37.5=17.5$	$12\times17.5=210$
$\frac{1}{n=40}$		1500		

$$f(x-\acute{x}) = -65-157.5-50-12.5+75+210=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل كيږي چه د جمع حاصل يي صفر دې نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کی نيسو.

$$د\ انحرافونو\ اوسط = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$د\ انحرافونو\ اوسط = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

د څوضلعي فريکونسي ګراف

د څوضلعي فريکونسي ګراف د متصلو داتاګانو د پاره استعماليږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه ګراف يي رسم کړو د هرکلاس مرکز(منځنی نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښيو

د کلاس مرکزاوفريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کی يوه نقطه تعينوي دغه نقطی وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کی $(x_1 - c, 0)$نقطه او کلاسونو په اخر کی $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو دڅو ضلعي فريکونسي ګراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندی جدول کی د داتا څو ضلعي او مستطيلي ګراف رسم کړئ.

د کلاسونو حدود =cl	$11-16$	$16-21$	$21-26$	$26-31$	$31-36$
مطلقه فريکونسي = f_i	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز =x_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

$c = 5$ دی نو د دوه اختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندی ډول اجرائت کوو.

$(x_1 - 5,0) = (13.5 - 5,0) = (8.5,0)$

$(x_2 + 5,0) = (33.5 + 5,0) = (38.5,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داتا په صعودي ډول ترتیبوو. او د یو څخه تر(n) پورې کود ورکوو د $(p = 1,2,3)$ موقعیت دلاندې رابطې پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیتا کې داولې ربعې او دریمې ربعومقادیر پیدا کړئ؟

حل:

د دیتا شمېره	1	2	3	4	5	6
	80	85	90	100	120	140

د لمړۍ اودریمې ربعو ځایونه عبارت دي.

$$c_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$
$$c_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$
$$q_1 = 85 \qquad \& \qquad q_2 = 120$$

صندوقچه یي ګراف:

صندوقچه یي ګراف هغه ګراف دي چه د نورو ګرافونو په نسبت د ډېټا تیت والې زیات روښانه؛ کوي د ډېټا ګراف د لاندې اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنۍ ډېټا

ب- لمړۍ څلورمه

ج- میانه

د- دریمه څلورمه

ج- لویه ډېټا

مثال : په یوه ښارکې په (15) ورځو کې د ترافیکي پېښو شمېر په لاندې ډول دې صندوقچه یي ګراف ئې رسم کړئ.

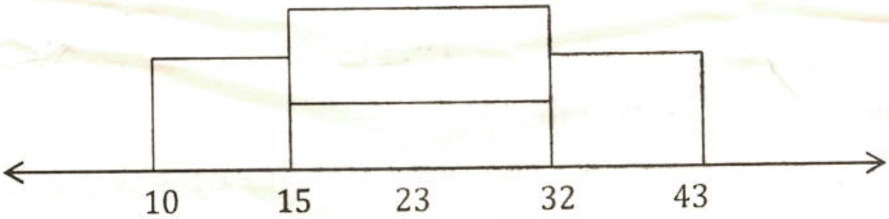
(c) ketabton.com: The Digital Library

12	10	15	23	14	27	16
34	41	43	32	18	25	31

پورتنی داتا په ترتیب لیکو .

10	12	14	15	16	18	23
25	27	31	32	34	41	43

تر ټولو کوچنی داتا $(q_1 = 10)$ ده اوتر ټولولويه داتا$(q_n = 43)$ ده میانه $(med = 23)$ده لمړی ربعه $q_1 = 15$

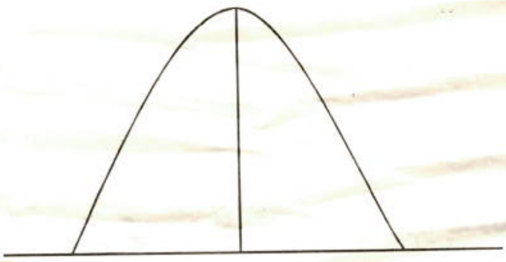


پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده دلمړی او څلورمی ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 ترمنځ ده.

د نارمل منحني د مرکزي تمايلونو پرتله کول:

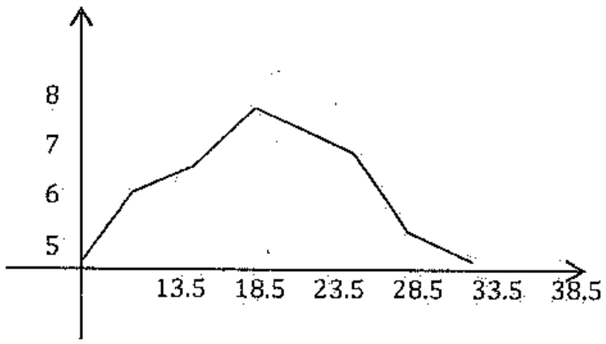
نارمل منحني يو متناظر منحني دې چه ديوه زنګ په ډول شکل لري او زياتی طبعي پېښی د همدغه منحني په واسطه ښودل کيږي.اوسط ، ميانه او موډ يي په مرکزي برخه کی قرار لري نوځکه ورته د نارمل منحني تمايلونکي وايي.

که منحني متناظر وي نواوسط په ميانه منطبق دی اوڅرنګه چه يوه اعظمي نقطه لري نو ځکه يي موډ هم د اوسط اوميانې سره مساوي دی.

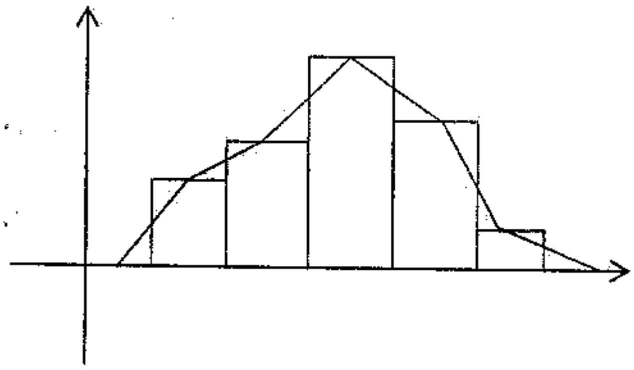


$\acute{X} = mod = med$

(c) ketabton.com: The Digital Library



مستطیلي ګراف اود فریکونسي څو ضلعي ګراف:



د فریکونسي څو ضلعي دګراف راسونه د فریکونسي داړونده جدول د مستطیلو د پورتنی ضلعی په نیمایي منطبق دي دفریکونسي څو ضلعي مساحت دمستطیلو د مساحت سره مساوي دي.

د ساقی او پاڼی ګراف *Grph of stem and wrench*:

په دوه رقمي عدد کی د لسیز رقم ساقه او د یویز رقم پاڼه ده.

مثال : د سانتي متر په حساب د شل نوو پیدا شوو ماشومانود تنی اوږدوال په لاندی ډول انتخاب شوی دي.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

پورتنی داتاګانی په صعودي ډول ترتیب کړئ او څرنګه چه د(4) رقم یعنی دلسیز رقم پکی مشترک دی نو داتاګانی په لاندي ډول ترتیبوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$4 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9) \cdots\cdots\cdots 1$

د صفر څخه تر (9) پورې د رقمو تکرار دپاڼو شمېر ښیي.پورتني رقمونه په لاندې ډول هم لیکلای شو.

0			
2			
3	3	3	3
5	5	5	
6	6		
8	8		9
9	9	9	

که د (1) شمارې د جدول څخه ګراف جوړ کړود ساقې او پاڼې ګراف لاس ته راځي چه (4) به يې قاعده او دقوس په منځ کې رقمونه به يې پاڼې وي.که پورتني جدول ته د 90° په اندازه دوران ورکړو. میله یي ګراف لاس ته راځي.

3 9
3 5 7 9
3 5 6 7 8 9
0 2 3 5 6 7 8 9

ربعې $Quarters$:

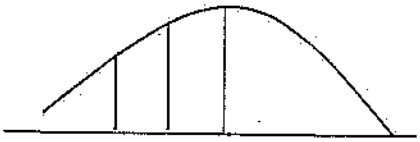
د يوه شي څلورمې برخې ته ربع وايي.

يعنې که يو شي په څلورو برابرو برخو وويشو برخې يې د اولې ربعې،دويمې ربعې، دريمې ربعې او څلورمې ربعې په نوم ياديږي.

اوله ربعه د شي 25% دويمه ربعه دشي 50% اودريمه ربعه دشي 75% وي.که داتا په صعودي ډول ترتيب شي د داتا ميانه د(Q_2)سره مساوي ده د داتا داولې نيمايي ميانه (Q_1)ده او د دويمې نيمايي ميانه (Q_3) ده.

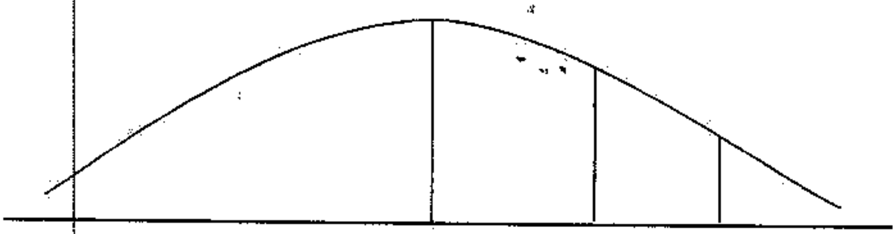
(c) ketabton.com: The Digital Library

که اوسط اومیانه مساوي وي نو تر اوسط او میانی د مخه داتاګانی اوداوسط او میانی د وروسته دېتاګانو سره مساوي دي.اوکه اوسط د میانی کینې خواته پروت وي نو دهغه داتاګانو شمېر چه داوسط ښي خواته پرتې دي زیات دی تر هغه دېتاګانو دشمېر څخه چه د اوسط چپې خواته پرتې دي.



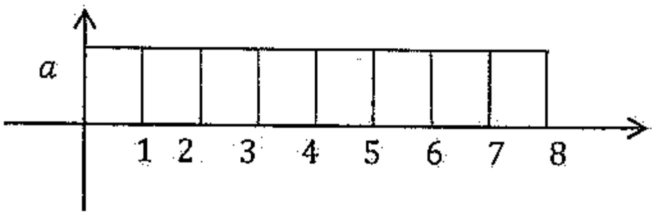
$$\acute{X} = mod = med$$

او که اوسط دمیانی ښی خواته پروت وي نود هغه داتاګانوشمېر چه د اوسط چپې خواته پرتې دي زیات دېد هغه داتاګانوتر شمېر چه د اوسط ښی خواته پرتې دي.



$$mod > med > \acute{x}$$

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ؟



$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\acute{x} = \frac{a\cdot 1 + a\cdot 2 + a\cdot 3 + a\cdot 4 + a\cdot 5 + a\cdot 6 + a\cdot 7 + a\cdot 8}{a+a+a+a+a+a+a+a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\acute{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي انحراف

ربعي انحراف يو له هغه ټاکونکو څخه دی چه د دېټا تيت والی ښکاره کوي.

مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لږ وي په همغه اندازه دېټا نژدی وي يعنی تيتوالی يې کم وي.

کله کله دځلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښيي چه دی ته د ځلورمی د نيمايي لمن وايي.

مثال: د لاندی عددونو د ځلورمو انحراف پيدا کړئ.

20 22 22 23 24 25 29 30 31 35 36

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

واريانس (*Variance*):

واريانس په لغت کی اختلاف ته وايي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاګانی ولرو دهری داتا اوسط پيدا کړود داتاګانواو دهغوی د اوسطونودتفاضل د مربعګانود مجموعی اوسط ته واريانس وايي.

د انحرافونو د مربعګانو مجموعه عبارت ده.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2 = (x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتني مجموعه په (n) ویشواو په (s^2) یې ښیو واریانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2}{n}$$

د واریانس د پیدا کولو لپاره د لاندې فارمول څخه هم کټه اخلي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \bar{x}.^2$$

مثال : دلاندې دېټا وریانس د دواړو فارمولو په مرسته پیدا کړئ

1 5 6 7 9

الف: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ دفارمول پواسطه:

$$x' = \frac{1 + 5 + 6 + 7 + 9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1 - 5.6)^2 + (5 - 5.6)^2 + (6 - 5.6)^2 + (7 - 5.6)^2 + (9 - 5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} {x_i}^2}{5} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 + {x_5}^2}{5} - \acute{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1 + 25 + 36 + 49 + 91}{5} - (5.6)^2 = \frac{192}{5} - 31.36 = 38.4 - 31.36$$

$$s^2 = 7.04$$

يادونه:

که دځو کلاسو دېټاګانی $x_1, x_2, \ x_3, \cdots x_n$ وي او فريکونسي ګانی يي په لاندې ډول وي. $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ واريانس يي د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_1 (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی

د متحول دمربع واحد د واريانس واحد دی.

معياري انحراف (مطلق تيتوالی):

د واريانس مربع جذر ته معياري انحراف وايي په (s) سره يي ښيي او د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \acute{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

واحد يي د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ({x_i}^2 - 2\acute{x} x_i + \acute{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2x \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - 2n\acute{x}^2 + n\acute{x}^2 \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\acute{x}^2 \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right\} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

مثال:- د (5) ناروغانو د بدن د حرارت درجه په لاندې ډول راکړ شوې ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معياري انحراف يې پيدا کړئ.

حل:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (39-39.4)^2 + (40-39.4)^2 + (41-39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2 + (-0.4)^2 + (-0.4)^2 + (0.6)^2 + (1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96 + 0.16 + 0.16 + 0.36 + 2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \quad \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فريکونسيو د جدول ځخه معياري انحراف په تقريبي ډول په لاندې ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \acute{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \acute{x}^2}$$

چه $\acute{x}$ د ډېټا اوسط ، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فريکونسي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبدلون ضریب یانسبي پراګنده ګي:

د بدلون یاتغیر ضریب د معیاري انحراف او مطلق اوسط نسبت دی مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{د بدلونونو یا تغیراتو ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\acute{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کی ضرب کړودتحول ضریب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\acute{x}}$$

د بدلون ضریب دمثبتو دیټاګانو لپاره دی.که دیټاګانی مساوي وي د بدلون ضریب صفر دی.که ټولی دیټاګانی په یوه مثبت عدد کی ضرب شي د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

که دهری دیټاسره یو مثبت عدد ورزیات شي د بدلون ضریب کوچنی کیږي.

مثال: د $(1,3,5)$ دیټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دویم مثال: د تلویزون د تصویري لامپونو تولیدوونکي د(A) او (B) دوه ډوله لامپونه تولیدوي د (A) متوسط عمر (1495) ساعته او د (B) متوسط عمر (1875) ساعته دي معیاري انحرافونه یي په ترتیب سره (280) او (310) دي دکوم لامپ دضریب بدلون زیات دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

څرنګه چه $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامپ ډېره پراګنده ګي لري ولی تېنګښت یې کم دې.

په نورمال منحني کی تیتوالی:

د نورمال منحني په دواړو خواو کی د$(\acute{x} - s, \acute{x} + s)$ او یاد $(\acute{x} - 2s, \acute{x} + 2s)$ پواسطه پراګنده ګي یا تیتوالی پیدا کیږي.

مثال: د یوی موسسی د معاش اوسط (12500) او معیاري انحراف یي (700) دی.

الف: په نورماله توزیع کې د فیصدی په نظر کی نیولو سره د معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: ایا ویلای شئ چه (14000) افغانی معاش غیر عادي معاش دی؟

حل: لمړي $\acute{x} \pm s$ او $\acute{x} \pm 2s$ او $\acute{x} \pm 3s$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د (s) له مخی	فاصله د افغانیو له مخی	فیصدي
$\acute{x} \pm s$	11800 – 13200	68%
$\acute{x} \pm 2s$	11100 – 13900	96%
$\acute{x} \pm 3s$	10400 – 14600	99.6%

$$\acute{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \acute{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو (14000) افغانی معاش غیرعادي معاش دی څکه چه د $(2S)$ داندازی څخه زیات او هم د $(\acute{x})$ داندازی څخه ډېر دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورماله توزیع مشخصات:

د نورمال په دوارو خواو کی د نورمال په نسبت د منحني د ټیټوالي، جګوالي او نژدېکت عامل ته شاخص وايي.شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص $Skewness$:

هغه توزیع چه د اوسط په دوارو خواو کی متناظره نه وي خلمېدل نومېږي. د لاندې دوو ضریبونو پواسطه ښودل کیږي.

الف- د خلمېدلو ضریب: د خلمېدلوضریب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره استعمالیږي.فارمول یي په لاندې ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2}{s^2}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نوتوزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحني د توزیع خلمېدل مثبت دي $Possitive\ Skewness$ یعنی خمېدل یي ښي خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحني دتوزیع خلمېدل منفي $Negative\ Skewness$ دي.یعنی چپی خواته خلمیږي. که چېرته دکثرت جدول موجود وي خلمیدلو(عدم تناظر) یي د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{\sum s^a}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

ب- د پیرسون دخلمیدو ضریب: د پیرسون د خمېده ګی ضریب په لاندې ډول دی.

$$sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پړسوب $kurtosis$ شاخص:

دا شاخص ښیي چه څه وخت منحني جګوالی او څه وخت ټیټوالی لري فارمول یي په لاندې ډول دی.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

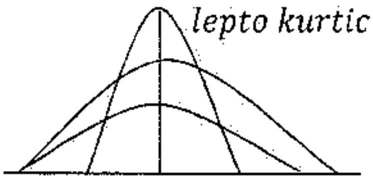
(c) ketabton.com: The Digital Library

که دکثرت جدول موجود وي نو دپرسوب فارمول په لاندې ډول دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دې فارمول کی (s) معياري انحراف دی.دغه شاخص دپرتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراګنده ګی پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ د ضریب دری ډوله خلمېدل او پړسوب ښیي.



حل : په نورمالي توزيع کی $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پړسوب یي د نورمال منحني څخه ډېرېږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پړسوب يي کم دی.

څومتحوله ټولنې:

که په یوه کلاس کی یوازې دشاګردانو دونې په باب خبرې کیږي نو په دغه ځای کی متحول یو دی.او که دشاګردانو د چاغښت په باب هم خبرې وشي نو په دې صورت کی متحولونه دوه کیږي.د دغسی متحولونو تر منځ رياضيکي اړيکي د قایمو مختصاتو په سیستم کی جوړيږي.لمړی د متحولونو معادلې جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کی په نخښه کووا وصلوو يې.

مثال: يو متخصص د غذائي موادو تاثير په يو شمېر موږکانو باندې وڅېړل دغذاء تر تطبيق دمخه يې د هر موږک وزن اندازه کړ او بيا يې د عمليي تر تطبيق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړاو لاندې دېټا ګانې يې په لاس راوړلې.

(1.8). (2.3). (1.7). (3.5). (2.4)

په هره جوړه کی لمړی مختصه د موږکانو د غذاء ترتطبيق دمخه وزن او دويمه مختصه د غذائي موادو تر تطبيق وروسته وزن دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مورکانو شمېر	1	2	3	4	5
د مورکانو لمړنی وزن	1	2	1	3	2
د غذائي موادو تر تطبيق وروسته د مورکانو وزن	8	3	7	5	4

پورتنی جدول په ستوني ډول جوړ کړئ.

دغذائي رژيم ترتطبيق وروسته د مورکانووزن	د مورکانولمړنی وزن	دمورکانوشمېر
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

پورتنی دېټاګانی دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

دپراګنده ګی ګراف Scatter Diagram:

د دېټا داندازه کولولپاره په یوه مستوي کی پاشل شوی نقطی د پراګنده ګراف په نوم یادیږي.

لاندي مرتبې جوړې راکړشوي دي.

$$(1،2)،(2،3)،(3،4)،(4،5)$$

پورته دېټا د شېر او خط دېټا ده.که سکه پورته خواته وغورزول شي او دشېر مخ کښته خواته وي نود (y) په محور یو ډېریږي.

د مورکانو د غذائي رژيم دېټا په لاندی ډول ده.

$$(2،4)،(1،8)،(2،3)،(3،5)،(1،7)$$

په دغه دېټا کی د هری نقطی تابع ښېله ده. نو له همدغه جهته څو متحوله ټولنه ورته وائي.

پېوستون او دپېوستون ضریب:

د یوه مستقیم او نقطو تر منځ دفاصلی د پیدا کولو فارمول ته دپېوستون ضریب وائي او په (r) سره یي ښیي .او د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندې د ډېټا د موږکانو د غذائي رژيم ډېټا ده.

د موږکانو شمېر	لمړنی وزن(x)	وروستنی وزن (y)	xy
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

د موږکانو د غذائي رژيم د وزنونو تر منځ د پيوستون ضريب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په (x) او وروستني وزنونه په (y) ښيو د موږکانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad , \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x{}^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y{}^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}} = \frac{\sum x + \sum y}{n}$$

$$= \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5}$$

$$= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د پيوستون ضريب په لاندې ډول لاس ته راځي.

$$\text{د پيوستون ضريب} = r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

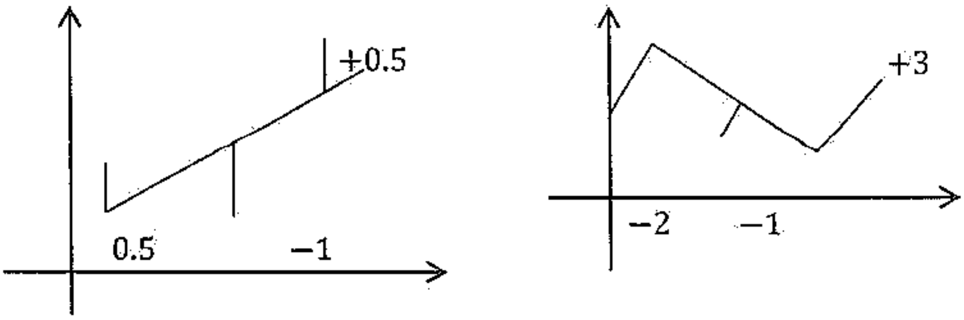
د خطي مېلان معادله:

$y = ax + b$ د مستقيم خط معادله ده. چه دمستقيم خط مېلان دی که $a > 0$ وي کرښه متزايده ده. اوکه $a < 0$ وي نوکرښه متناقصه ده که (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کی صدق وکړي.

نونقطه په خط پرته ده . که دنقطی په مستوي داسی پاشلی وي چه کرښی ته نژدی وي نود پيوستون ضريب به (-1) او$(+1)$ ته نژدی وي که يوه داسی کرښه چه معادله يي $y = ax + b$ وي د ټکو له منځه داسی تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدی وي نو د دغه کرښی د ترسيم لپاره بايد يوه داسی معادله جوړه کړو دفارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کی نيسو.

x	1	5	9
y	6	5	7

د دغه دېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوی يي دمشاهدی څخه معلوموو.



په پورته دواړو حالتونو کی د کرښو د خطاګانو الجبري مجموعه صفرده .

د الف حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2)$ = دکرښی د خطاګانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5)$ = د کرښی دخطاګانو الجبري مجموعه

څرنګه چه په دواړو حالتو د جمعی حاصل صفر دی نومناسبه کرښه نه معلومېږي.نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامی يو اوبل دمنځه يونسي نووروسته تر مربع کولو يي جمع کوو.

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2$ = د خطاګانو ددويم توان جمع

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوهم توان جمع د خطاګانو $= (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$

هغه کرښه چه د مربعګانو مجموعه يي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ريګريشن کرښی وايي.د رګريشن اومشاهداتوتوپيرپه وښيو نو د دويم توانونو دلاکوچني والي په خاطر ليکو.

د خطاګانو ددويمو توانونو مجموعه $= \sum(y-\bar{y})^2 = \sum\{y-(ax+b)\}^2$

$$= \sum(y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2$$

په دې حالت کی (x) او (y) ثابت عددونه دي (a) او (b) متحولين دي

$$b = \text{د پيوستون ضريب} \times \frac{\text{د } y \text{ معياري انحراف}}{\text{د } x \text{ معياري انحراف}}$$

د (a) او (b) دمحاسبی دغه لارد لږکيو مربعګانو دتګلاری په نوم يادیږي.

نتيجه :-د ريګريشن کرښه هغه کرښه ده چه ديوه متحول د مقدار دمعلومولو دبل متحول د مقدار څخه استفاده کيږي.

مثال :- لاندی دېتاپه نظر کی ونيسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د ريګريشن کرښه نظر ته پيدا کړئ؟

حل : څرنګه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$s_x{}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{{s_x}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum(y_1 - \bar{y})^2}{n}$$

$$= \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5}$$

$$= \frac{\mathbf{4+1+0+1+4}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} = \mathbf{2}$$

$${s_y}^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{{s_y}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1\cdot 4) + (2\cdot 3) + (3\cdot 2) + (4\cdot 1) + (5\cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b\cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r\frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کی ځېړل کیږي عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یې نمونه یي فضاء او د قیمتونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ وي.

که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,..}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \cdots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي اوپیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چېری $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي په دی صورت کی ددی احتمال چه (x) د (k_1) او (k_2) په منځ کی وي دلاندی رابطی سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$

که چېری (x) پیوسته ناڅاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دی صورت کی لیکو چه:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چېری ناڅاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دی حالت اوسط $(Expected\ Value)$ د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي د لاندی رابطی سره برابر دي.

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots\cdots\cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د (x) اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که (x) تصادفي گسسته متحول وي په دی صورت کی د (x) وریانس چه د (s^2) په شکل ښودل کیږید لاندی رابطی سره برابر دی.

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

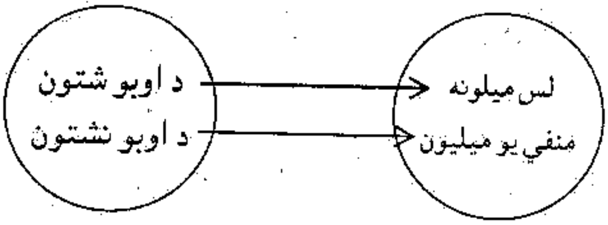
(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: يو شخصي شرکت غواړي د يوی غونډۍ په سر يوه ځاه وکني د اوبو ځاه په يوميلون افغانۍ تماميږي . که ځاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس ميلونه افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي يو ميلون تاوان ورکوي.

الف :-دا موضوع د يوی تابع په شکل وښيئ.

ب:- که د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال (0.8) وي په دي صورت کی د احتمال تابع ،اوسط (*Expected Value*) ، وريانس او د تصادفي متحول معياري انحراف پيدا کړئ؟

د الف حل:



د ب حل: تصادفي متحول، داحتمال تابع ،اوسط ،وريانس، او معياري انحراف په لاندی جدول کی ښودل شوي دي.

معياري انحراف	واريانس	دتصادفي متحول دمربعاتو انحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه	اوسط	د تابع احتمال	تصادفي متحول
s	$s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$	$[x_i - E(x)]^2$	$E(x) = \sum x_i f(x_i)$	$f(x_i)$	x_i
4.4	$4.84 \cdot 0.8 = 3.872$ $77.44 \cdot 0.2 = 15.488$	$(-1-1.2)^2 = 4.84$ $(10-1.2)^2 = 77.44$	$-1 \cdot 0.8 = -0.8$ $10 \cdot 0.2 = 2$	0.8 0.2	−1 10
	$\sum s^2 = 19.360$		1.2	0.1	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جمله يي توزيع او د برنولي ازمايښت:

د احتمال دوه جمله يي توزيع يوه مجزا (ګسسته) توزيع ده چه د مختلفو پېښود توصيف لپاره استعماليږي.

د برنولي ناڅاپي ازمايښت په بريالیتوب او نابريالیتوب په دوه دستودسته بندي کيږي.

د برنولي توزيع کولای شوچه په $P(x = m) = P^m(1 - P)^{1-m} = P^m \cdot q^{1-m}$ بنه وښيو.

(P) د بريالیتوب او $q = I - P$ دنابريالیتوب احتمال دی.

که يو ازمايښت (n) ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي.چه دهرازمايښت دبريالیتوب احتمال په (P) او دنابريالیتوب احتمال په (q)بنيو (n) ځله ازمايښت څخه د (m) ځلي بريالیتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x \le m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} \qquad ,0 \le m \le n$$

د دوه جمله يي دتوزيع اوسط په $\bar{x} = np$ اومعياري انحراف يي په $s = \sqrt{npq}$ ښودل کيږي.

مثال: د شکرې د مرض څخه د يوه مريض د جوړېدلو احتمال(0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او يا د (3) څخه تر (4) تنو پورې جوړشي.

حل:

$n = 15 \quad , \quad m = 5 \quad , \quad P = 0.4 \quad . q = 0.6$

$$P(m = 5) = \binom{n}{m} P^m \cdot q^{n-m} = \binom{15}{5} (0.4)^5 \cdot (0.6)^{15-5}$$

$$= \frac{15!}{5!\,(15-5)!} \times 0.01024 \cdot 0.00604661760 = \frac{360360}{120} \cdot 0.00006191$$

$$= \frac{22.3098876}{120} = 0.1859$$

$$P(3 \le m \le 4) = \sum_{i=3}^{4} \binom{15}{i} (0.4)^i (0.6)^{15-i}$$

$$= (3^{15})(0.4\,)^3(0.6)^{15-3} + (4)^{15}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{15!}{3!\,(15-3)!}\cdot(0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!\,(15-4)!}\cdot(0.0256)(0.6)^{11}$$

$$= \frac{2730}{6}(0.000139264) + \frac{3270}{24}(0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24}$$

$$= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601$$

د پواسن داحتمال توزيع:

د پواسن د احتمال دتوزيع فارمول دا $P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$

او $e = 2.718281\cdots$ دي.

مثال: (200) کسانو دطیارې ټيکټ اخيستی دی که د مسافرينود نه راتګ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟

حل:

$$n = 200 \quad , \quad P = 0.01$$

$$P(x-m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad ,\lambda = np = 200\cdot 0.01 = 2$$

$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2}\cdot 8}{6} = \frac{\frac{8}{7.389046158}}{\frac{6}{1}}$$

$$P(3) = \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه کوو.

$$P(x=m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m}$$

$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ P = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.09$$

$$P(x-m) = P(3) = \binom{200}{3}(0.01)^3(0.09)^{200-3}$$

$$= \frac{200!}{3!\,(200-3)!}(0.01)^3(0.09)^{197} = 0.1814$$

د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

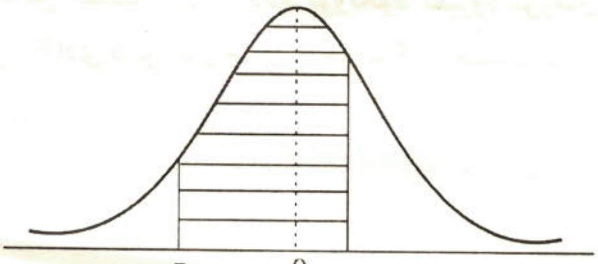
(c) ketabton.com: The Digital Library

د جدول دجوړولو شکل د احصائیوي دېتا د ستېنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

$z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ چه (z) د ستېنډرډ نورمال متحول او منحني ته دستېنډرډ نورمال منحني یا د نورمال احتمال منحني په نوم یادیږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندې مساحت د منحني د یوې برخې مساحت دی او $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ سره یې تر بدلولو وروسته په لاندې ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$



د ستېنډرډ نورمال د توزیع احتمال دجدول د استعمال له لارې کولای شو. د جدول په عمودي ستون د (z) د مقدا ردوه لمړي رقمونه د اعشاریي دعلامی دواړو خواوته رقمونه د منحني ارتفاع راښئي اوپورتنی سطرد اعشاریي دعلامی سلیز رقم د منحني دواحد قاعده راښئي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پیدا کړئ؟

حل: د (z)په ستون کی (1.5) او په سطر کی (0.06) پیدا کوو ګوروچه د(1.5) دعددپه کرښه او د (0.06) دعدد په ستون کی واقع دی (0.9406) دی چه همدغه دمنحني مساحت دي.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستګاه داسی تنظیم شوی ده چه که(952)ملي لېتره مایع په بوتل کی واچوي معیاري انحرا ف یي (4) ملي لېتره کیږي که مایع د (952) او (956) ملي ېترو تر منځ وي معیاري انحراف یي څو دی؟

حل : لمړی د له جنسه پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یاداشت:

که د پواسن په فارمول کی د (λ) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کی د ورتللو د شمېر احتمال رابنیي.

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کی د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددی احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کی راغلي وي څومره وي؟

حل:

$\lambda=60 \qquad , \qquad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$

$m=4 \qquad , \qquad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}\cdot 3^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}\cdot 3^4}{4!}$$

$$=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\frac{81}{20.0854}}{\frac{24}{1}}=\frac{1\cdot 81}{24\cdot 20.0854}=\frac{27}{8\cdot 20.0854}$$

$$=\frac{27}{160.6832}=0.168032$$

د نورمال توزیع:

دنورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندی ډول ده.

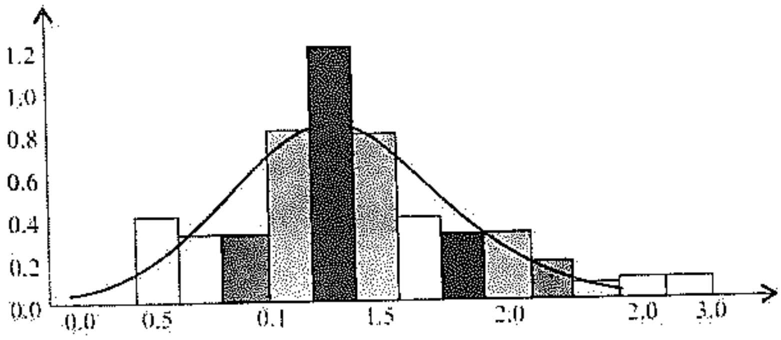
$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

x پیوسته تصادفي مقدار (s)معیاري انحراف او $f(x)$ د منحني جګوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعګانو څخه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د موټر ماشين دتېلو دسوځولو په وخت کې يوه اندازه مضرلوګی خارجوي د هغه مضر لوګي مقدارچه د (46) موټرانو څخه توليدېږي په (1980) ميلادي کې ديوه فزيکدان پواسطه چه لورېژن نومېده وځېړل شو. لوګی يوه اندازه N_2 او (O_2) لري لاندې مستطيلي ګراف د N_2 او O_2 اندازه چه واحد يې $^{gr}/_{mil}$ دي او په(46) موټرانوکې دتېلو د سوځېدوڅخه توليدېږي ددغه موټرانو نورمال احتمال توزيع ، اوسط او وريانس راښئي د هرمستطيل مساحت د مستطيل دقاعدې او ارتفاع دحاصل ضرب څخه لاس ته راځي.مثلاً په څلورم ستون کې چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پورې يې د قاعدې طول دی مساحت يې په لاندې ډول لاس ته راځي $\frac{4}{46} \times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

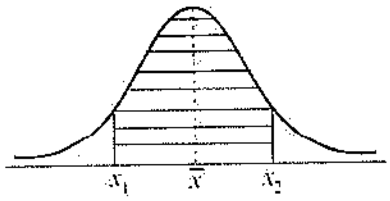


د نورمال توزيع منحني لاندې مساحت اود هغه ستېنډرډ کول:

کله چه (x)پيوسته تصادفي متحول د x_1 او x_2 تر منځ قيمت واخلي نوبايد د (x) داحتمال دتوزيع له تابع څخه انتيګرال ونيول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \overline{x, s})dx$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z_1 = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{952 - 952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956 - 952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د ځخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر ځخه تر (1) پوری ده. د جدول ځخه معلومیږي چه $P(0 \leq z \leq 1) = 0.8413$

معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%)ډک شوي وي د (952) ځخه تر (956) پوری مایع لري.

دویم مثال : په یوه خاص مضمون کی د ذده کوونکود نمبرود نورمال توزیع اوسط (70) اومعیاري انحراف يي (8)دی د نورمال جدول ځخه په ګټه اخیستوسره د(54)ځخه تر (84) پوری فیصدي پیدا کړئ؟

حل:

$$z_1 = \frac{54 - 70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

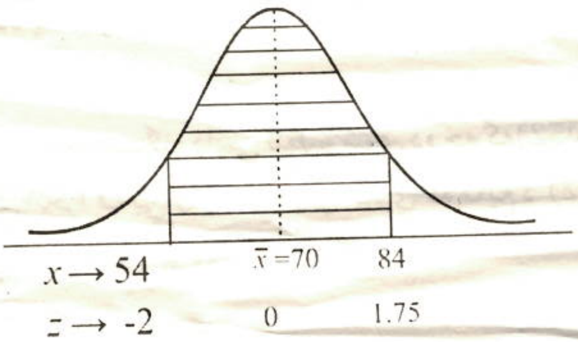
$$z_2 = \frac{84 - 70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \leq z \leq 0) = P(0 \leq z \leq 2) = 0.9772$$

$$P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \leq z \leq 0) + P(0 \leq z \leq 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نمونه اخیستل

ناڅاپه نمونه اخیستنه:

که دټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدلو کې هم چانسه وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنې په ټولو عناصرباندې یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه یي نمونه اخیستنه:

په دې نمونه اخیستنه کې ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوی وي.

خوشه یي نمونه اخیستنه:-که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بیلابیلو ځانګو ویشو او له هرې ځانګې ځخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهرې ټولنې عددي خصوصیاتو (اوسط ، معیاري انحراف)ته د ټولنې پارامتر وائي.

د هرې ټولنې د عددي نمونه ګیرې خصوصیاتو(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

د $(x_1, x_2, x_3, ... x_n)$ ناڅاپه متحولونو ته د (x) یوه ناڅاپي نمونه وایي.که چېرته یي تابع په دې ډول تعریف شوی وي.

$$f(x_1, x_2 ,......x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطۍ (5) سپینې او(7) تورې ګلولې شته د قطۍ د منځ څخه (5) ګلولې یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي.د ټاکل شوو ناڅاپه نمونو د تصادفي متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد دتورې ګلولې لپاره اود (1) عدد د سپینې ګلولې لپاره انتخابوو.

د $i = 1,2,3$ او د $P = \frac{5}{12}$ د (x_1, x_2, x_3) ناڅاپه متحولونه د برنولي نا خاپه متحولین دي. د مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(0)=\left(\frac{5}{12}\right)^{0}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-0}=1\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{12}$$
$$f(1)=\left(\frac{5}{12}\right)^{1}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-1}=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{144}$$
$$f(2)=\left(\frac{5}{12}\right)^{2}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-2}=\frac{25}{144}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{-1}=\frac{25}{144}\cdot\frac{12}{7}=\frac{25}{84}$$
$$f(3)=\left(\frac{5}{12}\right)^{3}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{-2}=\frac{\frac{125}{1728}}{\left(\frac{7}{12}\right)^{2}}=\frac{144\cdot125}{1728\cdot49}=\frac{125}{12\cdot49}=\frac{125}{588}$$
$$f(4)=\left(\frac{5}{12}\right)^{4}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-4}=\frac{\frac{5^4}{12^4}}{\frac{7^3}{12^3}}=\frac{12^3\cdot5^4}{12^4\cdot7^3}=\frac{5^4}{12\cdot343}$$
$$f(5)=?$$

د نمونې د اوسط توزیع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ناڅاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناڅاپه نمونې د احتمال توزیع عبارت ده.

x	x_1	x_2	$\cdots x_n$
(x)	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots\ \frac{1}{n}$

د $\bar{x}$ دمتحول اوسط $E(\bar{x}_n)=\mu$

د $\bar{x}_n$ دمتحول وریانس $U(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$

د نمونه یي وریانس $s_n^2=s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

د نمونه یي وریانس اوسط $E(S^2)=\delta^2$

په داسې حال کې چه $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ نمونه یي اوسط μ دټولنې اوسط δ^2 د ټولنې ریانس وي او s^2 دنمونې وریانس وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

نولسم فصل

احتمالات$Probability$:

که د یوی پېښی وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښی یا احتمال په نوم یادېږي .د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دی.

مثلاً دمعارف رئیس بی سواده دې نو احتمال یي صفر دی.

لمر د ختیځ له خوا راخیژي احتمال یي یو دی.

چانس:

که دیوی پېښی دوړاندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغی پېښی ته چانس وایي.

په چانس کی دممکن ، ناممکن، خامخا او داسی نوری کلیمی استعمالیږي.

تصادفي پېښه :

هغه پېښه چه نتیجه یي معلومه وي. تصادفي پېښه، نا څاپي ازمایښت یا تصادفي تجربه ورته وایي. لکه احمد د بامه راولویدلو پښه یي ماته شوله.

تجربوي احتمال:

هغه احتمال چه د یوی تجربی په سرته رسولو کی په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وایي.

لکه د (Cl_2) او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو دشمېر نسبت ته نظري احتمال وایي.

$$\text{تصادفي پېښی احتمال} = \frac{\text{د تصادفي پېښو دحالتونوشمېر}}{\text{د تجربی دټولوحالتونوشمېر}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندېز ته ویل کیږي. مګر نسبي کثرت د ازمايښت تر نتيجه وروسته د ارقامو په اساس حسابيږي په ناڅاپي پېښو کې دتجربي احتمال د پېښې دنسبي کثرت سره مساوي وي دنسبي کثرت مجموعه (1) ده.

مثال: تېرکال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوریدلو.

الف: اوربښت او د ورېځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

الف: $30\% = \frac{1}{3} = \frac{10}{03} =$ نسبي کثرت

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

په نمونه یي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددې امکان شته چه هر ممکن حالت منځ ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي یا اتفاقي پېښه وايي.

احتمال په (P) او $P(A)$ د (A) د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه یي فضا (n) غړي ولري په دې صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسې سکه په نظرکې نیسو چه دواړه مخونه یي شېر وي لاندې سوالونو ته جوابونه ووایي.

الف: چه پېسه شېر راشي.

ب: چه پېسه خط راشي.

ج: ایا دشېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

الف: $P\left(\text{شپېر}\right)=\frac{1}{1}=1$

ب: $P\left(\text{خط}\right)=\frac{0}{1}=0$

ج: $0\neq 1$

مثال: د یوه نورمال رمل اچول په نظر کې نیسو څرنګه چه د نمونې فضا $S=(1,2,3,4,5,6)$ ده نو له همدې کبله:

$$P(E)=P(6)=P(5)=P(4)=P(3)=P(=)=P\left(1=\frac{1}{6}=0.17=17\%\right)$$

د یوې نمونه یي فضا ناخاپي پېښه:

د (S) د نمونه یي فضا هرفرعي سيټ يوه اتفاقي پېښه ده چه په (E) سره ښودل کېږي. که د غړو شمېر يي (n) وي داتفاقي پېښو ټول شمېر (2^n) دی.

د ښار په کومه ګوښه کې د ورځې د (10) او (12) بجو په شاوخوا کې د احمد د جېب ښوه غلا شوې ده د پولیسو تر پلټنې وروسته معلومه شوله چه دری ګڼکپان په دغه سیمه کې لیدل شوي دي دپېښې نمونه يي فضاده د احتمالاتو له مخې د غلو په باب څېل معلومات ولیکئ؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونه يي فضا $S=(x,y,z)$ ده.کلي سيټ يي پيدا کړئ؟

$E_1=(x)$ يوازې غل دی.

$E_2=(y)$ يوازې غل دی.

$E_3=(z)$ يوازې غل دی.

$E_4=(x,y)$ (x,y) دواړه غله دي.

$E_5=(x,z)$ (x,z) دواړه غله دي.

$E_6=(y,z)$ (y,z) دواړه غله دي.

$E_7=(x,y,z)$ (x,y,z) درې واړه غله دي.

$E_8=\{\ \}=\phi$ يو هم غل نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د احتمال قاعدې:

1- د یوې اتفاقي پېښې احتمال تل د (0) او (1) تر منځ وي که اتفاقي پېښه (E) وي نو:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2- که چېرې (S) د یوه ازمايښت نمونه يي فضا وي نو $P(S) = 1$ د (S) ناڅاپي پېښه د ډاډمنې پېښې په نوم یادیږي.

3- د ناشونې پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو د اچولو نمونه يي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده $T =$ خط او شېر $= S$ دی لاندیني احتمالات پیدا کړئ؟

الف : دواړه سکې شېر دي.
ب: لږ ترلږه یوه سکه شېر ده.
ج : دواړه سکې یو شان دي.
د: دواړه سکې یو شان نه دي.
ها: د سکو یوه هم خط نه دی.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \qquad \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ونه ایز دیاګرام

کولای شو چه هر ناڅاپي ازمایښت د ونه ایز دیا ګرام پواسطه رسم کړو طریقه یي داسی ده چه د ازمایښت دپېل څخه دیاګرام پېل کووبیا د هری نتیجی څخه څانګی شروع کوویه هره څانګه کی نتیجی د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول ګراف ته ونه ایز دیاګرام وایي د احتمالونو د جمع حاصل د هری څانګی د نشرېدو په ټکي کی د (1) سره مساوي دې همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د (1) سره مساوي دې.

مثال: په یوه کځوړه کی څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنګ(r) دری توپونه په شنه رنګ (g) او یو توپ په تور رنګ (b) رنګ شوي دي توپونه د لیدو لپاره راایستل کیږي او بیا بېرته ایښودل کیږي مربوطه احتمالات یي پیدا کړئ؟

حل:-

w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
$P(w)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

په پورته جدول کی ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرګندیږي

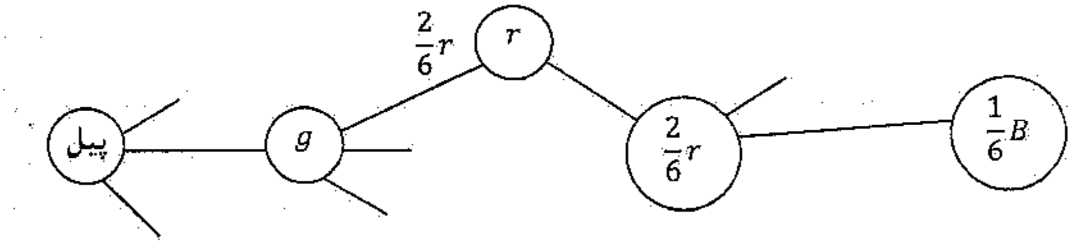
د ضرب د حاصل لومړی قاعده:

د یوی لومړنی پېښی احتمالات عبارت دي د پېښی د پېل څخه د پېښی تراخره پوری داحتمالاتو د ضرب د حاصل څخه. په دغه موضوع باندی د ښه پوهېدلو لپاره د یوی کورنی شجره لیکو هر شاخ بېل بېل ضربوو او جمع کوو یي د ټولی کورنی د غړو شمېر لاس ته راځي.

مثال:- په یوه کځوړه کی سری مری دری شنی مری او یوه توره مری ایښودل شوي دي مری د کځوړی څخه داسی راوباسو چه ترکتلو وروسته بیاکځوړی ته اچول کیږي اوپېل (شنې، سرې، تورې) څخه وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$

$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$

یعنی د (شنی، سری ،توری)مریو د وتلو احتمال 0.92% دی

د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- که د (S)په یوه نمونه یي فضا کی د (A) او (B) دوه داسی ناڅاپي پېښی وي چه $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- که د(S) په نمونه یي فضا کی (A) او (B) دوه ناڅاپي پېښی یود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: که د(S) په نمونه یي فضا کی د(A) یا(B) یوه پېښه رامنځ ته شي نو د $(A \cup B)$ پېښه هم را منځ ته شوی ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4-که د (A) پېښه د (S) په نمونه یي فضا کی پېښه شوی وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښه په دی معنی ده چه اقلاً د (A) یا (B) پېښه، پېښه شوی ده.

مثال: که د (C) پېښه د (A) او (B) دوه بیلا بیلی پېښی په ځان کی ولري نو په دې صورت کی د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه هم په ځان کی لري.

حل:فرضاً $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3\}$ وي او $C = \{1,2,3,4\}$ وي لیدل کیږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$دي ځکه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دناخاپي پېښو تقاطع

1- په يوه نمونه يي فضا کې د دوه يا څو ناخاپي پېښو تقاطع د تبديلی د قانون پيروي کوي.

فرضاً د (A)او (B) او (C) ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B = B \cap A$ رابطه صحيح ده.

2- که په يوه نمونه يي فضا کې دوه ناخاپي پېښې واقع شي نود دوی تقاطع دهری یو ناخاپي پېښې فرعي سيټ دی.

فرضاً د (A) او (B) دوه ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B \subseteq A$ او $A \cap B \subseteq B$

3- که د (S) په يوه نمونه يي فضا کې د (A) ناخاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cap S = A, A \cap \phi = \phi$$

4- که A او B دوه ناخاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نود دواړو پېښو تقاطع کوچنۍ پېښه ده.

$$A \cap B = A$$

مثال: ديوه ښوونځي دفوټبال دټيم څخه دری تنه د واليبال په ټيم کی هم شامل دي که دفوټبال دټيم غړي په (A) اود واليبال د ټيم غړي په (B) وښيو او ددواړو ټيمونو ګډ غړي په (C) وښيو نو دټيمونو تر منځ اړيکه د سيټ تيوري په شکل وليکئ.

حل:

$$A \cap B = C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \;\&\; A \cap B \subseteq B$$

کلي او مکمله سيټ

د څو فرعي سيټونو مجموعي سيټ ته کلي سيټ وايي. که په يوه کلي سيټ کی دوه سيټونه موجود وي نودا سيټونه يو د بل مکمله سيټونه دي.

که (S) يوه نمونه يي فضا وي او (A) يوه ناخاپي پېښه وي او $(\acute{A})$ يوه بله ناخاپي پېښه وي چه د (A) سره په يوه وخت کی پېښه شوی نه وي. (S) د دغه دواړه سيټونو کلي سيټ دي او $(\acute{A})$ د (A) مکمله سيټ دی.

الف: $A \cup \acute{A} = S$

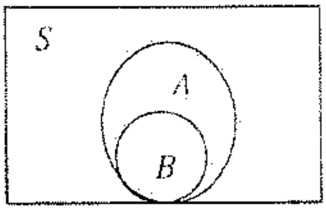
ب: $P(A \cup \acute{A}) = P(S) = 1$

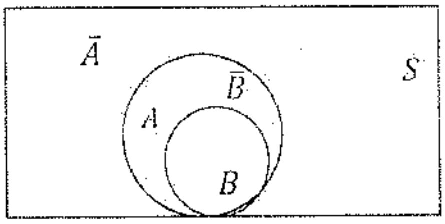
(c) ketabton.com: The Digital Library

ج: $P(\acute{A}) = 1 - P(A)$

که د (S) په يوه نمونه يي فضا کې د (A) ناڅاپي پېښه د (B) ناڅاپي پېښه په بر کې ولري په ګرافيکي ډول وښيي چه د $(\bar{A})$ ناڅاپي د $(\bar{B})$ يوه ناڅاپي پېښه په بر کې لري

حل: څرنګه چه $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلوميږي چه:





د سيټونو او مډل جوړونه:

د سيټ تيوري په واسطه د احتمالاتو مسايل حليږي يعنی د ناڅاپي پېښو د پېښېدو د مسايلو حل او س د سيټ تيوري په واسطه حليږي چه په دې اساس د سيټ تيوري د فعاليت ساحه نوره هم پراخه شوه

مثال: د په نمونه يي فضا کې د او ناڅاپي پېښې په لاندې دياګرام کې راکړشوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی

a: د دې احتمال چه د (A) يا (B) حادثه ناڅاپي پېښه شي.

b: د دې احتمال چه د (A) پېښه ،پېښه شي.

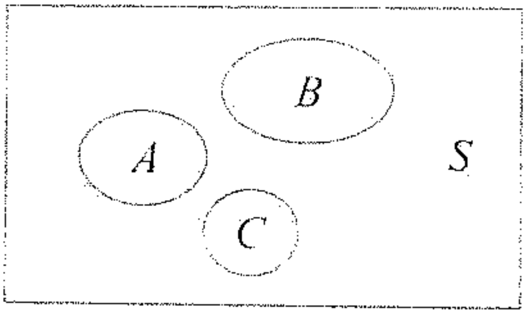
c: د دې احتمال چه د (C) پېښه پېښه نه شي

حل:

a: د (A) يا (B) احتمال په حقيقت کې د $A \cup B$ احتمال دی څرنګه چه دا پېښې يو د بل څخه بېلې دي نو يعني $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



b. د دی احتمال چه د (A) پېښه ناڅاپه پېښه شي د $(\acute{A})$ د پېښی څخه عبارت دی چه د $(\acute{A})$ پېښه نه ده پېښه شوی د $(\acute{A})$ پېښه د (B) او (C) د پېښو اتحاد دي يعنی دغه دواړه پېښی نه دي پېښی شوي نو $P(\tilde{A}) = P(C \cup B)$ څرنګه $P(A) = 1 - P(\acute{A})$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره ددی چه د (C) پېښه ناڅاپه پېښه نه شي هغه پېښی دپېښېدلو د احتمال سره برابره ده چه د (A) او (B) پېښې. پېښې شي يعنی $(A \cup B)$ دپېښی د پېښېدلو څخه عبارت دی نو.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

د شمېرنی اصل:

د دوه سېټونو د شمېرنی اصل په ترکيب او ترتيب پوری اړه لري

1- د دوه سېټونو دعناصرو دشمېرنی لپاره عناصر سره ضربوو مجموعه يي د سېټونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده.

2- که د يوه سېټ عناصر (m) اودبل سېټ عناصر (n) وي نو $(m \times n)$ يي د حاصل ضرب مجموعه ده.

مثال د $(0.1.2.3.4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړيږي او څو عددونه په (2) پوره وېشل کيږي

حل $(20 = 5 \times 4)$ دوه رقمي عددونه وز څخه جوړيږي او $(12 = 4 \times 3)$ عددونه په (2) پوره وېشل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرموټيشن(ترتيب) *Permotaion*:

که څو شيان ولرو او ددې شيانو څخه جوړې جوړې کړوپه دغه جوړو کې د شيانو بدلولو ته ترتيب وايي.

(a, b, c, d) څلور حروف راکړشوي دي غواړو چه دوه ،دوه يي جوړه کړو نو په لاندې ډول يي جوړه کوو.

(ab, ac, ad, bc, bd, cd) نو که څلور شيان دوه،دوه جوړه کړو نو شپږ جوړې ورڅخه جوړيږي.

فکتيوريل:

د مثبتو مسلسلو عددونوضربولوته فکتيوريل وايي. او په (!) سره ښودل کيږي.

$0! = 1$ او همدا ډول $1! = 1$ دی. ثبوت يې په (277) صفحه کې وګورئ.

(n) مسلسل عددونه په(P_n) ښيي $(P_n = n!)$ دی.

ترکيب $(Combinatuin)$:

هغه روش چه د هغه پواسطه د بينوم ضريبونه پيدا کيږي د ترکيب په نوم يادېږي. اوپه لاندی ډول ليکل کيږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$0 \le k \le n$ او $\binom{n}{k}$ داسی ويل کيږي. (k)دپاسه (n)

$$\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبينيشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قيمت پيدا کړئ؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4(1\cdot2\cdot3)} = \frac{5\cdot6\cdot7}{6} = 35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وریشن(تبدیل) :*Variation*

په تبدیل او ترتیب کی د جوړو شمېر ته تبدیل وایي.

وریشن یا تبدیل په (V^n_k) ښیي. د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V^n_k = k!C^n_k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کی (4) کسه یو ځان د ریاست لپاره دویم ځان داول معاونیت لپاره دریم ځان د دویم معاونیت لپاره او څلورم د منشي په توګه ځان کاندیدوي. د امکاناتو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$V^{30}_4 = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26!\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{26!}$$
$$= 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

	د ټاکنو ډول k غړي د n غړو څخه	دامکاناتو شمېر	
		پرته له تکرار څخه $k \le n$	سره له تکراره $k \le n$
	ترتیب یا پرموتیشن	$P(n,k) = n!\,, n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
	ترکیب یا کمبېنیشن	$C^n_k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	$C^n_k = \binom{n+k-1}{k}$
	تبدیل یا وریشن	$V^n_k = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V^n_k = n^k$

مثال: د یوی سکي په اچولو کی چه د راتګ امکان یي په یا خط کی ممکن دی او د هری خوا دراتګ احتمال یي د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي،(3) ځلي، (6) ځلي،(8) ځلي، (16) ځلیوغورځول شي د هم چانسو لمرنیوپیښو په نمونه یي فضا کی یو ونه ایزګراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتني مثال کی د شېر او خط دراتک احتمال په یو ،دوه،درې،څلور ځلي غورځولو کې په لاندې جدول کې را ټول شوي دي

څلور ځله		درې ځله		دوه ځله		یو ځل		هیڅ ځل		د سکې غورځول
احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	
$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	0	1	0	
$\frac{4}{16}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1			
$\frac{6}{16}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{1}{4}$	2					
$\frac{4}{16}$	3	$\frac{1}{8}$	3							
$\frac{1}{16}$	4									

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وارد احتمال د کسرونو په صورت کی یو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کې د حدونو ضریبونه دي . دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په یوه جدول کی ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کی تری استفاده وکړو

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$

$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$

$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$

$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$

$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4$$

$$(a+b)^5 = \textcircled{1}a^5 + \textcircled{5}a^4b + \textcircled{10}a^3b^2 + \textcircled{10}a^2b^3 + \textcircled{5}ab^4 + \textcircled{1}b^5$$

$$(a+b)^6 = \textcircled{1}a^6 + \textcircled{6}a^5b + \textcircled{15}a^4b^2 + \textcircled{20}a^3b^3 + \textcircled{15}a^2b^4 + \textcircled{6}ab^5 + \textcircled{1}b^6$$

عمومي شکل يي دا دی.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

د خط راتلو احتمال په مرتبه کی عبارت دی

$$P\left(\text{د خط راتک}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بينوم قضيه:

د بينوم قضيه مخکی ويل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره.

که د يوی ناخاپي پيښی پيښېدلو ته (1) او نه پيښېدلو ته يي (0) ووايو لاندی جدول د $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

k	ممکنې پایلې	احتمال	د بینوم د ضریبونو اراېه
0		$(1-P)^2$	$\binom{2}{0}P^0(1-P)^2$
1	10	$2P(1-P)$	
2	11		$\binom{2}{2}P^2(1-P)^2$
		$\{P+(1-P)\}^2$	$\sum\binom{n}{k}P^{k(1-P)^{n-k}}=?$

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په (n) ځله تکرار کې د بینوم دانکشاف (k). ام حد لاندې احتمال لري.

$$\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کیږي او د برنولي د پرابلم د احتمال په نوم یادیږي. اوداسې لیکل کیږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-kb}$$

د دوه جملې یي احتمال:

که یوه نمونه یي فضا دوه غړي ولري نو که د یوه غړي احتمال یي (P) وي نو دبل حالت احتمال یي $(1-P)$ دی چه بایلل ورته وایي. که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کی او د بایللو احتمال په ښودل کیږي.

$$k-\text{ام ځلي وړل په n ځلي تکرار کی}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

مثال: که په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بایللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه یي په لاندې ډول کیږي.

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کې ددې احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتې انجونې دي څو دي؟

حل:

$$P=\frac{1}{2}$$

نو

$$q=1-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}}{2^5}=\frac{\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}}{32}=\frac{10}{32}=0.3125=31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځووددې احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کې راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل وړل وګڼو نو

$$P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$Q=1-P=1-\frac{1}{3}=\frac{3-1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

$$=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{6!}{4!\,(6-4)!}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{4}{9}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2}\cdot\frac{4}{729}=\frac{60}{729}$$
$$=0.0823=8.23\%$$

څلورم مثال: د یوې سکې د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دي که څلور واره وغورځول شي د دې احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1-P=\frac{1}{3}P$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P = \frac{3}{4} \qquad , \quad Q = \frac{1}{4}$$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4} = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ ترلږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زیات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دی ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \qquad \text{so} \qquad 2^n > 100 \quad \Rightarrow n \geq 7$$

متمادي او غیر متمادي فضاګانی:

د یوی ناڅاپه تجربی نمونه یي فضایو معین یا غیر معین سیټ دی یعنی که د فضا عناصر معین $(Countable)$وي نمونه یي فضا معینه ده. چه پرېکړی فضا هم ورته وایي او که د فضا عناصر معین نه‌وي نو فضا غیر معینه ده چه نښتی یا متمادي فضا هم ورته وایي

مثال: د لاندی فضاګانو څخه کومه یوه متصله او کوم یوه پرېکړی ده؟

الف: د دوو رملي دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د یوه حقیقي عدد ټاکل

ج: د (30) ذده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د یوی د ګری د حرارت د درجی لوړیدل د (100) درجو د سانتي ګیرېد څخه تر (1000) درجو د سانتي ګیرېد پوری.

ها: د (30°) او (45°) درجو تر منځ د یوی زاویي ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل. څرنګه چه د (الف او ج) نمونه يي فضاګانی دمحدودو عناصرو د شمېر شحخه جوړی شوي دي نو پرېکړی فضاګانی دي او(ب ، د او ها) فضاګانی دنامحدودوعددونوڅخه جوړی شوي دي نو نښتی یا متمادي فضاګانی

ورته وايي.

دويم مثال. عبداله د خپل کور دګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ وا خيستلو د واټر پمپ عمر د ساعت له مخې پيدا کړئ؟

حل. { } خالي سيټ د واټر پمپ د ورانېدو وخت دی او $S = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0$ د واټر پمپ د عمر اوږد والي دی.

هم چانسه پېښې

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په يوه تجربه کې برابر وي د هم چانسه پېښو په نوم ياديږي

که چېرې $S = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ يوه نمونه يي فضا وي نو (e_i) د هر $i = 1,2,3, \cdots n$ لپاره يوه ناڅاپه لمړنی پېښه ده په دې شرط چه $0 \leq P(e_i) \leq 1$ وي

د لمړنيو پېښو داحتمالاتو مجموعه ديوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

مثال. څلور کسه په يوه لوبه کې اشتراک کوي د هر يوه نمونه يي فضا هم چانسه ده د هر يوه د ګټلو احتمال پيدا کړئ؟

حل. که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو دهرې ناڅاپه لومړنی پېښې احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دې نو ليکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنی پېښې هم چانسه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متمادي فضاګانو احتمال:

پیوسته نمونه يي فضا ګانې د لایتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل يي د اعدادو په محور ، سطحه او د اجسامو په حجمونو کې لیدل کیږي. د دغه ډول ټکو ښودنه ممکنه نه ده مګر د احتمال د نسبت لپاره یي خطونه ،سطحې او حجمونه په توتو وېشو. د اعدادو د محور څخه د یوه حرف لکه (x) او په سطحو کې ددوه تورو لکه (x,y) څخه او په احجامو کې د دری تورو څخه لکه (x,y,z) څخه استفاده کوو

لومړی مثال: د اعدادو په محور د (0.3) په انټروال کې د یو ټکی وټاکئ چه:

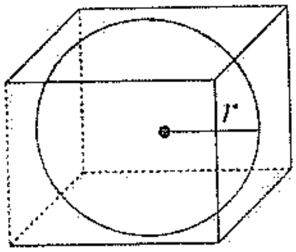
$$1 < x < 2.5$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{2.5-1}{3-0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دویم مثال: یوه کره په یوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې یوه نقطه ټاکو ایا ددی احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$ دکرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$



مشروط احتمال:

که S نمونه يي فضا او (A) او (B) په دغه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې وي په داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ یعنې د (A) د پېښې احتمال نظر د (B) ناڅاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته فارمول څخه لیکو چه:

-1

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

-2

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عمومیت ورکړو نو لیکو چه:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) + \cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_n}(A)}$$

لومړی مثال: یو شاګرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ دګاډی څخه کټه اخلي چه (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیرې پېښې:

1- د ګاډی پواسطه راتلل

2- په ټاکلي وخت رسیدل اوپه دې صورت کې د (A) مشروط احتمال نظر (B) ته $P_B(A)$ مطلوب دی ؟

حل:

$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\bar{3} = 58.33\%$$

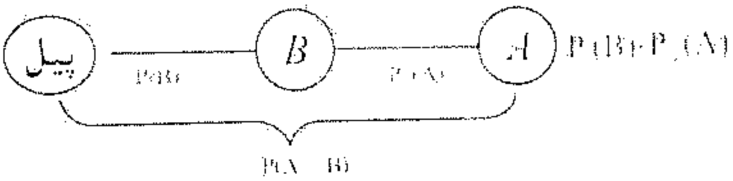
(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاصل ضرب اصل

د په نمونه يي فضا کې د او د دوه ناخاپي پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعریف سره سم لیکو چه:

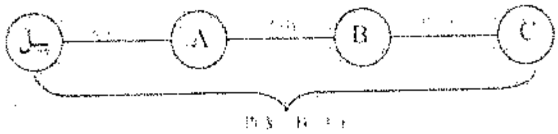
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ايز دياګرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.



$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د او او دري پېښو لپاره هم د تطبيق وړ دی

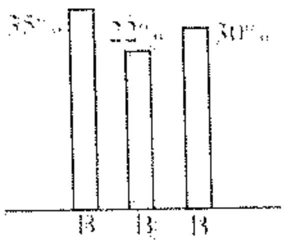


$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

مثال - د B_1، B_2 او B_3 په دري ولايتونو کې په پارلماني ټاکنو کې د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند فيصدي برخه ورکړشوی ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او يا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي.

ناخاپي په لاندی ډول تعريفوو



V: هغه رايي ورکوونکي چه جمهوري ګوند يي ټاکلی وي.

B_i د ولايت رايي ورکوونکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ولایت	درایو ورکوونکو فیصدي	جمهوري ګوند ته رای ورکوونکي
B_1	33.2%	35
B_2	46.5%	22
B_3	20.3%	30

1- B_i دوه په دوه یو د بل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د (S) نمونه يي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \cup_{i=1}^{3} B_i$ دی نو:

$B_i \cap V(i = 1,2,3,)$ يو له بل سره مستقل صورت نيسي.

$$V = \bigcup_{i=1}^{3}(B_1 \cap V)$$

د دوارو خواو د احتمال لپاره ليکو.

$$P(V) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{3}(B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P_{B_i}(V)$$
$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V)$$
$$= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3$$
$$= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794$$
$$P(V) = 27.94\%$$

تعریف:

که چېرې د $B_1, B_2 \cdots, B_n$ رای ورکوونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $n \cdots 1 = i$ پېښنو عمومي حالت د (S) په نمونه يي فضا کی يوه پېښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم یادیږي او د (A) اختیاري ناڅاپي پېښی لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د B_i چه $i = 1 \cdots n$ د (S) نمونه يي فضا د يوی پېښی لپاره چه $P(B_i) \neq 0$ د (A) ناڅاپي پېښی احتمال چه $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayex)$ بائيزفارمول پواسطه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i-1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بائيز فارمول زيات استعمال لري لکه $n = 2$ لپاره $B_2 = \bar{B}$, $B_1 = \bar{B}$ په پام کې ونيسو په حقيقت کې B_1 او B_2 د (S) دنمونه يي فضا پېښې دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

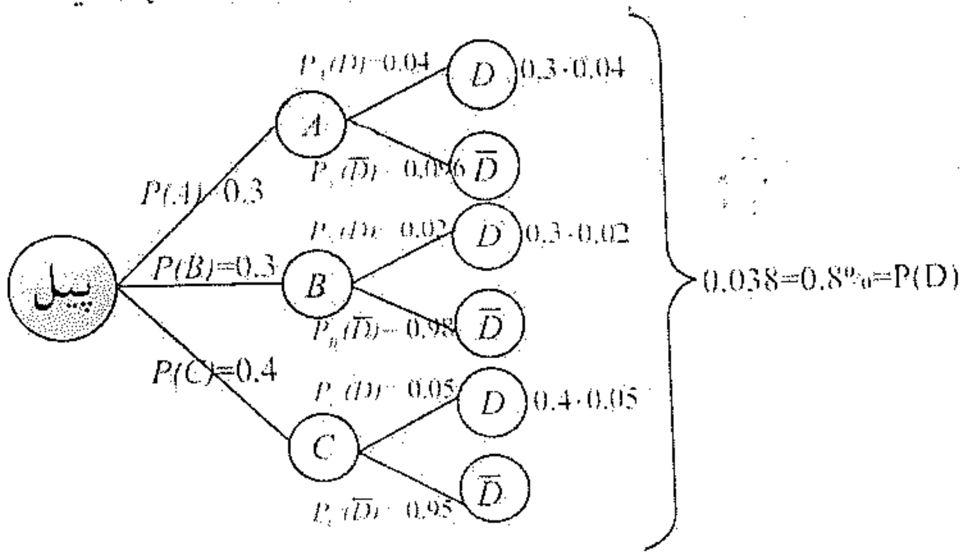
پورتنی فارمول د لپاره د بائيز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال:په يوه فابريکه کې د A ، B او C ذرې ماشينونه په ترتيب سره 30%، 30% او 40% د برق ګروپونه توليدوي که چېرته په ماشينونو کې دګروپونو د خرابېدو کچه په ترتيب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: د دې احتمال چه يو اخيستل شوی ګروپ وران دی.

b: په کوم احتمال خراب شوی ګروپ د C په ماشين پوری اړه لري.

c: يو نوی توليد شوی ګروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشين پوری اړه ولري.



د b جز حل:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د C جزء:

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

د ناڅاپه پېښو استقلالیت:

د ناڅاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري:

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیټ سره مساوي وي نو دغه دوه ناڅاپي پېښو ته مستقلې پېښې وايي يعنې پېښې استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د A او B پېښې ګډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د یوه ښوونځي ذده کوونکي د سترګو رنګ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ور کړئ:

الف: ټاکل شوی ذده کوونکی یو هوښیار ذده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی ذده کوونکی توری سترګې لري

حل: څرنګه چه $P_B(H) = P(H)$ او سربېره پردې $P_B(H) = \frac{P(B\cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ناڅاپي پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعده صدق وکړي پرته له هغې پېښې یو له بلې سره تړلې دي.

نتیجه:

1- $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{B} \cap \bar{A}$, $\bar{B} \cap A$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پیدا کولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A\cap B)=a\cdot b$	$P(A\cap \bar{B})=a(1-b)$	a
$\bar{A}$	$P(A\cap B)=b(1-a)$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})=(1-a)(1-b)$	$1-a$
	b	$1-b$	1

2- د A ، B او C درې ناڅاپه پېښې چه یو د بل څخه مستقلې دي نولرو چه:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دویم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځایونه ډک کړئ؟

	B	$\bar{B}$	
A	0.12	$P(A\cap \bar{B})=$?	?
$\bar{A}$	$P(\bar{A}\cap B)=?$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})=$?	?
	?	0.6	

حل: څرنګه چه $P(\bar{B})=0.6$ نو $P(B)$ داسې پیدا کوو

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$
$$P(\bar{A})=1-P(A=1-0.3=0.7)$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چه:

$$P(A\cap \bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.3\cdot 0.6=0.18$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\cdot P(B)=0.7\cdot 0.4=0.28$$
$$P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0.7\cdot 0.6=0.42$$

که پیدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځایو کې ولیکو جدول تکمیلیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شلم فصل

موهومي عددونه Imaginary Numbers

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدې کبله کله چه په دويمه درجه معادلو کې $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترڅو چه په (1795) ميلادي کال يوجرمني ساينسدان چه Friedrich Gouss نوميدلو $(i^2 = -1)$ وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلود حل لپاره لاره خلاصه شوه چه $(\Delta < 0)$ وه.

موهومي عدد (Imaginary Numbers) يو عدد دی چه په روزمره ژوند کې په راکړه ورکړه کې نه استعماليږي. مګر دعلمي مسايلو د حل لپاره د زيات اهميت وړ دی لمړی حرف يي د ايوتا (iota) يوناني کلمې څخه اخيستل شوی دی

مثال:- $\sqrt{-36}$ جذر پيدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دويم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$
$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنګه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کيږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مګر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

1: $i = \sqrt{-1}$ 2: $i^2 = -1$ 3: $i^3 = -i$ 4: $i^4 = 1$
5: $i^5 = i$ 6: $i^6 = -1$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندې جدول کې خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i\ , i^{4n+2} = -1\ , i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه يي منفي وي د پورته جدول پواسطه حليږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$
$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$
$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$
$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$

لاندې موهومي عددونه د طاقت څخه وباسئ:

$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$

د اعدادو سيټونه:

1- د طبعي اعدادو سيټ $Set\ of\ Natural\ Numbers$:

د(1) څخه تر لايتناهي (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبعي اعدادو سيټ وايي.په (IN) سره يې ښيي:

$$\text{IN} = \left(1،2،3،4،5 \cdots \infty\right)$$

2- د مکمل اعدادو سيټ $Set\ of\ Whole\ Numbers$:

د (0) څخه تر (∞) پورې داعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايي.په (w) سره يې ښيي.

$$\text{w} = \left(0،1،2،3،4، \cdots \infty\right)$$

3- د تام اعدادو سيټ $Set\ of\ Integer\ Numbers$:

د (∞−) څخه تر (∞+) پورې د اعدادو سيټ ته د تام اعدادو سيټ وايي او په (I) سره يې ښيي.

$$\text{I} = \left(-\infty، \cdots ، -3،2،1،0،1،2،3 \cdots \infty\right)$$

4- د دناطق اعدادو سيټ $Set\ Of\ Rational\ Numbers$:

صحيح عدد،مختوم کسر،غېر مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي.او په (Q) سره يې ښيي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q = \left(1،2،15،109،\frac{4}{5}،\frac{2}{3}\cdots\right)$$

5- د غیرناطق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*:

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناطق عدد بلل کیږي او په $(\bar{Q})$ سره ښودل کیږي

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47} \ , \ \frac{13}{49} \ , \ \sqrt[3]{2} \ , \sqrt{3}\right)$$

په [illegible] ته د حقیقي اعدادو د سیټ په نوم یادیږي او په (IR) سره یې ښیي

$$IR = (Q + \bar{Q}) = \left(-\infty، -3، +6،\sqrt{2}،\frac{2}{5}،\frac{5}{6}،\frac{13}{49}\cdots\infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*:

هغه عددونه چه یوازې د (i) حرف پکې موجود وي او د حقیقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کې نه وي موهومي عددونه بلل کیږي. لکه $\left(-i \ ,11i, \ \ \frac{2}{3}i \ , \ \sqrt{5i^3},\right)$

دموهومي عددونو څلورګوني عملیې:

1- د موهومي عددونو جمع اوتفریق:

هم علامه عددونه جمع کووعلامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه عددونه یو دبل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$1: \ 15i - 31i = 16i$ $\qquad$ $2: \ 14i - i = 13i$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کې ،عددپه عدد کې ضربوو. توانونه یې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ویشو او توانونه یو د بل څخه منفي کوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه *Complex Numbers*:

هغه عددونه دي چه د حقیقي عدد او موهومي عدد د مجموعې یا تفاضل څخه لاس ته راغلی وي لکه ($5 + 11i$, $8 - 20i$) او داسې نور. مختلط عدد په (z) سره ښیي $z = 3 \pm 21i$ او داسې نور.

صفري مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقیقي او موهومي دواړه برخې یې صفر وي.

مثال:- که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کیږي د غه عدد ته صفري مختلط عدد وایي.

مثال: لاندې ($i - 3$,4 ,$2i$, $2i - 3$) عددونه په معیاري شکل ولیکئ؟

مختلط عددونه	معیاري شکل $(z = a + bi)$
$i - 3$	$-3 + i$
4	$4 + 0i$
$2i$	$0 + 2i$
$2i - 3$	$-3 + 2i$

د مختلطو عددونو څلورګونی عملیې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقیقي عدد د حقیقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بیا هم یو موهومي عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{c} 17 + 45i \\ \underline{28 - 106i} \\ 45 - 61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ کیږي

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$Z_1 + Z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3i + 4i) = 5 + i$$

د مختلط عددونو د جمعی دعملیي خنثی عنصر (0) دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقیقي عدد د حقیقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{c} 29 - 18i \\ \underline{\pm 35 \pm 67i} \\ 64 + 49i \end{array}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

د مختلط عددونوضرب:

علامه په علامه کی عدد په عدد کی ضربوو اوتوانونه یې سره جمع کوو.

مثال:- $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ دوه مختلط عددونه راکړشوي دي دضرب حاصل یې پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$
$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

اول مثال: $z_1 = 3 - 5i, z_2 = 8 + 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1.z_2$ پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 5i)(8 + 5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2$$
$$= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25$$
$$z_1 \cdot z_2 = 49 - 25i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلط عدد مزدوج (Cnjugate of Complex Number):

د يوه مختلط عدد مزدوج د بينوم د مزدوج په څېر دی .او په $\bar{z}$ سره يي ښيي .مثلاً که (z) يو مختلط عدد وي نو مزدوج يي $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ يو مختلط عدد دي او مزدوج يي $\bar{z} = x - yi$ دي.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$
$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم , $Norm$ (ميزان، ماخذ ،هنجار، نمونه) وايي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \qquad ,2xRel(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \qquad 2yiIm(z)$$

د مختلط عدد ضري معکوس:

فرضاً $a + bi$ يو مختلط عدد راکړ شوی دي د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره يي د $\frac{1}{a+bi}$ صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کی ضربووك

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$ د $\frac{1}{a^2+b^2}$ ضربي معکوس دي.

مثال: د $2 - 3i$ ضربي معکوس پيدا کړئ؟

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2} i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13} i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزيه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

د دوو مختلطو عددونو وېش:

په يوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم عليه دواړه د مقسوم عليه په مزدوج کی ضربوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2}$$
$$=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}=\frac{8-14i+15}{4+25}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

دیوه مختلط عدد د مزدوج خاصیت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعی مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعی سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو دتفاضل سره مساوي دي او هم د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د یوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقیقي برخې دوه چند دی.

$$z+\bar{z}=2x$$

6- د یوه مختلط عدد اود هغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخې دوه چند دی.

$$z-\bar{z}=2yi$$

7- د یوه مختلط عدد دمزدوج ،مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}}=z$$

مثال که $z_1=4+5i$ او $z_2=-3+2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ او $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ کیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1+7i \quad \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$

$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = (4-5i) + (-3-2i) = 1 - 7i$

ثابته شوه چه:

$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)(-3+2i) = -12 + 8i - 15i + 10i^2$
$= -12 - 7i + 10(-1)$
$z_1 \cdot z_2 = -12 - 7i - 10 = -22 - 7i$
$\overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$
$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (4-5i)(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2$
$= -12 + 7i + 10(-1)$
$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = -22 + 7i$

په نتیجه کې:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = -22 + 7i$$

د مختلطو عددونو په ساحه کی د دویمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

د دويمی درجی معادلی عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی او $\Delta = b^2 - 4ac$ ده که $\Delta > 0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta = 0$ وي معادله يو جذر لري او که $\Delta < 0$ وي دغه ډول معادلی د حقيقي اعدادو په سيټ کی حل نلري مګر په موهومي اعدادو کی حل لري.

مثال: $x^2 - 10x + 26 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 26 = 100 - 104 = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{10 \pm 2i}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2(5 \pm i)}{2} = 5 \pm i$$

$x_1 = 5 + i, x_2 = 5 - i$

مثال: $4x^2 + 4ix + 15 = 0$ معادله حل کړئ؟

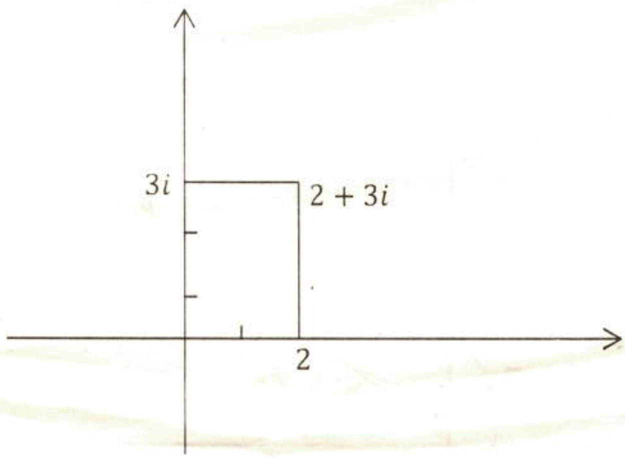
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240$$
$$= 16(-1) - 240 = -16 - 240 =$$
$$\Delta = -256$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2 \cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

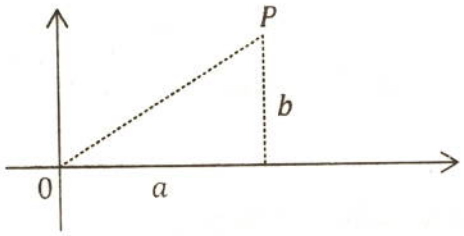
په مختلط عددونو کی **حقیقي** برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کیږي.په دی ترتیب کولای شو چه دګوس داعدادو په مستوي کی مطلوب نقاط پیدا کړو د نقطو دوصلېدو څخه خط لاس ته راځي.او د خطودترسیم په نتیجه کی مختلف اشکال رسمولای شو.

مثال:- د $(2 + 3i)$ نقطه پیدا کړئ



که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یي مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یي فاصله کړو نونقطه د مبداء سره وصلوو.مطلقه قیمت یي د مبداء څخه فاصله ده .چه د فیثاغورث د قضیي سره سم یي هم فاصله پیدا کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



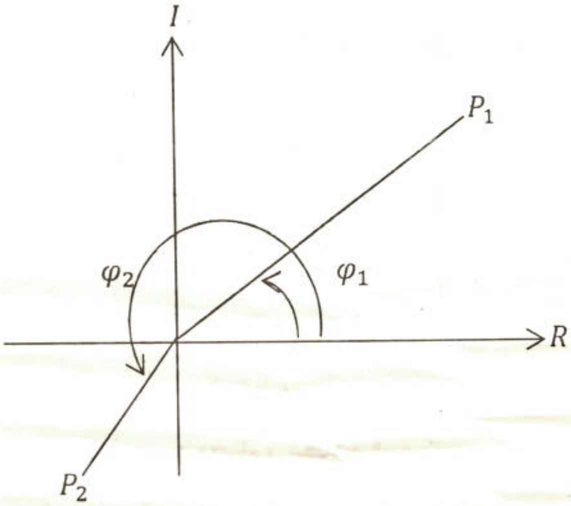
مثال: د (P) د نقطی وضعیه کمیت $(4+3I)$ دی مطلقه قیمت یي د مبداء څخه څو دی؟

$$4+3i=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله یي د محورونو د مبداء څخه مساوي ده .

$-5+12i$	$-5-12i$
$=\sqrt{(-5)^2+12^2}$	$=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}$
$=\sqrt{169}$	$=\sqrt{169}$
$=13$	$=13$

د (φ) هغه زاويه چه د $(\overline{OP})$ خط يي د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم يادېږي حرکت يي د ساعت د عقربی خلاف وي يعنی دا زاويه همېشه مثبت وي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

یوویشتم فصل

د ریاضي منطق

د ریاضي استدلال:

د ریاضیکي بیان د سمون لپاره چه کومې علامې اوطریقې استعمالیږي د ریاضي د استدلال په نوم یادیږي.

شهودي درک یا مشاهدات:-هغه مفاهیم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلېدل یې استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات یا شهودي درک ورته وایي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاویې مساوي وي.او داسې نور.

تمثیلي استدلال:

هغه استدلال دې چه د یوریاضیکي بیان د وضاحت لپاره مثالونه وویل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتایج لاس ته راوړل شي.

لکه په عامیانه ډول [مار خوړلی د پړي نه ډاریږي] دا یو قیاسي استدلال دی.

استقرائي استدلال :

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کی د ټولو طبعي عددونو ،ټولو جفتو عددونو یا ټولو طاقو عددونو لپاره د یوه فارمول ثبوتولو ته استقراء یا استقرائي استدلال وایي.

د ټولو طاقوعددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو جفتوعددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو مسلسلوعددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

داستقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د ریاضي په استقراء کی ثبوت شوي دي.

لاندی جدول کی خالي ځایونه ډک کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دمجموعې فارمول	دمکعبونومجموعه	دمتوالي طبعي عددونومکعبونه	د متوالي عددونو شمېر
1^2		1^3	1
		$1^3 + 2^3$	2
	36	$1^3 + 2^3 + 3^3$	3
10^2		$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$	4
$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$		$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3$	n

مثال: ثبوت کړئ چه $P(n) = 4^{2n} - 1$ په (5) باندی د وېش وړ دي؟

حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو.

$$P(1) = 4^{2\cdot 1} - 1 = 16 - 1 = 15$$

(15) په (5) باندی وېشل کيږي.

په (n)باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چه په $(n + 1)$ باندی هم د وېش وړ دی.

ثبوت:

$$P(n) = 4^{2n} - 1 = 5r$$
$$4^2 \cdot (4^{2n} - 1) = 5r \cdot 4^2 \Rightarrow 4^{2n+2} - 4^2 = 5r \cdot 16$$
$$4^{2(n+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot 5r = 5(3 + 16r)$$

د مساوات ښۍ خوا په (5) وېشل کيږي. نو چپ طرف يي هم وېشل کيږي.نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n + 1) = 4^{2(n+1)} - 1$$

ثابته شوه چه که په راکړ شوي فارمول کی د (n) په عوض هر طبعي عدد وضع شي په (5) وېشل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجي استدلال

که د یوی عملیی نتیجه همیشه ثابته وي او ښه په ډاډ سره یي په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وایي.لاندی جدول ته وګوری

8	12	19	23
15	19	26	30
30	38	[illegible]	[illegible]
18	26	40	48
9	13	20	24
1	1	1	1

په پورته جدول کی د عدد سره (7) جمع شوي دي.دجمع حاصل یي دوه چند شوی دي.بیا بېرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفریق حاصل یي نیمایي شوی دي په دغه عددو کی هرعدد د اولني عدد څخه د(1) په اندازه زیات شوی دي.چه دغسی عمل ته استنتاجي استدلال وایي.

دحکم د نفی کولو استدلال:

دغېرناطقو عددونو د جمع حاصل یو غېر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحیح دی. نو(x) او(y) دوه مجهول عددونه په نظر کی نیسو چه دجمع حاصل یي $(x+y)$ دی بیا دغه عددونو ته قیمتونه ورکوو. مثلاً $x=1+\sqrt{2}$ او $y=1-\sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x+y=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$$

ګورو چه $(x+y=2)$ یو ناطق عدد دي.غېر ناطق عدد نه دي.نو ثابته شوه چه د دوه غېرناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غېرناطق عدد نه وي.

د خلف برهان یا غېر مستقیم ثبوت:

دقضیي د عکس ثبوت ته غېر مستقیم ثبوت وایي.

قضیه: که د یوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که n^2 جفت وي .

مطلوب: ثبوتوو چه (n) هم جفت دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو ليکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطې څخه څرګنده شوه چه (n^2) طاق دی او دا د فرضيې خلاف ده نو داچه (n) يو جفت عدد دی صحيح نه دی.

د رياضي منطق او د بيان استنتاج:

بيان يوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بيان په (P) او د بيان صحت په (T) او غلطي يي په (F) وښيو او(~P) د (P) دبيان نفي وي نو د صحت جدول يي په لاندې ډول جوړيږي.

P	$\sim P$
T	P
F	T

د بيانونو ترکيب:

1- $P \wedge Q$ کې $(\wedge)$ د (او) معنی ورکوي.

2- $P \vee Q$ کې $(\vee)$ د (يا) معنی ورکوي.

3- $P \Rightarrow Q$ کې $(\Rightarrow)$ د (په نتيجه کې) معنی ورکوي.

4- $P \Leftrightarrow Q$ کې $(\Leftrightarrow)$ د دوه ارتباط معنی ورکوي

مثال: د ثحت په جدول کې وښياست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بيان په کوم وخت کې صحيح دی.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Longrightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

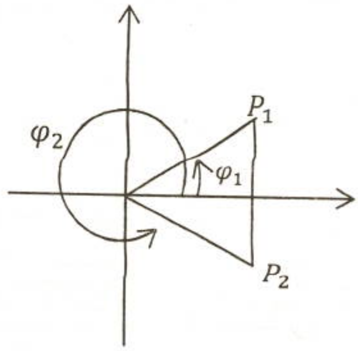
تمت بالخير

په 1394/4/23 نيټه چه د روژې د مبارکې مياشتې د اوه ويشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کې د تالاشې چوک د حاجي زرخان په پلازه کې پای ته ورسېدلو .

سردار محمد (خوږياڼی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددوه مزدوجو مختلطو عددونو د ارگومینتپونو د جمع حاصل مکمل دوران (360°) وي.



دمختلطو عددونود دویم جذر پیدا کول:

دمختلط عدد دویم جذر د لاندې فارمول په واسطه پیدا کیږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

ثبوت:

$$\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2 = a+bi+2\sqrt{a+bi}\cdot\sqrt{a-bi}+a-bi \ldots\ldots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2}+2a$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots..2$$

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 3$$

$$\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(-\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} = i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \ldots..4$$

دریمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a+bi}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2} \ldots\ldots.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \ldots\ldots\ldots 6$$

$$\sqrt{a-bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \ldots\ldots 7$$

اول مثال: د $\sqrt{-5+12i}$ دويم جذر پيدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i}=\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}=3+2i$$

دويم مثال:

$$\sqrt{-2i}=\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځينو كاشفينو انځورونه

بینارډ ریمان

کارل فریډ ریچ

اریتوستنس

جورج کانتور

اسحاق نیوټن

ارشمیدس

محمد بن موسی

پیرک اندرویس

(c) ketabton.com: The Digital Library

فارما

وین ستهندریو

لایبینز

کووشی

وایرس ترس

هرمت

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپ شوي کتابونه

- ❊ عمومي رياضي (نوی نصاب)
- ❊ عمومي فزيک (نوی نصاب)
- ❊ ابتدائيه رياضي او هندسه (نوی نصاب)

تر چاپ لاندې کتابونه

- ❊ د فزيک د تمريناتو حل (نوی نصاب)
- ❊ د رياضي د تمريناتو حل (نوی نصاب)
- ❊ د عمومي رياضي (فارسي ترجمه)
- ❊ عمومي هندسه
- ❊ د عمومي هندسې (فارسي ترجمه)
- ❊ عمومي مثلثات
- ❊ عمومي رياضي (فارسي ژباړه)
- ❊ عمومي فزيک (فارسي ژباړه)

سپين غر تعليمي مرکز

ميهن خپرندويه ټولنه

0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library