

دفورمولونو

او جدولونو ټولګه

Ketabton.com

(رياضيات، فزیک، کیمیا، بیولوژي او بیولوژي)

کانکور ازموینې د ګډون کوونکو او د پوهنتون د محصلینو غوره همکار

۲۰۵۰+ فورمولونه

۴۵+ جدولونه

۹۰+ ګرافونه

ترتیب کوونکی: انجنیر محمد اجمل بهرام زوی

د فورمولونو او جدولونو ټولګه

ترتیب کوونکی: انجنیر محمد اجمل بهرام زوی

کمپوز او ډیزاین: انجنیر محمد افضل ذاکر

چاپ لړ: اول

چاپ شمېر: ۱۰۰۰ ټوکه

چاپ کال: ۲۰۱۶ز (۱۳۹۵ ل) کابل

خپرندوی: علمي خپرندویه ټولنه/ گردیز

چاپځای: حسین احمد چاپخانه

د دې کتاب د چاپ حق له لیکوال سره خوندي دی.

د ترلاسه کېدو ځایونه:

علمي کتاب پلورنځی

پته: د گردیز ښار، غزني لښکر، د عبدالحمید گردیزی

مارکیټ، پکتیا، افغانستان

اړیکشمېرې: +۹۳(۰)۷۷۲۹۳۶۳۴۱ / +۹۳(۰)۷۷۲۲۸۸۱۹۰

برېښنالیک: ilmiketabtoon@gmail.com

کابل:

۱- مستقبل کتاب پلورنځی

۲- خیبر کتاب پلورنځی

جلال اباد:

۱- مومند کتاب پلورنځی

۲- ختیځ کتاب پلورنځی

۳- یار کتاب پلورنځی

خوست: رحیمي کتاب پلورنځی

کندهار: کروړ کتاب پلورنځی



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

سريزه

د لوی خدای «جل جلاله» ډیر شکر ادا کوم چې ماته یې د دې کوچني کتاب د ترتیب کولو وړتیا را په برخه کړه. څرنګه چې تیرو څو لسيزو جګړو او ناخوالو زموږ د ګران هېواد بیلابیلې بنسټيزې برخې له منځه وړې او یا یې ډیر زیان ور اړولی دی، چې له دې څخه یوه ارزښتناکه برخه د علم او پوهې ده. نو اړینه ده چې هر افغان د هیواد پالنې د حس له مخې د خپل توان تر کچې پورې د بېلابېلو علومو په برخه کې که هغه دیني وي یا ساینسي؛ په بدایینه کې ونډه واخلي. نو دې اړتیا ته په کتو سره مې د (فورمولونو او جدولونو ټولګه) تر سرلیک لاندې دا کوچنی کتاب ترتیب کړ، چې له نېکه مرغه دا دی اوس ستاسو په لاس کې دی.

د دې کتاب د تصحیح په برخه کې د خوست د شیخ زاید پوهنتون بساغلو استادانو هر یو، پوهندوی امرالله آصفي د کیمیا په برخه کې، پوهنمل علی جان عادل د فزیک په برخه کې او پوهیالي اسد الله سروري او د کابل پوهنتون د ساینس پوهنځي استاد پوهیالی ثمرالدین جبران د ریاضیاتو په برخه کې ډیره مرسته کړې ده. دا کتاب د ټاټوبي په ملي ژبه (پښتو) کې د خپل ډول لومړنی دی. د دې کتاب څخه د ښوونځیو زده کوونکي په ځانګړې توګه د کانکور د ازموینې ګډونوال او همدارنګه د پوهنتونونو د بېلابېلو پوهنځیو محصلان ګټه پورته کولای شي.

دا کتاب پنځه برخې لري، لومړۍ برخه یې د ریاضیاتو ده چې د حساب، الجبر، مثلثاتو، هندسې، احصایې او احتمالاتو مهم فورمولونه او جدولونه لري، دوهمه برخه یې فزیک، دریمه برخه یې کیمیا، څلورمه برخه یې جیولوجي او پنځمه برخه یې د بیولوژي ده چې هره برخه یې خپل خپل مهم فورمولونه او جدولونه لري.

په پای کې د خپل ګران تره او د بهرام زوی توتاخیل ساختماني شرکت رئیس الحاج محمد داود توتاخیل څخه د زړه له کومې مننه کوم چې د دې کتاب د چاپ مالي لګښت یې پر غاړه واخیست. څرنګه چې دا لیکنه زما لومړنۍ هڅه ده نو طبعاً به ځینې نیمګړتیاوې ولري، نو د ګرانو لوستونکو څخه هیله لرم چې د نیمګړتیاوو سره د مخامخ کیدو په صورت کې دې د لاسمون لپاره راسره ګټورې مشورې شریکې کړي.

په درنښت

انجنیر محمد اجمل بهرام زوی (توتاخیل)
mohammadajmalhairan@gmail.com

يڪل از

يڪل

- 1..... د ڇينو واحداتو د يو پربل د اڀولو فڪتورونه
- 3..... حساب
- 9..... الجبر
- 13..... لوگاريتم
- 14..... ترادف يا تصاعد
- 16..... مٽريڪس
- 20..... ڊيٽر مينانٽ
- 23..... وڪٽورونه
- 26..... رابطو
- 27..... تابع
- 32..... لمبٽيٽ
- 35..... مشتق
- 39..... انٽيگراڻ
- 51..... د مثلثاتو برخه
- 54..... مثلثاتي نسبتونه
- 63..... مثلثاتي معادلي
- 67..... د هندسي برخه
- 68..... څلور ضلعي گاني
- 72..... فضايي هندسه
- 77..... تحليلي هندسه
- 87..... احصائيه
- 95..... احتمالات
- 96..... د ترڪيبونو خانگرتياوي
- 99..... فزيڪ
- 107..... سنيماٽيڪ (علم الحركت)
- 109..... ڊيناميڪ (علم القوه)
- 113..... اٽومي فزيڪ
- 114..... هستوي فزيڪ
- 115..... د نور فزيڪ
- 119..... د برهڻسنا (برق) فزيڪ
- 125..... يوناني الفبا
- 129..... ڪيميا
- 130..... د بيلابيلو مرڪباتو ماليڪولي فرمولونه

ح | د فرمولونو او جدولونو ټولګه

- 131..... بېلابېل ايونونه.
- 132..... د کيميا څېنې فرمولونه.
- 134..... عضوي کيميا.
- 135..... د ځينو الکانونو کيمياوي فرمولونه.
- 135..... د عضوي مرکباتو عمومي فرمولونه.
- 136..... د بيلابيلو عضوي مرکباتو کيمياوي فرمولونه.
- 139..... جيولوجي.
- 140..... د ځينې منرالونو کيمياوي فرمولونه.
- 141..... بيولوژي.
- 149..... ماخذونه.

د خینو واحداتو د یو پر بل د اړولو فکتورونه | 1

د خینو واحداتو د یو پر بل د اړولو فکتورونه

❖ اوږدوالی (Length)

$$1m = 10dm = 10^2cm = 3.28ft = 1.094yard = 39.37in$$

$$1mm = 10^{-3}m ; 1\mu(\text{micron}) = 10^{-6}m ; 1nm = 10^{-9}m$$

$$1A(\text{Angstrom}) = 10^{-10}m ; 1pm = 10^{-12}m$$

$$1Km = 10Hm = 10^2Dm = 10^3m$$

$$1yard = 0.914m = 3ft$$

$$1ft = 12inch ; 1inch = 2.54cm$$

$$1mi(\text{mile}) = 1760yard = 1.609Km ; 1light-year = 9.461 \cdot 10^{15}m$$

❖ مساحت (Area):

$$1m^2 = 10^4cm^2 = 10^6mm^2 = 10.8ft^2$$

$$1Hm^2 = 1Hectare = 10^4m^2$$

$$1mi^2 = 640acres = 2.59Km^2$$

$$1acre = 43560ft^2 = 4046.9m^2$$

$$1ft^2 = 144in^2 = 929cm^2$$

$$20 \text{ بسواسې} = 1 \text{ بسوه} ; 1 \text{ بسوي} = 20 \text{ جريب}$$

$$1 \text{ جريب} = 2000m^2$$

❖ حجم (Volume)

$$1l(\text{liter}) = 10^3cm^3, cc, ml = 1.057gt(\text{quart})$$

$$1m^3 = 10^3l = 35.32ft^3 = 264u.s.gal(\text{gallon})$$

$$1ft^3 = 7.481u.s.gal = 28.32l$$

$$1u.s.gal = 23lin^3 = 3.795l$$

$$1Britishgal = 1.201u.s.gal$$

$$1u.s.Barel = 42u.s.gal = 158.98l$$

❖ وخت (Time)

$$1hr = 60min = 3600s$$

$$1d(\text{day}) = 86400s = 24hr$$

$$1y(\text{year}) = 365.25d = 3.156 \cdot 10^7s$$

$$1century = 100y$$

❖ کتله (Mass)

$$1kg = 10^3gr = 2.2lb = 0.068slug = 5000carat$$

$$1ton = 10^3kg ; 1oz(\text{ounce}) = 0.028kg = 0.062lb$$

$$1 \text{ u.s. ton} = 907.2 \text{ kg} = 2000 \text{ lb} ; 1 \text{ slug} = 14.593 \text{ kg}$$

$$1 \text{ u.s. ton} = 1016 \text{ kg} = 2240 \text{ lb}$$

$$1 \text{ lb} = 0.4536 \text{ kg} = 16 \text{ oz} ; 1 \text{ carat} = 0.2 \text{ gr}$$

$$1 \text{ u.k. stone} = 6.35 \text{ kg} = 14 \text{ lb}$$

❖ وزن یا قوه (weight & force)

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyne} = 0.225 \text{ lb} = 7.233 \text{ poundal}$$

$$1 \text{ lb} = 4.45 \text{ N} ; 1 \text{ KN} = 10^3 \text{ N} ; 1 \text{ K(klb)} = 10^3 \text{ lb}$$

$$1 \text{ kgf} = 9.81 \text{ N} ; 1 \text{ grf} = 981 \text{ dyne}$$

❖ زوایه (Angle)

$$1^\circ = 60' = 3600'' = 0.0174 \text{ rad}$$

$$1 \text{ grad} = 0.9^\circ = 54' = 0.0157 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rad} = 57.3^\circ = 63.66 \text{ grad}$$

$$1 \text{ circle} = 360^\circ = 400 \text{ grad} = 6400 \text{ mil (mils)}$$

❖ سرعت (Speed)

$$1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 60 \frac{\text{m}}{\text{min}} = 3.6 \frac{\text{km}}{\text{hr}} = 2.237 \frac{\text{mi}}{\text{hr}} (\text{mph})$$

$$1 \frac{\text{ft}}{\text{s}} = 0.3048 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.6818 \frac{\text{mi}}{\text{hr}}$$

$$1 \frac{\text{mi}}{\text{hr}} = 88 \frac{\text{ft}}{\text{min}} = 1.609 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

❖ فشار (Pressure)

$$1 \text{ pa (pascal)} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1.45 \cdot 10^{-4} \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} (\text{psi})$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ pa} = 14.5 \text{ psi} ; 1 \text{ piz} = 10^3 \text{ pa} = 10^4 \text{ Barry}$$

$$1 \text{ atm} = 1.0132 \text{ bar} = 101.32 \text{ kpa} = 14.69 \text{ psi}$$

$$1 \text{ atm} = 76 \text{ cm Hg} = 1033.23 \text{ cm H}_2\text{O}$$

$$1 \text{ ksi} = 10^3 \text{ psi} = 68.046 \text{ atm}$$

❖ کار او انرژي (work & Energy)

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg} = 0.2389 \text{ Cal} = 0.738 \text{ ft} \cdot \text{lb}$$

$$1 \text{ Cal} = 4.186 \text{ J} = 0.004 \text{ BTU (British thermal unit)}$$

$$1 \text{ BTU} = 1055 \text{ J} ; 1 \text{ KW} \cdot \text{hr} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} = 860 \text{ kcal}$$

❖ توان (Power)

$$1 \text{ w (watt)} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 3.41 \text{ BTU / hr}$$

$$1 \text{ HP} = 550 \frac{\text{ft} \cdot \text{lb}^f}{\text{sec}} = 74.7 \text{ w}$$

❖ کثافت (Density)

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 10^{-3} \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} = 0.06243 \frac{\text{lb}}{\text{ft}^3} ; 1 \frac{\text{gr}}{\text{cm}^3} = 1.940 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3}$$

حساب

په ریاضیاتو کې د ځینې علامو د کارولو هدف

علامه	هدف
\pm	اول کمیت مثبت، دوهم منفي
\mp	اول کمیت منفي، دوهم مثبت
$=$	د دوو کمیتونو مساوي والی
\neq	د دوو کمیتونو نه مساوي والی
\equiv	د دوو کمیتونو مطابقت لرل
\propto یا \sim	د دوو کمیتونو متناسب والی
$>$	د لومړني کمیت لوی والی
$<$	د لومړني کمیت کوچني والی
\gg	لومړني کمیت ډیر لوی دی
\ll	لومړني کمیت ډیر کوچنی دی
\geq	لومړني کمیت مساوي یا لوی
\leq	لومړني کمیت مساوي یا کوچنی
\approx یا \cong	د دوو کمیتونو تقریباً مساوي والی
\Rightarrow	ادامه لرل
\wedge	او
\vee	یا
$:$	نسبت <i>نسبت</i>
$::$	تناسب
$\forall x$	د هر (x) لپاره
$\exists x$	د (x) د ځینې قیمتونو لپاره
\in	شامل والی (موجودیت)
\notin	نه شامل والی (نه موجودیت)
\cup	اتحاد
\cap	تقاطع
\subset	فرعي
$\not\subset$	غیر فرعي
\emptyset	خالي سیټ
\sphericalangle	زاویه
\perp	د دوو خطونو عمود والی
\parallel	د دوو خطونو موازیتوب

#	د دوو خطونو موازیتوب
#	د دوو خطونو مساویتوب او موازیتوب
Δx	د (x) د متحول تغیرات
Δy	د $y = f(x)$ د تابع تغیرات
$\sum x_i$	د (x_i) د ټولو قیمتونو مجموعه
$\prod x_i$	د (x_i) د ټولو قیمتونو حاصل ضرب
∞	لایتناهي

د عددونو طبقې

مرتبې	عدد	مرتبې	عدد
زر	10^3	سپتلیون	10^{24}
میلیون	10^6	اکتیلیون	10^{27}
بیلیون (میلیارد)	10^9	نونیلیون	10^{30}
تریلیون	10^{12}	کواتوار د دیسیلیون	10^{45}
کوادریلیون	10^{15}	سکس دیسیلیون	10^{51}
کونیتیلیون	10^{18}	ندوم دیسیلیون	10^{60}
سکستیلیون	10^{21}	گوگول	10^{100}

د عددونو ډولونه

❖ لومړني عددونه: هغه دي چې پرته له یو او خپل ځان څخه په

بل عدد پوره د ویش وړ نه وي: $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$

❖ مرکب عددونه: هغه دي چې پرته له یو او خپل ځان څخه په نورو

عددونو هم پوره د ویش وړ وي: $C = \{4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$

- د یو (1) عدد نه لومړنی او نه مرکب دی.

❖ طبیعي عددونه: $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$

❖ مکمل عددونه: $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

❖ تام عددونه: $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

❖ ناطق عددونه: $Q = \{x/x = \frac{a}{b}, a, b \in Z \wedge b \neq 0\}$

❖ غیر ناطق عددونه: هغه عددونه دي چې د $\frac{a}{b}$ په شکل نشي

وړاندې کیدلای یا هغه عددونه چې نه په اعشاري محدود او

نه په متوالي ډول ښودل کیدای شي: $Q' = \{\dots, \sqrt{2}, e, \pi, \dots\}$

❖ حقیقي عددونه: $R = \{-\infty, \dots, +\infty\}$

❖ موهومي عددونه: $I_m = \{xi/x \in R \wedge i = \sqrt{-1}\}$

❖ مختلط عددونه: $C = \{x + iy/x, y \in R \wedge i = \sqrt{-1}\}$

- ❖ $-\frac{b}{a} > 0$ دوه مثبت جذرونه:
- ❖ $-\frac{b}{a} < 0$ دوه منفي جذرونه:
- ❖ $\frac{c}{a} > 0$ هم علامه جذرونه:
- ❖ $\frac{c}{a} < 0$ مختلف علامه جذرونه:
- ❖ $b = 0$ مساوي او مختلف علامه جذرونه:
- ❖ $a = c$ يو د بل معکوس جذرونه:

غير مساوات (Inequalities)

د غير مساواتو ځانګړتياوې

- ❖ $a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$
- ❖ $a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \vee \frac{a}{c} > \frac{b}{c}, c > 0$
- ❖ $a > b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \vee \frac{a}{c} < \frac{b}{c}, c < 0$
- ❖ $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, a > 0, b < 0$
- ❖ $a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, a > 0, b > 0$
- ❖ $a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$
- ❖ $a > b \wedge c > d \Rightarrow a - d > b - c$
- ❖ $a > b > 0 \wedge n > 0 \Rightarrow a^n > b^n$
- ❖ $a > b > 0 \wedge n < 0 \Rightarrow a^n < b^n$
- ❖ $x^2 < a \Rightarrow |x| < \sqrt{a}, a > 0$
- ❖ $x^2 > a \Rightarrow |x| > \sqrt{a}, a > 0$
- ❖ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) > 0, g(x) \neq 0$
- ❖ $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < 0, g(x) \neq 0$
- ❖ $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, a > 0, b > 0$

انټروالونه (Intervals)

- ❖ $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ تړلې انټروال:
- ❖ $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ خلاص:
- ❖ $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ له چپ لوري نیم خلاص (له ښي لوري نیم تړلې):
- ❖ $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ له ښي لوري نیم خلاص (له چپ لوري نیم تړلې):
- ❖ $(-\infty, a) \cup (b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x < a \vee x > b\}$ د خلاصو انټروالونو اتحاد:
- ❖ $(-\infty, a] \cup [b, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a \vee x \geq b\}$ د نیمه تړلو انټروالونو اتحاد:

مطلقه قيمت (Absolute Value)

$$\text{❖ } |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

د مطلقه قيمت ځانګړتياوې

$$\text{❖ } |-x| = |x| \geq 0$$

د معادلې تشکیلول د جذرونو د مجموعې او حاصل ضرب څخه

$$x^2 + Sx + P = 0$$

هغه معادله چې جذرونه یې د $(ax^2 + bx + c = 0)$ د

$$\text{جذرونو (m) برابره وي } 0 = ax^2 + bmx + cm^2 \text{ ده}$$

هغه معادله چې جذرونه یې د $(ax^2 + bx + c = 0)$ د

$$\text{جذرونو مخالف علامه وي } 0 = ax^2 - bx + c \text{ ده}$$

هغه معادله چې جذرونه یې د $(ax^2 + bx + c = 0)$ د

$$\text{جذرونو معکوس وي } 0 = cx^2 + bx + a \text{ ده}$$

د دیگر قانون

(۱) که $(\frac{c}{a} > 0)$ وي نو دواړه جذرونه هم علامه دي:

الف- که $(-\frac{b}{a} > 0)$ وي دواړه جذرونه مثبت دي.

ب- که $(-\frac{b}{a} < 0)$ وي دواړه جذرونه منفي دي.

(۲) که $(\frac{c}{a} < 0)$ وي نو جذرونه مختلف علامه دي:

الف- که $(-\frac{b}{a} > 0)$ وي د مثبت جذر مطلقه قیمت زیات دي

ب- که $(-\frac{b}{a} < 0)$ وي د منفي جذر مطلقه قیمت زیات دي.

(۳) که $(\frac{c}{a} = 0)$ وي نو یو صفري او بل د صفر خلاف جذر لري:

الف- که $(-\frac{b}{a} > 0)$ وي د صفر خلاف جذر مثبت دي.

ب- که $(-\frac{b}{a} < 0)$ وي نو د صفر خلاف جذر منفي دي.

(۴) که $(-\frac{b}{a} = \frac{c}{a} = 0)$ وي دواړه جذرونه صفري دي.

(۵) که معادله یو تحول ولري، یو مثبت جذر او که دوه تحوله

ولري، دوه مثبت جذرونه او که تحول ونه لري، نو دوه منفي

جذرونه به ولري

- که $\Delta < 0$ شي نو تحول په معادله کې کومه معنا نه لري

پارامتریک معادلې

هغه معادله چې له اصلي مجهول پرته یو فرعي مجهول هم

$$\text{ولري مثلاً: } mx^2 + 2mx + 12m^2 = 0$$

m ته د معادلې پارامتر وايي.

که جذرونه د (m) له جنسه غوښتل شوي وي (Δ) یې تشکیلو

جذرونه یې لاسته راځي، او که په لاندې ډول غوښتل شوي وي

نو:

$\Delta > 0$ حقیقي جذرونه

$\Delta = 0$ مساوي جذرونه

$\Delta < 0$ موهومي جذرونه

د علامو ضرب او وېش (تقسیم) په الجبر کې

$$\diamond (+) \cdot (+) = + = (+) \div (+)$$

$$\diamond (-) \cdot (-) = + = (-) \div (-)$$

$$\diamond (+) \cdot (-) = - = (+) \div (-)$$

$$\diamond (-) \cdot (+) = - = (-) \div (+)$$

معادلې

$$\diamond \text{ لومړۍ درجه یو مجهوله: } ax + b = 0 ; a \neq 0$$

$$\diamond \text{ دوهمه درجه یو مجهوله: } ax^2 + bx + c = 0$$

$$\diamond \text{ دریمه درجه یو مجهوله: } ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$\diamond \text{ لومړۍ درجه دوه مجهوله: } ax + by = c$$

$$\diamond \text{ دوهمه درجه دوه مجهوله: } ax^2 + by^2 = c$$

$$\diamond \text{ لومړۍ درجه درې مجهوله: } ax + by + cz = d$$

دوهمه درجه یو مجهوله معادلې

$$ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$$

$$\diamond \text{ محمد بن موسی فرمول: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} ; \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\diamond \text{ د محمد بن موسی د نیمايي فرمول: } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$\diamond \text{ که } \Delta > 0 \text{ شي نو دوه حقيقي مختلف جذرونه لري.}$$

$$\diamond \text{ که } \Delta = 0 \text{ شي نو دوه مساوي جذرونه لري.}$$

$$\diamond \text{ که } \Delta < 0 \text{ شي نو دوه موهومي جذرونه لري.}$$

د دوهمه درجه یو مجهوله معادلې د جذرونو عمليې:

$$\diamond \text{ د جمعې حاصل: } S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\diamond \text{ د تفریق حاصل: } |x_1 - x_2| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \right|$$

$$\diamond \text{ د ضرب حاصل: } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$\diamond \text{ د مربعاتو مجموعه: } x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$\diamond \text{ د مکعباتو مجموعه: } x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$\diamond \text{ معکوسه مجموعه: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$$

$$\diamond \text{ معکوس تفریق: } \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \left| \frac{\sqrt{\Delta}}{c} \right|$$

$$\diamond \text{ معکوس ضرب: } \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{a}{c}$$

د دوهمې درجې یو مجهوله معادلې تشکیلول چې جذرونه

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad \text{یې معلوم وي}$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0 \quad \text{یا:}$$

الجبر (Algebra)

پولینوم

❖ که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ ووېشو د باقیمانده قضیې پر

بنسټ پاتې (باقي) له $P(a)$ سره مساوي ده.

❖ که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ ووېشو او پاتې (باقي) صفر

شي نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

❖ د فکتور د معکوسې قضیې په اساس که $(x-c)$ د $M(x)$ د

پولینوم یو فکتور وي، نو $M(c)=0$ او د (c) عدد د

$M(x)=0$ د پولینومي معادلې یو جذر دی.

❖ هموځه افاده: چې د ټولو حدونو درجې یې سره مساوي وي:

$$a^2b^3 + bc^4 - z^5 + x^3y^2$$

مطابقتونه یا عینیتونه (Identities)

$$\diamond (a + b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n}{2!}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

$$\diamond a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

n-مثبت تام عددونه دي

$$\diamond a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$$

n-طاق مثبت تام عددونه دي

$$\diamond a^n + b^n = \left[a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}} \right] \left[a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}} \right]$$

n-جفت مثبت تام عددونه دي

$$\binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} b^k$$

❖ د دوه جمله یې k-ام حد: $\frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$

په انکشاف ورکړ شوي شکل کې د حدونو شمېر: $n + 1$

❖ په انکشاف ورکړ شوي شکل کې د ضریبونو مجموعه:

$$(a + b)^n = 2^n \quad \text{که } a \text{ او } b \text{ متحولین وي}$$

$$(ax + by)^n = (a + b)^n \quad \text{که } x \text{ او } y \text{ متحولین وي}$$

$$(3x + 4y)^3 \Rightarrow (3 + 4)^3 = 7^3 = 343 \quad \text{مثلاً:}$$

د ځینې مطابقتونو انکشاف ورکړ شوی یا د تجزیې شکل:

$$\diamond (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\diamond (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$\diamond a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$\diamond a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\diamond a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\diamond a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$$

$$\diamond a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2})(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2})$$

$$\diamond (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\sqrt[n]{a \pm \sqrt{a \pm \sqrt{a \pm \dots}}} = \frac{\pm 1 + \sqrt{4a+1}}{2}$$

$$\sqrt[n]{x \sqrt{x \sqrt{x \dots \sqrt{x}}} = \sqrt[n]{x^{2^n - 1}}, n \rightarrow \text{جذرونو تعداد}$$

د کسري عددونو عمليې

$$a \pm \frac{b}{c} = \frac{ac \pm b}{c}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\left(a \pm \frac{b}{c}\right) \left(d \pm \frac{f}{e}\right) = \frac{(ac \pm b)(ed \pm f)}{ce}$$

د دوو عددونو او د دوی د کوچني مشترک مضرب او لوی مشترک قاسم تر منځ اړیکه

$$G.C.D \times L.C.M = a \times b$$

د تناسب خاصیتونه

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}, \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{m}, m = m \Rightarrow a = b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ یا } \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b \pm a}{b} = \frac{d \pm c}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{h \cdot a}{b} = \frac{h \cdot c}{d} \text{ یا } \frac{a}{h \cdot b} = \frac{c}{h \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

اوسط

$$A_A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{حسابي اوسط}$$

$$A_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \quad \text{هندسي اوسط}$$

$$A_H = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{هارمونيک (مؤلفه) اوسط}$$

$$A_G^2 = A_A \cdot A_H, A_A \geq A_G \geq A_H \quad \text{گډه اړیکه یې}$$

ربحه او زکات

$$R = \frac{S \cdot M \cdot N}{100} \quad \text{ساده ربحه: (N نرخ، M موده، S سرمایه)}$$

$$R = P - A, P = A(1 + N)^n \quad \text{مرکبه ربحه}$$

A لومړنۍ سرمایه، P اخري سرمایه، n د کلونو شمېر

$$\text{زکات} = \frac{\text{سرمایه}}{40}$$

طاقات

که چیرې $a, b \in R^+$; $m, n \in Z$ وي

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{\text{خلې } m} = \prod_{i=1}^m a ; m > 0$$

د طاقت قوانین

- ❖ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- ❖ $a^m \cdot b^m \cdot c^m = (a \cdot b \cdot c)^m$
- ❖ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- ❖ $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
- ❖ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- ❖ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- ❖ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
- ❖ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- ❖ $a^0 = 1 ; a \neq 0$

جنر

- ❖ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} ; (a, b \in R^+ \cup \{0\}; m, n \in N)$

د جنر قوانین

- ❖ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- ❖ $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$
- ❖ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^m \cdot b^n}$
- ❖ $\sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[m]{a^q} = \sqrt[m \cdot n]{a^{pm+nq}}$
- ❖ $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^p}} = \sqrt[n]{a^{m-p}}$
- ❖ $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} ; b \neq 0$
- ❖ $\frac{\sqrt[m]{a^x}}{\sqrt[n]{a^y}} = \frac{m \cdot \sqrt[m \cdot n]{a^{x \cdot n}}}{m \cdot \sqrt[m \cdot n]{a^{y \cdot m}}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{xn-ym}}$
- ❖ $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a^{n-m}}$
- ❖ $(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$
- ❖ $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- ❖ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[m \cdot n]{a^p}$
- ❖ $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$
- ❖ $a \cdot \sqrt[n]{x} + b \cdot \sqrt[n]{x} + c \cdot \sqrt[n]{x} = (a + b + c) \cdot \sqrt[n]{x}$
- ❖ $\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a} ; a \neq 0$
- ❖ $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$
- ❖ $\frac{1}{\sqrt{a \pm \sqrt{b}}} = \frac{\sqrt{a \mp \sqrt{b}}}{a - b} ; a, b \neq 0$

- په هغه صورت کې چې: $A \subset B \wedge B \subset A$
- ❖ فرعي سټ: A د B فرعي سټ دی هغه وخت چې A ټول عناصر په B کې شامل وي. $A \subset B$
- ❖ د فرعي سټونو شمېر: $(n$ د عناصرو شمېر) 2^n
- ❖ د خاص فرعي سټونو شمېر: $2^n - 1$
- ❖ د سټونو تقاطع: د A او B دوو سټونو د تقاطع سټ هغه دی چې عناصر یې هم په A او هم په B کې شامل وي
- $$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$
- ❖ د سټونو اتحاد: د A او B دوو سټونو د اتحاد سټ هغه دی چې عناصر یې لږ تر لږه په A یا B کې شامل وي
- $$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$
- ❖ د سټونو د تقاطع اتحادي خاصیت:
- $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
- ❖ د سټونو د اتحاد اتحادي خاصیت:
- $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
- ❖ غیر مشترک (مجزا) سټونه: هغه سټونه چې هېڅ مشترک (ګډ) عنصر ونه لري لکه A او B سټونه: $A \cap B = \phi$
- ❖ معین سټ: چې عناصر یې معین او د شمیرلو وړ وي:
- $$A = \{a, b, c, d\}$$
- ❖ غیر معین سټ: چې عناصر یې د شمیرلو وړ نه وي:
- $$B = \{1, 2, 3, \dots\}$$
- ❖ د سټونو سټ: چې ټول عناصر یې سټونه وي:
- $$P = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c\}\}$$
- ❖ د طاقت سټ: چې عناصر یې د یوه بل سټ فرعي سټونه وي: د A سټ د طاقت سټ:
- $$A = \{x, y, z\}; P(A) = \{\phi, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, A\}$$
- ❖ د دوو سټونو تفاضل: A تفاضل د B یا $A \setminus B$ هغه سټ دی چې عناصر یې په A کې شامل او په B کې شامل نه وي
- $$A \setminus B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$
- د سټونو متناظر تفریق: د $A - B$ او $B - A$ سټونو اتحاد د A او B سټونو متناظر تفریق دی:
- $$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$
- یا: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \Rightarrow A \Delta B = B \Delta A$
- ❖ مکمله سټ: که چېرې $B \subset A$ وي، نو $A \setminus B$ ته د B مکمله سټ وایي.
- $$B' = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

حساب | 5

$$i^{4n} = 1 \quad ; \quad i^{4n+1} = i$$

$$i^{4n+2} = -1 \quad ; \quad i^{4n+3} = -i$$

په هغه صورت کې چې (i) د موهومي عددونو واحد او

$n \in N_0$ وي

$$\bar{z} = x - yi \quad \text{د } z = x + yi \text{ مختلط عدد مزدوج}$$

د يو مختلط عدد د مزدوج ځانگړتياوې:

$$1) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2) \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$3) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$4) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

$$5) z + \bar{z} = 2x$$

$$6) z - \bar{z} = 2yi$$

$$7) \bar{\bar{z}} = z$$

$$8) z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

د عددونو د ستونو ترمنځ اړیکه: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

د وېش قابليت

❖ پر ۲: چې يويز رقم يې صفر يا جفت وي.

❖ پر ۳: چې د رقمونو مجموعه يې پر ۳ د وېش وړ وي.

❖ پر ۴: چې اولي دوه رقمونه يې صفر يا پر ۴ د وېش وړ وي.

❖ پر ۵: چې يويز رقم يې صفر يا ۵ وي.

❖ پر ۷: چې يو وخت پر ۲ او ۳ د وېش وړ وي.

❖ پر ۷: د لومړي رقم ۲ چنده له باقي عدد څخه منفي کوو

حاصل به صفر يا پر ۷ د وېش وړ وي.

❖ پر ۸: چې اولي ۳ رقمونه يې صفر يا پر ۸ د وېش وړ وي.

❖ پر ۹: چې د رقمونو مجموعه يې پر ۹ د وېش وړ وي.

❖ پر ۱۰: چې يويز رقم يې صفر وي.

❖ پر ۱۱: د يو عدد د جفتو او طاقو رقمونو حاصل تفریق صفر يا پر

۱۱ د وېش وړ وي

❖ پر ۱۲: چې په يو وخت پر ۳ او ۴ د وېش وړ وي.

سټ

❖ د ځانگړو شيانو جمع آوري (collection) ته سټ وايي.

❖ معادل سټونه: يوازې د عناصرو تعداد يې سره مساوي وي.

❖ مساوي سټونه: چې ټول عناصر يې سره يو شان وي. $A = B$

- ❖ $|-x| \neq -|x|$
- ❖ $|x| \geq x ; |x| > -x$
- ❖ $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ❖ $|x + y| \leq |x| + |y|$
- ❖ $|x - y| > |x| - |y|$
- ❖ $|xy| = |x||y|$
- ❖ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} , y \neq 0$
- ❖ $|x| = \sqrt{x^2}$
- ❖ $|x^n| = |x|^n$
- ❖ $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مطلقه قيمت او حل يې ($a > 0$)

- ❖ $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$
- ❖ $|x| < a \Rightarrow -a < x < a ; a > 0$
- ❖ $|x| > a \Rightarrow x > a \vee x < -a ; a > 0$
- ❖ $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$
- ❖ $|x| \geq a \Rightarrow x \geq a \vee x \leq -a$

لوگاریتم (Logarithm)

- ❖ $\log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x, a \neq 1, y, a > 0$

د لوگاریتم ځانګړتیاوې

- ❖ $\log_a a = 1$
- ❖ $\log_a 1 = 0$
- ❖ $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$
- ❖ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- ❖ $\log_{a^r} x = \frac{1}{\log_x a + \log_x r}$
- ❖ $\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}$
- ❖ $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$
- ❖ $\log_a a^r = r$
- ❖ $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$
- ❖ $\log_{a^r} x = \frac{1}{r} \cdot \log_a x$
- ❖ $\log_{a^s} x^r = \frac{r}{s} \cdot \log_a x$
- ❖ $\log_a \sqrt[s]{x^r} = \frac{r}{s} \cdot \log_a x$
- ❖ $\log_a x \cdot \log_x a = 1$
- ❖ $\log_a x \cdot \log_r a \cdot \log_s r = \log_s x$
- ❖ $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$
- ❖ $a^{\log_a x} = x$

$$\diamond a^{\log_a x + \log_a y} = x \cdot y$$

$$\diamond a^{\log_a x - \log_a y} = \frac{x}{y}$$

$$\diamond a^{\log_r x} = x^{\log_r a}$$

$$\diamond \log_a [\log_b (\log_c x)] = d \Leftrightarrow x = c^{b^{a^d}}$$

$$\diamond \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x = c \log_a x$$

$$\diamond \log_{\frac{1}{a}} x = \log_a x$$

$$\diamond \log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$$

د معمولي او طبيعي لوګارېټم تر منځ اړيکه

$$\diamond \log x = (0,4343) \ln x$$

$$\diamond \ln x = (2,3026) \log x$$

$$\diamond \log_a 0 = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}$$

يادونه: د معمولي لوګارېټم ټولې څانګړتياوې د طبيعي لوګارېټم

لپاره د پلي کيدو وړ دي

$$\diamond \ln e^{f(x)} = f(x), \quad e^{\ln f(x)} = f(x)$$

هره لوګارېټمي تابع معکوسه تابع لري چې $f(x) = a^x$ او

$g(x) = \log_a x$ تابعګانې يو د بل معکوسې تابعګانې دي او

ګرافونه يې د $y = x$ مستقيم خط ته متناظر دي

هره لوګارېټمي تابع يو په يو يا انجکټيف (*injective*) ده.

يعنې: د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

د انتي لوګارېټم: که $\log_a y = x$ وي، نو x د

لوګارېټم انتي لوګارېټم بلل کيږي يعنې: $y = \text{antilog } x$

ترادف يا تصاعد (Sequence)

حسابي ترادف

$$a_n = a_1 + (n-1)d \quad \diamond n\text{-ام حد:}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \diamond \text{د ترادف منځنۍ حد:}$$

د ترادف ګڼه توپير چې n -ام او m -ام حدونه يې معلوم وي:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] \quad \diamond \text{د } (n)\text{ حدونو مجموعه:}$$

$$S_n = \frac{n}{2} (a_n + a_1) \quad \diamond \text{يا:}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \quad \diamond \text{د } (m)\text{ حدونو د شاملولو لپاره ګڼه توپير:}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \diamond \text{د } (n)\text{ طبيعي اعدادو مجموعه:}$$

$$S_n = n(n+1) \quad \diamond \text{د } (n)\text{ جفتو اعدادو مجموعه:}$$

$$S_n = n^2 \quad \diamond \text{د } (n)\text{ طاقو اعدادو مجموعه:}$$

په حسابي تصاعد کې

1- که د حدونو شمیر طاق وي: منځنی حد $S_n = n \cdot$

2- که منځنی حد معلوم وي: د منځني حد دوه چنده $a_1 + a_n =$

3- کله چې k -ام حد او k -م توپیر معلوم وي نو n -ام حد:

$$a_n = a_k + (n - k)d, n > k$$

هارمونيکي ترادف: چې معکوس يې يو حسابي ترادف وي.

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}} \quad \text{هارمونيکي حسابي اوسط:}$$

هندسي ترادف

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \quad \text{ن-ام حد:}$$

$$a_n = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})} \quad \text{د ترادف منځنی حد:}$$

$$r = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}} \quad \text{گډ نسبت:}$$

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} \quad \text{د (m) حدونو شاملولو لپاره گډ نسبت:}$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1 \quad \text{د (n) حدونو مجموعه:}$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}, r < 1 \quad \text{د (n) حدونو مجموعه:}$$

$$S_\infty = \infty, r \geq 1 \quad \text{د لايتناهي حدونو مجموعه:}$$

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}, |r| < 1 \quad \text{د لايتناهي حدونو مجموعه:}$$

په هندسي تصاعد کې

1- که اول حد، آخر حد او د حدونو شمیر معلوم وي، نو د

تصاعد د حدونو د ضرب حاصل مساوي دی له:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

2- که د تصاعد د حدونو شمیر طاق وي، نو د حدونو د ضرب حاصل:

$$P_n = (\text{منځنی حد})^n$$

3- کله چې k -ام حد او مشترک نسبت معلوم وي نو n -ام حد:

$$a_n = a_k \cdot r^{n-k}, n > k$$

سلسلې يا مجموعه (Series)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

$\frac{n(n+1)}{2}$

$n(n+1)$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2+1)}{3}$$

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(4n^2-1)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \approx 1$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \dots = e = 2.718281 \dots$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (x^k) = \frac{1}{1-x}$$

د سلسلو يا مجموعو ځانګړتياوې

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{2k} = 1$$

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{2k-1} = -1$$

$$\sum_{k=1}^n c = c \cdot n$$

$$\sum_{k=1}^n ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

د عدد ليکني علمي طريقه Scientific notation

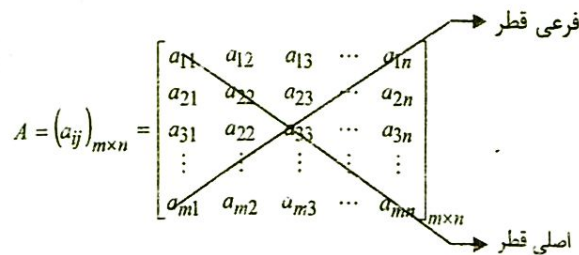
❖ کولای شو هر عدد د 10 د توان په څېر وليکو، لکه د N

عدد داسې ليکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې

$1 \leq a < 10$ او n يو تام عدد دی.

مټريکس (Matrix)

❖ د (A) يو مټريکس:



m سطرونو شمېر او n ستونونو شمېر رانېسي.

د سطر (کرنډي) نمبر او زد ستون (ستني) نمبر رانښيي، مثلاً:

$$a_{ij} = a_{23} \Rightarrow i = 2 \wedge j = 3$$

د مټريکس نوډولونه

❖ سطرې مټريکس: چې يوازې يو سطر ولري:

$$A = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]_{1 \times n}$$

❖ ستوني مټريکس: چې يوازې يو ستون ولري:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

❖ صفري مټريکس: چې ټول عناصر يې صفرونه وي:

$$0_{2 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$$

❖ مربعي مټريکس: چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې سره

$$m = n$$

مساوي وي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

❖ مستطيلي مټريکس: چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې

مساوي نه وي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

❖ قطري مټريکس: له اصلي قطر پرته نور ټول عناصر يې صفروي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

❖ سکالري مټريکس: هغه قطري مټريکس چې د اصلي قطر

عناصر يې سره مساوي وي:

$$A = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & N \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

❖ واحد مټريکس: چې په سکالري يا قطري مټريکس کې د

اصلي قطر عناصر د يو (1) عدد وي:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

❖ ښکتنی مثلي مټريکس: چې د يو مربعي مټريکس اصلي

قطر څخه پورته عناصر صفرونه وي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

❖ پورتنۍ مثلثي مټریکس: چې د یو مربعي مټریکس د اصلي قطر څخه بنسټه عناصر صفرونه وي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

یادونه: د ښوونځي په ریاضي کې د پورتنی او بنسټني مثلثي مټریکسونو په اړه یو څه تیروتنه شوې ده، په پورته ډول سم دی، د لازياتو معلوماتو لپاره د ریاضیاتو مهمو کتابونو ته مراجعه وکړئ (۱۱ ټولګی، ۲ څپرکی، ۲۱۱ مخ)

❖ متقابل (متضاد) مټریکس: چې عناصر یې یو په یو د لومړي مټریکس متضاد وي:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow -A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow -A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

❖ ترانسپوز مټریکس: که په لومړي مټریکس کې د سطرونو او ستونو ځایونه تبدیل شي نو دوهم مټریکس ته د لومړي مټریکس ترانسپوز مټریکس وايي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}, A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 9 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}_{3 \times 2}, A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 9 & 8 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

❖ د ترانسپوز مټریکس ځانګړتیاوې:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A \pm B \pm C \pm \dots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \dots$
3. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
4. $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$, $\alpha \in IR$
5. $(-A)^T = -A^T$

❖ متناظر مټریکس: یو مربعي مټریکس هغه وخت متناظر دی

چې $a_{ij} = a_{ji}$ وي، په متناظر مټریکس کې $A = A^T$ دی:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 7 \\ -2 & 9 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

❖ متوصله یا مجاور (Adjoint) مټریکس: چې د اصلي قطر د متناظر عناصرو ځایونه تبدیل او د فرعي قطر د عناصرو علامې

متناظر: چې د اصلي قطر د عناصرو ځایونه تبدیل او د فرعي قطر د عناصرو علامې

متناظر مټریکس

بدلې شي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} \Rightarrow AdjA = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

د مټریکسونو عمليې

❖ جمع او تفریق: دوه مټریکسونه هغه وخت جمع او تفریق

کولای شو چې هم مرتبه وي:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$B = (b_{ij})_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$A + B = C = c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$A - B = C = c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

د جمعی او تفریق ځانگړتیاوې:

$$A + B = B + A \quad 1$$

$$A - B \neq B - A \quad 2$$

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C) \quad 3$$

4. د عینیت عنصر د مټریکسونو په جمع کې صدق

کوي، خو په تفریق کې صدق نه کوي:

$$A + 0 = 0 + A = A$$

❖ ضرب د سکالر ضرب په مټریکس کې:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, \quad K \cdot A = (Ka_{ij})_{m \times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب ځانگړتیاوې:

که چېرې A او B هم مرتبه مټریکسونه او $\alpha \wedge B \in IR$ وي نو:

$$1 - \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$2 - (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$3 - \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

❖ د مټریکسونو ضرب د ضرب لپاره باید د لومړي مټریکس

د ستونونو شمېر د دوهم مټریکس د سطرونو د شمېر سره

مساوي وي:

$$A = (a_{ij})_{m \times n}, B = (b_{ij})_{n \times q}, A \cdot B = C = (c_{ij})_{m \times q}$$

$$(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times q} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \cdot b_{ij} = (c_{ij})_{m \times q}$$

$$A = (a_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$B = (b_{ij})_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

د مټریکس د ضرب ځانګړتیاوې:

1. په عمومي توګه د دوو مټریکسو په ضرب کې:

$$AB \neq BA$$

2. که هم مرتبه مټریکسونه وي، نو:

$$AB = BA$$

$$(AB)C = A(BC)$$

3.

4.

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$K(AB) = (KA)B = A(KB), K \in IR$$

5.

د مټریکسو نو لیکل د مستطیلي جدول په ډول:

❖ مثال: لاندې مټریکسونه د مستطیلي جدول په ډول ولیکئ.

$$a). (a_{ij})_{2 \times 2} = (2i + 3j)_{2 \times 2}$$

$$a_{ij} = 2i + 3j; a_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$$

$$a_{12} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8, a_{21} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

$$a_{22} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 10 \Rightarrow a_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$b). (a_{ij})_{2 \times 3} = (3i \cdot j)_{2 \times 3}; a_{ij} = 3i \cdot j$$

$$a_{11} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3, a_{12} = 3 \cdot 1 \cdot 2 = 6$$

$$a_{13} = 3 \cdot 1 \cdot 3 = 9, a_{21} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$a_{22} = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12, a_{23} = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$$

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

ډیټر مینانت (Determinant)

$$A = (a_{ij})_{m \times m} \Rightarrow \det A = |A|$$

❖ د (2×2) مرتبې لرونکي مټریکس ډیټر مینانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

❖ د (3×3) مرتبې لرونکي مټریکس ډیټر مینانت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

د ساروس په طریقته د (3×3) مرتبه مټریکس ډیټر مینانت محاسبه:

په دغه طریقته کې د ډیټر مینانت دوه لومړي ستونونه ښي لوري

ته یا دوه لومړي سطرونه لاندیني برخه کې په لاندې ډول تکرار

لیکو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

فرعی قطرونه \rightarrow

اصلي قطرونه \rightarrow

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

فرعی قطرونه \rightarrow

اصلي قطرونه \rightarrow

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{12}a_{33})$$

❖ د دیترمینانت خانگرتیاوي

1- که د $A_{n \times n}$ متریكس دیوه سطر او یا یوه ستون توله عناصر صفرونه وي، نو:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0, \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & e & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n \times n}$ متریكس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0, \quad |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

3- که د $A_{n \times n}$ متریكس دیوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو گډ فکتور وي، نو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

4- که د A متریكس دیترمینانت او A^T متریكس

$$|A| = |A^T|$$

دیترمینانت یوله بل سره مساوي وي:

$$A_{n \times n} \Rightarrow |A| = 0 \quad \text{❖ منفرد متریكس:}$$

$$A_{n \times n} \Rightarrow |A| \neq 0 \quad \text{❖ غیر منفرد متریكس:}$$

❖ معکوس مټریکس: B مټریکس د A د مټریکس معکوس دی هغه وخت چې:

$$AB = B \cdot A = I \quad (\text{واحد مټریکس}), \quad B = A^{-1}$$

❖ هغه وخت یو مټریکس د معکوس مټریکس لرونکی دی چې:

- 1- مټریکس مربعي وي.

2- د ډیټرمنانت یې د صفر خلاف وي.

یادونه: د معکوس مټریکس موضوع د 2×2 مرتبې

مټریکس دی چې له لاندې فورمول څخه لاسته راځي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj } A, \quad |A| \neq 0$$

❖ له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = C_1 \\ a_2x + b_2y = C_2 \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

❖ د خطي درې مجهوله معادلو سیستم:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3 \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

د x, y او z قیمتونه:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}; \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}; \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}; \quad |A| \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array} \right] \quad \text{د سیستم زیات شوی مټریکس:}$$

- د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړي ستون پرځای څلورم

ستون ځای پرځای کوو، د 3×3 ډیټرمنانت په لاس راوړو.

- د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون پرځای څلورم

ستون ځای پرځای کوو، د 3×3 ډیټرمنانت په لاس راوړو.

- د $|A_z|$ د محاسبې لپاره د دریم ستون پرځای څلورم ستون

ځای پرځای کوو، د 3×3 ډیټرمنانت په لاس راوړو.

د معادلو د سیستم حل د گوس (Gouse) په طریقه

د گوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو متریکس او ثابت قیمتونه لیکو، وروسته په سطرونو او ستونو باندې لومړنۍ عملیې (جمع، تفریق، ضرب او تقسیم) سرته رسو یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې یو مجهول پاتې کېږي او قیمت یې لاسته راځي، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د متریک سرونه په R_1, R_2, \dots نښو.

مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کوو:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1-R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2(-1) \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \boxed{y=2}, \quad \begin{aligned} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \end{aligned} \Rightarrow x=5-4 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \rightarrow R_2$ په دې معنا چې له لومړي سطر څخه

(2) سطر تفریق او په (2) سطر کې لیکل شوي دي.

$R_2(-1) \rightarrow R_2$ په دې معنا چې دویم سطر په (-1) کې ضرب

شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

وکتورونه (Vectors)

❖ وکتور: هغه کمیت دی چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛

لکه: قوه، تعجیل، ...

❖ د شعاع وکتور یا د موقعیت وکتور: چې مبدا یې د وضعیه

کمیتونو د قایم سیستم په مبدا کې واقع وي.

❖ د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د یو وکتور ښودل:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

د a_x او a_y د y په محور د \vec{a} فاصله او ترتیب نښي.

❖ د وکتور او x محور ترمنځ زاویه:

$$\theta = \arctan\left(\frac{a_y}{a_x}\right)$$

❖ په دوه بُعدی فضا کې د وکتور ښودنه:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x_i + y_j$$

i او j زواحد وکتورونه دي.

❖ واحد وکتور: چې اوږدوالی یې یو واحد وي: $\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = 1$

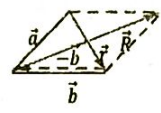
❖ مساوي وکتورونه: چې اوږدوالی یې سره مساوي، هم

جهته او موازي وي.

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|, \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

❖ صفري وکتور: $\vec{a} = \overline{AB} = 0$

❖ مخالف یا منفي وکتورونه چې اوږدولې یې مساوي او جهت یې مخالف وي: $|\overline{OA}| = |\overline{AO}|, \overline{AO} = -\vec{a}, \overline{OA} = \vec{a}$
 د وکتورونو جمع او تفریق (د متوازي الاضلاع په طريقه)



$$\left. \begin{aligned} \vec{R} &= \vec{a} + \vec{b} \\ \vec{r} &= \vec{a} - \vec{b} \end{aligned} \right\}$$

❖ په دوه بُعدي (مستوي) کې د وکتورونو د جمعې قاعده:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

❖ په دوه بُعدي (مستوي) کې د وکتورونو د سکالري ضرب قاعده:

$$a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د وکتور نبودنه:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overline{x}i + \overline{y}j + \overline{z}k$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

په درې بُعدي فضا کې د x, y, z او محورو په امتداد واحد وکتورونه دي:

$$i = (1, 0, 0), \quad j = (0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 1)$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د وکتورونو د جمعې قاعده:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د وکتورونو د سکالري ضرب قاعده:

$$a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix}$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن:

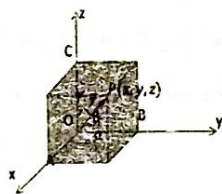
$$p_1 = (x_1, y_1, z_1), \quad p_2 = (x_2, y_2, z_2)$$

$$|\overline{p_1 p_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

❖ په درې بُعدي فضا کې د یو ټکي واټن له مبدا څخه:

$$|\overline{p_1 p_2}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

❖ د یوه وکتور د جهت زاويې او کوساینونه:



$$\left. \begin{aligned} \overline{OP} &= \vec{r} \\ \overline{OA} &= \vec{r}_x \\ \overline{OB} &= \vec{r}_y \\ \overline{OC} &= \vec{r}_z \end{aligned} \right\}$$

❖ د وكتور د جهت كوساينونه

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cdot \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cdot \cos \gamma$$

❖ د جهت د زاويو او كوساينونو ترمنځ اړيکه:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$$

❖ د دوو وكتورونو سكالري ضرب (په مستوي او يا فضا كې):

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot \cos \theta; \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$$

❖ عمودي وكتورونو سكالري ضرب: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

❖ د ضرب تبديلي خاصيت: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

❖ د ضرب توزيعي خاصيت په جمع:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

❖ د ضرب توزيعي خاصيت: $(c \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = c(\vec{u} \cdot \vec{v})$

❖ د دوو وكتورونو وكتوري ضرب (ن واحد وكتور)

$$\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot \sin \theta \cdot \vec{n}$$

❖ په فضا كې د دوو وكتورونو وكتوري ضرب

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

❖ د وكتوري ضرب خاصيتونه:

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$

$$\vec{u} \times (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v}), \quad k \in \mathbb{R}$$

❖ د $\vec{u} \times \vec{v}$ وكتور په \vec{u} او \vec{v} وكتورونو عمود دی

❖ د وكتورونو خطي تركيب

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$$

❖ وكتور د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وكتورونو خطي تركيب په نوم ياديږي

❖ سكالري حاصل ضرب

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

پداسې حال کې چې α_1 د \vec{a}_1 وکتور د i زاو k ضریبونو مجموعه وي او په همدې توګه α_2 تر α_n پورې
 ❖ په n بُعدی فضا کې د طبیعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب پواسطه د یوه وکتور ښودل:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

پداسې حال کې چې (e_1, e_2, \dots, e_n) طبیعي واحد وکتورونه دي.

❖ د وکتورونو خطي استقلال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي استقلال لري، که چیرې:

$$\begin{cases} \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \end{cases}$$

❖ د وکتورونو خطي ارتباط: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط (خطي غیر خپلواک) یا خطي انحصار لري، که چیرې یوازې او یوازې، $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ وي او کم تر کمه یوله ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ څخه خلاف د صفروي.

❖ د مخلوط ضرب حاصل (دری ګونی ضرب):

لاندې څو امکانه وجود لري:

i) $\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

ii) $(\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$

iii) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

iv) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$

رابطه (اریګه)

❖ که $A \cap B \neq \emptyset$ وي نو د $A \times B$ هر فرعي سټ له A څخه

په B کې یوه رابطه ده، که $(a, b) \in IR$ وي، ویل کېږي چې

a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل لیکل کېږي.

❖ خطي رابطه که چیرې د یوې رابطې ګراف مستقیم خط

وي، نو د متحولینو ترمنځ رابطه خطي ده.

❖ د کارټیزی ضرب حاصل:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}, A \cap B \neq \emptyset$$

❖ که $(A \neq B)$ وي نو: $A \times B \neq B \times A$

❖ که د A سټ د عناصرو شمیر m او B سټ n وي، نو د

$A \times B$ د عناصرو شمیر $(m \times n)$ دی.

❖ که R که A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو:

$$R \subset A \times B$$

❖ که R په A کې یوه رابطه وي نو:

$$R \subset A \times A$$

❖ که د $A \times B$ د عناصرو شمیر $m \times n$ وي، نو د A څخه

په B کې د ټولو رابطو شمیر:

$$2^{m \times n}$$

❖ د R د تعریف ساحه:

$$Dom_R = \{ \text{د مرتبو جوړو لومړني عنصره دي} \}$$

❖ د R د قیمتونو ناحیه:

$$Range_R = \{ \text{د مرتبو جوړو دویمي عنصره دي} \}$$

❖ د R معکوسه رابطه:

$$R^{-1} = \{ (y, x) \mid (x, y) \in R \}, (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$$

❖ د R دویمین د R^{-1} رینج او د R رینج د R^{-1} دویمین دی.

❖ معادله رابطه: د R رابطه د A په ست کې یوه معادله

رابطه ده، که لاندې درې خاصیتونه ولري:

$$\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R \quad 1. \text{ انعکاسی خاصیت:}$$

$$\forall (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \quad 2. \text{ تناظری خاصیت:}$$

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R \quad 3. \text{ انتقالی خاصیت:}$$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقی عددونو په ست کې یوه

معادله رابطه ده

تابع (Function)

د ځینو تابع گانو د تعریف ناحیې او گرافونه:

$$f(x) = c ; Domf(x) = IR \quad \text{❖ ثابت تابع:}$$



$$\begin{cases} f(x) = \frac{3}{2} \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

$$y = f(x) = x, Domf(x) = IR \quad \text{❖ د عینیت تابع:}$$



❖ د مطلقه قیمت تابع: $y = f(x) = |x|$; $Domf(x) = IR$

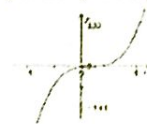
$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



❖ پولینومي تابع:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$; $n \in N$; $Domf(x) = IR$

$$y = 3x^3 - 6x^2 + 5x - 2$$



$f(x) = ax + b$; $a \neq 0$

(a) خطي تابع:

$Domf(x) = IR$

$$\begin{cases} f(x) = 0.5x \\ f(x) = x - 1 \end{cases}$$



$f(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$

(b) دویمه درجه تابع:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 3 \\ y = 2x^2 - 4 \end{cases}$$

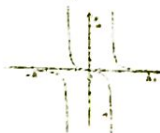


$f(x) = \frac{p(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$

❖ ناطقه تابع:

$Domf(x) = IR - \{g(x) = 0\}$

$$y = \frac{x}{x^2 - 9}$$

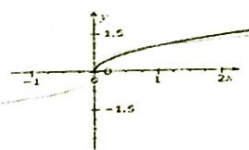


❖ جذري تابع:

$y = \sqrt[2n-1]{g(x)}$; $Dom y = IR$: د جذر درجه طاقه ده:

$y = \sqrt[2n]{g(x)}$: د جذر درجه جفته ده:

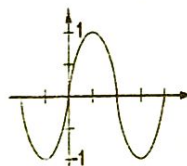
$Dom y = \{x/x \in IR, g(x) \geq 0\}$



$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

$$y = \sin x$$

❖ مثلثاتی تابع: مثلاً:



$$Domy = IR, R_y = [-1, 1]$$

❖ معکوسه مثلثاتی تابع: مثلاً:

$$y = \sin^{-1} x = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$$

$$Domy = [-1, 1], R_y = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}; c \neq 0$$

❖ هوموگرافیک تابع:

$$Domy = IR - \{cx + d = 0\}$$



$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

❖ اکسپوننشیل تابع: $f(x) = a^x, f(x) = e^x; D_f = IR$



$$y = \log_a g(x)$$

❖ لوگاریتمی تابع:

$$Domy = \{x/x \in IR, g(x) > 0\}$$



$$\begin{cases} y = \log_2 x \\ y = \log_{10} x \end{cases}$$

د اکسپوننشیل تابع خانگرتیاوي

1. دهرې تابع $Dom = IR$ و $Range = IR^+$ دی.
2. هره تابع یې یو په یو (*injective*) ده.
3. هره تابع یې د $a > 1$ لپاره متزايدة، د $a < 1$ لپاره متناقصه او $a = 1$ لپاره ثابت تابع ده.
4. دهرې تابع گراف یې د $(0, 1)$ ټکي څخه تیرېږي.

5. د $f(x) = a^x$ او $g(x) = a^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر (y) محور ته متناظر پراته دي.

6. هر تابع یې معکوس لري چې معکوسه تابع یې $\log_a x$ ده. ❖
تابع په یوه انټروال کې متزایده ده که:

$$\text{if } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) ; x_1, x_2 \in D_f$$

❖ تابع په یوه انټروال کې متناقصه ده که:

$$\text{if } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) ; x_1, x_2 \in D_f$$

❖ جفته تابع:

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

❖ طاقه تابع:

❖ معکوسه تابع: یوه تابع هغه وخت معکوس پذیره ده چې بایجکتیف وي نو که په یوه تابع کې د (x) او (y) ځایونه تعویض شي او معادله د (y) لپاره حل شي، لاسته راغلي تابع د لومړي تابع معکوسه ده.

$$\rightarrow f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$$

$$\rightarrow f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$$

- د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې هغه وخت یو د بل معکوسې دي چې:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

❖ د تابع ګانو ترکیب یا مرکبې تابع ګانې:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f[g(x)]$$

$$\text{Dom}(f \circ g)(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}g, g(x) \in \text{Dom}f\}$$

$$\text{sgn} = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$$

❖ د علامې تابع:

$$\text{Dom}_{\text{sgn}} = \mathbb{R}, \quad \text{Range}_{\text{sgn}} = \{-1, 0, 1\}$$

❖ یو په یو تابع (انجکتیف): که یو له لاندې شرطونو صدق وکړي تابع یو په یو ده.

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) ; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

❖ ضمني تابع: کله چې د x او y متحولینو ترمنځ اړیکه د

$$f(x, y) = 0$$

اړیکې پواسطه تعین شي، نو ویل کېږي چې

$$y \text{ د } x \text{ د متحول ضمني تابع ده. د دایرې، بیضوي، ...}$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

انکشاف لرونکی معادلې ضمني تابع ګانې دي:

$$y = f(x)$$

❖ پارامتریک تابع: شونې (ممکنه) ده چې د

$$t \text{ پارامتر (پارامتر)}$$

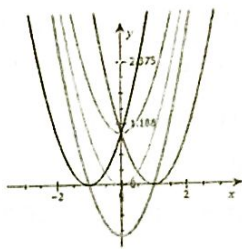
$$\text{پواسطه په لاندې ډول وښیو، چې د یوې تابع ښودل د}$$

پارامتریکې تابع په ډول ښیي:

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = V(t) \end{cases}$$

د تابع گانو د گراف انتقال د $(c > 0)$ ثابت عدد په اندازه:

$$\begin{aligned} y = f(x) + c & \quad \diamond \text{ عموداً پورته خواته:} \\ y = f(x) - c & \quad \diamond \text{ عموداً ښکته خواته:} \\ y = f(x - c) & \quad \diamond \text{ ښي خواته:} \\ y = f(x + c) & \quad \diamond \text{ چپي خواته:} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^2 + 1 \\ y = x^2 - 1 \\ y = (x-1)^2 \\ y = (x+1)^2 \end{cases}$$

د تابع گانو د گراف کش کول او منعکس کول $(C < 1)$

\diamond په عمودي ډول د گراف کش کيدل د (C) په اندازه: $y = Cf(x)$
 \diamond په عمودي ډول د گراف غونجيدل (راتوليدل) د (C) ثابت عدد په اندازه:

$$y = \left(\frac{1}{C}\right)f(x)$$

\diamond په افقي ډول د گراف کش کيدل د (C) ثابت عدد په اندازه:

$$y = f\left(\frac{x}{C}\right)$$

\diamond په افقي ډول د گراف غونجيدل د (C) ثابت عدد په اندازه:

$$y = f(Cx)$$

\diamond د گراف منعکس کيدل نظر د (x) محور ته: $y = -f(x)$

\diamond د گراف منعکس کيدل نظر د (y) محور ته: $y = f(-x)$

د تابع گانو څلور کونې عمليې

$$\diamond (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$Dom(f \pm g)(x) = Domf \cap Domg$$

$$\diamond (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$Dom(f \cdot g)(x) = Domf \cap Domg$$

$$\diamond \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g - \{x/g(x) = 0\}$$

هایپر بولیک تابع ګانې

$$\begin{aligned} \diamond \sin hx &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \diamond \cos hx &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \diamond \tan hx &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \diamond \cot hx &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ \diamond \sec hx &= \frac{2}{e^x + e^{-x}}, & \diamond \csc hx &= \frac{2}{e^x - e^{-x}} \end{aligned}$$

د هایپر بولیک تابع ګانو معکوسې تابع ګانې

$$\begin{aligned} \diamond y &= \arcsin hx, & x &\in IR \\ \diamond y &= \arccos hx, & x &\in [1, \infty) \\ \diamond y &= \arctan hx, & x &\in (-1, 1) \\ \diamond y &= \text{arccot} hx, & x &\in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \diamond y &= \text{arcsec} hx, & x &\in (0, 1] \\ \diamond y &= \text{arcsin} hx, & x &\in IR, x \neq 0 \end{aligned}$$

مجانبونه په ناطقو تابع ګانو کې

❖ عمودي: مخرج مساوي په صفر فرض کړو عمودي مجانب لاسته راځي:

$$y = \frac{g(x)}{h(x)}; h(x) \neq 0$$

❖ افقي: پدی لاندی ډول د تابع لمبیت نیسو افقي مجانب لاسته راځي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{h(x)}$$

❖ مایل: څرنگه چې د a مجانب هم یو مستقیم خط $y = ax + b$ ده، نو د لاسته راوړلو لپاره یې د a او b قیمتونه په لاندې ډول لاسته راوړو او په تابع کې یې وضع کوو نو د مایل مجانب معادله لاسته راځي:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x; b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

- یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

لمبیت (Limit)

❖ په لمبیت کې باید د چې خوا او د نسی خوا لمبیت د تابع د اصلي لمبیت سره مساوي وي:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

❖ شتون نه لري:

د لمبیت ځانګړې ټیټې

$$\begin{aligned}
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} c = c \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} x = a \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} [\sin f(x)] = \sin \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} \log_a f(x) = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} [c^{f(x)}] = c^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \\
& \diamond \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)
\end{aligned}$$

f په g(x) کې متمادي وي

❖ د خو معادله يې تابع گانو لپاره د هرې تابع يو طرفه لېمیت محاسبه کوو که سره مساوي شول لېمیت لري او که مساوي نه شول لېمیت نه لري. مثلاً:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5; & x < -2 \\ 1 - 3x; & x \geq -2 \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

وروسته له محاسبې پوهیږو چې تابع په $(x \rightarrow -2)$ کې لېمیت نه لري.

❖ بې اندازه کوچنی تابع گانې: $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$

❖ د سانډویچ قضیه: که دا $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ شرط د هر (x) لپاره په یوه غیر تړلي انټروال کې چې د (a) غنډ پکې شامل وي او که $(x \neq 0)$ صدق وکړي، په هغه صورت کې چې:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a} h(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$$

❖ قضیه: که چیرې $f(x) < g(x)$ وي د لېمیت د شتون په

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

صورت کې بې لېمیت دی:

د مبهم شکل لرونکو تابع گانو لېمیت

$$0/\infty, \infty/\infty, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, \dots$$

❖ $(\frac{0}{0})$: د لېمیت لپاره بې لومړۍ تابع د تجزیې په مرسته ساده کوو، د ابهام عامل (خبیثه فکتور) له منځه وړو او بیا بې

د لېمیت قیمت لاسته راوړو.

$$\diamond \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \text{ د } f(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} \text{ تابع په پام کې ونیسئ،}$$

که چېرې $(x \rightarrow \infty)$ کړی وي؛ نو دلته درې حالتونه ممکن دي:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0} \quad \text{د (1) لپاره: } m = n$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{د (2) لپاره: } m > n$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{د (3) لپاره: } m < n$$

$\diamond (\infty - \infty)$ او $(0 \cdot \infty)$: د دې د لېمیت پیدا کولو لپاره یې د

کسرونو له جمع کولو، ضرب او مزدوج څخه ګټه اخلو او

هغه داسې ساده کوو ترڅو د $(\frac{0}{0})$ یا $(\frac{\infty}{\infty})$ بڼه غوره کړي،

وروسته یې لېمیت پیدا کوو.

$$\diamond (1^\infty, \infty^0, 0^0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \cdot \ln f(x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x} = e^{\alpha \cdot \beta}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x)^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$(1)^\infty: \lim_{x \rightarrow a} [u(x)]^{v(x)} = e^p; p = \lim_{x \rightarrow a} [v(u-1)]$$

د مبهم شکل د لېمیتونو ځینې نور فرمولونه

$$\diamond \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n \cdot a^{n-1}$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x^n - a^n} = \frac{1}{n \cdot a^{n-1}}$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}} = \frac{n}{m \cdot \sqrt[n]{a}^{m-n}}$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^n = \infty; n \rightarrow \text{جفت}$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty; n \rightarrow \text{طاق}$$

مثلاتي لېمیتونه

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} \sec x = 1$$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow 0} \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \csc x = \infty$$

$$\begin{aligned} \diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 & \diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} &= \frac{a}{b} \\ \diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} &= 1 & \diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} &= \frac{a}{b} \\ \diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{\tan bx} = \frac{a}{b} \\ \diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c \cdot \sin ax}{\tan bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c \cdot \tan ax}{\sin bx} = \frac{a \cdot c}{b} \\ \diamond \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \\ \diamond \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ او } \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x &\Rightarrow \text{موجود نه دي} \end{aligned}$$

د تابع گانو متما دیت

❖ د $f(x)$ یوه تابع د $x=a$ په ټکي (نقطه) کې هغه وخت متما دي

بلل کیږي چې:

(1) د $f(x)$ تابع د $x=a$ په ټکي کې تعریف شوی وي.

(2) راکړل شوی تابع د (a) په ټکي کې لېمیت ولري.

(3) د $f(a)$ قیمت باید د $f(x)$ له لېمیت سره مساوي وي:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

مشتق (Derivative)

$$f'(x) = y' = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x)) = Df(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

❖ د منحنی میل د هغې په هر اختیاري ټکي کې:

$$y = f(x) \Rightarrow f'(x) = m_T = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د مشتق قوانین

$$\diamond y = c \Rightarrow y' = 0$$

$$\diamond y = ax \Rightarrow y' = a$$

$$\diamond y = c \cdot f(x) \Rightarrow y' = c \cdot f'(x)$$

$$\diamond y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\diamond y = (x^{-n}) \Rightarrow y' = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\diamond y = u \pm v \pm \dots \Rightarrow y' = u' \pm v' \pm \dots$$

$$\diamond y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\diamond y = u \cdot v \cdot w \Rightarrow y' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

$$\diamond y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$\diamond y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\diamond y = \sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y' = \frac{m \cdot u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-m}}} \quad \text{نله ځای م > n وای لئ}$$

$$\diamond y = \frac{c}{v} \Rightarrow y' = \frac{-c \cdot v'}{v^2}$$

$$y = \sqrt[n]{u^m} \quad m > n \Rightarrow y' = \frac{m \cdot u' \sqrt[n]{u^{m-n}}}{n}$$

$$\diamond y = \frac{u}{c} \Rightarrow y' = \frac{u'}{c} ; c \neq 0$$

$$\diamond y = |u| \Rightarrow y' = \frac{u \cdot u'}{|u|}$$

د معکوسو تابع کانو مشتق

$$\diamond y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y) \Rightarrow y'_x = \frac{1}{x'_y}$$

د پارامتریک تابع کانو مشتق

$$\diamond \begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \Rightarrow y'_x = \frac{v'(t)}{u'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$$

د مرکبو تابع کانو مشتق (ځنځيري قاعده)

$$\diamond y = f(g(x)) \Rightarrow y' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \text{ or } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

د مثلثاتي تابع کانو مشتقات

$$\diamond y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$\diamond y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cdot \cos u$$

$$\diamond y = \sin^n u \Rightarrow y' = n \cdot u' \cdot \sin^{n-1} u \cdot \cos u$$

$$\diamond y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$\diamond y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \cdot \sin u$$

$$\diamond y = \cos^n u \Rightarrow y' = n \cdot u' \cdot \cos^{n-1} u \cdot \sin u$$

$$\diamond y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$$

$$\diamond y = \tan u \Rightarrow y' = u' \cdot \sec^2 u$$

$$\diamond y = \tan^n u \Rightarrow y' = n \cdot u' \cdot \tan^{n-1} u \cdot \sec^2 u$$

$$\diamond y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$$

$$\diamond y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \cdot \csc^2 u$$

$$\diamond y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \cdot \tan x$$

$$\diamond y = \sec u \Rightarrow y' = u' \cdot \sec u \cdot \tan u$$

$$\diamond y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cdot \cot x$$

د مثلثاتي معکوسو تابع کانو مشتقات

$$\diamond y = \arcsin x \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\diamond y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\diamond y = \arccos x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\diamond y = \arccos u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\diamond y = \arctan x \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\diamond y = \arctan u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\diamond y = \operatorname{arccot} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\diamond y = \operatorname{arccot} u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\diamond y = \operatorname{arcsec} x \Rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\diamond y = \operatorname{arcsec} u \Rightarrow y' = \pm \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}} \begin{cases} +; u > 1 \\ -; u < -1 \end{cases}$$

$$\diamond y = \operatorname{arccsc} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\diamond y = \operatorname{arccsc} u \Rightarrow y' = \mp \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}} \begin{cases} -; & u > 1 \\ +; & u < -1 \end{cases}$$

دها پير بوليك تابع گانو مشتقات

$$\diamond y = \sinh x \Rightarrow y' = \cosh x$$

$$\diamond y = \sinh u \Rightarrow y' = u' \cdot \cosh u$$

$$\diamond y = \cosh x \Rightarrow y' = \sinh x$$

$$\diamond y = \cosh u \Rightarrow y' = u' \cdot \sinh u$$

$$\diamond y = \tanh x \Rightarrow y' = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\diamond y = \tanh u \Rightarrow y' = u' \cdot \operatorname{sech}^2 u$$

$$\diamond y = \operatorname{coth} x \Rightarrow y' = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$\diamond y = \operatorname{coth} u \Rightarrow y' = -u' \cdot \operatorname{csch}^2 u$$

$$\diamond y = \operatorname{sech} x \Rightarrow y' = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$$

$$\diamond y = \operatorname{sech} u \Rightarrow y' = -u' \cdot \operatorname{sech} u \cdot \tanh u$$

$$\diamond y = \operatorname{csch} x \Rightarrow y' = -\operatorname{csch} x \cdot \operatorname{coth} x$$

$$\diamond y = \operatorname{csch} u \Rightarrow y' = -u' \cdot \operatorname{csch} u \cdot \operatorname{coth} u$$

دها پير بوليك معكوسو تابع گانو مشتقات

$$\diamond y = \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\diamond y = \cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\diamond y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}; |x| < 1$$

$$\diamond y = \operatorname{coth}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}; |x| > 1$$

$$\diamond y = \operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\diamond y = \operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

د لوگاريتمي او اگسيدي نمثيل تابع گانو مشتقات

$$\diamond y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$$

$$\diamond y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} = \frac{u' \cdot \log_a e}{u}$$

$$\diamond y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$\diamond y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$\diamond y = a^x \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

$$\diamond y = a^u \Rightarrow y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

$$\diamond y = e^x \Rightarrow y' = e^x$$

$$\diamond y = e^u \Rightarrow y' = u' \cdot e^u$$

$$\diamond y = u^u \Rightarrow y' = u^u (u' \cdot \ln u + u')$$

$$\diamond y = u^v \Rightarrow y' = u^v \left(\frac{v \cdot u'}{u} + \ln u \cdot v' \right)$$

ضميمي مشتقات

$$\diamond y' = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{\text{د تابع مشتق نظر } x \text{ ته } (y \text{ ثابت دی})}{\text{د تابع مشتق نظر } y \text{ ته } (x \text{ ثابت دی})}$$

د لایب نیتز فرمولونه

$$\begin{aligned} \diamond y = u \cdot v &\Rightarrow y'' = u''v + 2u'v' + uv'' \\ \diamond y = u \cdot v &\Rightarrow y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \\ \diamond y^{(n)} = (uv)^{(n)} &= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \\ &\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)}v'' + \dots + uv^{(n)} \end{aligned}$$

لوړ مرتبه (متوالي) مشتقات

$$\begin{aligned} \diamond y'' = f''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dx^2} \\ \diamond y''' = f'''(x) &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^3y}{dx^3} \\ \diamond y^{(n)} = f^{(n)}(x) &= \frac{d^ny}{dx^n} = (f^{(n-1)}(x))' \\ \diamond y = x^m &\Rightarrow y^{(n)} = (x^m)^{(n)} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} \\ \diamond y = x^n &\Rightarrow y^{(n)} = (x^n)^{(n)} = n! ; n \in \mathbb{N} \\ \diamond y = x^n &\Rightarrow y^{(n+1)} = (x^n)^{(n+1)} = 0 \\ \diamond y = a^x &\Rightarrow y^{(n)} = (a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \\ \diamond y = e^x &\Rightarrow y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x \\ \diamond y = x^n &\Rightarrow y^{(n)} = (e^x)^{(n)} = e^x \\ \diamond y = e^{mx} &\Rightarrow y^{(n)} = m^n \cdot e^{mx} \\ \diamond y = a^{mx} &\Rightarrow y^{(n)} = m^n \cdot a^{mx} \cdot \ln^n a \\ \diamond y = \frac{ax+b}{cx+d}, c \neq 0 &\Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-c)^{n-1} \cdot n! \cdot (ad-bc)!}{(cx+d)^{n+1}} \\ \diamond y = \log_a x &\Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n \cdot \ln a} \\ \diamond y = \ln x &\Rightarrow y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n} \\ \diamond y = \sin x &\Rightarrow y^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \\ \diamond y = \cos x &\Rightarrow y^{(n)} = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

د مشتق د کارونې ځایونه

$$\begin{aligned} \diamond \text{د مماس میل په } (x_1, f(x_1)) \text{ ټکي کې: } & f'(x_1) = m_t \\ \text{یا وایو چې په یوه ځانګړې ټکي کې د مماس میل په راکړل} & \\ \text{شوي ټکي کې د تابع د لومړي مشتق څخه عبارت دی.} & \\ \diamond \text{تابع ثابت د: } & f'(x) = 0 \\ \diamond \text{تابع د } (a, b) \text{ په انټروال کې متزایده د: } & f'(x) > 0 \\ \diamond \text{تابع د } (a, b) \text{ په انټروال کې متناقصه د: } & f'(x) < 0 \\ \diamond \text{اعظمي ټکی: } & f''(x) < 0, f'(x) = 0 \\ \diamond \text{اصغري ټکی: } & f''(x) > 0, f'(x) = 0 \\ \diamond \text{تابع د } (a, b) \text{ په انټروال کې محدبه د: } & f''(x) < 0 \\ \diamond \text{تابع د } (a, b) \text{ په انټروال کې مقعره د: } & f''(x) > 0 \\ \diamond \text{انعطاف ټکی: } & f'''(x) \neq 0, f''(x) = 0 \end{aligned}$$

❖ د هویستال قاعده: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

که وروسته له لومړي مشتق نیولو څخه بیا هم د تابع شکل مبهم وه، بیا بیا یې مشتق نیسو تر څو له مبهم شکل څخه ووځي.

❖ د متوسط قیمت قضیه (لاگرانژ قضیه): که چیرې $f(x)$ په $[a, b]$ کې متمادي او په (a, b) کې د مشتق وړ وي، د (a, b) د انټروال څخه د (c) یو عدد شته:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

یا وایو چې په دې ټکي کې د قاطع خط میل د مماس خط د میل سره مساوي دی یا په بل عبارت د c په ټکي کې د قاطع خط د مماس د خط سره موازي دی.

انټیگرال (Integral)

❖ غیر معین انټیگرال (د لومړنۍ تابع پیدا کول):

$$\int f(x) dx = F(x) + c; F'(x) = f(x) dx$$

د غیر معین انټیگرال ځانګړتیاوې او د بیلابیلو تابع ګانو انټیگرال

- ❖ $\int dx = x + c$
- ❖ $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx = k \cdot F(x) + c$
- ❖ $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- ❖ $\int [f(x) \cdot g(x)] dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$
- ❖ $\int [f(x) \div g(x)] dx \neq \int f(x) dx \div \int g(x) dx$
- ❖ $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$
- ❖ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1$
- ❖ $\int x^p dx = \frac{p}{p+q} x^{\frac{p+q}{q}} + c$
- ❖ $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c; n \neq -1$
- ❖ $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
- ❖ $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$
- ❖ $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$
- ❖ $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$
- ❖ $\int \frac{ax+b}{cx+d} dx = \frac{a}{c} x + \frac{bc-ad}{c^2} \ln|cx+d| + c$
- ❖ $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + c; a \neq b$
- ❖ $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$
- ❖ $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c \\
& \int \frac{x}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+a^2) + c \\
& \int \sqrt{x} dx = \frac{2x}{3} \sqrt{x} + c \\
& \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c \\
& \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c \\
& \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} dx = \frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + c \\
& \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c \\
& \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c \\
& \int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + c \\
& \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c \\
& \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + c \\
& \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + c \\
& \int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c \\
& \int \sqrt{a^2-u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + c
\end{aligned}$$

د لوګاریتمي او اکسپوننشل تابع ګانو انټیګرال نیونه

$$\begin{aligned}
& \int e^x dx = e^x + c \\
& \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \\
& \int x \cdot e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax-1) + c \\
& \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c \\
& \int a^{mx} dx = \frac{1}{m \cdot \ln a} a^{mx} + c \\
& \int \ln cx dx = x \cdot \ln cx - x + c \\
& \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + c \\
& \int \frac{(\ln x)^n}{x} dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + c; n \neq -1 \\
& \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \ln |\ln x| + c
\end{aligned}$$

د مثلثاتي تابع ګانو انټیګرال نیونه

$$\begin{aligned}
& \int \sin x dx = -\cos x + c \\
& \int \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx + c \\
& \int \cos x dx = \sin x + c \\
& \int \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx + c \\
& \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c = \ln |\sec x| + c \\
& \int \cot x dx = -\ln |\csc x| + c = \ln |\sin x| + c \\
& \int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + c \\
& \int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + c \\
& \int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + c
\end{aligned}$$

الجبر | 41

$$\begin{aligned}
& \diamond \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + c \\
& \diamond \int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + c \\
& \diamond \int \cot^2 x \, dx = -\cot x - x + c \\
& \diamond \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c \\
& \diamond \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c \\
& \diamond \int \frac{1}{\sin x} \, dx = \int \csc x \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c \\
& \diamond \int \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \sec x \, dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + c \\
& \diamond \int \sin x \cdot \cos x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + c \\
& \diamond \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \, dx = \ln |\tan x| + c \\
& \diamond \int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x + c \\
& \diamond \int \sin x \cdot \cos^2 x \, dx = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c \\
& \diamond \int \sin^n x \cdot \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + c \\
& \diamond \int \sin x \cdot \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + c \\
& \diamond \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = \int \sec x \cdot \tan x \, dx = \sec x + c \\
& \diamond \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \, dx = \int \cot x \cdot \csc x \, dx = -\csc x + c \\
& \diamond \int \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c \\
& \diamond \int \sin mx \cdot \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} + c \\
& \diamond \int \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + c
\end{aligned}$$

په پورتنیو دریو فرمولونو کې باید $(m^2 \neq n^2)$ وي.

همدارنگه د $\int \sin \alpha x \cdot \cos \beta x \, dx$ ډوله انتیگرالونو د

محاسبې لپاره کولای شوه لاندینیو ۴ فورمولو څخه کار واخلو:

$$\begin{aligned}
& \diamond \sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x] \\
& \diamond \sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x] \\
& \diamond \cos \alpha x \cdot \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x] \\
& \diamond \cos \alpha x \cdot \sin \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x - \sin(\alpha - \beta)x] \\
& \diamond \int \sin(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + c \\
& \diamond \int \cos(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} (\sin(\ln x) + \cos(\ln x)) + c
\end{aligned}$$

د معکوسو مثلثاتي تابعگانو انتیگرال نیونه

$$\begin{aligned}
& \diamond \int \arcsin x \, dx = x \cdot \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c \\
& \diamond \int \arccos x \, dx = x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + c \\
& \diamond \int \arctan x \, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c \\
& \diamond \int \operatorname{arccot} x \, dx = x \cot^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c
\end{aligned}$$

د هایپربولیک تابعگانو انتیگرال نیونه

$$\begin{aligned}
& \diamond \int \sinh x \, dx = \cosh x + c \\
& \diamond \int \cosh x \, dx = \sinh x + c
\end{aligned}$$

- ❖ $\int \tanh x \, dx = \ln(\cosh x) + c$
- ❖ $\int \coth x \, dx = \ln|\sinh x| + c$
- ❖ $\int \operatorname{sech} x \, dx = \tan^{-1}(\sinh x) + c$
- ❖ $\int \operatorname{csch} x \, dx = -\cot^{-1}(\cosh x) + c$
- ❖ $\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x + c$
- ❖ $\int \operatorname{csch}^2 x \, dx = -\coth x + c$
- ❖ $\int \operatorname{sech} x \cdot \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x + c$
- ❖ $\int \operatorname{csch} x \cdot \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x + c$

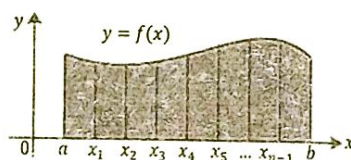
د هایپربولیک معکوس تابع کانونټیګرال نیونه

- ❖ $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \sinh^{-1} x + c$
- ❖ $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \, dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} + c ; a > 0$
- ❖ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \cosh^{-1} x + c$
- ❖ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \, dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} + c ; x > a > 0$
- ❖ $\int \frac{1}{1-x^2} \, dx = \begin{cases} \tanh^{-1} x + c, & x^2 < 1 \\ \coth^{-1} x + c, & x^2 > 1 \end{cases}$
- ❖ $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\operatorname{sech}^{-1} x + c$
- ❖ $\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \, dx = -\operatorname{csch}^{-1}|x| + c, x \neq 0$

معین انټیګرال (د منحنی او x محور ترمنځ محصور شوی مساحت):

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x) \, dx$$



❖ د ریمان د مجموعې لېمیت (معین انټیګرال):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = A ; \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = F(x) \Big|_a^b$$

د معین انټیګرال ځانګړتیاوې

- ❖ $\int_a^a f(x) \, dx = 0$
- ❖ $\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$
- ❖ $\int_a^b dx = b - a$
- ❖ $\int_a^b c \cdot dx = c(b - a)$
- ❖ $\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx ,$
 $b \in [a, c]$
- ❖ $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx ; f(x) \geq g(x)$
- ❖ $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0 ; f(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} \diamond \left| \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x)| dx ; a < b \\ |f(x)| &= f^+(x) + f^-(x) \quad : \text{د } |f(x)| \text{ انتیگرال په } [a, b] \text{ کې} \\ \diamond f^+(x) &= \begin{cases} f(x); f(x) \geq 0 \\ 0 ; f(x) < 0 \end{cases}, f^-(x) = \begin{cases} -f(x); f(x) < 0 \\ 0 ; f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^b f^+(x) dx + \int_a^b f^-(x) dx \end{aligned}$$

د ټوټه ډوله تابع گانو انتیگرال

$$\begin{aligned} \diamond f(x) &\begin{cases} g(x); a \leq x \leq c \\ h(x); c \leq x \leq b \end{cases}, c \in [a, b] \\ \Rightarrow \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c g(x) dx + \int_c^b h(x) dx \end{aligned}$$

د متناظرو تابع گانو معین انتیگرال

$$\begin{aligned} \diamond [f(-x) = f(x)] &\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, f \text{ تابع جفته} \\ \diamond [f(-x) = -f(x)] &\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0, f \rightarrow \text{طاقه تابع} \end{aligned}$$

په تعویضي طریقي سره انتیگرال نیونه

غیر معین:

$$\diamond \int f(x) dx = \int f(u(t)) u'(t) dt ; x = u(t)$$

معین:

$$\diamond \int_a^b f(x) dx ; x = g(t), \Rightarrow \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$$

$$c = g^{-1}(a), \quad d = g^{-1}(b)$$

د انقسام په طریقه انتیگرال نیونه

$$u = f(x), \quad v = g(x)$$

$$\diamond \int u dv = u \cdot v - \int v du \quad : \text{د غیر معین لپاره}$$

$$\diamond \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad : \text{د معین لپاره}$$

د انقسام په طریقه انتیگرال نیونه

د انقسام په انتیگرال نیونه کې ځینې تابع گانې تکراري بڼه

اختیاري او موډار کېږو تر څو یې څو ځله پدې طریقه

انتیگرال ونیسو تر څو نتیجې ته ورسېږو خو ددې ډول

تابع گانو لپاره یو بله طریقه هم لرو چې د جدولی طریقي په

نوم یادېږي. مثلاً: $\int f(x) \cdot g(x) dx$

۱- د $f(x)$ به تر هغې مشتق نیسو چې صفر شي.

۲- د $f(x)$ په مقابل کې به د $g(x)$ انتیگرال نیسو.

۳- د علامو ترتیب: $+, -, +, -, +, -, \dots$

$$\int x^2 \cdot e^x dx = ? \quad \text{مثال}$$

مشتق انتگرال

عمومي فرمول

↑

ورنه وي او تکرار هم نه وي راغلي نو د $\frac{p_m(x)}{p_n(x)}$ واقعي پولینوم یو قسمي کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ بڼه لري
 ۴- که د صورت درجه د مخرج څخه لویه وي نو دوه عمليې ورباندې اجرا کېږي:
 الف) صورت پر مخرج تقسیموو.
 ب) مخرج به تجزیه کوو باقي په مخرج کې لیکو نتیجه لاسته راځي.

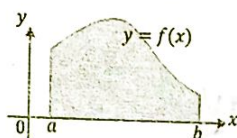
د قسمي کسرونو په مرسته انټیگرال نیونه

❖ ځینې هغه تابع گانې چې د پورتنیو څلورو ډولو کسري تابع گانو ته ورته وي او وغواړو چې انټیگرال یې ونیسو نو په پورتنۍ طریقه یې په قسمي کسرونو ویشو او بیا یې جلا، جلا انټیگرال نیسو.

د انټیگرال کارونه (تطبیقات)

❖ د منحنی د محصور شوي سطحې مساحت محاسبه:

$$A = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

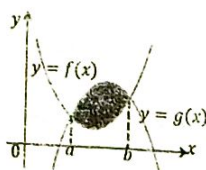


د منحنی د پارامتریک معادلو له مخې مساحت

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}; \begin{matrix} \alpha \leq t \leq \beta \\ u(\alpha) = a \\ u(\beta) = b \end{matrix} \Rightarrow A = \int_a^b y dx = \int_a^b v(t) \cdot u'(t) dt$$

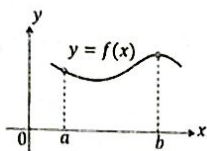
❖ د دوو محصور شویو منحنی گانو ترمنځ د مساحت محاسبه

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$



❖ د منحنی یاد منحنی د یوې برخې (قوس) اوږدوالی:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy, \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



- د منحنی د پارامتریک معادلو له مخې د قوس اوږدوالې:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

❖ د دایرې د محیط پیدا کول: شعاع (r)

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}; P = \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$$

د دوراني جسمونو د حجمونو محاسبه:

❖ د (x) محور په شاوخوا د تابع د دوران څخه لاسته راغلي

جسم حجم: $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx$ (شکل a)

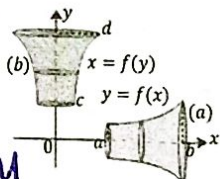
❖ د (y) محور په شاوخوا د تابع د دوران څخه لاسته راغلي

جسم حجم: $V = \int_c^d \pi [f(y)]^2 dy$ (شکل b)

Handwritten notes:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$V = \pi \int_a^b f(y)^2 dy$$

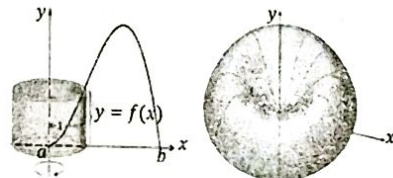


❖ د جسم حجم نظر د مقطع مساحت ته:

$$V = \int_a^b A(x) dx \quad (A(x) \text{ د مقطع مساحت دی})$$

❖ د استوانه یی شیلونو په واسطه د جسم د حجم محاسبه چې د یوه عمودي خط څخه د دوران په نتیجه کې لاسته راغلي وي:

$$V = \int_a^b 2\pi x \cdot f(x) dx \quad (x \text{ د شیل شعاع، } y=f(x) \text{ د شیل لوړوالې})$$



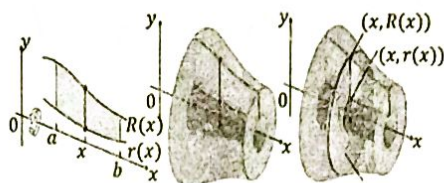
❖ د یوه افقي خط څخه د دوران لپاره کولی شو پاسني فرمول

$$V = \int_a^b 2\pi y \cdot f(y) dy$$

کې د (x) او (y) ځایونه تعویض کړو:

❖ د واشر (Washer) د مساحت په واسطه د (x) د محور څخه د دوران په نتیجه د لاسته راغلي جسم د حجم محاسبه:

$$V = \int_a^b \pi \{ [R(x)]^2 - [r(x)]^2 \} dx$$



د دوراني جسمونو بهرنۍ مساحت

❖ د (x) محور په شاوخوا يې دوران کړی:

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

❖ د (y) محور په شاوخوا يې دوران کړی:

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

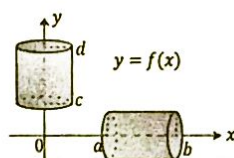
- د پارامتریک معادلو له مخې:

❖ د (x) محور په شاوخوا يې دوران کړی:

$$S = 2\pi \int_a^\beta y \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = 2\pi \int_a^\beta y \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

❖ د (y) محور په شاوخوا يې دوران کړی:

$$S = 2\pi \int_a^\beta x \cdot \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = 2\pi \int_a^\beta x \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$



د یوې تغیر کوونکې قوې په واسطه ترسره شوې کار:

$$W = \int_a^b F(x) dx \quad \text{❖ د (x) محور په اوږدو کې:}$$

د مومنټ محاسبه کول

$$M_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx \quad \text{❖ د (x) محور په شاوخوا:}$$

$$M_y = \rho \int_a^b x f(x) dx \quad \text{❖ د (y) محور په شاوخوا:}$$

د دوو منحنی ګانو تر منځ د برخې لپاره مومنټ محاسبه کول

❖ د (x) محور په شاوخوا:

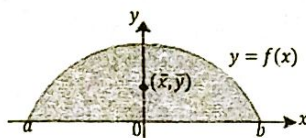
$$M_x = \rho \int_a^b \frac{1}{2} \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx$$

$$M_y = \rho \int_a^b x [f(x) - g(x)] dx \quad \text{❖ د (y) محور په شاوخوا:}$$

د ثقل مرکز پیدا کول

$$\text{❖ } \bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_a^b x f(x) dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2A} \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



د دوو منحنی ګانو تر منځ د ثقل مرکز

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x[f(x) - g(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx}, \quad \bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{1}{2} \{ [f(x)]^2 - [g(x)]^2 \} dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx}$$

دیوې تابع منحنی (متوسط) قیمت

$$\bar{f}_{avg} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

غیر واقعی انتیګرالونه (Improper Integrals)

په دوه ډوله دي:

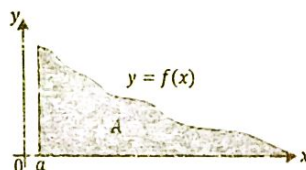
۱- لایتناهي انتیګرالونه:

ممکن د انتیګرال پورتنی یا لاندينی یا دواړه سرحدونه (∞) وي

$$\bar{\ast} \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad [a, +\infty)$$

$$\bar{\ast} \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (-\infty, b]$$

$$\bar{\ast} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$



۲- غیر متمادي انتیګرالونه: پدې حالت کې د انتیګرال

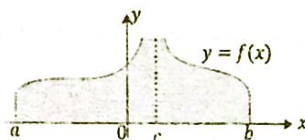
سرحدونه ثابت عددونه دي، مګر د انتیګرال لاندي تابع د

سرحدونو له ډلې څخه پدیه کې د تعريف وړ (متمادي) نه ده.

$$\bar{\ast} \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx, \quad (a, b]$$

$$\bar{\ast} \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx, \quad [a, b)$$

$$\bar{\ast} \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad a < c < b$$



تقریبي (اټکلي) انتیګرال نیونه

پدې طریقو کې موږ د ځینو تابع ګانو چې په اسانۍ نشو کولای

انتیګرال یې ونیسو لکه: $y = \sqrt{1+x^4}$, $y = \frac{1}{\ln x}$, $y = \sin x^2$...

نو کولای شو پدې طریقو سره د معین انتیګرال

ایکلی قیمتونہ لاستہ راو پرو.

❖ د ذوقہ بی قاعدی خخہ پہ گتہ اخیستنی:

$$\int_a^b f(x) dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

❖ د منحنی (وسطی) تکی خخہ پہ گتہ اخیستنی:

$$\int_a^b f(x) dx \approx M_n = \Delta x [f(x'_1) + f(x'_2) + \dots + f(x'_n)]$$

❖ د سیمپسون قاعدی خخہ پہ گتہ اخیستنی:

$$\int_a^b f(x) dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)] ; \quad n \rightarrow \text{جفت}$$

x'_i منحنی نقطہ دہ د: $[x_{i-1}, x_i]$ او ہمدارنگہ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

د مثلثاتو برخه

د ځينو مشهورو زاويو مثلثاتي نسبتونه										
نسبتونه	R	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	D	0°	15°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin \theta$	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0	
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	
$\tan \theta$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0	
$\cot \theta$	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞	
$\sec \theta$	1	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	∞	-1	∞	1	
$\csc \theta$	∞	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	∞	-1	∞	

د يو او بل له جنسه د مثلثاتي نسبتونو پيدا كول						
	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$\sin \theta$	$\sin \theta$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$	$\pm\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}$	$\frac{1}{\csc\theta}$
$\cos \theta$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$	$\cos \theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}$	$\pm\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}$	$\frac{1}{\sec\theta}$	$\pm\frac{\sqrt{\csc^2\theta-1}}{\csc\theta}$
$\tan \theta$	$\pm\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}$	$\tan \theta$	$\frac{1}{\cot\theta}$	$\pm\sqrt{\sec^2\theta-1}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\cot \theta$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$	$\pm\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\frac{1}{\tan\theta}$	$\cot \theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\pm\sqrt{\csc^2\theta-1}$
$\sec \theta$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\theta}}$	$\frac{1}{\cos\theta}$	$\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\cot^2\theta}}{\cot\theta}$	$\sec \theta$	$\pm\frac{\csc\theta}{\sqrt{\csc^2\theta-1}}$
$\csc \theta$	$\frac{1}{\sin\theta}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}$	$\pm\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2\theta}$	$\pm\frac{\sec\theta}{\sqrt{\sec^2\theta-1}}$	$\csc \theta$

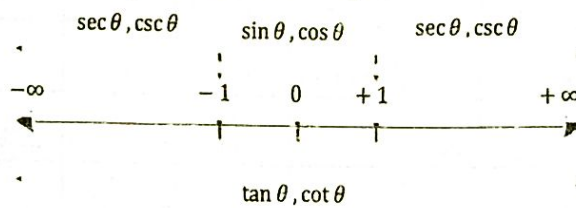
د اختیاري زاویو مثلثاتي نسبتونه

نسبتونه	زاویه	$90 - \theta$	$90 + \theta$	$180 - \theta$	$180 + \theta$	$270 - \theta$	$270 + \theta$	$360 - \theta$	$360 + \theta$
$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$-\sin \theta$	$-\cos \theta$	$-\cos \theta$	$-\sin \theta$	$\sin \theta$	$\sin \theta$
$\cos \theta$	$\sin \theta$	$-\sin \theta$	$-\cos \theta$	$-\cos \theta$	$-\sin \theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\cos \theta$	$\cos \theta$
$\tan \theta$	$\cot \theta$	$-\cot \theta$	$-\tan \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$-\cot \theta$	$-\tan \theta$	$\tan \theta$	$\tan \theta$
$\cot \theta$	$\tan \theta$	$-\tan \theta$	$-\cot \theta$	$\cot \theta$	$\tan \theta$	$-\tan \theta$	$-\cot \theta$	$\cot \theta$	$\cot \theta$
$\sec \theta$	$\csc \theta$	$-\csc \theta$	$-\sec \theta$	$-\sec \theta$	$-\csc \theta$	$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\sec \theta$	$\sec \theta$
$\csc \theta$	$\sec \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$	$-\csc \theta$	$-\sec \theta$	$-\sec \theta$	$-\csc \theta$	$\csc \theta$	$\csc \theta$

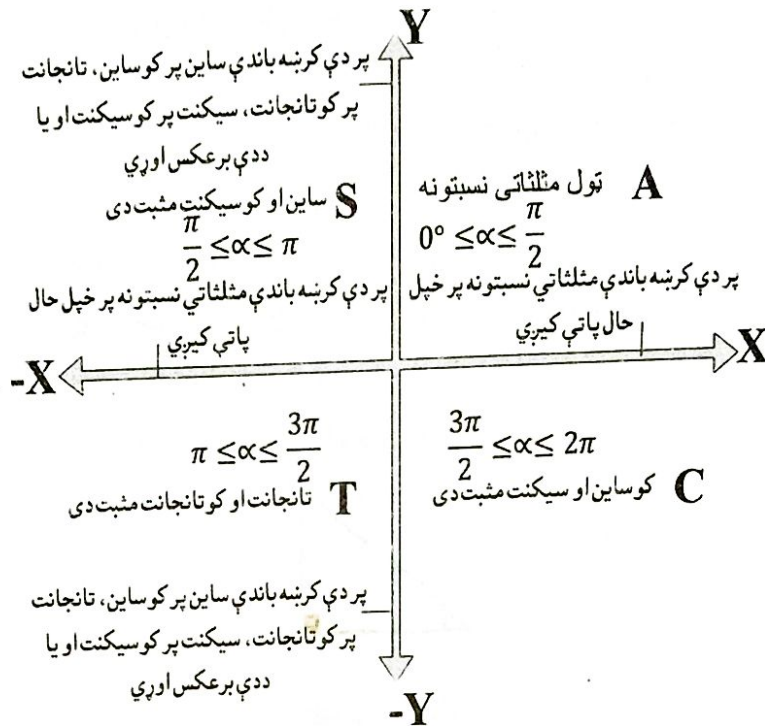
د متضادو زاویو نسبتونه

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
$\cos(-\theta) = \cos \theta$
$\tan(-\theta) = -\tan \theta$
$\cot(-\theta) = -\cot \theta$
$\sec(-\theta) = \sec \theta$
$\csc(-\theta) = -\csc \theta$

د مثلثاتي نسبتونو د تعریف ناحیې:



د مثلثاتو برخه | 53



په ناحیو کې د مثلثاتي نسبتونو علامې

$\sin \theta$	$\tan \theta$	$\cos \theta$	ناحيه
$\csc \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	
+	+	+	I
+	-	-	II
-	+	-	III
-	-	+	IV

د کوتر مینل زاویو مثلثاتي نسبتونه گڼه

1	$\sin(n \cdot 2\pi + \theta) = \sin \theta$
2	$\cos(n \cdot 2\pi + \theta) = \cos \theta$
3	$\tan(n \cdot 2\pi + \theta) = \tan \theta$
4	$\cot(n \cdot 2\pi + \theta) = \cot \theta$
5	$\sec(n \cdot 2\pi + \theta) = \sec \theta$
6	$\csc(n \cdot 2\pi + \theta) = \csc \theta$

د یوه مثلث د شتون شرطونه

$$\diamond \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\diamond a + b > c, a + c > b, b + c > a$$

د درجې، گراد او راديان ترمنځ اړيکه:

$$\diamond \frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\diamond 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 4''$$

$$\diamond 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0.017453 \text{ rad}$$

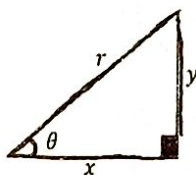
$$\diamond r = \frac{s}{\theta} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{مرکزي زاويه په راديان}}$$

د دايرې شعاع

$$\diamond \theta = |5.5 \text{ min} - 30|$$

د فيثاغورث قاعده د قايم الزاويه مثلث لپاره:

$$r^2 = x^2 + y^2 = (\text{مجاوره ضلع})^2 + (\text{مقابله ضلع})^2$$



مثلثاتي نسبتونه

$$\diamond \sin \theta = \frac{y}{r} \quad \diamond \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \diamond \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\diamond \cot \theta = \frac{x}{y} \quad \diamond \sec \theta = \frac{r}{x} \quad \diamond \csc \theta = \frac{r}{y}$$

د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې

$$\diamond \sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} \quad \diamond \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\diamond \tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \quad \diamond \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\diamond \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \diamond \sin \theta \cdot \csc \theta = 1$$

$$\diamond \cos \theta \cdot \sec \theta = 1 \quad \diamond \tan \theta \cdot \cot \theta = 1$$

د مثلثاتو اساسي او فرعي رابطې

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \diamond \text{اساسي رابطه}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta \quad \diamond \text{فرعي رابطه}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta ; \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$$

$$\cot^2 \theta = \csc^2 \theta - 1 ; 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

د مثلثاتي تابع کانوگرافونه او نورې ځانگړتياوې

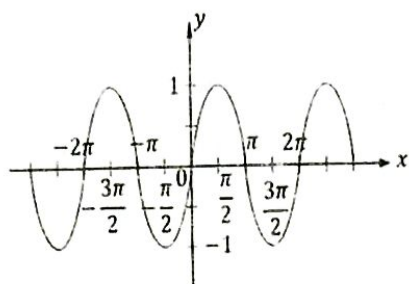
$$y = \sin x \quad \diamond \text{ساین}$$

$$R_y = [-1, 1] \quad \diamond \text{رنج}$$

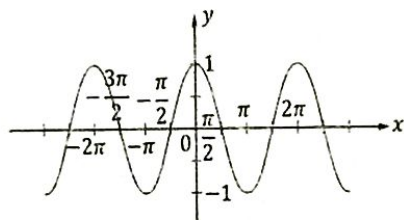
ساین طاقه تابع ده؛

$$2\pi \quad \diamond \text{پریود}$$

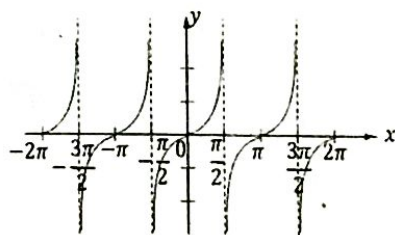
$$D_y = (-\infty, \infty) = \mathbb{R} \quad \diamond \text{دومین}$$



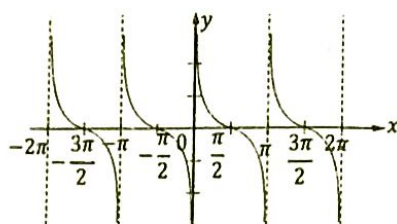
$y = \cos x$ ❖ کوساین:
 $R_y = [-1, 1]$ رنج
کوساین جفته تابع ده؛
 2π پریود:
 $D_y = (-\infty, \infty) = IR$ دومین:



$y = \tan x$ ❖ تانجانته:
 $R_y = (-\infty, \infty) = IR$ رنج
تانجانته طاقه تابع ده؛
 π پریود:
 $D_y = IR \setminus \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right\}, n \in Z$ دومین:



$y = \cot x$ ❖ کوتانجانته:
 $R_y = (-\infty, \infty) = IR$ رنج
کوتانجانته طاقه تابع ده؛
 π پریود:
 $D_y = IR \setminus \{ n\pi \}, n \in Z$ دومین:



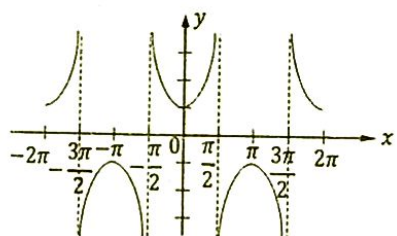
$$y = \sec x \quad \diamond \text{ سيکنټ}$$

$$R_y = \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \quad \text{رنج}$$

سيکنټ جفته تابع ده؛

$$2\pi \quad \text{پريود:}$$

$$D_y = \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right\}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{دومين:}$$



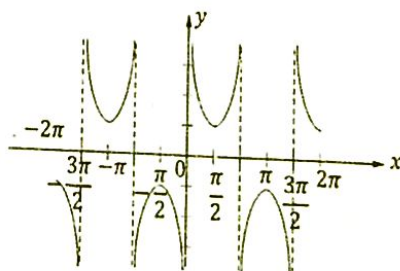
$$y = \csc x \quad \diamond \text{ کوسيکنټ}$$

$$R_y = \mathbb{R} \setminus (-1, 1) \quad \text{رنج}$$

کوسيکنټ طاقه تابع ده؛

$$2\pi \quad \text{پريود:}$$

$$D_y = \mathbb{R} \setminus \{n\pi\}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{دومين:}$$



د دوو زاويو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي نسبتونه

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$$

$$\sec(\alpha \pm \beta) = \frac{\sec \alpha \cdot \sec \beta \cdot \csc \alpha \cdot \csc \beta}{\csc \alpha \cdot \csc \beta \mp \sec \alpha \cdot \sec \beta}$$

$$\csc(\alpha \pm \beta) = \frac{\sec \alpha \cdot \sec \beta \cdot \csc \alpha \cdot \csc \beta}{\sec \alpha \cdot \csc \beta \pm \csc \alpha \cdot \sec \beta}$$

د دريو زاويو د مجموعې مثلثاتي نسبتونه

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha$$

$$\sin \beta \sin \gamma - \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma$$

$$\tan(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma - \tan \alpha \tan \gamma}$$

د دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو مجموعه او تفاضل د ضرب په حاصل په شکل

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\tan \alpha + \tan \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

$$\cot \alpha + \cot \beta = \frac{\sin(\beta + \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\cot \alpha - \cot \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$$

$$\tan \alpha + \cot \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\tan \alpha - \cot \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$$

$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = -\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$$

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب په حاصل د جمع او تفاضل په شکل

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \beta = \frac{\tan \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha + \tan \beta}$$

د دوه حُفي زاويې څخه تر n -حُفي زاويې مثلثاتي نسبتونه

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 3\alpha = \frac{\cot^3 \alpha - 3 \cot \alpha}{3 \cot^2 \alpha - 1}$$

$$\sin 4\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 8 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\tan 4\alpha = \frac{4 \tan \alpha - 4 \tan^3 \alpha}{1 - 6 \tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha}$$

$$\cot 4\alpha = \frac{4 \tan \alpha - 4 \tan^3 \alpha}{1 - 6 \tan^2 \alpha + \tan^4 \alpha}$$

$$\sin 5\alpha = 5 \sin \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 16 \sin^5 \alpha$$

$$\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 2 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha$$

$$\tan 5\alpha = \frac{\tan^5 \alpha - 10 \tan^3 \alpha + 5 \tan \alpha}{1 - 10 \tan^2 \alpha + 5 \tan^4 \alpha}$$

$$\cot 5\alpha = \frac{\tan^5 \alpha - 10 \tan^3 \alpha + 5 \tan \alpha}{1 - 10 \tan^2 \alpha + 5 \tan^4 \alpha}$$

$$\sin(n\alpha) = 2 \sin[(n-1)\alpha] \cdot \cos \alpha - \sin[(n-2)\alpha]$$

$$\cos(n\alpha) = 2 \cos[(n-1)\alpha] \cdot \cos \alpha$$

$$\tan(n\alpha) = \frac{-\cos[(n-2)\alpha] + \tan[(n-1)\alpha] + \tan \alpha}{1 - \tan[(n-1)\alpha] \cdot \tan \alpha}$$

$$\cot(n\alpha) = \frac{\cot[(n-1)\alpha] \cdot \cot \alpha - 1}{\cot[(n-1)\alpha] + \cot \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \sqrt{1 - \sin 2\alpha}}{2}$$

د $\sin \alpha$ او $\sin 2\alpha$ له جنسه د $(\frac{\alpha}{2})$ او (α) مثلثاتي نسبتونه

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \sqrt{1 - \sin 2\alpha}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - \sqrt{1 - \sin 2\alpha}}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} + \sqrt{1 - \sin 2\alpha}}{\sqrt{1 + \sin 2\alpha} - \sqrt{1 - \sin 2\alpha}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{1 + \sin \alpha} + \sqrt{1 - \sin \alpha}}{\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha}}$$

د $\cos \alpha$ او $\cos 2\alpha$ له جنسه د $(\frac{\alpha}{2})$ او (α) مثلثاتي نسبتونه

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\tan \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}}; \quad \cot \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}}$$

$$\sec \alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{1 + \cos 2\alpha}}; \quad \csc \alpha = \pm \sqrt{\frac{2}{1 - \cos 2\alpha}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \quad \cot \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$

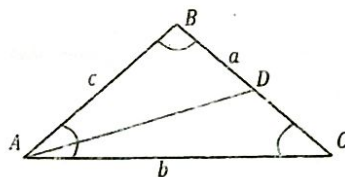
د $\tan \alpha$ او $\tan \frac{\alpha}{2}$ له جنسه د (2α) او (α) مثلثاتي نسبتونه

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}; \quad \sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

د مثلث اړونده فورمولونه



د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې ضلعو ترمنځ د زاويې

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

له جنسه:

$$S = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B \quad , \quad S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

❖ د مثلث مساحت چې زاويې او يوه ضلع يې معلومه وي:

$$S = \frac{a^2 \cdot \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}$$

❖ د مثلث مساحت د ضلعو له جنسه (د هيرون فرمول):

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

❖ د مثلث د محيط نيمايي ده:

❖ د مثلث د محيطي دايري شعاع:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$r = \frac{s}{p}$$

❖ د مثلث د محاطي دايري شعاع:

❖ د قايم الزاويه مثلث مساحت (a, b قايمي ضلعي):

$$S = \frac{1}{2} ab$$

❖ د متساوي الساقين مثلث مساحت

$$S = \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \quad (a=b)$$

❖ د مثلث مساحت چې د رأسونو نقطې يې معلومې وي:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

❖ د مثلث د داخلي ناصف الزاويې اوږدوالي:

$$\overline{AD} = \frac{2}{b+c} \sqrt{p \cdot b \cdot c \cdot (p-a)}$$

$$M_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

❖ په هر مثلث کې د ميانې اوږدوالي:

متساوي الاضلاع مثلث

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

❖ ارتفاع:

$$S = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

❖ مساحت:

$$R = \frac{a}{3} \sqrt{3}$$

❖ د محيطي دايري شعاع:

$$r = \frac{a}{6} \sqrt{3}$$

❖ د محاطي دايري شعاع:

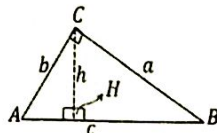
$$p = 3a$$

❖ محيط:

د قايم الزاويه مثلث قضيب

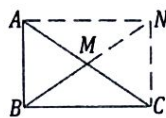
$$\overline{AC} \cdot \overline{CB} = \overline{CH} \cdot \overline{AB} \quad -1$$

$$\overline{CB}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB} \quad -2$$



$$\overline{BM} = \frac{\overline{AC}}{2}$$

۳- \overline{BM} میانه ده:



۴- که پورتنی شکل کې $(\hat{C} = 30^\circ)$ فرض کړو نو:

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

د مثلث د ضلعو له جنسه د یوې زاوې د نیمایي مثلثاتي نسبتونه

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \\ \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \\ \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \tan \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} \\ \cot \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{(p-a)(p-c)}} \\ \cot \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sec \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{bc}{p(p-a)}} \\ \sec \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}} \\ \sec \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{ab}{p(p-c)}} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \csc \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{bc}{(p-b)(p-c)}} \\ \csc \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{ac}{(p-a)(p-c)}} \\ \csc \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{ab}{(p-a)(p-b)}} \end{array} \right.$$

د ساین قانون (Law of sine)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

د کوساین قانون (Law of cosine)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

همدارنگه دا لاندې رابطې هم صدق کوي:

$$a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$$

$$b = c \cdot \cos A + a \cdot \cos C$$

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A$$

د ټانجنټ قانون (Law of tangent)

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}} ; \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\tan \frac{A+C}{2}}{\tan \frac{A-C}{2}}$$

همدارنگه لاندې رابطې هم صدق کوي

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cdot \cot \frac{A}{2}$$

$$\tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cdot \cot \frac{B}{2}$$

د کوټانجنټ قانون (Law of cotangent)

$$\cot \frac{A}{2} = \frac{p-a}{r} ; \quad \cot \frac{B}{2} = \frac{p-b}{r} ; \quad \cot \frac{C}{2} = \frac{p-c}{r}$$

همدارنگه:

$$\frac{\cot \frac{A}{2}}{p-a} = \frac{\cot \frac{B}{2}}{p-b} = \frac{\cot \frac{C}{2}}{p-c}$$

د مثلث د محاطي دايرې شعاع او (p) د مثلث د محيط

نيمایي ده.

د مولهيد (Mollweid) فرمولونه

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} ; \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{B}{2}}$$

د نيوتن فرمولونه

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}$$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} ; \quad \frac{c+a}{b} = \frac{\cos \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}}$$

مثلثاتي معادلې (Trigonometry Equations)

لومړۍ درجه یو مجهوله معادلې

$$A \sin x \pm B \cos x = R \cdot \sin(x \pm \alpha)$$

$$A \cos x \pm B \sin x = R \cdot \cos(x \mp \alpha)$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2} ; \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \quad \text{څرنگه چې:}$$

د لومړۍ درجه دوه مجهوله مثلثاتي معادلو سیستمونه او د حل شرطونه یې

❖ لومړۍ گروپ:

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$a^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0 \quad \text{د حل شرط یې:}$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \text{❖ دوهم گروپ:}$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \cos x \cdot \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$-\cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{د حل شرط یې:}$$

$$\left. \begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \right\} \quad \begin{cases} \frac{\cos x}{\cos y} = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \text{❖ دریم گروپ:}$$

❖ څلورم گروپ:

$$\begin{cases} \tan x \pm \tan y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \cot x \pm \cot y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

$$a^2 - 4 + 4a \cdot \cot \alpha \geq 0 \quad \text{د حل شرط یې:}$$

$$\begin{cases} \tan x \pm \tan y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \text{❖ پنځم گروپ:}$$

$$-1 \leq \frac{1+a}{1-a} \cos \alpha \leq 1 \quad \text{د حل شرط یې:}$$

$$\begin{cases} \frac{\tan x}{\tan y} = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \text{❖ شپږم گروپ:}$$

$$-1 \leq \frac{a-1}{a+1} \sin \alpha \leq 1 \quad \text{د حل شرط یې:}$$

معکوس مثلثاتي نسبتونه

$$\text{❖ } y = \sin x \Rightarrow x = \arcsin y$$

$$\text{❖ } y = \cos x \Rightarrow x = \arccos y$$

$$\text{❖ } y = \tan x \Rightarrow x = \arctan y$$

$$\text{❖ } y = \cot x \Rightarrow x = \operatorname{arccot} y$$

$$\text{❖ } y = \sec x \Rightarrow x = \operatorname{arcsec} y$$

$$\text{❖ } y = \csc x \Rightarrow x = \operatorname{arccsc} y$$

په معکوسو مثلثاتي نسبتونو کې ییلایلی عملیې

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccsc} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin x = \operatorname{arccsc} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\arccos x = \operatorname{arcsc} \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\arctan x = \operatorname{arccot} \left(\frac{1}{x} \right), x > 0$$

$$\operatorname{arccot} x = \arctan \left(\frac{1}{x} \right), x > 0$$

$$\operatorname{arcsec} x = \arccos \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\operatorname{arccsc} x = \arcsin \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x$$

$$\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

$$\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x$$

$$\operatorname{arccsc}(-x) = -\operatorname{arccsc} x$$

$$\sin^{-1} A \pm \sin^{-1} B = \sin^{-1} \left(A\sqrt{1-B^2} \pm B\sqrt{1-A^2} \right)$$

$$\cos^{-1} A \pm \cos^{-1} B = \cos^{-1} \left(AB \mp \sqrt{(1-A^2)(1-B^2)} \right)$$

$$\tan^{-1} A \pm \tan^{-1} B = \tan^{-1} \left(\frac{A \pm B}{1 \mp AB} \right)$$

د معکوسو مثلثاتي نسبتونو ترکیب

$$\sin(\sin^{-1} x) = x, -1 \leq x \leq 1$$

$$\cos(\cos^{-1} x) = x, -1 \leq x \leq 1$$

$$\tan(\tan^{-1} x) = x, x \in \mathbb{R}$$

$$\cot(\cot^{-1} x) = x, x \in \mathbb{R}$$

$$\sec(\sec^{-1} x) = x, -1 \geq x \geq 1$$

$$\csc(\csc^{-1} x) = x, -1 \geq x \geq 1$$

$$\sin^{-1}(\sin y) = y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}(\cos y) = y, 0 \leq y \leq \pi$$

$$\tan^{-1}(\tan y) = y, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$\cot^{-1}(\cot y) = y, 0 < y < \pi$$

$$\sec^{-1}(\sec y) = y, \quad 0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\csc^{-1}(\csc y) = y, \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \neq 0$$

$$\sin(\cos^{-1} x) = \cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\tan(\sin^{-1} x) = \cot(\cos^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\cot(\sin^{-1} x) = \tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\sec(\sin^{-1} x) = \csc(\cos^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sec(\sin^{-1} x) = \csc(\cos^{-1} x) = \frac{1}{x}$$

$$\sin(\tan^{-1} x) = \cos(\cot^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cos(\tan^{-1} x) = \sin(\cot^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\cot(\tan^{-1} x) = \tan(\cot^{-1} x) = \frac{1}{x}$$

$$\sec(\tan^{-1} x) = \csc(\cot^{-1} x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$\csc(\tan^{-1} x) = \sec(\cot^{-1} x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\sin(\sec^{-1} x) = \cos(\csc^{-1} x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$\cos(\sec^{-1} x) = \sin(\csc^{-1} x) = \frac{1}{x}$$

$$\tan(\sec^{-1} x) = \cot(\csc^{-1} x) = \sqrt{x^2-1}$$

$$\cot(\sec^{-1} x) = \tan(\csc^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\csc(\sec^{-1} x) = \sec(\csc^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\sin(2 \cdot \sin^{-1} x) = 2x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(2 \cdot \cos^{-1} x) = 2x^2 - 1$$

$$\tan(2 \cdot \tan^{-1} x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

د هندسي برخه

د زاويو ډولونه

- ❖ قائمه زاويه: $\hat{\alpha} = 90^\circ$
- ❖ حاده زاويه: $0^\circ < \hat{\beta} < 90^\circ$
- ❖ منفرجه زاويه: $90^\circ < \hat{\beta} < 180^\circ$
- ❖ مستقيم زاويه: $\hat{\alpha} = 180^\circ$
- ❖ مكمله زاويې: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ$
- ❖ متممې زاويې: $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$

مضلع گانې

❖ د (n) ضلعي مضلع د داخلي زاويو مجموعه:

$$A = (n - 2) 180^\circ$$

❖ د (n) ضلعي مضلع د قطرونو مجموعه: $D = \frac{n(n-3)}{2}$

❖ د منظمې مضلع د يوې داخلي زاويې پراخوالی:

$$\alpha = \frac{A}{n} \text{ يا } \alpha = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

❖ د منظمې مضلع د يوې خارجي زاويې پراخوالی:

$$\beta = \frac{360^\circ}{n}$$

❖ د يوې مضلع د يوه رأس څخه د قطرونو تعداد: $d = n - 3$

❖ د يوې منظمې مضلع د ضلعو تعداد که داخلي زاويې يې

معلومې وي:

$$n = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$$

❖ له يوه رأس څخه د مضلع په منځ کې د مثلثونو شمېر:

$$\Delta = n - 2$$

❖ د محيطي دايرې شعاع: $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$

❖ د محاطي دايرې شعاع: $r = \frac{a}{2 \tan \frac{\pi}{2}} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$

❖ محيط: $P = n \cdot a$

a د منظمې مضلع د يوې ضلعي اوږدوالی.

❖ د مضلع مساحت: $S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$

❖ د مضلع مساحت: $S = q \cdot r = q \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ ($q = \frac{P}{2}$)

❖ د دوو منظمو مشابه مضلع گانو د محيطونو، محيطي او

محاطي دايرو ترمنځ نسبت: $\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'} = \frac{r}{r'}$

څلور ضلعي ګانې (Quadrilateral)

مربع Square:

$$P = 4a$$

❖ محیط:

$$S = a^2$$

❖ مساحت:

$$d = \sqrt{2}a$$

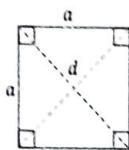
❖ قطر:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

❖ د محیطي دایرې شعاع:

$$r = \frac{a}{2}$$

❖ د محاطي دایرې شعاع:



مستطیل Rectangle:

$$P = 2(a + b)$$

❖ محیط:

$$S = a \cdot b = \frac{1}{2}d^2 \cdot \sin \theta$$

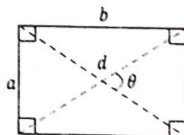
❖ مساحت:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

❖ قطر:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

❖ د محیطي دایرې شعاع:



متوازي الاضلاع Parallelogram:

$$P = 2(a + b)$$

❖ محیط:

$$S = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

❖ مساحت:

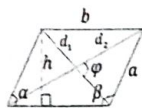
$$S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$$

❖ مساحت:

$$h = b \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \beta$$

❖ ارتفاع:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$
 ❖ د قطرونو د مربعاتو مجموعه:



لوزي (معيّن) Rhombus:

$$P = 4a$$

❖ محیط:

$$S = a \cdot h = a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$$

❖ مساحت:

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2$$

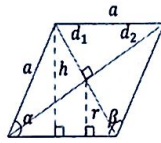
❖ د قطرونو د مربعاتو مجموعه:

$$h = a \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2a}d_1 \cdot d_2$$

❖ ارتفاع:

$$r = \frac{h}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{4a} = \frac{a \cdot \sin \alpha}{2}$$

❖ د محاطي دايري شعاع



❖ ذودتته Trapezoid:

$$P = a + b + c + d$$

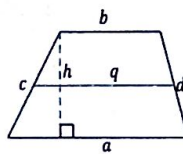
❖ محيط

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = q \cdot h$$

❖ مساحت

$$q = \frac{a+b}{2}$$

❖ منحنی خط



❖ متساوي الساقين ذودتته Isosceles Trapezoid:

$$d = \sqrt{ab + c^2}$$

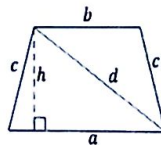
❖ قطر

$$h = \sqrt{c^2 - \frac{(a+b)^2}{4}}$$

❖ ارتفاع

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = q \cdot h$$

❖ مساحت



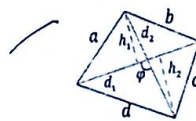
❖ کيفي خلور ضلعي General Quadrilateral:

$$P = a + b + c + d$$

❖ محيط

$$S = \frac{d_1}{2} (h_1 + h_2) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \cdot \sin \varphi$$

❖ مساحت



❖ دايره (Circle):



$$P = 2\pi r = \pi \cdot d$$

❖ محيط

$$a = 2 \sin \frac{\theta}{2} = 2\sqrt{2h \cdot r - h^2}$$

❖ وتر

$$S = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P \cdot d}{4} = \frac{P \cdot r}{2}$$

❖ مساحت

❖ د مرکزي زاوېې پراخوالی: $\theta = \frac{s}{r}$ (په رادیان)

❖ د قطاع محیط: $P' = s + 2 \cdot r$

❖ د قطاع مساحت: $S' = \frac{r \cdot s}{2} = \frac{r^2 \cdot \theta}{2}$ (په رادیان)

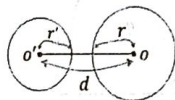
❖ د قطعي محیط: $P'' = s + a$

❖ د قطعي مساحت: $S'' = \frac{1}{2} [s \cdot r - a(r - h)]$

❖ د قطعي تقریبي مساحت: $S'' \approx \frac{2}{3} h \cdot a$

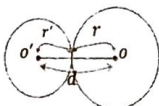
❖ د قطعي ارتفاع: $h = r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - a^2}$; $h < r$

❖ د دوو دایرو موقعیت نسبت یو بل ته
❖ ناپریکړې یا نامتقاطع دایرې:



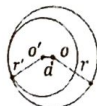
$d > r + r'$

❖ خارجاً مماس دایرې:



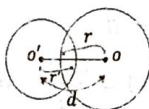
$d = r + r'$

❖ داخلاً مماس دایرې:



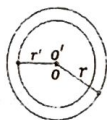
$d = |r - r'|$

❖ متقاطع دایرې:



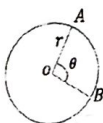
$|r - r'| < d < r + r'$

❖ متحد المركز دایرې:



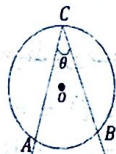
$d = 0$

❖ د دایرې اړوند زاوېې
❖ مرکزي زاوېه:



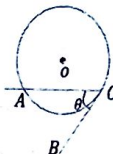
$\widehat{AOB} = \theta = \overline{AB}$

❖ محيطي زاويه:



$$\widehat{ABC} = \hat{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AC}$$

❖ مماسي زاويه:



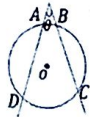
$$\hat{\theta} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AC}$$

❖ د محيطي، مماسي او مركزي زاويو ترمنځ اړيکه چې د عين قوس په مقابل کې واقع کوي:



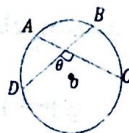
$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \hat{\theta}$$

❖ خارجي زاويه:



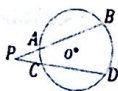
$$\hat{\theta} = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}$$

❖ داخلي زاويه:



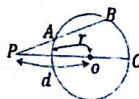
$$\hat{\theta} = \frac{1}{2} \cdot (\widehat{AB} + \widehat{DC})$$

په دایره کې د اوږدوالي اړیکې

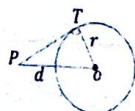


$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

د یو ټکي طاقت نظر دایرې ته



$$PA \cdot PB = d^2 - r^2$$



$$PT^2 = d^2 - r^2$$

الف) که یو ټکی د دایرې څخه بهر پروت وي نو طاقت یې مثبت دی:

$$p_{(0)} = d^2 - r^2 > 0$$

ب) که یو ټکی د دایرې پر محیط پروت وي نو طاقت یې صفر دی:

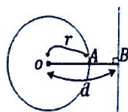
$$p_{(0)} = d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow d^2 = r^2$$

ج) که یو ټکی د دایرې په داخل کې پروت وي نو طاقت یې منفي دی:

$$p_{(0)} = d^2 - r^2 < 0 \Rightarrow d^2 < r^2$$

د دایرې سره د یوې مستقیمې کرښې حالتونه

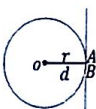
❖ که کرښه له دایرې سره ګډ ټکی ونه لري:



$$d > r$$

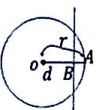
❖ که کرښه له دایرې سره یو ټکی ولري

نو کرښه پر دایره مماس دی:



$$d = r$$

❖ که کرښه له دایرې سره دوه ګډ ټکي ولري:



$$d < r$$

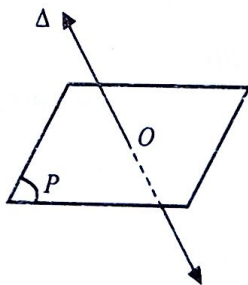
فضایي هندسه

په درې بعدي فضا کې کرښه او مستوي

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت

1- که چیرې یو مستقیمه کرښه او یوه مستوي یوه مشترکه

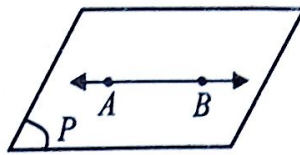
نقطه ولري نو یوله بل سره متقاطع دي



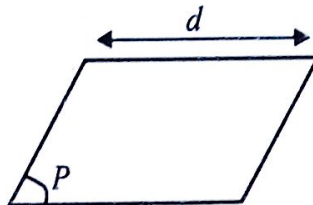
2- که چیرې یو مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره دوه او یا

له دوو څخه زیاتې ګډې (مشترکې) نقطې ولري، نو مستقیمه

کرښه په مستوي کې شامله یا ورسره منطبقه ده.

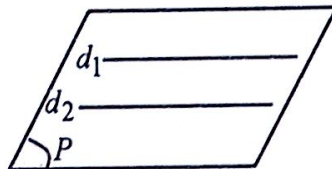


3- که چیرې یو مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه ونه لري، نو دا مستقیمه له مستوي سره موازي دی.

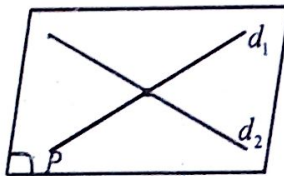


له یو بل سره دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

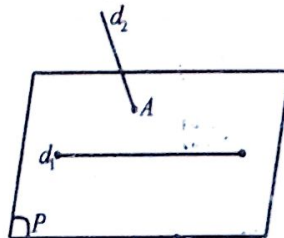
1- په یوې مستوي کې دوه کرښې هغه وخت موازي بلل کیږي چې هیڅ ګډه ټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه کرښې، چې یو ګډه ټکی ولري، متقاطع کرښې بلل کیږي.

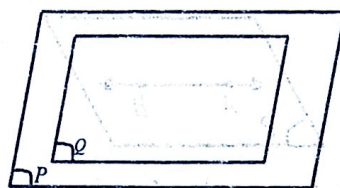


3- که دوه کرښې چې په یوه مستوي کې واقع نه وي او کوم ګډه ټکی هم ونه لري، متناظرې کرښې بلل کیږي.

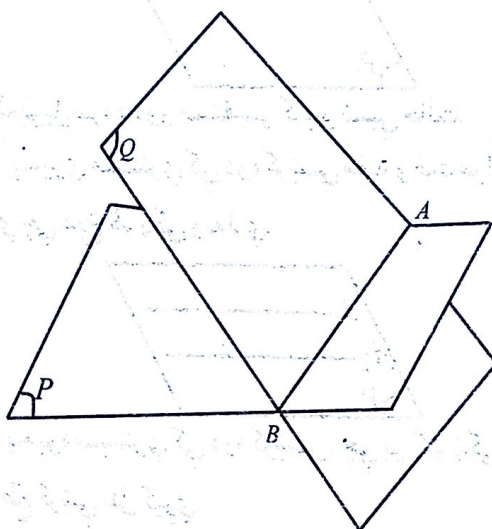


د دوو مستوي ګانو نسبي حالت

1- که چیرې دوی مستوي ګانې لږترلږه درې مشترکې نقطې ولري، چې د یو مستقیم خط په امتداد پرتې نه وي، یو پر بل منطبقې مستوي ګانې بلل کیږي.



2- که چیرې دوه مستوي گانې يو ګډ مستقيم خط ولري متقاطع مستوي گانې بلل کيږي. دغه AB مشترک خط ته مشترک فصل هم وايي.



3- که چیرې دوه مستوي گانې هيڅ کوم ګډ ټکی ونه لري، سره موازي دي.



د بيلا بيلو جسمونو د بيلا بيلو ځانګړتياوو فورمولونه

مکعب: Cube:

$$V = a^3$$

❖ حجم:

$$S = 4a^2$$

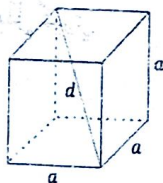
❖ جاني مساحت:

$$A = 6a^2$$

❖ ګلي مساحت:

$$d = \sqrt{3} \cdot a$$

❖ قطر:



Rectangular Parallelepiped: مکعب مستطیل

$$V = a \cdot b \cdot c$$

❖ حجم:

$$S = 2(bc + ac)$$

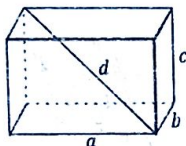
❖ جاني مساحت:

$$A = 2(ab + ac + bc)$$

❖ کلي مساحت:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

❖ قطر:



Prism: منشور

$$V = B \cdot h$$

❖ حجم:

$$S = P \cdot h$$

❖ جاني مساحت: (P د قاعدې محيط)

$$A = P \cdot h + 2B = S + 2B$$

❖ کلي مساحت:



Cylinder: استوانه

$$V = B \cdot h = \pi r^2 h$$

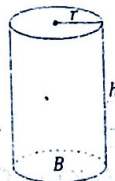
❖ حجم:

$$S = 2\pi r \cdot h$$

❖ جاني مساحت:

$$A = S + 2B = 2\pi r(h + r)$$

❖ کلي مساحت:



Pyramid: هرم

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

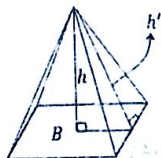
❖ حجم:

$$S = \frac{P \cdot h'}{2}$$

❖ جاني مساحت:

$$A = S + B$$

❖ کلي مساحت:



Frustum of Pyramid: **ناقص هرم**

$$V = \frac{K}{3} (B + B' + \sqrt{BB'})$$

❖ حجم

$$S = \frac{l'}{2} (P + P')$$

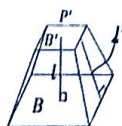
❖ جانبي مساحت

$$A = S + B + B'$$

❖ کلي مساحت

$$B' = B \cdot \frac{K^2}{h^2}$$

❖ د مقطع مساحت

Cone: **مخروط**

$$V = \frac{B \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

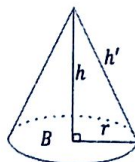
❖ حجم

$$S = \frac{P \cdot h'}{2} = \pi r h'$$

❖ جانبي مساحت

$$A = S + B = \pi r (r + h')$$

❖ کلي مساحت

Frustum of Cone: **ناقص مخروط**

$$r' = r \cdot \frac{K}{h}$$

❖ د مقطع شعاع

$$V = \frac{\pi K}{3} (r^2 + r'^2 + r \cdot r')$$

❖ حجم

$$S = \pi \cdot l' (r + r')$$

❖ جانبي مساحت

$$A = S + B + B'$$

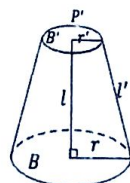
❖ کلي مساحت

$$B' = B \cdot \frac{K^2}{h^2} = \pi r^2 \cdot \frac{K^2}{h^2}$$

❖ د مقطع مساحت

$$K = h - l$$

په ناقص هرم او مخروط کې د (K) قیمت:

Sphere: **کوره**

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

❖ حجم

$$A = 4\pi r^2 = \pi d^2$$

❖ د سطحې مساحت

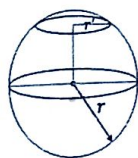
$$s = \pi r' = \pi (r^2 - y^2)$$

❖ د مقطع مساحت

$$r' = \sqrt{r^2 - y^2}$$

❖ د مقطع شعاع

y- د گري د مرکز او قطع شوي برخې د مرکز ترمنځ فاصله ده.



❖ د خوارخيز جسم لپاره د (Euler) قاعده: $F + V = E + 2$
V- رأسونه، E- ضلعي، F- اړخونه يا مخونده د جسم.

تحليلي هندسه

❖ په يو محور د دوو ټکو ترمنځ واټن:

$$d = AB = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

❖ په سطحه کې د دوو ټکو ترمنځ واټن:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

❖ د يوې نقطې واټن د وضعيه کمياتو له مېدا څخه:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

❖ د دوو ټکو ترمنځ واټن په قطبي مختصاتو کې:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

❖ د هغې نقطې مختصات چې قطعه خط په يو نسبت باندې

وېشي:

$$P \left(x = \frac{x_1 + x_2 \cdot r}{1 + r}, y = \frac{y_1 + y_2 \cdot r}{1 + r} \right)$$

❖ د $\left(\frac{m}{n}\right)$ په نسبت د يوه قطعه خط ويشل:

$$P \left(x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m} \right)$$

❖ د قطعه خط د نيمايي نقطې مختصات:

$$P \left(x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

❖ د مستقيم خط ميل چې د (x) محور سره د (θ) زاويه ولري:

$$m = \tan \theta$$

❖ د مستقيم خط ميل چې د يوې نقطې بې معلومې وي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

د مستقيم خط معادله

$$Ax + By + c = 0$$

❖ عمومي معادله

۱- ميل او (y) محور سره تقاطع ټکی معلوم وي: $y = mx + b$

۲- چې د (x) محور سره موازي وي: $y = b, b \neq 0$

۳- چې د (y) محور سره موازي وي: $x = a, a \neq 0$

۴- ميل او يوه نقطه بې معلومه وي: $y - y_1 = m(x - x_1)$

۵- د يوې نقطې بې معلومې وي: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



گورالوسه تقاطع نقطه معلومه وي

2- د محور اتو معادله: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

7- نارمل معادله: $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$

p د عمود خط اوږدوالی، θ د عمود خط د میل زاویه.

8- د مستقیم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

9- د مستقیم خط معادله په قطبي مختصاتو کې:

$$\frac{b}{r} = \sin \theta - a \cdot \cos \theta$$

❖ د یو ټکي واټن د مستقیم خط څخه: $d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$d = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta - p$$

❖ د دوو موازي خطونو ترمنځ واټن: $d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

❖ د وضعیه کمیاتو له مبدا نه د یو مستقیم خط واټن:

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

❖ د دوو مستقیمو خطونو ترمنځ زاویه: $\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$

❖ دوه مستقیم خطونه هغه وخت یو پر بل عمود دي چې:

$$m_1 \cdot m_2 = -1, \quad A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$$

❖ دوه مستقیم خطونه هغه وخت متقاطع دي چې:

$$m_1 \neq m_2, \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

❖ دوه مستقیم خطونه هغه وخت یو پر بل منطبق دي چې:

$$m_1 = m_2, \quad b_1 = b_2, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

❖ دوه مستقیم خطونه هغه وخت موازي دي چې:

$$m_1 = m_2, \quad b_1 \neq b_2, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

❖ د مثلث مساحت د رأسونو د مختصاتو له مخې:

$$\begin{cases} A(x_1, y_1) \\ B(x_2, y_2) \\ C(x_3, y_3) \end{cases}, S = \frac{[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]}{2}$$

❖ د مثلث مساحت چې د رأسونو نقطې یې معلومې وي:

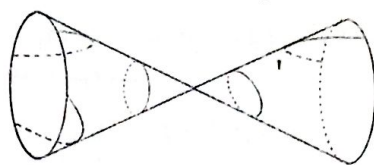
$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

❖ د مثلث د ثقل مرکز: $P(x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$

مخارجي له مختصاتي شکل وي

گورالوسه مستقیم خطونو

مخروطي مقاطع (Conic Sections)



د مخروطي مقاطعو د ستندر د حالت معادلې

❖ پارابول: $y^2 = 4Px$, $e = 1$ (e عن المركزيت)

❖ دایره: $x^2 + y^2 = 1$, $e = 0$

❖ بیضوي: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $0 < e < 1$

❖ هایپربول: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $e > 1$

❖ د مخروطي مقاطعو عمومي معادله:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

پورتنی معادله کې:

که $A \cdot B = 0$ شي، د پارابولا معادله لاسته راځي.

که $A = B$ شي، د دایرې معادله لاسته راځي.

که $A \neq B > 0$ شي، د بیضوي معادله لاسته راځي.

که $A \cdot C < 0$ شي، د هایپربول معادله لاسته راځي.

❖ د مخروطي مقاطعو معادلې په قطبي مختصاتو کې په

عمومي صورت کې چېرې هادي د قطبي محور سره موازي وي،

د مخروطي مقاطعو معادله په قطبي مختصاتو کې عبارت ده له:

$$r = \frac{e \cdot P}{1 \pm e \cdot \cos \theta}$$

پدې ځای کې د عن المركزيت لپاره درې حالتونه شتون لري:

1-1 $e = 1$ د پارابول حالت دی.

1-2 $e < 1$ د بیضوي حالت دی.

1-3 $e > 1$ د هایپربول حالت دی.

دایره (Circle)

❖ د هغې دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو مبدا وي:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

❖ د هغې دایرې معادله چې مرکز یې (h, k) وي:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

د دایرې د معادلو خصوصي حالتونه

❖ مرکز یې د (x) په محور: $k = 0$; $(x - h)^2 + y^2 = R^2$

❖ مرکز یې د (y) په محور: $h = 0$; $x^2 + (y - k)^2 = R^2$

❖ د (x) په محور مماس:

$$(x - h)^2 + (y - R)^2 = R^2 ; |k| = R$$

❖ د (y) په محور مماس:

$$(x - R)^2 + (y - k)^2 = R^2 ; |h| = R$$

❖ دواړو محورو سره مماس:

$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2 ; |h| = |k| = R$$

❖ د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د یوې دایرې د تیریدو شرط:

$$h^2 + k^2 = R^2$$

❖ د دایرې عمومي یا انکشاف یافته معادله:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

❖ پورتنی معادله کې د دایرې مرکز:

$$C \left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2} \right)$$

❖ پورتنی معادله کې شعاع:

$$R = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$$

- دایره حقیقي ده: $D^2 + E^2 - 4F > 0$

- دایره نقطوي ده: $D^2 + E^2 - 4F = 0$

- دایره مجازي ده: $D^2 + E^2 - 4F < 0$

❖ د دایرې د مماس معادله په $p(x_1, y_1)$ ټکي کې:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

❖ د دایرې د مماس میل په $p(x_1, y_1)$ کې:

$$m = -\frac{h - x_1}{k - y_1}$$

❖ د مماس د تماس په ټکي $p(x_1, y_1)$ کې د شعاع میل:

$$m_r = \frac{k - y_1}{h - x_1}$$

❖ د $x^2 + y^2 = R^2$ دایرې د مماس معادله په $p(x_1, y_1)$ کې:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = x_1^2 + y_1^2 = R^2$$

❖ د دایرې د مماس اوږدوالی له $p(x_1, y_1)$ ټکي څخه:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2} - R$$

❖ دوو دایرو د جنري محور معادله

❖ د دواړو دایرو د معادلو حاصل تفریق څخه لاسته راځي:

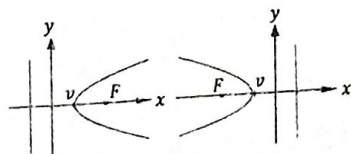
$$\frac{x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0}{x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0}$$

پارا بولا (Parabola)

❖ رأس یې په $(0, 0)$ ټکي کې او د تناظر محور (x) وي:

$$y^2 = 4px$$

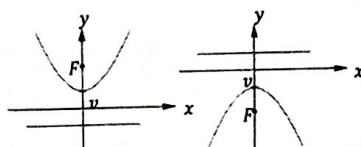
❖ معادله



$p > 0$ د پارابول خوله بڼی. خواته خلاصه ده (مقعر).

$p < 0$ د پارابول خوله چپې خواته خلاصه ده (محدب).

- ❖ د رأس مختصات: $V(0,0)$
- ❖ د محراق مختصات (P محراقي فاصله): $F(p, 0)$
- ❖ مؤجه خط (هادي): $x = -p$
- ❖ محراقي يا د تناظر محور: $y = 0 ; (x - axis)$
- ❖ غير محراقي محور: $x = 0 ; (y - axis)$
- ❖ عمودي وتر: $\overline{AB} = 4p$
- ❖ د عمودي وتر نقطې: $AB(x, \pm y)$
- ❖ موازي وي: رأس يې په (h, k) ټکي کې او د تناظر محور د (x) محور سره
- ❖ معادله: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$
- ❖ د رأس مختصات: $V(h, k)$
- ❖ د محراق مختصات: $F(h + p, k)$
- ❖ مؤجه خط (هادي): $x = h - p$
- ❖ محراقي يا د تناظر محور: $y = k$
- ❖ غير محراقي محور: $x = h$
- ❖ موازي وي: رأس يې په $(0, 0)$ ټکي کې او د تناظر محور (y) وي:
- ❖ معادله: $x^2 = 4py$



$p > 0$ د پارابول خوله پورته خواته خلاصه ده (مقعر).

$p < 0$ د پارابول خوله ښکته خواته خلاصه ده (محدب).

- ❖ د رأس مختصات: $V(0,0)$
- ❖ د محراق مختصات (P محراقي فاصله): $F(0, p)$
- ❖ مؤجه خط (هادي): $y = -p$
- ❖ محراقي يا د تناظر محور: $x = 0 ; (y - axis)$
- ❖ غير محراقي محور: $y = 0 ; (x - axis)$
- ❖ عمودي وتر: $AB = 4p$
- ❖ د عمودي وتر نقطې: $AB(\pm x, y)$
- ❖ موازي وي: رأس يې په (h, k) ټکي کې او د تناظر محور د (y) محور سره
- ❖ معادله: $(x - h)^2 = 4p(y - k)$
- ❖ د رأس مختصات: $V(h, k)$
- ❖ د محراق مختصات: $F(h, k + p)$

$y = k - p$ ❖ مؤجه خط (هادي):

$x = h$ ❖ محراقي يا د تناظر محور:

$y = k$ ❖ غير محراقي محور:

⋮ ❖ بيضوي (Ellipse)

⋮ ❖ عمومي ځانگړتياوي:

$AA' = 2a$ ❖ لوی قطر: طول

$BB' = 2b$ ❖ کوچنی قطر: طول

$F_1F_2 = 2c$ ❖ د محراقونو ترمنځ فاصله: طول

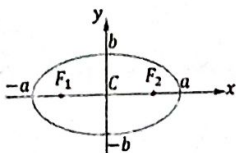
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ ❖ محراقي فاصله

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; 0 < e < 1$ ❖ عن المركزيت:

$MM' = \frac{2b^2}{a}$ ❖ عمودي وتر (لتس ريکتم):

❖ مرکزي په $(0, 0)$ ټکي کې او لوی قطر يې د (x) په محور وي:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ❖ معادله



$a > b > 0$ وي بيضوي افقي ده.

$C(0,0)$ ❖ د مرکز مختصات

$F_1F_2(\pm c, 0)$ ❖ د محراقونو مختصات

$AA'(\pm a, 0)$ ❖ د لوی قطر د رأسونو مختصات

$BB'(0, \pm b)$ ❖ د کوچني قطر د رأسونو مختصات

$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$ ❖ مؤجه خطونه (هادي):

$y = 0$ ❖ محراقي محور:

$x = 0$ ❖ غير محراقي محور:

❖ مرکزي په (h, k) ټکي کې او لوی قطر يې د (x) محور سره موازي وي:

$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ❖ معادله

$C(h, k)$ ❖ د مرکز مختصات

$F_1F_2(h \pm c, k)$ ❖ د محراقونو مختصات

$AA'(h \pm a, k)$ ❖ د لوی قطر د رأسونو مختصات

$BB'(h, k \pm b)$ ❖ د کوچني قطر د رأسونو مختصات

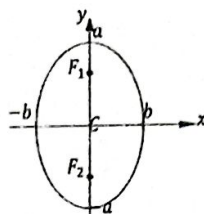
$x = h \pm \frac{a}{e} = h \pm \frac{a^2}{c}$ ❖ مؤجه خطونه (هادي):

$y = k$ ❖ محراقي محور:

❖ غير محراقي محور: $x = h$

مرکز يې په $(0, 0)$ ټکي کې اولوی قطر يې د (y) په محور وي:

❖ معادله: $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$



$a > b > 0$ وي بيضوي عمودي ده.

❖ د مرکز مختصات: $C(0,0)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1 F_2(0, \pm c)$

❖ د لوی قطر د رأسونو مختصات: $AA'(0, \pm a)$

❖ د کوچني قطر د رأسونو مختصات: $BB'(\pm b, 0)$

❖ مؤجه خطونه (هادي): $y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}$

❖ محراقي محور: $x = 0$

❖ غير محراقي محور: $y = 0$

مرکز يې په (h, k) ټکي کې اولوی قطر يې د (y) محور سره موازي وي:

❖ معادله: $\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

❖ د مرکز مختصات: $C(h, k)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1 F_2(h, k \pm c)$

❖ د لوی قطر د رأسونو مختصات: $AA'(h, k \pm a)$

❖ د کوچني قطر د رأسونو مختصات: $BB'(h \pm b, k)$

❖ مؤجه خطونه (هادي): $y = k \pm \frac{a}{e} = k \pm \frac{a^2}{c}$

❖ محراقي محور: $x = h$

❖ غير محراقي محور: $y = k$

هايپربول (Hyperbola)

عمومي ځانگړتياوي:

❖ د هايپربولا اړيکه: $c^2 = a^2 + b^2$

❖ د حقيقي رأسونو ترمنځ فاصله: $AA' = 2a$

❖ د مجازي رأسونو ترمنځ فاصله: $BB' = 2b$

❖ د محراقونو ترمنځ فاصله: $F_1 F_2 = 2c$

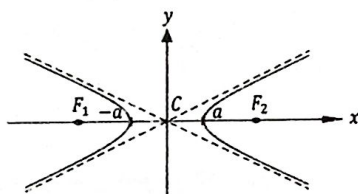
❖ محراقي فاصله: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

❖ عن المرکزیت: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}; e > 1$

❖ عمودي وتر (لتس ريکتم): $MM' = \frac{2b^2}{c}$

مرکز يې په $(0, 0)$ ټکي کې او محراقي محور يې د (x) په محور وي:

❖ معادله: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



د هايپربول خولې ښي او چپ لور ته خلاصې دي.

❖ د مرکز مختصات: $C(0,0)$

❖ د حقيقي رأسونو مختصات: $AA'(\pm a, 0)$

❖ د مجازي رأسونو مختصات: $BB'(0, \pm b)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(\pm c, 0)$

❖ مجانبونه: $y = \pm \frac{b}{a}x$

❖ مؤجه خطونه (هادي): $x = \pm \frac{a}{e}$

❖ محراقي محور: $y = 0$

❖ غير محراقي محور: $x = 0$

مرکز يې په (h, k) ټکي کې او محراقي محور يې د (x) محور سره موازي وي:

❖ معادله: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

❖ د مرکز مختصات: $C(h, k)$

❖ د حقيقي رأسونو مختصات: $AA'(h \pm a, k)$

❖ د مجازي رأسونو مختصات: $BB'(h, k \pm b)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(h \pm c, k)$

❖ مجانبونه: $(y - k) = \pm \frac{b}{a}(x - h)$

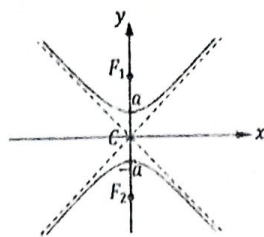
❖ مؤجه خطونه (هادي): $x = h \pm \frac{a}{e}$

❖ محراقي محور: $y = k$

❖ غير محراقي محور: $x = h$

مرکز يې په $(0, 0)$ ټکي کې او محراقي محور يې د (y) په محور وي:

❖ معادله: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$



د هايپربول خولې پورته او ښکته خواته خلاصې دي.

❖ د مرکز مختصات: $C(0,0)$

❖ د حقيقي رأسونو مختصات: $AA'(0, \pm a)$

❖ د مجازي رأسونو مختصات: $BB'(\pm b, 0)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(0, \pm c)$

❖ مجانبونه: $y = \pm \frac{a}{b}x$

❖ مؤجه خطونه(هادي): $y = \pm \frac{a}{e}$

❖ محراقي محور: $x = 0$

❖ غيرمحراقي محور: $y = 0$

مرکزي يې په (h, k) ټکي کې او محراقي محور يې د (y) محور سره موازي وي:

❖ معادله: $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

❖ د مرکز مختصات: $C(h, k)$

❖ د حقيقي رأسونو مختصات: $AA'(h, k \pm a)$

❖ د مجازي رأسونو مختصات: $BB'(h \pm b, k)$

❖ د محراقونو مختصات: $F_1F_2(h, k \pm c)$

❖ مجانبونه: $(y - k) = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

❖ مؤجه خطونه(هادي): $y = k \pm \frac{a}{e}$

❖ محراقي محور: $x = h$

❖ غيرمحراقي محور: $y = k$

د يوې نقطې موقعيت نظر مخروطي مقاطعونه

له نقطې څخه د (x) او (y) قيمتونه رااخلو او د منحنی يا اړونده مخروطي مقطع په معادله کې يې وضع کوو نو د دې حالتونه به ولرو:

❖ که ښی او کين(چپ) لوری سره مساوي شول، نو نقطه د منحنی په محیط پرته ده.

❖ که ښی لوری زیات شي، نو نقطه د دايرې، بیضوي او پارابول په داخل کې او د هايپربول په خارج کې واقع ده.

❖ که چپ لوری زیات شي، نو نقطه د دايرې، بیضوي او پارابول په خارج کې او هايپربول په داخل کې واقع ده.

د یوې کرښې موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته د (x) او (y) قیمتونه د مستقیمې کرښې له معادلې څخه لاسته راوړو او د منحنی په معادله کې یې وضع کوو، دوهمه درجه یو مجهول معادله لاسته راځي، (Δ) یې تشکیلوو $(\Delta = b^2 - 4ac)$:
❖ که $(\Delta > 0)$ شو، مستقیمه کرښه منحنی په دوو نقطو کې قطع کوي.

❖ که $(\Delta = 0)$ شو، مستقیمه کرښه له منحنی سره مماس ده.

❖ که $(\Delta < 0)$ شو، مستقیمه کرښه منحنی نه قطع کوي.

Statistics احصائيه

(Data) ڊيٽا: لومړنيو راتولو شويو معلومياتو نه وايي
مطلعي (mean or average) ګڼه: (مٺا) ډونه ولرونو
او معلومياتو ټولو عددونو مجموعه څرګندوي

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(mode) مډه: په راتول شويو معلومياتو کې مٺا ډونه وايي
عنه ډېر زياته فرېکونسي ولري يا دې معلومياتو کې ډېر وي
مډه 5 عددونو کې (5) مډه 1, 2, 3, 4, 5
يا ګڼه امکان لري چې يوه سلسله کې ډېرې معلومات
يو يوه له يوه څخه زيات مډونه ولري او يا هم ډېرې
ډېرې کثرت فيصدي

$$= \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{ډټولي ډيټا کثرت}} \times 100\%$$

غير متصلي ډيټا اوسط:

$$\bar{X} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

(x) يوه ډيټا او f دهغې کثرت دی
وزني اوسط:

$$\bar{X} = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

ميانه (median): کله چې راکړل شوي معلومات منظم
(صعودي يا نزولي ډول) کړو نو منځنۍ عدد يې ميانه ده او که د
عددونو شمير جفت وه نو د دوو منځينو عددونو اوسط يې
ميانه ده مثلاً په لاندې معلوماتو کې (7) ميانه ده:

1, 2, 3, 7, 10, 13, 17

د تحول ساحه (Range):

ترټولو کم قیمت - ترټولو زیات قیمت = Range

❖ د انحراف اوسط:

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

x_1, x_2, \dots, x_n د پیتاگانې، \bar{x} د پیتاگانو اوسط او n د پیتاگانو شمیر ده.

❖ د P - ام څلورمې (ربعي) موقعیت:

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2} \quad (n \text{ د پیتاگانو شمیره}, p = 1, 2, 3)$$

❖ ربعي (د څلورمې) انحراف

$$Q = Q_3 - Q_1$$

Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د پیتاگانو لومړۍ څلورمه (ربعه) او دریمه څلورمه ده.

❖ واریانس (Variance):

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

❖ ځینې وخت لږې فورمول څخه هم واریانس په لاس راوړي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

❖ واریانس په هغه صورت کې چې د پیتا په کلاسونو کې

ترتیب شوي وي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$N = \sum_{i=1}^n f_i \quad \text{د کلاس مرکز، } f \text{ یې فریکونسي وي او } N \text{ د کلاسونو شمیر ده}$$

وي

❖ معیاري انحراف

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2}$$

❖ معیاری انحراف د فریکونسینو له جدول څخه

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{x}^2}$$

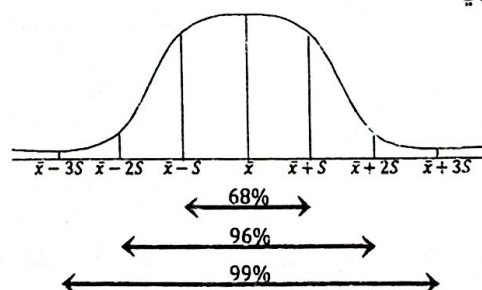
❖ د بدلونو ضریب

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\text{معیاری انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C.V\% = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{❖ د تحول ضریب:}$$

❖ په نورمال منحنی کې پراگنده گي (تیتوالی):

- که چیرې (\bar{x}) اوسط او (S) معیاری انحراف وي، نو
 68% د پلټنې موارد د $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ په فاصله کې یعنې د
 اوسط په شا او خوا د معیاری انحراف په فاصله کې ځای لري
 - 96% د پلټنې موارد د $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$ په فاصله کې
 ځای لري
 - 99% د پلټنې موارد د $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$ په فاصله کې
 ځای لري



❖ د نورمال توزیع د ډول شا خطونه:

1- د خمیدلو (Skewness) شاخص: هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي خمیدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضریبونو بنودل کېږي.

الف: د خمیدلو ضریب:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

- که $\alpha_3 = 0$ وي، نو توزیع متناظره ده.- که $\alpha_3 > 0$ وي، نو د توزیع خمیدل مثبت دي، یعنې نسبي لوري ته خمیده گي لري.- که $\alpha_3 < 0$ وي، نو د توزیع خمیدل منفي دي، یعنې کین لوري ته خمیده گي لري.

$$K(p) = \frac{3(\bar{x} - med)}{S} \quad \text{ب: د پیرسون د خمیدلو ضریب:}$$

- که $SK(p) = 0$ وي، نو توزیع متناظره ده.- که $SK(p) > 0$ وي، نو توزیع منحنی مثبت خمیدل لري.- که $SK(p) < 0$ وي، نو توزیع منحنی منفي خمیدل لري.-2 د پرسوب (*kurtosis*) شاخص: د اشخاص دانېسي چې د توزیع یوه منحنی څه وخت جکوالی او څه وخت ټیټوالی لري:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

یا د کثرت د جدول په شتون کې د پرسوب شاخص:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

❖ د پیوستون ضریب:

$$r = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y}$$

❖ د خطي میلان معادله (دریگریشن کرنبه): $y = ax + b$ ❖ د خطي میلان معادله کې د (a) قیمت: $a = r \cdot \frac{S_y}{S_x}$ ❖ د خطي میلان معادله کې د (b) قیمت: $b = \bar{y} - a\bar{x}$ ❖ د تعجیل او پیوسته احتمال تابع: $F(x) = P(X \leq x)$

❖ که چیرې $f(x)$ د احتمال تابع او (x) تصادفي متحول وي،
نوددې احتمال چې x د k_1 او k_2 په منځ کې وي برابر دی له

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x) dx$$

❖ که چیرې x پیوسته ناڅاپي متحول او $k_1 < k_2$ څخه وي
نو:

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

❖ د x ناڅاپي مجزا متحول اوسط: $E(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$

❖ د x ناڅاپي مجزا (گسته) احتمال واریانس:

$$S^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$$

❖ د نا بريالیتوب احتمال: (P) د بريالیتوب احتمال

$$q = 1 - P$$

❖ د n ځلې آزمايښت څخه د m ځلې بريالیتوب احتمال:

$$P(X \leq m) = \binom{n}{m} P^m q^{n-m} ; 0 \leq m \leq n$$

❖ د پورتنی دوه جمله یې د توزیع اوسط: $\bar{X} = nP$

❖ د پورتنی دوه جمله یې د توزیع معیاري انحراف:

$$S = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

❖ د پواسن د احتمال توزیع فورمول:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^m}{m!}, e = 2.71828$$

❖ د پواسن په توزیع کې اوسط = ویانس: $\lambda = n \cdot P$

❖ په ټاکلي وخت د احتمال و مماسې لپاره د پواسن فورمول:

$$P(X = m) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^m}{m!}$$

- t د ټاکلي وخت نسبت پرتول وخت چې اوسط ورکړل شوی

وي، m د ور تلولو شمیر د t په واحد وخت کې او د ور تگ

شمیر اوس په واحد کې دی

❖ دنور مال توزیع احتمال:

$$f(x) = \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{S}\right)^2}, \begin{cases} \pi = 3.14189 \\ e = 2.71828 \end{cases}$$

❖ د نورمال د توزیع احتمال بل فورمول: $f(x) = N(x, \bar{x}, S)$
 x - پیوسته تصادفي مقدار او $f(x)$ د منحنی جگوالی رانې
 ❖ د x پیوسته تصادفي متحول د نورمال احتمال توزیع په
 یوه انټروال کې:

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{S}\right)^2}$$

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{S} \quad \text{❖ سټنډرډ نورمال متحول:}$$

❖ نمونه یې اوسط:

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\mu = E(\bar{x}_n) \quad \text{❖ د ټولني اوسط:}$$

❖ د \bar{x}_n متحول وریانس، δ^2 د ټولني وریانس:

$$V(\bar{x}_n) = \frac{1}{n} \delta^2$$

$$S_n^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{❖ د نموني وریانس:}$$

$$E(S^2) = \delta^2 \quad \text{❖ د نمونه یې وریانس اوسط:}$$

$$\text{❖ د لویې ټولني د حجم بنودنه} = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad \text{د لویې ټولني حجم}$$

❖ د کوچني ټولني د حجم بنودنه:

$$(N \text{ د ټولني عناصرو شمیر}) \frac{S}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-m}{N-1}} \quad \text{د کوچني ټولني حجم}$$

❖ د تقریبي نورمال توزیع د اوسط $(\mu_{\bar{x}} = \mu)$ وریانس:

$$\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta^2}{n}$$

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \quad \text{❖ د نورمال سټنډرډ توزیع ناڅاپه متحول:}$$

$$\bar{p} = \frac{x}{n} \quad \diamond \text{ د نمونې د نسب آماره:}$$

$$E(x) = np \quad \diamond \text{ د } x \text{ ناڅاپي متحول اوسط:}$$

$$V(x) = npq \quad \diamond \text{ د } x \text{ ناڅاپي متحول وریانس:}$$

\diamond د دوه جمله یی د توزیع په پاملرنې سره د \bar{P} توزیع:

$$f(n\bar{p}) = \binom{n}{n\bar{p}} p^{n\bar{p}} (1-p)^{n(1-\bar{p})} ; \bar{p} = 0, \frac{1}{n}, \dots, 1$$

$$Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \quad \diamond \text{ د نورمال سټندرد توزیع:}$$

$$V(\bar{p}) = \frac{p \cdot q}{n} \quad \diamond \text{ د } \bar{p} \text{ وریانس:}$$

$$E(\bar{p}) = p \quad \diamond \text{ د } \bar{p} \text{ اوسط:}$$

احتمالات Probability

❖ د یوې پیښې چانس بیانول په عدد (رقم) سره د احتمال په

نوم یادېږي. ✓

❖ د A ناڅاپي پیښې احتمال:

$$P(A) = \frac{T}{S} = \frac{\text{د ناڅاپي پیښې د مساعدو حالتونو شمیر}}{\text{د تجربې د ټولو پایلو د حالتونو شمیر (د نمونې فضا)}}$$

$$P(E) = \frac{1}{n} \quad \text{❖ د } E \text{ پیښې احتمال: (} n \text{ د نمونې د فضا غړي)}$$

$$P(B) = 0 \quad \text{❖ د } B \text{ ناممکنې پیښې احتمال:}$$

$$P(B) = 1 \quad \text{❖ د } B \text{ خامخا پیښیدونکې پیښې احتمال:}$$

❖ د اتفاقي (ناڅاپي) پیښو شمیر:

$$2^n \quad (n \text{ د نمونې د فضا د غړو شمیر})$$

❖ اتفاقي پیښه (E): د S د نمونې فضا هر فرعي سټ یوه اتفاقي پیښه ده.

❖ د E اتفاقي پیښې احتمال تل د (0) او (1) ترمنځ وي:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{❖ د } A \text{ ناڅاپي پیښې مکمله:}$$

❖ د مستقلو پیښو لپاره د جمعې اصل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

❖ د مستقلو پیښو لپاره د ضرب اصل:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

❖ د جمعې عمومي اصل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

❖ مشروط (Conditional) احتمال:

$$P_B(A) = (A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n; \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{❖ } -n \text{ ام فکتوریل:}$$

❖

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

❖

❖ د سټرلینګ فورمول د $-n$ ام فکتوریل لپاره:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n, \begin{cases} \pi = 3.14\dots \\ e = 2.71\dots \end{cases}$$

❖ د (n) عنصرونو د ترتیب ډولونه چې (n) غږود
(permutation) پرموتیشن په نامه هم یادېږي په (P_n) سره
ښودل کېږي

❖ د (P_n) ترتیب، چې تکرارنا شونی وي: $P_n = n!$

❖ د (P_n) ترتیب، چې تکرار (K_n) ځلې شونی وي:

$$P_n^{K_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{K_1! \cdot K_2! \cdot K_3! \cdot \dots \cdot K_n!}$$

❖ ترکیب Combination:

$$C_K^n = \binom{n}{K} = \frac{n!}{K!(n-K)!}, \quad 0 \leq K \leq n$$

د ترکیبونو ځانګړتیاوې

❖ که $k=0$ شي یا $(n=k)$ شي د ترکیب قیمت (1) د:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

❖ که $(n=k+1)$ شي د ترکیب قیمت (n) کېږي:

$$\binom{n}{k} = n$$

$$\binom{n}{k_1} = \binom{n}{k_2}; \quad k_1 + k_2 = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

$$\diamond \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$$

$$\diamond \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = 2^{n-1}$$

$$\diamond \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\diamond \binom{m}{0} \binom{n}{p} + \binom{m}{1} \binom{n}{p-1} + \dots + \binom{m}{p} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{p}$$

$$\diamond (1) \binom{n}{1} + (2) \binom{n}{2} + (3) \binom{n}{3} + \dots + (n) \binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\diamond (1) \binom{n}{1} - (2) \binom{n}{2} + (3) \binom{n}{3} - \dots - (-1)^{n+1} \cdot (n) \binom{n}{n} = 0$$

❖ تبدیل (Variation) پرتله تکراره:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = n^k \quad \text{❖ تبدیل، سره له تکراره:}$$

❖ د خط دراتلو احتمال په k -ام مرتبه کې:

$$P_{\text{خطراتی}} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

❖ د بینوم قضیه (د برنولی د پرابلم احتمال):

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

❖ د $(a+b)^n$ دوه جمله بې انکشاف عبارت دی له

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

❖ د بائیز (Bayes) فرمول:

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} ; \quad i=1, \dots, n ; \quad \begin{cases} P(B_i) \neq 0 \\ P(A) \neq 0 \end{cases}$$

فزیک Physic

د کمیټونو د اندازه کولو، واحداتو او د مادي د فزیکي حالتونو جدولونه

اضعاف			اجزاء		
د مختاري نوم	سمبول	د 10^n شکل	د مختاري نوم	سمبول	د 10^n شکل
دیکا	D	10^1	دیسې	d	10^{-1}
هکتو	H	10^2	سانتي	c	10^{-2}
کیلو	K	10^3	ملي	m	10^{-3}
میگا	M	10^6	مایکرو	μ	10^{-6}
گیگا	G	10^9	نانو	n	10^{-9}
تیرا	T	10^{12}	پیکو	p	10^{-12}
پیتا	P	10^{15}	فمتو	f	10^{-15}
اگزا	E	10^{18}	اتو	a	10^{-18}
زیټا	Z	10^{21}	زپټو	z	10^{-21}
یوتا	Y	10^{24}	یوکتو	y	10^{-24}

کمیټونه	M.K.S	C.G.S	M.T.S	F.P.S	دایمنشن
کتله	kg	gr	ton	slug	$[M.L^0.T^0]$
اوږدوالی	m	cm	m	ft	$[M^0.L.T^0]$
وخت	sec	sec	sec	sec	$[M^0.L^0.T]$
سرعت	m/sec	cm/sec	m/sec	ft/sec	$[M^0.L.T^{-1}]$
قوه	N	dyne	stene	lb	$[M.L.T^{-2}]$
کار	Joul	erg	Kjoul	ft·lb	$[M.L^2.T^{-2}]$
توان	Watt	erg/sec	Kwatt	HP	$[M.L^2.T^{-3}]$
تعجیل	m/sec^2	cm/sec^2	m/sec^2	$ft/inch^2$	$[M^0.L.T^{-2}]$
فشار	Pascal	Bary	Piz	lb/ft^2	$[M^0.L.T^{-2}]$
کثافت	kg/m^3	g/cm^3	ton/m^3	$slug/ft^3$	$[M.L^{-3}.T^0]$
انرژي	Joul	erg	Kjoul	ft·lb	$[M.L^2.T^{-2}]$
دحرارت مقدار	Kcalory	calory	Termi		$[M.L^2.T^{-2}]$

په (SI) یا نړیوال سیستم کې د اساسي کمیټونو واحدات			
واحد	نوم	کمیت	گڼه
Kg	کیلوگرام	کتله	۱
M	متر	اوږدوالی	۲
sec	ثانیه	وخت	۳

۴	د مادې مقدار	مول	mol
۵	د نور شدت	کانډيلا	candela
۶	د حرارت درجه	کالوین	°K
۷	د برق جریان	امپیر	Amp
په (SI) یا نړیوال سیستم کې د بشپړونکي کمیتونو واحدات			
۱	مسطحه زاویه	رادیان	rad
۲	فضایي (جامده) زاویه	ستي رادیان	st-rad

ځانگړتیا	جامد	مایع	غاز
کتله	ثابت	ثابت	ثابت
وزن	ثابت	ثابت	ثابت
حجم	ثابت	ثابت	متغیر
شکل	ثابت	د لوبڼې	متغیر
تراکم	نه لري	ډېر کم	ډېر
د جذب قوه	زباته	کمه	نه لري (دفعي قوه)
مالیکولي حرکت	نه لري (اهتزازي)	بطي (بروني)	تیز
مالیکولي فاصله	نه لري	کمه	ډېره

۱: سکالري کمیت: هغه کمیت چې یوازې مقدار یې په نظر کې

نیول کیږي لکه: اوږدوالی، کتله، وخت...

۲: وکتوري کمیت: هغه کمیت چې په مقدار سره

لوري (جهت) یې هم په نظر کې نیول کیږي لکه: قوه،

سرعت...

وکتور

❖ د وکتور ښودل په یوه سطحه کې:

$\vec{a} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_j \end{pmatrix}$ (د وکتور مبداء د قایمو وضعیه کمیاتو مبداء ده)

❖ د وکتور مقدار چې مختصات یې راګړي وي:

$$a = \sqrt{X_i^2 + Y_j^2}$$

❖ د دوو وکتورونو محصله چې تر منځ یې د (α) زاویه وي:

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}$$

❖ د یوه وکتور عمودي مرکبه: $R_y = R \cdot \sin \alpha$

❖ د یوه وکتور افقي مرکبه: $R_x = R \cdot \cos \alpha$

❖ هغه زاویه چې یو وکتور یې د (x) محور سره جوړوي:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

قوه

$$\vec{f} = m \cdot \vec{a} \quad \diamond \text{ قوه:}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{f}}{m} \quad \diamond \text{ تعجیل:}$$

$$R = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_2 \cdot \cos\alpha} \quad \diamond \text{ د دوو قوو محصله:}$$

$$R = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_2 \cdot \cos\alpha} \quad \diamond \text{ د دوو قوو تفریق:}$$

$$R = f_1 + f_2 \quad \diamond \text{ د دوو موازي قوو محصله } (\alpha=0^\circ):$$

$$R = \sqrt{f_1^2 + f_2^2} \quad \diamond \text{ د دوو عمودي قوو محصله } (\alpha=90^\circ):$$

$$R = f_1 - f_2 \quad \diamond \text{ د دوو مخالفو قوو محصله } (\alpha=180^\circ):$$

$$f_y = f \cdot \sin\alpha \quad \diamond \text{ د یوې قوې عمودي مرکبه:}$$

$$f_x = f \cdot \cos\alpha \quad \diamond \text{ د یوې قوې افقي مرکبه:}$$

\diamond د قوو د مرکبو څخه په گټه اخیستنې سره د هغوی محصله

قوه او هغه زاویه چې محصله قوه یې د (x) محور سره جوړوي:

$$R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}, \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

$$N = m \cdot g \quad \diamond \text{ د یو جسم وزن:}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad \diamond \text{ د وزن او کتلې ترمنځ اړیکه:}$$

$$M = f \cdot l \quad \diamond \text{ د قوې مومنت:}$$

$$M = f \cdot d \cdot \sin\alpha \quad \diamond \text{ یا:}$$

\diamond د تعادل شرطونه:

1- د (x) په محور د ټولو قواوو مجموعه باید مساوي له صفر

سره وي:

$$f_{1x} + f_{2x} + \dots + f_{nx} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0$$

2- د (y) په محور د ټولو قواوو مجموعه باید مساوي له صفر

سره وي:

$$f_{1y} + f_{2y} + \dots + f_{ny} = 0 \Rightarrow \sum F_y = 0$$

3- د دوران د مومنتونو مجموعه باید مساوي له صفر سره وي:

$$f_1 \cdot l_1 + f_2 \cdot l_2 + \dots + f_n \cdot l_n = 0 \Rightarrow \sum M = 0$$

\diamond که چیرې $\sum F = 0$ خو $\sum M \neq 0$ وي، جسم د انتقالي

تعادل په حالت کې دی، یعنې جسم تعجیل نه اخلي، بلکې

په دوران پیل کوي

\diamond که چیرې $\sum F \neq 0$ خو $\sum M = 0$ وي، جسم د دوراني

تعادل په حالت کې دی، یعنې دا چې جسم په دوران پیل نه

کوي، خو تعجیل لري

❖ د مومنت قانون: $f_1 \cdot d_1 = f_2 \cdot d_2$

❖ د جسم وزن د لفت د پورته تلو پړوخت: $N = m(g + a)$

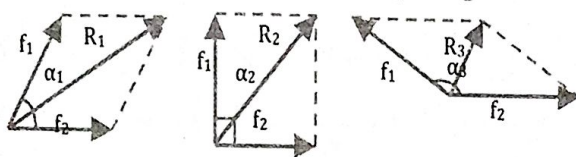
❖ د جسم وزن د لفت د نښکته تلو پړوخت: $N = m(g - a)$

❖ د کپل (زوج) یا جوړه یې قوې د دوران مومنت: $M = f \cdot l$

❖ د خوځولو الجبري محاسبه: $R = \sqrt{(\sum f_x)^2 + (\sum f_y)^2}$

❖ په متلاقي قوو کې:

$$R_3 < R_2 < R_1 \quad ; \quad \alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1$$



اصطکاک

❖ د اصطکاک قوه: $f_f = \mu \cdot N$

- د ستاتيکي اصطکاک قوه: $f_s = \mu_s \cdot N$

- د ډینامیکي اصطکاک قوه: $f_k = \mu_k \cdot N$

- د دوراني اصطکاک قوه: $f_r = \mu_r \cdot N \cdot \cos \alpha$

μ_s د ستاتيکي اصطکاک، μ_k د ډینامیکي اصطکاک او $\mu_r = r \cdot \tan \alpha$ د دوراني اصطکاک ضریبونه دي.

د پورته درې اصطکاکونو د قوو ترمنځ توپیر: $f_r < f_k < f_s$

❖ داخلي اصطکاک (لزجیت): هغه اصطکاک دی چې په مایعاتو په داخل کې د حرکت پړوخت رامنځته کېږي:

$$R_i = \eta \cdot \frac{A \cdot v}{d}$$

η د مایع د اصطکاک ضریب، v د مایع سرعت، A د مقطع مساحت او d پنډوالی.

کار

❖ کار: $W = F \cdot d$ (کار: V حجم، P فشار)

❖ که کار په یوه زاویه ترسره شي: $W = F \cdot d \cdot \cos \theta$

ځانگړي حالتونه

1- که $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$ شي، ترسره شوی کار مثبت دی او

محرك کاري بولي.

2- که $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$ شي، ترسره شوی کار منفي دی او

مقاوم کاري بولي.

3- که $\theta = 90^\circ$ شي، کار صفر دی.

❖ د اصطکاک قوې کار:

$$W_f = f_f \cdot d = \mu \cdot N \cdot d = \mu \cdot mgd \cdot \cos \alpha$$

❖ د ثقل قوې کار: $W = m \cdot g \cdot h$

❖ تعجيل لرونڪي ڪار: $W = m \cdot a \cdot d$

❖ ارتجاعي ڪار (د فنر پر مٿي ترسره شوي ڪار): $W = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

يا: $W = \frac{1}{2} k (x_1^2 - x_2^2)$

❖ هغه ڪار جي ڊگاز په مرسته له ثابت فشار سره پر پستون تر سره ڪيري:

$$W = P \cdot (V_2 - V_1) = P \cdot \Delta V$$

انرژي

❖ ميخانيڪي انرژي: $E_M = E_K + E_P = m \left(g \cdot h + \frac{v^2}{2} \right)$

❖ پوتانشيالي (ذخيروي) انرژي: $E_P = m \cdot g \cdot h$

❖ پوتانشيالي انرژي او ڪار: $W = \Delta E_P = mgh_2 - mgh_1$

❖ په الاستيڪي جسم ڪي پوتانشيالي انرژي: $E_P = \frac{1}{2} k \cdot x^2$

❖ حرڪي انرژي: $E_K = \frac{1}{2} m \cdot v^2$

❖ حرڪي انرژي او ڪار: $W = \Delta E_K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

❖ دانستين فرمول (د مادي بدلبدل په انرژي): $E = m \cdot c^2$

توان

❖ توان (سرعت): $P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = \frac{m \cdot a \cdot d}{t} = m \cdot a \cdot v = F \cdot v$

❖ توان د ثقل قوي په ڪار ڪي: $P = \frac{m \cdot g \cdot h}{t}$

❖ توان د اصطڪاڪ قوي په ڪار ڪي: $P = \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot d}{t}$

ساده ماشينونه

❖ د رافعي قانون او ميخانيڪي گٽه بي:

$$R \cdot a = F \cdot b ; MA = \frac{R}{F} = \frac{b}{a}$$

❖ د رافعي قانون جي د رافعي وزن په نظر ڪي ونيسو:

$$R \cdot a = x \cdot N + F \cdot b$$

x له انڪاء ٽڪي خخه د رافعي ترنيمايي فاصله، N د رافعي وزن

❖ ثابت خرخونه او ميخانيڪي گٽه بي:

$$R \cdot r = F \cdot r ; MA = \frac{R}{F} = \frac{r}{r} = 1$$

❖ متحرڪ خرخونه او ميخانيڪي گٽه بي:

$$R \cdot r = F \cdot 2r ; MA = \frac{R}{F} = \frac{R}{R/2} = 2$$

❖ د يو پري مرکب خرخونه او ميخانيڪي گٽه بي:

$$F = \frac{R}{n} ; MA = \frac{R}{F} = \frac{R}{R/n} = n$$

❖ د څو پرو مرکب خرخونه او ميخانيڪي گٽه بي:

$$F = \frac{R}{2^n} ; MA = \frac{R}{F} = \frac{R}{R/2^n} = 2^n$$

❖ ماپله سطحه او میخانیکي ګټه ېې:

$$F \cdot l = R \cdot h ; MA = \frac{R}{F} = \frac{l}{h}$$

❖ د پانې (فانې) میخانیکي ګټه:

$$MA = \frac{l}{s} = \frac{\text{د پانې اوږدوالې}}{\text{د پانې څوکه یا کوچنۍ سطحه}}$$

❖ پیچ او میخانیکي ګټه ېې:

$$F \cdot 2\pi r = R \cdot l ; MA = \frac{R}{F} = \frac{2\pi r}{l}$$

❖ د کوهي څرخ او میخانیکي ګټه ېې:

$$F \cdot R = N \cdot r ; MA = \frac{R}{r} = \frac{N}{F}$$

د ثقل مرکز

❖ د یوې میلیې د ثقل مرکز په افقي محور:

$$X_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

❖ د ثقل مرکز په دوه بُعدي سطحه کې د کتلې له مخې:

$$P(X_C, Y_C)$$

د (X) مختصه:

د (Y) مختصه:

❖ د جسم (دری بُعدي) د ثقل مرکز د کتلې له مخې: د پورته

X_C او Y_C تر څنګ ېې:

❖ د جسم (دری بُعدي) د ثقل مرکز د وزن له مخې:

$$X_C = \frac{\sum N_i x_i}{N}, Y_C = \frac{\sum N_i y_i}{N}, Z_C = \frac{\sum N_i z_i}{N}$$

❖ د جسم (دری بُعدي) د ثقل مرکز د حجم له مخې:

$$X_C = \frac{\sum V_i x_i}{V}, Y_C = \frac{\sum V_i y_i}{V}, Z_C = \frac{\sum V_i z_i}{V}$$

فشار، جریان او کثافت

❖ فشار: (F قوه، S سطحه)

❖ فشار په مایعاتو کې:

(ρ کثافت، g د ځمکې تعجیل، h ارتفاع)

❖ د پاسکال قانون: (S د پستون مساحت)

❖ د متمادیت معادله (A د عرضي مقطع مساحت، v د جریان سرعت)

❖ د برنولي قانون:

❖ د برنولي په قانون کې د فشار توپیر:

❖ د ارشمیدس قوه: (V حجم)

❖ تراکمي فشار (stress):

$$\delta = \frac{F}{A} = \frac{\text{قوه}}{\text{د سیم د مقطع مساحت}}$$

❖ اورېدوالی او فشار:

$$P = E \frac{\Delta L}{L} \quad (E \text{ د يونگ د ارتجاعيت مودول})$$

$$B = \frac{\text{stress}}{\text{strain}} = \frac{\Delta P}{\Delta V/V_1} = V_1 \cdot \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad \text{❖ د بلك مودول}$$

$$\delta_s = \frac{F}{A} = \frac{\text{مساوي ثوبه}}{\text{د شير د كتاب سطحه}} \quad \text{❖ د شير stress}$$

$$\epsilon_s = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\text{غوځ شوی واکن}}{\text{د كتاب ترمنځ فاصله}} \quad \text{❖ د شير strain}$$

$$S = \frac{\delta_s}{\epsilon_s} = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{F \cdot L_0}{A \cdot \Delta L} \quad \text{❖ د شير مودول}$$

$$P = \frac{P_1 V_1 + P_2 V_2}{V} \quad \text{❖ د دالتن قانون (د څو مخلوطو گازونو فشار)}$$

$$V = V_1 + V_2 \quad \text{❖ پورتنی رابطه کې د (V) قيمته}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{❖ کتلوي کثافت}$$

$$\gamma = \frac{N}{V} \quad \text{❖ وزني کثافت}$$

$$\gamma = \rho \cdot g \quad \text{❖ د کتلوي او وزني کثافت ترمنځ اړيکه}$$

$$Sp \cdot g = \frac{\text{د جسم کثافت}}{\text{د ستندره مادې کثافت}} \quad \text{❖ مخصوصه وزن}$$

ستندره ماده د مایعاتو او جامداتو لپاره اوبه او د گازاتو لپاره هوا ده.

$$N = N - V \cdot \rho \quad \text{❖ په مایع کې د جسم وزن}$$

❖ تودوخه (حرارت)

$$\text{❖ د } ^\circ C, ^\circ K, ^\circ R, \text{ رومر, } ^\circ F \text{ ترمنځ رابطه:}$$

$$\frac{^\circ C}{5} = \frac{^\circ F - 32}{9} = \frac{^\circ R}{4} = \frac{^\circ K - 273}{5}$$

$$^\circ C = \frac{9}{5} (^\circ F - 32) \quad \text{❖ د } ^\circ C \text{ او } ^\circ F \text{ ترمنځ رابطه}$$

$$^\circ C = ^\circ K - 273 \quad \text{❖ د } ^\circ C \text{ او } ^\circ K \text{ ترمنځ رابطه}$$

$$^\circ C = \frac{5}{4} ^\circ R \quad \text{❖ د } ^\circ C \text{ او } ^\circ R \text{ ترمنځ رابطه}$$

$$A = \frac{Q}{\Delta T} = c \cdot m \quad \text{❖ تودوخيز ظرفيت}$$

$$c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T} = \frac{A}{m} \quad \text{❖ مخصوصه تودوخه (حرارت)}$$

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \quad \text{❖ د تودوخي مقدار}$$

$$Q = K \cdot S \cdot T \cdot \frac{\Delta T}{L} \quad \text{❖ د تودوخي خپرېدل د هدايت په وسيله}$$

❖ د دوو جسمونو ترمنځ تودوخيز تعادل:

$$m_1 \cdot c_1 (\theta - T_1) = m_2 \cdot c_2 (T_2 - \theta)$$

❖ θ د تعادل د تودوخي درجه، 2 انډکس لرونکي کمیتونه د گرم

جسم او 1 انډکس لرونکي کمیتونه د سوړ جسم لپاره دي

$$L = L_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T) \quad \text{❖ طولې انبساط}$$

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0 \cdot \Delta T} = ^\circ K^{-1} \quad \text{❖ د طولې انبساط ضريب او واحد يې}$$

$$S = S_0 (1 + \beta \cdot \Delta T) \quad \text{❖ سطحي انبساط}$$

$$V = V_0 (1 + \gamma \cdot \Delta T) \quad \text{❖ حتمي انبساط}$$

$$T_F = \frac{9}{5} (T_K + 32)$$

$$T_C = \frac{5}{9} (T_F - 32)$$

$$T_K = T_C + 273$$

❖ یادونه: $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 3\alpha$

❖ د تودوخې جریان او واحد یې: $H = \frac{dQ}{dt} = \frac{K \cdot S \cdot \Delta T}{L} = \frac{\text{Joul}}{\text{sec}}$

❖ د تودوخې درجې ګرادینټ: $\frac{\Delta T}{L} =$ د تودوخې درجې ګرادینټ

❖ د جسم د تودوخیز هدایت د تناسب ضریب: $K = \frac{dQ \cdot L}{dt \cdot S \cdot \Delta T}$

❖ په (SI) سیستم کې د (K) واحداټ:

$$\frac{\text{watt}}{\text{m} \cdot \text{K}}, \frac{\text{Joul}}{\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{sec}}, \frac{\text{Cal}}{\text{m} \cdot \text{C} \cdot \text{sec}}$$

د K قیمتونه د مختلفو توکو لپاره			
په K په $\frac{\text{watt}}{\text{m} \cdot \text{K}}$	توکی	په K په $\frac{\text{watt}}{\text{m} \cdot \text{K}}$	توکی
0,8	کنګریټ	205,0	المونیم
0,2-0,4	لرګی	109,1	برونز
0,04	ورې (نمد)	385,5	مس
0,024	هوا	34,7	سرپ
0,016	ارګون	406,0	سپین زر
0,14	هیلیم	50,2	پولاد
0,14	هایډروجن	0,8	نښینه
0,023	اکسیجن	1,6	کنګل

❖ د جذب قابلیت: $\varepsilon = \frac{E_2}{E_1} =$ جذب شوې انرژي / ټوله وارده شوې انرژي

❖ د تشعشع قانون: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{O_1}{O_2}$

(S) في واحد د سطحې باندې د خپرې شوې انرژي اندازه او (O)

جذب شوې انرژي

❖ د وین قانون: $\lambda_{max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}}{T}$ (m·K متر·کالوین):

❖ د وین ثابت: $2,9 \cdot 10^{-3} \text{m} \cdot \text{K}$

❖ د سټیفن بولټزمن قانون: $R_B = \delta \cdot T^4$

❖ د سټیفن بولټزمن ثابت: $\delta = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{J/m}^2 \cdot \text{K}^4 \cdot \text{s}$

❖ د خپور شوې تشعشعي انرژي مقدار چې د جسم له سطحې

څخه د وخت په واحد کې خپریږي:

$$R = \varepsilon \cdot \delta \cdot A (T_1^4 - T_2^4)$$

د ε قیمت: د مکمل تور جسم لپاره (1) او د صاف او روښانه

جسم لپاره (0) دی

سینماتیک (علم حرکت)

1) یو بُعدي حرکتونه

❖ د مستقیم الخط حرکت معادله یا وهل شوي فاصله:

$$x = v \cdot t$$

❖ پورتنی معادله د لومړنی فاصلې په شتون کې:

$$x = x_0 + v \cdot t$$

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}$$

❖ متوسط سرعت:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

❖ لحظوي سرعت:

$$a = \frac{v}{t} = \frac{x}{t^2}$$

❖ تعجیل:

تعجیل ←

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

❖ متوسط تعجیل:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{d(v)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

❖ لحظوي تعجیل:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

❖ د فاصلې لومړی مشتق نظر وخت ته سرعت دی:

❖ د فاصلې دوهم مشتق او د سرعت اول مشتق نظر وخت ته

تعجیل دی:

$$a = \frac{d(v)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

تعجیل غیر منظم مستقیم الخط حرکت ($a > 0$)

$$x = \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

❖ د حرکت معادله:

$$v = a \cdot t$$

❖ د سرعت معادله:

$$v^2 = 2a \cdot x$$

❖ د حرکت او سرعت تر منځ رابطه:

که لومړنی سرعت هم شتون ولري:

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

❖ د حرکت معادله:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

❖ د سرعت معادله:

❖ د حرکت او سرعت تر منځ رابطه:

$$v^2 = v_0^2 + 2a \cdot (x - x_0)$$

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

❖ وخت (زمان):

❖ په n -ام لحظه کې وهل شوي فاصله:

$$x_n = v_0 + \frac{1}{2} a(2n - 1)$$

تأجیلی یا تأخیری غیر منظم مستقیم الخط حرکت ($a < 0$)

$$x = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

❖ د حرکت معادله:

$$v = v_0 - a \cdot t$$

❖ د سرعت معادله:

$$v^2 = v_0^2 - 2a \cdot x$$

❖ د حرکت او سرعت تر منځ رابطه:

$$t = \frac{v_0}{a}$$

❖ د ودرېدو (توقف) وخت:

$$x = \frac{v_0^2}{2a}$$

❖ د ودرېدو (توقف) فاصله:

آزاد سقوط

- ❖ د حرکت معادله: $h = \frac{1}{2}gt^2$
- ❖ د سرعت معادله: $v = g \cdot t$
- ❖ د حرکت او سرعت ترمنځ رابطه: $v^2 = 2gh$
- ❖ ځمکې ته د رسیدو وخت: $v = g \cdot t$
- ❖ د ځمکې جاذبوي تعجیل: $g = 32 \frac{ft}{sec^2} = 9,81 \frac{m}{sec^2}$
- ❖ په n -ام لحظه کې وهل شوي ارتفاع: $x_n = \frac{1}{2}a(2t - 1)$

پورته خواته عمودي غورځوونه (پرتاب)

- ❖ د حرکت معادله: $h = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$
- ❖ د سرعت معادله: $v = v_0 - g \cdot t$
- ❖ د حرکت او سرعت ترمنځ رابطه: $v^2 = v_0^2 - 2g \cdot x$
- ❖ اعظمي ارتفاع: $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$
- ❖ اعظمي يا د اوج نقطې ته د رسېدو وخت: $t_{max} = \frac{v_0}{g}$
- ❖ د تگ او راتگ وخت: $T = 2t_{max} = \frac{2v_0}{g}$

ښکته خواته عمودي غورځوونه

- ❖ د حرکت معادله: $h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2$
 - ❖ د سرعت معادله: $v = v_0 + g \cdot t$
 - ❖ د حرکت او سرعت ترمنځ رابطه: $v^2 = v_0^2 + 2g \cdot x$
- (2) دوه بېدي حرکتونه:

- ❖ منځني (متوسط) سرعت: $v_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$
- ❖ لحظوي سرعت: $v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- ❖ منځني تعجیل: $a_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)^2}$
- ❖ لحظوي تعجیل: $a = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

افقي غورځول

- ❖ د حرکت معادله په افقي لوري (جهت): $x = v_0 \cdot t$
- ❖ د حرکت معادله په عمودي لوري: $y = \frac{1}{2}g \cdot t^2$
- ❖ اعظمي افقي فاصله: $x = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$
- ❖ په عمودي يا د Y د محور په لوري سرعت: $v = g \cdot t$
- ❖ د حرکت د مسير رابطه: $Y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$
- ❖ نهايي (اخیرنی) سرعت: $v^2 = v_0^2 + g^2 \cdot t^2$
- ❖ هدف ته د جسم د رسېدو وخت: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$$v^2 = v_0^2 + 2g \cdot h \quad \diamond \text{ د حرکت او سرعت ترمنځ رابطه:}$$

ماپل غورځول

\diamond د ځمکې د جاذبوي تعجیل په شتون کې د حرکت معادلې:

$$x = v_0 t \cdot \cos \theta, \quad y = v_0 t \cdot \sin \theta - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$v_x = v_0 \cdot \cos \theta \quad \diamond \text{ د سرعت معادلې:}$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin \theta - g \cdot t$$

$$Y = x \cdot \tan \theta - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \theta} \quad \diamond \text{ د حرکت د مسیر رابطه:}$$

$$t_{max} = \frac{v_0 \cdot \sin \theta}{g} \quad \diamond \text{ د اوج نقطې ته د رسېدو وخت:}$$

$$T = 2t_{max} = \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g} \quad \diamond \text{ هدف ته د جسم د رسېدو وخت:}$$

$$y = h_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \theta}{2g} \quad \diamond \text{ د اوج نقطې لوړوالی (ارتفاع):}$$

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta}{g} \quad \diamond \text{ د پرتاب اعظمي افقي فاصله:}$$

$$x = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta}{2g} \quad \diamond \text{ د اوج تر نقطې افقي فاصله:}$$

\diamond د اوج نقطې مختصات:

$$P(x, y) \Rightarrow P\left(\frac{v_0^2 \cdot \sin 2\theta}{2g}, \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \theta}{2g}\right)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g \cdot h \quad \diamond \text{ د حرکت او سرعت معادله}$$

ډینامیک (علم القوه)

دایروي یا منحنی الخط حرکتونه

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{\text{Rad}}{\text{sec}} \quad \diamond \text{ زاویوي سرعت او واحد یې:}$$

$$\omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \diamond \text{ منحنی زاویوي سرعت:}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad \diamond \text{ لحظوي زاویوي سرعت:}$$

$$f = \frac{n}{t} \quad \diamond \text{ فریکونسي: (n د دورانونو شمیر، t وخت)}$$

$$T = \frac{1}{f} \quad \diamond \text{ پریود (د یوه مکمل دور وخت):}$$

پریود او فریکونسي یوله بل سره معکوسې اړیکې لري

$$v = \frac{s}{t} \quad \diamond \text{ خطي سرعت: (s قوس)}$$

$$v = \omega \cdot R \quad \diamond \text{ د خطي او زاویوي سرعت ترمنځ اړیکه:}$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R f \quad \diamond \text{ خطي سرعت د یوه مکمل دوران لپاره:}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \diamond \text{ زاویوي سرعت د یوه مکمل دوران لپاره:}$$

$$S = v \cdot t = \omega \cdot R \cdot t \quad \diamond \text{ د حرکت معادله}$$

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = v \cdot \omega \quad \diamond \text{ تعجیل:}$$

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \quad \diamond \text{ زاویوي تعجیل:}$$

$$a = R \cdot \alpha \quad \diamond \text{ د خطي او زاویوي تعجیل اړیکه}$$

د دایروي حرکتونو معادلې

❖ د حرکت معادله: $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

❖ د سرعت معادله: $\omega = \omega_0 + \alpha t$

❖ د حرکت او سرعت اړیکه: $\omega^2 = \omega_0 + 2\alpha\theta$

❖ په n-ام لحظه کې وهل شوي زاوېه:

$$\theta_n = \omega_0 + \frac{1}{2} \alpha (2t - 1)$$

❖ جذب مرکز قوه: $F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot R \cdot \omega^2$

❖ فرار مرکز قوه: $F_{cg} = -\frac{m \cdot v^2}{R} = -m \cdot R \cdot \omega^2$

❖ ځانگړي حالتونه:

1- که $F_{cp} > F_{cg}$ وي نو جسم مرکز ته لویږي.

2- که $F_{cp} < F_{cg}$ وي نو جسم د دایرې له سطحې څخه بهر وځي.

3- که $F_{cp} = F_{cg}$ وي نو جسم د دایرې په سطحه حرکت کوي.

❖ حرکي انرژي: $E_k = \frac{1}{2} m \cdot R^2 \cdot \omega^2$

❖ د دوران تړک: $\tau = F \cdot R$

د نیوټن قوانین او ځینې نور فورمولونه

۱- عطالت (انرشیا): هر جسم خپل د حرکت او سکون حالت تر

هغه ساتي ترڅو چې یو بهرنی عامل پرې عمل ونه کړي.

۲- قوه د تعجیل سره مستقیماً متناسبه ده: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

۳- عمل او عکس العمل قوې سره مساوي او مخالف الجهدت

دي: $F_a = -F_r$

❖ د جاذبې جهاني قوه (د نیوټن د جاذبې قانون): $F_g = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$

❖ د جاذبې جهاني ثابت: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg}$

❖ د ځمکې تعجیل په (h) ارتفاع کې:

$$g' = g \left(\frac{R_e}{R_e + h} \right)^2 = G \frac{M_e}{(R_e + h)^2}$$

❖ د ځمکې شعاع: $R_e = 6.4 \cdot 10^6 m$

❖ د ځمکې د کتلې فرمول: $M_e = \frac{R^2 \cdot g}{G}$

❖ د لمر د کتلې فرمول: $M_s = \frac{4\pi^2 R^3}{G \cdot T^2}$

T یو کال په ثانویو، د R قیمت: $R = 1.5 \cdot 10^{11} m$

❖ د مدار سرعت: $V_{orb} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R}}$

❖ د فرار سرعت: $V_{esc} = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R}}$

❖ د لمر د جاذبې قوې فرمول: $F_{cp} = \frac{4\pi^2 R \cdot M}{T^2}$

$$R = K \cdot S \cdot v^2 \rho \cdot \sin \theta$$

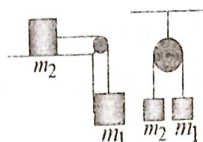
❖ د هوا مقاومت:

K د هوا د مقاومت ضریب، v سرعت، S د جسم سطحه

❖ کشش په تار کې (Tension)

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g, \quad T = \frac{2m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

❖ د موازي کتلو:



❖ د عمودي او افقي کتلو:

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot g, \quad T = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g$$

❖ امپولس، مومنتم او ټکر (تصادم)

$$I = F \cdot t$$

❖ امپولس (ضربه):

$$M = m \cdot v$$

❖ مومنتم:

$$I = M \Rightarrow F \cdot t = m \cdot v$$

❖ د امپولس او مومنتم اړیکه:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

❖ ارتجاعی ټکر:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = v'(m_1 + m_2)$$

❖ غیر ارتجاعی ټکر:

v مخکې له ټکره سرعت، v' وروسته له ټکره سرعت

❖ مایله سطحه

$$F = mg \cdot \sin \theta$$

❖ قوه:

❖ که مایله سطحه اصطکاک ولري، نو قوه:

$$F = mg \cdot \sin \theta - R$$

$$a = g \cdot \sin \theta$$

❖ تعجیل:

$$a = g \cdot \sin \theta - \frac{R}{m}$$

❖ د اصطکاک په شتون کې تعجیل:

$$x = v_0 t + g \sin \theta \cdot t^2$$

❖ د حرکت معادله:

$$v = v_0 + g \sin \theta \cdot t$$

❖ د سرعت معادله:

$$v^2 = v_0^2 + 2g \sin \theta \cdot x$$

❖ د حرکت او سرعت اړیکه:

❖ اهتزازي (هار مونيکي) حرکتونه

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

❖ پریود د فنر-کتلی په سیستم:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

❖ فریکونسي د فنر-کتلی په سیستم کې:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

❖ زاویوي فریکونسي د فنر-کتلی په سیستم کې:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

❖ د رقصې پریود:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

❖ د رقصې فریکونسي:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

❖ زاویوي فریکونسي په رقصه کې:

$$K = m \cdot \omega^2 = \frac{F}{x} \quad \diamond \text{ د فنر ثابت:}$$

$$x = x_0 \cdot \cos \omega \cdot t \quad \diamond \text{ د فنر په اهتزاز کې د حرکت معادله:}$$

$$v = \frac{2\pi}{T} \sqrt{x_0^2 - x^2} \quad \diamond \text{ د فنر په اهتزاز کې د سرعت معادله:}$$

$$a = -\frac{k}{m} \cdot x \quad \diamond \text{ تعجیل په فنر کې:}$$

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \diamond \text{ د هارمونيکي حرکت معادله:}$$

$$v = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad \diamond \text{ د سرعت معادله:}$$

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad \diamond \text{ د تعجیل معادله:}$$

$$F = -m \cdot x \cdot \omega^2 \quad \diamond \text{ قوه:}$$

$$E_k = \frac{1}{2} k (x_0^2 - x^2) \quad \diamond \text{ حرکي انرژي:}$$

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \quad \diamond \text{ ذخیروي انرژي:}$$

$$E_M = E_k + E_p = \frac{1}{2} k \cdot x_0^2 \quad \diamond \text{ میخانیکي انرژي:}$$

څپې (موجونه)

$$\lambda = \frac{v}{f} = v \cdot T \quad \diamond \text{ د څپې اوږدوالی:}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \diamond \text{ د څپې زاویوي فریکوینسي:}$$

$$v = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \quad \diamond \text{ د څپې سرعت:}$$

$$v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}} \quad \diamond \text{ د پړي په اوږدو کې د څپې د خپریدو سرعت:}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \diamond \text{ د میخانیکي څپې انکسار:}$$

$$y = a \cdot \sin \varphi \quad \diamond \text{ د ساده څپې تابع:}$$

$$y = a \cdot \sin \omega t \quad \diamond \text{ د څپې تابع:}$$

$$y = a \cdot \sin \frac{2\pi}{T} t \quad \diamond \text{ د یوه مکمل دور لپاره د څپې تابع:}$$

$$y_M = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad \diamond \text{ د څپې د خپریدو تابع:}$$

$$E = m \cdot c^2 \text{ یا } E = f \cdot h \quad \diamond \text{ د څپې انرژي:}$$

$$h \text{ د پلانک ثابت: } h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Joule} \cdot \text{sec}$$

$$d_2 - d_1 = k\lambda \quad \diamond \text{ د هم فازه اهتزازي ذرو ترمنځ د لارې توپیر:}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \diamond \text{ د } k \text{ قیمت پورتنی رابطه کې:}$$

$$\diamond \text{ د متقابل فازه اهتزازي ذرو ترمنځ د لارې توپیر:}$$

$$d_2 - d_1 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \diamond \text{ د } k \text{ قیمت پورتنی رابطه کې:}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

غږ (صوت) او نوري وړانګې

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad \diamond \text{ د غږ سرعت په گازاتو کې (د لاپلاس فرمول):}$$

$$\gamma \text{ د ځانګړو تودوخیزو ظرفیتونو نسبت په } C_p \text{ ثابت فشار}$$

$$\text{او } C_v \text{ ثابت حجم کې دی: } \gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

❖ د گاز اتود عمومي قانون په نظر کې نیولو سره د غږ سرعت:

$$v = \sqrt{\gamma \frac{R \cdot T}{M}}$$

$$R = 8.314 \frac{\text{Joul}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

❖ د گاز اتو ثابت:

❖ د غږ انعکاس:

(v د غږ سرعت، v' د منعکس شوي غږ سرعت) $v > v'$

❖ د ریزونانس پواسطه د غږ سرعت: $v = 2f(L_2 - L_1)$

❖ د غږ شدت واحد: $\frac{\text{Joul}}{\text{cm}^2 \cdot \text{sec}} = \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$

❖ د نوري خپې د چټکتیا (شدت) تابع: $I = 4a^2 \cdot \cos^2 \frac{\phi}{2}$

❖ د ریاناوارواتن (فاصله): $x = \frac{m \cdot \lambda \cdot D}{d}$; $m = 0, 1, 2, \dots$

❖ د تیاره نوارواتن: $x = \frac{(2m+1) \cdot \lambda \cdot D}{2d}$; $m = 0, 1, 2, \dots$

❖ د نوري لارو توپیر: $\Delta x = \frac{x \cdot d}{D} = m\lambda$; $m = 0, 1, 2, \dots$

اتومي فزیک

❖ د یوه جسم د جذب ضریب:

جذب شوي تشعشعي انرژي د λ خپې له اوږدوالي سره
تشفه شوي وارد شوي انرژي د λ خپې له اوږدوالي سره

❖ د تور جسم لپاره د جذب ضریب قیمت $a\lambda = 1$

❖ د الکترومقناطیسي خپې انرژي (د ماکس پلانک نظریې

پراساس): $E = nh\nu$

h د پلانک ثابت $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{Joul} \cdot \text{sec}$ ، ν فریکونسي او

کوانتمي عدد دی.

❖ د یو الکترون د برقي چارج مقدار:

$$1e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{coul}$$

❖ یو الکترون ولټ انرژي: $1eV = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{Joul}$

❖ د الکترون پوتانشیلي انرژي: $U = \frac{-ke^2}{r}$

❖ د الکترون حرکي انرژي: $k_E = \frac{1}{2} m v^2$

❖ د الکترون مجموعي انرژي د r په شعاع په یو ثابت مدار

باندې: $E = \frac{k \cdot e^2}{2r}$

k د کولمب ثابت $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{coul}^2}$ د اتوم چارج

❖ د یوه اتوم د مدار مجاز یا ممکنه وړانګه:

$$r_n = a_0 \cdot n^2, \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, \dots \\ r = 2, 3, \dots \end{cases}$$

❖ د بور اتوم وړانګه (شعاع): $a_0 = \frac{h^2}{m \cdot k \cdot e^2 \cdot 4\pi^2}$

❖ د سویو ترمنځ د انرژي اختلاف: $h\nu = E_{n1} - E_{n2}$

❖ د جسم کتله (m) د حرکت په وخت کې (د انستاین د کتلې نسبییت):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

❖ د یو کوانټم نور مومنټیم (د حرکت اندازه):

$$p = \frac{hf}{c}$$

❖ د فوتون د خپې اوږدوالي:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E} = \frac{h \cdot c}{m_{ph} c^2} = \frac{h}{m_{ph} c}$$

❖ د فوتون انرژي: $E = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ یا $E = m_{ph} c^2$

m_{ph} د فوتون د انرژي معادل کتله ده.

❖ د ډي بروگلي د خپې اوږدوالي: $\lambda = \frac{h}{mv}$ د ذرې مومنټیم

❖ د ډي بروگلي د خپې سرعت: $v = \frac{h}{\lambda \cdot m}$

❖ د دوو عدم قطعیتونو حاصل ضرب: $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$

Δx عدم قطعیت په مکان کې او Δp عدم قطعیت په مومنټیم کې دی.

❖ د نور سرعت: $c = 3 \cdot 10^5 \frac{Km}{sec} = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{sec}$

هستوي فزیک

❖ د هستې د شعاع د اوږدوالي واحد فمټومتر (fm) دی چې

فرمي (Fermi) هم ورته وایي: $fm = Fermi = 10^{-15} m$

❖ اتومي کتله (اتومي وزن): $A = Z + N$

Z د پروټونونو شمیر، N د نیوترونونو شمیر

❖ د اتوم هسته (X د یو اتوم کیمیاوي علامه) $x \cong {}^A_Z X^N$

❖ د هایدروجن د اتوم هسته ${}^1_1 H$ یا ${}^1_1 H^0$

❖ د هلیوم د اتوم هسته ${}^4_2 He$ یا ${}^4_2 He^2$

د ذرې نوم	د کولن (کولمب) چارج	کتله (Kg)	وړانگه په (fm)
الکترون	$-1.6 \cdot 10^{-19} = -e$	$9.1 \cdot 10^{-31}$	په موجودو وسایلو د اندازې وړ نه دی
پروتون	$+1.6 \cdot 10^{-19} = +e$	$1.67 \cdot 10^{-27}$	1/2
نیوترون	صفر	$1.68 \cdot 10^{-27}$	1/2

د (a)، (b) او (γ) د وړانگو وتل (خارجیدل)

❖ د (α) وړانگې وتل: ${}^A_Z X^N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y^{N-2} + {}^4_2 \alpha^2$

❖ د (β) وړانگې وتل: ${}^A_Z X^N \rightarrow {}^A_{Z+1} Y^{N-1} + {}^0_{-1} \beta$

❖ د (γ) وړانگې وتل: ${}^A_Z X^N \rightarrow {}^A_Z X^N + \gamma$

د الفا (α)، بیتا (β) او گاما (γ) د تشعشعاتو جدول				
ذره	سمبول	ترکیب	چارج	په مور (اصلي) هستې باندې تاثیر
الفا	α (${}^4_2\text{He}$)	2 پروتون 2 نیوترون	+2	د کتلې کموالی، د نوي عنصر تولید
بیتا	β (${}^0_{-1}e$)	الکترون پوزیترون	-1 +	کتله یې عدد ثابت، د نوي عنصر تولید
گاما	γ	فوتون	0	د انرژي له منځه تلل

د نور فزیک

$\Phi = \frac{\omega}{t}$ نورې سیلان: (ω د نور انرژي، t وخت)
 $I = \frac{\Phi}{\Omega}$ د نور شدت یا نورې قوه: (Ω فضایی زاویه)
 $E = \frac{\Phi}{S}$ د روښنایي مقدار: (S سطحه)
 $E = \frac{I}{R^2}$ یا: (I د نور شدت، R سرچینې څخه عمودي فاصله)
 $E = \frac{I \cos \alpha}{R^2}$ یا: (α هغه زاویه چې سرچینه یې د سطحې سره جوړوي)

انعکاس

د انعکاس قوانین:

1- وارده وړانگه، منعکسه وړانگه او نارمل خط په یوه مستوي کې واقع دي.

2- وارده زاویه او منعکسه زاویه سره مساوي دي: $i = r$

متلاقي هندارې

د دوو متلاقي هندارو کې د تصویرونو شمېر:

$$n = \frac{360}{\alpha} - 1$$

د دوو متلاقي هندارو تر منځ زاویه: $\alpha = \frac{360}{n+1}$

- که د دوو متلاقي هندارو تر منځ زاویه صفر یا موازي

هندارې نو د تصویرونو شمیر لایتناهي دي.

- که جسم ثابت وساتل شي او هنداره په موازي ډول د (L) په

اندازه انتقال شي نو تصویر به د ($2L$) په اندازه تغیر وکړي

نسبت اول تصویر ته.

- که وارده شعاع ثابته وي او هنداره د خپل محور په چاپېره د

(α) زاوې په اندازه دوران وکړي نو منعکسه شعاع به د (2α)

په اندازه دوران وکړي.

- په مستوي هندارو کې تصویر مجازي دي.

گروي هندارې

په گروي هندارو کې د حقيقي او مجازي تصویرونو توپيرونه:

مجازي تصوير	حقيقي تصوير
د منعكسه شعاعو د امتداد تقاطع څخه تشكيلېږي	د منعكسه شعاعو د تقاطع څخه تشكيلېږي
د پردې پر مخ نه نيول كېږي	د پردې پر مخ نيول كېږي
معمولاً راسته تشكيلېږي	معمولاً سرچپه تشكيلېږي
د هندارې شاته تشكيلېږي	د هندارې مخ ته تشكيلېږي

مقعرې گروي هندارې		
د تصوير خصوصيات	د تصوير موقعيت	د حقيقي جسم موقعيت
حقيقي، كوچنې $1 < \gamma$ ، سرچپه	انحنه مركز- محراق	انحنه مركز- لايتناهي
حقيقي، مساوي $\gamma = 1$ ، سرچپه	انحنه مركز	انحنه مركز
حقيقي، لوی $\gamma > 1$ ، سرچپه	انحنه مركز- لايتناهي	انحنه مركز-محراق
	لايتناهي	محراق
مجازي، لوی $\gamma > 1$ ، راسته	د هندارې شاته	محراقي فاصله
حقيقي، نقطوي $\gamma < 1$	محراق	لايتناهي

محدبي گروي هندارې			
د تصوير خصوصيات	د تصوير موقعيت	د جسم موقعيت	د جسم حالت
مجازي، نقطوي $\gamma < 1$	محراق	لايتناهي	حقيقي
مجازي، كوچنې $\gamma < 1$ ، راسته	محراقي فاصله	رأس-لايتناهي	حقيقي
مجازي، كوچنې $\gamma < 1$ ، سرچپه	انحنه مركز- محراق	انحنه مركز- لايتناهي	مجازي
مجازي، مساوي $\gamma = 1$ ، سرچپه	انحنه مركز	انحنه مركز	مجازي
مجازي، لوی $\gamma > 1$ ، سرچپه	انحنه مركز- لايتناهي	انحنه مركز- محراق	مجازي
	لايتناهي	محراق	مجازي
حقيقي، لوی $\gamma > 1$ ، راسته	د هندارې مخ ته	محراقي فاصله	مجازي
مجازي، نقطوي $\gamma < 1$	محراق	لايتناهي	مجازي

$$f = \frac{R}{2} \quad \text{❖ محراقي فاصله:}$$

$$R = 2f \quad \text{❖ د گروي هندارې د انحناس شعاع:}$$

❖ د مقعرو هندارو فرمول (د گاوس فرمول):

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R}$$

p' د تصوير فاصله له هندارې نه، p د جسم فاصله له هندارې نه،
 كه بعد له محاسبې د p' قيمت (-) شو تصوير مجازي او كه
 (+) شو تصوير حقيقي دي.

$$f^2 = x \cdot x' \quad \text{❖ د نيوتن فرمول د گروپ هندارو لپاره:}$$

x' د تصوير او x د جسم فاصله د هندارې له محراق څخه ده.

$$p = x + f \quad , \quad p' = x' + f$$

$$\gamma = \frac{p'}{p} = \frac{1}{0} \quad \text{❖ لوی نبودنه:}$$

I د تصوير اوږدوالي، O د جسم اوږدوالي

د نور انكسار

$$\theta = i - r \quad \text{❖ د انحراف زاويه (r منكسره زاويه)}$$

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} \quad \text{❖ د محيط د انكسار مطلقه ضريب:}$$

❖ د دوو محيطونو ترمنځ د انكسار نسبي ضريب (د سنيل قانون):

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} = n$$

$$N = \frac{\text{په خلا کې د نور سرعت}}{\text{د نظرونو محيط کې د نور سرعت}} \quad \text{❖ د انكسار مطلق ضريب:}$$

$$d' = \frac{d}{n} \quad \text{❖ د يوه جسم ظاهري ژوروالي په مايع کې:}$$

❖ د جسم د حقيقي او ظاهري موقعيت ترمنځ فاصله:

$$AA' = d \left(1 - \frac{1}{n}\right) = d - d'$$

❖ د جسم د حقيقي او ظاهري موقعيت ترمنځ فاصله له

متوازي السطوح تبغي څخه:

$$AA' = e \left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{(e د تبغي ضخامت)}$$

❖ په متوازي السطوح تبغه کې د انحراف مقدار:

$$d = e \frac{\sin(i - r)}{\cos r}$$

$$\sin \theta_c = \frac{n_r}{n_i} = \frac{1}{n} \quad \text{❖ بحراني زاويه:}$$

❖ د ابو بحراني زاويه 48° او د بنېنې 42° ده.

$$\sin i_1 = n \cdot \sin r_1 \quad \text{❖ منشور ته ورودي زاويه:}$$

$$\sin i_2 = n \cdot \sin r_2 \quad \text{❖ له منشور نه خروجي زاويه:}$$

$$A = r_1 + r_2 \quad \text{❖ د منشور د رأس زاويه:}$$

$$D = i_1 + i_2 - A = A(n - 1) \quad \text{❖ د منشور د انحراف زاويه:}$$

❖ د منشور د انکسار ضریب اصغري انحراف په حالت کې:

$$n = \frac{\sin \frac{D_{min} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

د اجسامو د نور د انکسار ضریب:	
مواد	د انکسار ضریب (n)
الماس	2.42
اوبه	1.33
کوارتز	1.54
الکول	1.36
بښینه	1.5

عدسیې

❖ (↓) د محدبې عدسې او (∪) د مقعرو عدسې سمبول دی.

د عدسې لپاره ویلی شو چې ټول هغه قوانین چې په ګروي هندارو کې د محدبو هندارو لپاره وه د مقعرو عدسې لپاره او کوم چې د مقعرو هندارو لپاره وه د محدبو عدسې لپاره د تطبیق وړ دي.

❖ اوپتیکی قوه یا د عدسې قدرت (f محراقي فاصله):

$$C = \frac{1}{f}$$

❖ د مرکبو عدسې قدرت: $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

❖ د محدب الطرفین عدسې قدرت:

$$C = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

❖ د مقعر الطرفین عدسې قدرت:

$$C = \frac{1}{f} = (n - 1) \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

نوري وسیلې او آلې

$$a = \frac{1}{d} - \frac{1}{D}$$

❖ د تطابق لمنه:

D حد اکثر او d حد اقل د لیدلو فاصله.

$$P = \frac{1}{f}$$

❖ د ذره بین توان (قدرت):

$$M = \left| -\frac{p}{f} - 1 \right|$$

❖ د ذره بین لوی ښودنه:

$$M = p \cdot d = \frac{1}{f} \cdot d$$

یا:

$$P = \gamma_{ob} \cdot P_{oc}$$

❖ د مایکروسکوپ توان:

$$\gamma = \gamma_{ob} \cdot \gamma_{oc} = \frac{A''B''}{AB}$$

❖ د مایکروسکوپ لوی ښودنه:

$$\gamma = \frac{f_{Ob}}{f_{Oc}} \quad \text{❖ د دوربین لوی ښودنه}$$

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{l}{o} \quad \text{❖ د ټولو نوري وسایلو لوی ښودنه}$$

د نور واحدات		
واحد	نوم	کمیتونه
Lumen	لومین	نوري سيلان Φ
Lux	لکس	د روښنایي مقدار E
Candle	کنډل	د نور شدت I
Violle	ویول	د نور د منبع شدت
Dioptri	دیوپتري	د عدسې قدرت C

د برېښنا (برق) فزیک

$$F = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} \quad \text{❖ د کولمب قانون (د جذب او دفعې قوه):}$$

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{❖ د کولمب ثابت یا د تناسب ضریب:}$$

$$MKS: K = 9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{coul^2}, \quad CGS: K = 1 \cdot \frac{dyne \cdot cm^2}{st - coul^2}$$

$$E = \frac{F}{q} = K \cdot \frac{q}{d^2} \quad \text{❖ د برقي ساحې شدت:}$$

$$V = \frac{W}{q} = \frac{F \cdot d}{q} = E \cdot d \quad \text{❖ پوتانشیل توپیر یا ولتاژ:}$$

$$\text{❖ د پوتانشیل توپیر او برقي ساحې ترمنځ اړیکه:}$$

$$\Delta V = E \cdot \Delta S$$

ΔS د A او B ترمنځ فاصله ده

$$W = F \cdot d = K \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d} \quad \text{❖ کار په برق کې:}$$

$$E_p = q \cdot E \cdot d \quad \text{❖ برېښنايي پوتانشیل انرژي:}$$

کانډنسر (خازن)

$$C = \frac{q}{V} \quad \text{❖ د خازن ظرفیت:}$$

$$C = \epsilon_0 \cdot \frac{S}{d} \quad \text{❖ د موازي لوحو لرونکي خازن ظرفیت:}$$

S د لوحو مساحت، d د لوحو ترمنځ فاصله او

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \quad \text{په خلا کې د برقي نفوذ ضریب دی.}$$

$$E = \frac{1}{2} V \cdot q \quad \text{❖ په خازن کې ذخیره شوې انرژي:}$$

د خازنو ټول په مسلسل ډول

$$q = q_1 = q_2 = \dots = q_n \quad \text{❖ چارج:}$$

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad \text{❖ ولټیج (پوتانشیل تفاوت):}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad \text{❖ معادل ظرفیت:}$$

د خازنو ټول په موازي ډول

$$q = q_1 + q_2 + \dots + q_n \quad \text{❖ چارج:}$$

❖ ولټیج (پوټنشیل تفاوت): $V = V_1 = V_2 = \dots = V_n$

❖ معادل ظرفیت: $C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$

د مستقیم جریان برقي دورې (سرکټونه)

❖ د برېښنا جریان: $I = \frac{q}{t}$ (ا وخت)

❖ د چارج مقدار: $q = I \cdot t$

❖ برقي کار: $W = V \cdot q = V \cdot t \cdot I = R \cdot I^2 \cdot t$

❖ برقي توان: $P = \frac{W}{t} = V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R} = \varepsilon \cdot I$

❖ د برېښنايي سرکټ معادله (r داخلي مقاومت): $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$

❖ برقي محرکه (الکتروموتیف) قوه: $\varepsilon = (R + r) \cdot I$

❖ د هادي مقاومت: $R = \rho \cdot \frac{L}{A}$

❖ مخصوصه مقاومت: $\rho = \frac{R \cdot A}{L}$

❖ برېښنايي هدايت: $g = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \cdot L}$

❖ برېښنايي مقاومت او وکالون $R = \frac{V}{I}$

❖ په برقي مقاومت د حرارت تاثير: $R = R_0(1 + \alpha \cdot \Delta t)$

❖ مخصوصه هدايت: $\sigma = \frac{1}{\rho}$

❖ که په سرکټ کې ډېر مقاومتونه وي: $I = \frac{\sum \varepsilon}{\sum R + \sum r}$

د مقاومتونو تړل په مسلسل ډول

❖ جريان: $I = I_1 = I_2 = \dots = I_n$

❖ ولټیج (پوټنشیل تفاوت): $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

❖ معادل مقاومت: $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$

د مقاومتونو تړل په موازي ډول

❖ جريان: $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$

❖ ولټیج (پوټنشیل تفاوت): $V = V_1 = V_2 = \dots = V_n$

❖ معادل مقاومت: $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$

❖ د ویستون په پل کې مجهول مقاومت: $R_X = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_3$

❖ د ترانسفرمر رابطه: $\frac{I_1}{I_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{V_1}{V_2}$

قوانین

❖ د کرشوف لومړی قانون: $\sum I = 0$

❖ د کرشوف دوهم قانون: $\sum V = \sum R \cdot I$

❖ د اوم لومړی قانون: $V = R \cdot I$

V د پوټنشیل توپیر د مقاومت په دوو انجانونو کې

❖ د اوم دوهم قانون: $V = E - r \cdot I$

V د پوټنشیل توپیر د برېښنايي مؤلده په دوو انجانونو کې

❖ د ژول قانون یا د برق د جریان حرارتي اثر: $H = 0.24 R I^2 \cdot t$

په مقناطیس او برق کې د جذب او دفعې قوه	F	N	dyne
د خازن ظرفیت	C	Farad	
د برق جریان	I	Amp	
د هادي مقاومت او برقي مقاومت	R	(ohm) Ω	
مخصوصه مقاومت	ρ	$\Omega \cdot m$	$\Omega \cdot cm$
د مؤلده محرکه قوه	ε	Volt	
برقي انرژي او کار	W	Joul	erg
داخلي مقاومت	r	(ohm) Ω	
د مقناطیسي ساحې شدت	H	Tesla	Gauss
مقناطیسي سيلان	Φ	Weber	Maxwell

په فزیک کې مخېني ثابت قيمتونه:

❖ د نور سرعت په خلا کې: $C = 2.9979 \cdot 10^8 m/sec$

❖ د نور سرعت په هوا کې: $C = 2.99709 \cdot 10^8 m/sec$

❖ د ځمکې جاذبوي تعجيل: $g = 9.81 m/sec^2$

❖ د جاذبې جهاني ثابت: $G = 6.67 \cdot 10^{-11} N \cdot m^2 / Kg^2$

❖ په خلا کې د برقي نفوذ ضريب: $\varepsilon_0 \approx 9 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$

❖ د الکترو مقناطیسي څپو د خپرېدو سرعت: $3 \cdot 10^8 m/sec$

❖ د مقناطیسي هدايت ثابت: $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} H/m$

❖ د اوگدرو عدد: $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} mol^{-1}$

❖ د گازاتو عمومي ثابت: $R = 8.314 \frac{Joul}{mol \cdot K}$

❖ د فارادي عدد: $F = 9.65 \cdot 10^4 coul$ ← 96500

❖ د ژول د قانون ثابت په برق کې: $K = \frac{1}{4.18} = 0.24$

❖ د پلانک ثابت: $h = 6.625 \cdot 10^{-34} Joul \cdot sec$

❖ د چارج واحد: $\bar{e} = 1.602 \cdot 10^{-19} coul$

❖ د بولتزمان ثابت: $k = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{Joul}{K}$

❖ د سټيفن بولتزمان ثابت: $\delta = 5.67 \cdot 10^{-8} Joul / m^2 \cdot K \cdot sec$

❖ د وين ثابت: $2.9 \cdot 10^{-3} m \cdot K$

❖ د بورون شعاع: $a = 5.292 \cdot 10^{-11} m$

❖ د بورون مگنيتون: $\mu_b = 9.274 \cdot 10^{-24} Joul / T$

❖ د ريډبرگ ثابت: $R = 1.097 \cdot 10^7 m^{-1}$

لومړنی کړن

د ځینې جسمونو کثافت

گڼه	اجسام	gr/cm^3	Kg/m^3
1	Au سره زر	19.3	$19.3 \cdot 10^3$
2	Ag سپین زر	10.5	$10.5 \cdot 10^3$
3	Hg سیماب	13.6	$13.6 \cdot 10^3$
4	Fe اوسپنه	7.86	$7.86 \cdot 10^3$
5	خالصې اوبه په $4^\circ C$ کې H_2O	1	$1 \cdot 10^3$
6	د سمندر اوبه په $15^\circ C$ کې	1.025	$1.025 \cdot 10^3$
7	یخ	0.917	$0.917 \cdot 10^3$
8	الکول R-OH	0.806	$0.806 \cdot 10^3$
9	Air هوا	$1.29 \cdot 10^{-3}$	1.29
10	د اوبو بخار $100^\circ C$	$0.598 \cdot 10^{-3}$	0.598
11	د هایدروجن گاز H	$8.99 \cdot 10^{-5}$	0.0899
12	نایتروجن N	$1.251 \cdot 10^{-3}$	1.251
13	اکسیجن O	$1.429 \cdot 10^{-3}$	1.429
14	لرگی Wood	0.75	$0.75 \cdot 10^3$
15	پترول	0.8	$0.80 \cdot 10^3$
16	بښینه Glass	2.5	$2.5 \cdot 10^3$
17	المونیم Al	2.7	$2.7 \cdot 10^3$
18	پلاتین Pt	21.5	$21.5 \cdot 10^3$
19	الماس C	3.5	$3.5 \cdot 10^3$
20	مس Cu	8.9	$8.9 \cdot 10^3$
21	کاربن دای اکساید CO_2	1.98	$1.98 \cdot 10^3$
22	د ځمکې اوسط کثافت	5.5	$5.5 \cdot 10^3$
23	د لمر اوسط کثافت	1.4	$1.4 \cdot 10^3$
24	د ځمکې قشر	2.8	$2.8 \cdot 10^3$
25	د ځمکې هسته	9.5	$9.5 \cdot 10^3$
26	د لمر هسته	160	$1.6 \cdot 10^5$

د غږ سرعت په ځینو موادو کې

سرعت په m/sec	د اجسامو فزیکي حالت او نوم
331	هوا په $0^\circ C$ کې
228	کاربن دای اکساید CO_2 په $0^\circ C$ کې
337	کاربن مونو اکساید CO په $0^\circ C$ کې

1435	اوبه H_2O
11065	بنزين C_6H_6
5106	المونيم Al
5120	اوسپنه Fe

د ځينې سماوي جسمونو فزيکي مشخصات

- ❖ د لمر کتله: $1.97 \cdot 10^{30} Kg$
- ❖ د لمر د گرې اوسط شعاع: $6.95 \cdot 10^8 m$
- ❖ د لمر او ځمکې تر منځ اوسط فاصله: $1.5 \cdot 10^{11} m$
- ❖ د ځمکې کتله: $5.96 \cdot 10^{24} Kg$
- ❖ د ځمکې اوسط شعاع: $6.37 \cdot 10^6 m$
- ❖ د ځمکې حجم که چېرې گروي فرض شي: $11 \cdot 10^{20} m^3$
- ❖ د ځمکې د فرار سرعت: $11.2 Km/sec$
- ❖ د ځمکې سرعت د لمر په چاپېره: $28.5976 Km/sec$
- ❖ د ځمکې اوسپورمې تر منځ اوسط فاصله: $3.84 \cdot 10^8 m$
- ❖ د سپورمې کتله: $7.3 \cdot 10^{22} Kg$
- ❖ د سپورمې اوسط شعاع: $1.74 \cdot 10^6 m$
- ❖ د سپورمې دورانې تعجيل د ځمکې په چاپېره:

$$a = 0.272 cm/sec^2$$

- ❖ د سپورمې په سطح تعجيل: $g = 1.635 m/sec^2$

- ❖ د سپورمې دوران وخت د ځمکې په چاپېره:

27 ورځې، 7 ساعته، او 43 دقيقې

- ❖ يو نوري کال: $9.461 \cdot 10^{15} m$

مواد	د طولې انبساط ضريب (α)
سرپ	$29 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
المونيم	$24 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
برنج	$19 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
مس	$17 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
اوسپنه (فولاد)	$12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
کانکريټ	$12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
معمولي بښينه	$11 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
پايرکس بښينه	$3.3 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
کوارتز	$0.5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
الماس	$1.2 \cdot 10^{-6} K^{-1}$

مواد	د حجمي انبساط ضريب (γ)
ايتر	$1.51 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
كاربن تيټراكلورايد	$1.18 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
الكول	$1.01 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
بنزين	$0.95 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
د زيتون تيل	$0.68 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
اوبه	$0.21 \cdot 10^{-3} K^{-1}$
سيماب	$0.18 \cdot 10^{-3} K^{-1}$

يوناني الفبا

تلفظ	کوچني حروف	لوی حروف	Pronunciation
الفا	α	A	Alpha
بيتا	β	B	Beta
گاما	γ	Γ	Gamma
دلټا	δ	Δ	Delta
اپسيلون	ϵ, ε	E	Epsilon
زيتا	ζ	Z	Zeta
ايتا	η	H	Eta
ټيټا	θ, ϑ	Θ	Theta
يوتا	ι	I	Iota
کپه	κ	K	Kappa
لمدا	λ	Λ	Lambda
ميو	μ	M	Mu
نيو	ν	N	Nu
کسي	ξ	Ξ	Xi
اومايکرون	o	O	Omicron
پای	π, ϖ	Π	Pi
رو	ρ	P	Rho
سيگما	σ, ς	Σ	Sigma
تاو	τ	T	Tau
ايپسيلون	u	Υ	Upsilon
في	ϕ, φ	Φ	Phi

Chi	X	χ	چي
Psi	Ψ	ψ	سي
Omega	Ω	ω	اوميگا

له لمر څخه د شمسي نظام د سيارو واټن		
$5.79 \cdot 10^{10} m$	عطارد	1
$1.082 \cdot 10^{11} m$	زهره	2
$1.496 \cdot 10^{11} m$	ځمکه	3
$2.279 \cdot 10^{11} m$	مريخ	4
$7.783 \cdot 10^{11} m$	مشتري	5
$1.427 \cdot 10^{12} m$	زحل	6
$2.87 \cdot 10^{12} m$	اورانوس	7
$4.497 \cdot 10^{12} m$	نپتون	8
$5.9 \cdot 10^{12} m$	پلوتو	9

د ځمکې د سيارې تشکيلوونکي عنصرونه		
عنصر	سمبول	د ځمکې په کتله کې:
اکسيجن	O	46.6%
سليکان	Si	27.7%
المونيم	Al	8.1%
اوسپنه	Fe	5.0%
کلسيم	Ca	3.6%
سوديم	Na	2.8%
پوتاشيم	K	2.6%
مگنيزيم	Mg	2.1%
تيتانيم	Ti	0.4%
هايډروجن	H	0.1%

د رومي اعدادو جدول	
رومي	عدد
I	1
II	2
III	3
IV	4
V	5
VI	6
VII	7
VIII	8
IX	9
X	10
XX	20
XXX	30
XL	40
L	50
LX	60
LXX	70
LXXX	80
XC	90
C	100
D	500
M	1000
	5000
	10000
Ā	50000
Ā	100000
Ā	500000
Ā	1000000

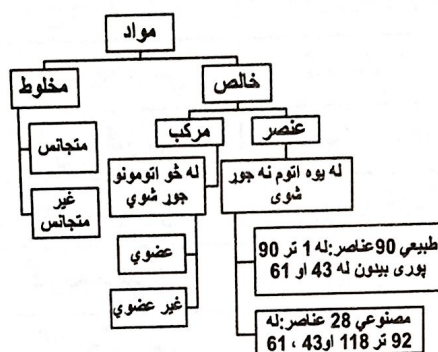
کیمیا (Chemistry)

❖ د عناصرو دوراني جدول په طاقو پریودونو کې د

$$\frac{(n+1)^2}{2} \quad \text{عنصرونو تعداد:}$$

❖ د عناصرو دوراني جدول په جفتو پریودونو کې د

$$\frac{(n+2)^2}{2} \quad \text{عنصرونو تعداد:}$$



د فلزاتو او غیر فلزاتو ترمنځ توپيرونه	
فلزات	غیر فلزات
الکترون له لاسه ورکوي	الکترون اخلي
تحمض کيږي	ارجاع کيږي
د اکسېدېشن نمبر (+) دی	د اکسېدېشن نمبر (-) دی
رنگ لري	اکثرأ بی رنگه دي
اتومي شعاع به لویه ده	اتومي شعاع به کوچنۍ ده
ایوني شعاع به کوچنۍ ده	ایوني شعاع به لویه ده
د جدول په چپ او ښکته خوا کې قرار لري	د جدول په ښکته او پورته خوا کې قرار لري
د برېښنا او تودوخې تیرونکي دي	د برېښنا او تودوخې تیرونکي دي
ځلا لرونکي دي	ځلا نه لري
د لوړ کثافت لرونکي دي	د ټیټ کثافت لرونکي دي

د مخلوطونو بېلگې	
بېلگې	د مخلوطونو ډولونه
الیاژونه	جامد په جامد کې
مالگه په اوبو کې	جامد په مایع کې
کاربن په دود کې	جامد په گاز کې
الکول په اوبو کې	مایع په مایع کې
کرسټالي اوبه	مایع په جامد کې
د اوبو پراس په هوا کې	مایع په گاز کې
گاز لرونکي خنساکونه	گاز په مایع کې
په پلاتین کې هایډروجن	گاز په جامد کې
هوا	گاز په گاز کې

د بېلابېلو مرکباتو مالیکولي فرمولونه

- H_2O ❖ اوبه:
- O_3 ❖ اوزون:
- CO_2 ❖ کاربن ډای اکساید:
- CO ❖ کاربن مونو اکساید:
- SO_2 ❖ سلفر ډای اکساید:
- NH_3 ❖ امونیا:
- HCl ❖ د مالگې تېزاب (هایډروکلوریک اسید):
- $HgCl_2$ ❖ مرکيوریک کلوراید (سولېمه):
- H_2SO_4 ❖ سلفوریک اسید (د گوگړو تېزاب):
- H_3PO_4 ❖ فاسفوریک اسید:
- HNO_3 ❖ نایټریک اسید (د ښورې تېزاب):
- H_2CO_3 ❖ کاربونیک اسید:
- $HNO_3 + 3HCl$ ❖ سلطاني تېزاب:
- $NaOH$ ❖ سوډیم هایډرواکساید (د کاسټک سوډا):
- CaO ❖ چونه چې اوبه ورپه رسېدلې نه وي:
- $CaCO_3$ ❖ د چوني ډبره:
- $Ca(OH)_2$ ❖ چونه چې اوبه ورته رسېدلې وي:
- KCN ❖ پوتاشیم سیاناید:
- $NaCl$ ❖ د خوړو مالگه (سوډیم کلوراید):
- $NaNO_3$ ❖ باروت (سوډیم نایټریت):

K_2CO_3	❖ پوتاشیم کاربونیته
K_2SiO_3	❖ پوتاشیم سلپکته
Na_2SO_4	❖ د گلوبر مالگه
$(NH_4)_2S$	❖ امونیم سلفاید:
Fe_3O_4	❖ مقناطیس (مگنیتایت):
$CaOHCl$	❖ کلسیم هایدروکسی کلوراید:
$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	❖ گچ
$CuSO_4 \cdot 5H_2O$	❖ نبل توتیا:
$FeSO_4 \cdot 7H_2O$	❖ شنه توتیا:
$COCl_2$	❖ د فوسیجن گاز:
	پیلابل ایونونه
SO_4^{2-}	❖ سلفیت:
SO_3^{2-}	❖ سلفایت:
$S_2O_3^{2-}$	❖ تیو سلفیت:
HSO_4^{1-}	❖ بای سلفیت:
PO_4^{3-}	❖ فاسفیت:
PO_3^{3-}	❖ فاسفایت:
HPO_4^{2-}	❖ بای فاسفیت:
NO_3^{1-}	❖ نایتريت:
NO_2^{1-}	❖ نایترايت:
NH_4^{1+}	❖ امونیم:
CO_3^{2-}	❖ کاربونیته:
HCO_3^{1-}	❖ بای کاربونیته:
ClO^{1-}	❖ هایپو کلوریت:
ClO_2^{1-}	❖ کلورایت:
ClO_3^{1-}	❖ کلوریت:
ClO_4^{1-}	❖ پر کلوریت:
CH_3COO^{1-}	❖ اسیتیت:
CrO_4^{2-}	❖ کرومیت:
$Cr_2O_7^{2-}$	❖ دای کرومیت:
CN^{1-}	❖ سیاناید:
SCN^{1-}	❖ تیو سیاناید:
OH^{1-}	❖ هایدر و اکساید:
$C_2O_4^{2-}$	❖ اوکزالیت:
MnO_4^{1-}	❖ پرمنگنیت:

- ❖ ارسنیت: AsO_4^{3-}
- ❖ هایډرونیوم: H_3O^{1+}
- ❖ پیراکساید: O_2^{2-}
- ❖ برومیت: BrO_3^{1-}

❖ د کیمیا مخینې فرمولونه

❖ کتلوي کثافت: $D_m = \frac{m}{V}$

❖ د گاز مولې کثافت: $D_{mol} = \frac{m(mol)}{V_{STP}} = \frac{\text{مولي کتله}}{\text{د یو مول حجم}}$

❖ وزني کثافت: $D_w = \frac{W}{V}$

❖ مخصوصه وزن: $SG = \frac{\text{د مادې کثافت } D}{\text{د ستندورې مادې کثافت } D'}$

❖ د اتومونو کتله د $10^{-22} - 10^{-24} kg$

یا $10^{-25} - 10^{-27} kg$ کیمیت تر منځ شتون لري.

❖ د اتومي کتلې واحد: $1amu = 1.661 \cdot 10^{-27} kg$

❖ اتومي وزن: $A = P^+ + N^0$

❖ اتومي نمبر (د پروتونونو شمېر): P^+

❖ اصلي مدار کې د الکترونونو اعظمي تعداد: $Z = 2n^2$

❖ اصلي مدار کې د اوربیتالونو اعظمي تعداد: $O = n^2$

❖ د مخالف علامه ایوني ذرو تر منځ د جذب قوه:

$F = K \frac{q_1 q_2}{\epsilon^0 r^2}$ (د محلل د ډای الکتریک ثابت)

❖ د مولونو تعداد: $n = \frac{m}{M} = \frac{\text{کتله}}{\text{مالیکولي کتله}}$

❖ د بایل قانون: $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$

❖ د چارلز قانون: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$

❖ د گیلوسک قانون: $\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$

❖ د گازاتو د ترکیب قانون: $\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}$

❖ د اوگدرو اصل: $\frac{n}{V} = k$

❖ د ایډیال (خیالي) گازاتو معادله: $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

❖ د گازونو مالیکولي کتله: $M = \frac{mRT}{PV}$

❖ د گازونو د مخلوط سیستم ټول فشار: $P_{Total} = \frac{n_{Total}RT}{V}$

❖ د گراهام د مالیکولي خپریدني قانون د دوو گازونو لپاره:

$\frac{V_A(Diffusion)}{V_B(Diffusion)} = \frac{\sqrt{M_B}}{\sqrt{M_A}}$

❖ د تیزابو معادل گرام وزن: $EQ_{Acid} = \frac{M}{\text{د } H \text{ تعداد}}$

❖ د القلیو معادل گرام وزن: $EQ_{Base} = \frac{M}{\text{د } OH \text{ تعداد}}$

$$EQ_{salt} = \frac{M}{\text{د فلز تعداد} \times \text{د فلز ولانس}}$$

$$\frac{\text{اتومي وزن} \times \text{تعداد} \times 100}{\text{د مرکب ماليکولي وزن}}$$

$$W\% = \frac{\text{د منحلہ مادې مقدار } gr \times 100}{\text{د محلول مقدار په گرام}}$$

$$V\% = \frac{\text{د منحلہ مادې مقدار} \times 100}{\text{د محلول مقدار}}$$

$$N_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2 + \dots + n_i}$$

$$W_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

$$W_1\% = \frac{m_1 \cdot 100}{m_1 + m_2 + \dots + m_i}$$

$$M = \frac{n}{V} = \frac{m}{M \cdot V}$$

$$C_M = \frac{m \cdot 1000ml \cdot Molar}{M \cdot V}$$

$$C_N = \frac{m \cdot 1000ml \cdot Normal}{EQ \cdot V}$$

$$C_m = \frac{m \cdot mol \cdot 1000gr \cdot molar}{M \cdot m'}$$

M د حل کیدونکې مادې ماليکولي کتله، m' د محلول کتله

❖ مولر محلول = د منحلہ مادې مقدار + کافي اوبه = 1 Liter

$$C_T = \frac{\text{حل کیدونکې ماده په گرام}}{\text{حل کیدونکې ماده په ملي لیتر}}$$

$$C_1 \cdot V_1 = C_2 \cdot V_2$$

$$P = iCRT$$

$$R = 8.31 \frac{Joul}{mol \cdot K}$$

$$PH = -\log[H^+]$$

$$POH = -\log[OH^-]$$

❖ په تیزابي محلول کې (محلول تیزابي دی):

$$POH > 7, [H^+] > 10^{-7} M, PH < 7, [OH^-] < 10^{-7} M$$

❖ په القلي محلول کې:

$$POH < 7, [OH^-] > 10^{-7} M, PH > 7, [H^+] < 10^{-7} M$$

❖ په خنثی محلول کې (محیط خنثی دی):

$$PH = POH = 7, [H^+] = [OH^-] = 10^{-7} M$$

$$PH + POH = 14$$

❖ په هر محلول کې:

د کچکوفسکي قاعده او په اصلي او فرعي مدارونو کې د الکترونونو د وېش قاعده

اصلي مدار	فرعي مدارونه
K	1 s ²
L	2 s ² 2 p ⁶
M	3 s ² 3 p ⁶ 3 d ¹⁰
N	4 s ² 4 p ⁶ 4 d ¹⁰ 4 f ¹⁴
O	5 s ² 5 p ⁶ 5 d ¹⁰ 5 f ¹⁴
P	6 s ² 6 p ⁶ 6 d ¹⁰
Q	7 s ² 7 p ⁶

1s² 2s² 2p⁶ 3s² 3p⁶ 4s² 3d¹⁰ 4p⁶ 5s² 4d¹⁰ 5p⁶ 6s² 4f¹⁴
5d¹⁰ 6p⁶ 7s² 5f¹⁴ 6d¹⁰ 7p⁶

فرعي مدار	د الکترونو شمېر	اوربټالونه
s	2	1
p	6	3
d	10	5
f	14	7

عضوي کيميا

sp هايبريډيزيشن:

❖ د s برخه او p برخه مساوي يعنې (1/2) ده.

❖ دا هايبريډ په استلين کې موجود دی.

❖ د اړيکو ولانسي زاويه (180°) ده.

sp² هايبريډيزيشن:

❖ د s برخه (1/3) او p برخه (2/3) ده.

❖ دا هايبريډيزيشن په غير مشبوع هايډرو کاربنونو خصوصاً

د اتلين په کورنۍ کې موجود دی.

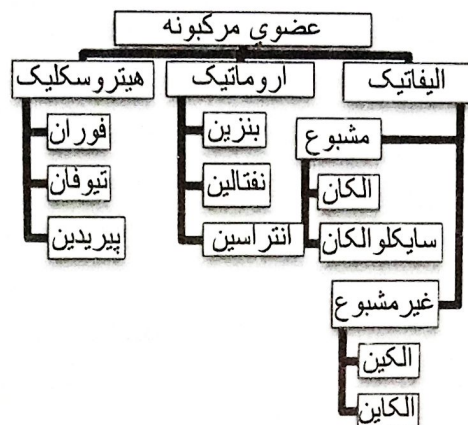
❖ د اړيکو ولانسي زاويه يې (120°) ده.

sp³ هايبريډيزيشن:

❖ د s برخه (1/4) او p برخه (3/4) ده.

❖ دا هایپریدیزیشن په مشبوع هایډروکاربنونو کې موجود دی.

❖ د اړیکو ولانسي زاویه یې (109.5) ده.



د ځینو الکانونو کیمیاوي فرمولونه

CH_4	❖ میتان:
C_2H_6	❖ ایتان:
C_3H_8	❖ پروپان:
C_4H_{10}	❖ بیوتان:
C_5H_{12}	❖ پنتان:
C_6H_{14}	❖ هگزان:
C_7H_{16}	❖ هپتان:
C_8H_{18}	❖ اوکتان:
C_9H_{20}	❖ نونان:
$C_{10}H_{22}$	❖ دیکان:
$C_{11}H_{24}$	❖ ان دیکان:
$C_{12}H_{26}$	❖ دو دیکان:
$C_{13}H_{28}$	❖ ترای دیکان:
$C_{14}H_{30}$	❖ تیترا دیکان:
$C_{15}H_{32}$	❖ پنتا دیکان:
$C_{20}H_{42}$	❖ ایکوزان:
$C_{50}H_{102}$	❖ پنتاکوتتان:
$C_{100}H_{202}$	❖ هکتان:

د عضوي مرکباتو عمومي فرمولونه

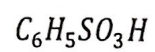
C_nH_{2n+2}	❖ الکانونه:
C_nH_{2n}	❖ الکینونه:
C_nH_{2n-2}	❖ الکاینونه:

C_nH_{2n}	❖ سایکلو الکانونه
C_nH_{2n+1}	❖ الکیل راډیکال
C_nH_{2n-6}	❖ بنزین
C_nH_{2n-12}	❖ نفتالین
C_nH_{2n-18}	❖ انتراسین
C_nH_{2n-2}	❖ ډاینونه
$C_nH_{2n}O_n$	❖ الډوز
$C_n(H_2O)_m$	❖ کاربوهایډریتونه
$R - OH$	❖ الکل
$R - X$	❖ هلاید (X=Br, Cl, F, I)
$R - CO - H$	❖ الډیهاید
$R - CO - R$	❖ کیتون
$R - COOH$	❖ عضوي تیزاب
$R - O - R$	❖ ایتر
$R - COO - R$	❖ ایستر
$R - S - R$	❖ تیو ایتر
$R - NH_2$	❖ امین
$R - CO - NH_2$	❖ امایډ
$R - S - H$	❖ مرکپتان (تایول)
$R - SO_3H$	❖ سلفو
$R - NO_2$	❖ نایټرو
$R - CN$	❖ سیانایډ

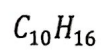
د بیلابیلو عضوي مرکباتو کیمیاوي فرمولونه

CH_3Cl	❖ کلورو میتان (میتایل کلورایډ)
CH_2Cl_2	❖ ډای کلورو میتان
$CHCl_3$	❖ کلورو فارم (ترای کلورو میتان)
CCl_4	❖ تترا کلورو میتان (کاربن تتراکلورایډ)
CCl_2F_2	❖ ډای کلورو ډای فلورو میتان
C_2H_4	❖ ایټلین
C_2H_2	❖ اسټلین
CH_3OH	❖ میتانول
C_2H_5OH	❖ ایټانول
$CH_3 - O - CH_3$	❖ ډای میتایل ایتر
$C_2H_5 - O - C_2H_5$	❖ ډای ایټایل ایتر
$CH_3 - CO - CH_3$	❖ ډای میتایل کیتون

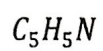
$HCOOH$	❖ فارمیک اسید:
$CH_3 - COOH$	❖ استیک اسید:
$CH_2Cl - COOH$	❖ کلورو استیک اسید:
$C_6H_5 - COOH$	❖ بنزویک اسید:
$(COOH)_2$	❖ اکزالیک اسید:
$HOOCCH_2COOH$	❖ مالونیک اسید:
$C_{15}H_{31} - COOH$	❖ پالمیتیک اسید:
$C_{17}H_{33} - COOH$	❖ اولئیک اسید:
$C_{17}H_{35} - COOH$	❖ ستاریک اسید:
$CH_3 - COO - CH_3$	❖ دای میتایل ایستر:
$CH_3 - S - H$	❖ میتایل تایول:
CH_2O	❖ فارم دیهاید:
$CH_3 - CHO$	❖ استیک دیهاید:
$C_6H_5 - CHO$	❖ بنز دیهاید:
C_6H_6	❖ بنزین:
$C_{10}H_8$	❖ نفتالین:
$C_{14}H_{10}$	❖ انتراسین:
C_6H_5OH	❖ فینول:
$C_6H_5CH_3$	❖ تولوین:
$C_6H_5NH_2$	❖ انیلین:
C_6H_5CHO	❖ بنز دیهاید:
$(C_6H_{10}O_5)_n$	❖ نشایسته (خو قیمته قندونه):
$C_6H_{12}O_6$	❖ گلوکوز او فرکتوز:
$C_{12}H_{22}O_{11}$	❖ سکروز (بوره):
$C_2H_6O_3$	❖ لکتیک اسید:
CH_2OHCH_2OH	❖ ایتیلین گلایکول:
$C_{15}H_{31} - COOH$	❖ پالمیتیک اسید:
$C_{17}H_{35} - COOH$	❖ ستیاریک اسید:
$C_{20}H_{14}O_4$	❖ فینول فتالین:
$C_{17}H_{35}COONa$	❖ صابون:
$C_6H_8O_6$	❖ اسکاربیک اسید:
$C_{17}H_{35}NO_2$	❖ تروپین:
$(C_{17}H_{19}NO_3)_H_2O$	❖ مورفین:
$C_{10}H_{14}N_2$	❖ نیکوتین:
CaC_2	❖ کلسیم کارباید:



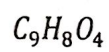
❖ سلفونیک اسید:



❖ د تریپینونو بسیط فرمول:



❖ پایرایډین:



❖ اسپرین:

جيولوجي (Geology)

د منرالونو ځانگړتياوې

- 1- بايد جامد وي.
- 2- بايد طبيعي وي.
- 3- بايد غېرعضوي وي.
- 4- بايد كيمياوي خالصه ماده وي كيدى شي عنصر يا مركب واوسي.
- 5- بايد كرستال وي.

منرالونه په لاندې ډولويشل شوي دي

- 1- خالص عناصر، لکه: سره زر، سلفر او الماس.
- 2- سلفايدونه، لکه: پايرايت (FeS_2) او گالينيت (PbS).
- 3- اکسايډونه او هايډروکسايډونه، لکه: هيماتايت (Fe_2O_3).
- 4- کاربناتونه، لکه: کلسيټ ($CaCO_3$).
- 5- هالايدونه، لکه: هاليت ($NaCl$).
- 6- سلفاتونه، لکه: گچ ($CaSO_4 \cdot 2H_2O$).
- 7- فاسفاتونه، لکه: اپاتيت.
- 8- سيليكاتونه، لکه: فلډسپارونه ($KAlSi_3O_8$).

کلکوالی (سختي)

د ماووس جدول پر بنسټ کلکوالی	
1	تالک
2	گچ
3	کلسيټ
4	فلوريت
5	اپاتيت
6	ارتوکلاز
7	کوارتز
8	توپاز
9	کورانډم
10	الماس
معياري کلکوالی	
2.5	د گوتي نوک
3.5	مسي سکه
4.5	د اوسپني ټوټه
5.5	د بنسپني ټوټه
6.5	پولادي چاقو

د ځینې منرالونو کیمیاوي فرمولونه

Al_2O_3	❖ کوراندوم
$Al_2O_3 \cdot H_2O$	❖ بوکسیت
$Al_3F_{14}O_5$	❖ کیولایت
$Al_6O_{13}Si_2$	❖ مولایت
$BeAl_2Si_6O_{18}$	❖ بریل
$CaCO_3$	❖ کلسیت
CaF_2	❖ فلورایت
$CaMg(CO_3)_2$	❖ دولومیت
$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	❖ گچ
$CdSe$	❖ کادموسیلایت
CeO_2	❖ سیریانیت
Cs_2TiO_3	❖ سیزیم میتا تیتانیت
Cr_2O_3	❖ اسکولایت
$Cu_2CO_3(OH)_2$	❖ ملخیت
CuS	❖ کوویلایت
Cu_2S	❖ چالکوسایت
Cu_9S_5	❖ دای جینایت
$CuFeS_2$	❖ چالکوپایرایت
$CuFeS_3$	❖ کیوبانیت
$FeAsS$	❖ ارسینوپایرایت
$FeCO_3$	❖ سیدیرایت
$FeO_2H \cdot nH_2O$	❖ لیمونایت
Fe_2O_3	❖ هیماتایت
Fe_3O_4	❖ مگنیتایت
FeS_2	❖ پایرایت
Fe_2SiO_4	❖ فیالایت
$KAlSi_3O_8$	❖ ارتوکلاز (فلدسپار):
Na_3AlF_6	❖ کریولایت
$NaAlSi_3O_8$	❖ البیت
$NaCl$	❖ هالیت
PbS	❖ گالینیت
SiO_2	❖ کوارتز
ZnO	❖ تالک
ZnS	❖ سفالیرایت

بیولوژی (Biology)

د پروکاریوت او یوکاریوت حجرو توپیرونه			
گڼه	ځانګړتیاوې	پروکاریوت	یوکاریوت
1	مایټوکاندريا	نه لري	لري
2	اندوپلازمیک ریتیکولم (ER)	نه لري	لري
3	کلوروپلاست	نه لري	لري
4	ګلجی اجسام	نه لري	لري
5	هستوي غشا	نه لري	لري
6	ریبوزوم	لري خو کوچنی	غټ وي
7	میتوسیس	نه لري	لري
8	حجروي دیوال	نه لري	نباتي حجرې یې لري

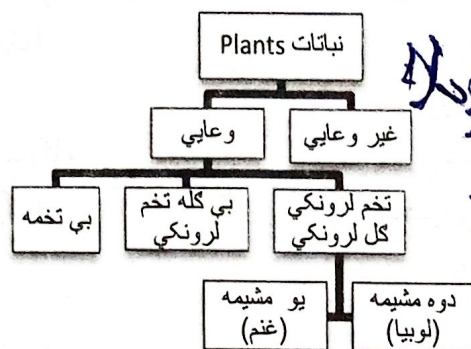
د حیواني او نباتي حجرو توپیرونه			
گڼه	ځانګړتیاوې	حیواني حجره	نباتي حجره
1	حجروي دیوال	نه لري	لري
2	پلاستید	نه لري	لري
3	سنټروزوم	لري	نه لري
4	واکیول	کوچني او زیات	یو او لوی
5	هسته	د حجرې په منځ کې	د حجرې په یوې خوا کې
6	د تېلوفېز په پای کې حجروي ویش	د ژوروالي په واسطه ویشل کیږي	د حجرې په منځ کې سلولوزي دیوال منځ ته راځي

د حجرې بیلابیل پروتوپلازمیک او دندې یې		
گڼه	د حجرې پروتوپلازمیک	فزیولوژیکي دندې یې
1	پلازمایي غشا	نیمه قابل نفوذ، د موادو جذب او کنټرول
2	هسته	د DNA ترکیب، د جنیټیکي او ارثي

خواصو لېږدونه، د حجري د بيولوژيکي فعاليتونو کنترول		
د RNA ترکيب، د پروټين ترکيب	هسته گي	3
د حجري تنفس، د انرژي توليد	مايتوکاندريا	4
د پروټين ترکيب	رايبوزوم	5
د موادو لېږدونه، خوځښت، پروټين جوړول	اندوپلازميک ريټيکولم	6
هضمي انزايمونه لري، پروټيني مواد تجزيه کوي	ليزوزوم	7
د حيواني حجرو په ويشلو کې برخه اخلي	سنټريول	8
په نباتي حجرو کې موجود دي، خوراکي توکي جوړوي، مختلف رنگونه توليدوي او مواد زيرمه کوي	پلاستيدونه	9
د حجري ترشحي فعاليت، د قندونو ترکيب	گلجي اجسام	10

د ژونديو موجوداتو د طبقه بندي اووه پوړونه

Kingdom	عالم	1
Phylum	فايلم	2
Class	ټولکي	3
Order	ارډر	4
Family	کورني	5
Genuse	جينس	6
Species	نوعه	7



45% کروييات
55% دلاړو

د وينې کروييات (د ټولې وينې 45% دي)		
دندې	په يو ملي ليتر کې شمير	ډول
د اکسيجن او غذايي موادو ليږدول	5 تر 6 ميليونو	سره کروييات
د ميکروبونو پر وړاندې د بدن دفاع	7 تر 10 زرو	سپين کروييات
د وينې پرې کيدل	150 تر 500 زرو	دمويه صفحات

هغه ناروغۍ چې د بکتريا او ويروسونو په واسطه منځته راځي			
نوم	د بدن هغه برخې چې زيان وينې	د ناروغۍ عامل	د ناروغۍ نښې
ايدز	د وينې سپين کروييات	ويروس	ټوخي، د اشتها کموالی، ډنگريدل، تبه، د سينې درد او بلغمو کې وينه
توبرکلوز	سږي	بکتريا	د پوستکي ژيړوالی، تبه، کانگې، سرخوږی او د ځيگر په برخه کې درد
هيپاټايټس	ځيگر	ويروس	د لاړو د غدو

پړسیدل او تبه			(ویروسي ژیری)
سرخوږی، ملا او غارې د عضلاتو سختوالی، د غړو فلج	ویروس	دلارو غدې	بوغوت (کله چرک)
سرخوږی، ملا او غارې د عضلاتو سختوالی، د غړو فلج	ویروس	عصبي حجرې، مغز او نخاع	گوزن (د ماشومانو فلج)
تبه، د ملا په برخه کې درد، ټوخي او بلغم	بکتريا، ویروس او آن خینې محرك گازونه	سږي	سینه بغل
فلج، خو په زیات حالت کې د مړینې لامل کیږي	بکتريا	ټپ	تیتانوس

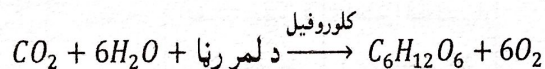
A-E-D-K

A-E-d-k ویتامینونه			
په شحمو (غړو) کې منحل ویتامینونه			
ویتامین	سرچینه (منبع)	په بدن کې څه دندې	په بدن کې څه کمزوري زیاتوالي اغیزې
A	لبنیات، خيگر، هگي، گازرې او سره بانجان	د سترگو په لید او د یوستکي په سلامتیا کې مرسته کوي	پښتورگو، هډوکو او خيگر ته زیان رسېدل، سرخوږی، کانگې او د لید خرابوالی
D	لبنیات، دهگي ژیر او د کب غوړي	له بدن سره د کلسیم او فاسفورس په جذب او مصرف او د بدن په وده کې مرسته کوي	د هډوکو کړېدل په تېره بیا په ماشومانو کې او په لویانو کې د هډوکي نرمي (پوکي) ناراحتی
E	نباتي غوړي، وچي، مېوي	د حجرو د غشا ساتنه او خپنې نورې	د وینې د سرطان شونتیا (امکان) پوره معلوم نه دی

		دندې--	لکه: بادام، پسته، غوزان--	
ځیگر به زیان رسېدل او د وینې کموالی	د تېپي کېدو په وخت کې د زیاتې وینې بهدل	د وینې د پرن کېدو په وخت کې د پروتین په جوړونه کې عمده رول لري	سابه، چای او غوښې	K
په اوبو کې منحل ویتامینونه				
معلوم نه دی	د بري بري ناروغی لامل کېږي پدې حالت کې ناروغ په عصبي ناراحتیو اخته کېږي او د زړه د سکتې خطر پېدا کېږي	د کاربوهایدریت په میتابولیزم کې برخه اخلې او د زړه او اعصابو د دندو په سرتو رسولو کې مرسته کوي	موم پلي، دانې او سابه	B ₁ (Thiamin)
معلوم نه دی	د پوستکي د ناروغیو سبب کېږي	د پوستکي صحت او د انساجو په ترمیم کې مرسته او د میتابولیزم په تعاملاتو کې برخه اخلې	لبنیات، غوښه، هگي سابه	B ₂ (Riboflavin)
د بدن، پښو او لاسونو پرسېدل او ځیگر ته زیان رسوي	Pellagra ناروغی لامل کېږي	پوستکي سالم ساتي او د کاربوهایدریتونو په میتابولیزم کې اساسي رول لري	غوزان، غوښه، کچالو، سره بانجان او نور...	B ₃ (Niacin)
د پښو بې حسي، د لاسونو نه همغږي او د مغزي اعمالو غېر طبیعي کېدل	عضلاتي او عصبي ناراحتی	د امینو اسیدونو په میتابولیزمي تعاملاتو کې مرسته کوي	غوښه، کېله او سابه	B ₆ (Pyridoxin)
معلوم نه دی	د وینې کموالی او عصبي ناراحتی	د وینې د سرو حجرو په جوړولو کې مرسته	غوښه، لبنیات شېدې	B ₁₂ (Synacobalamin)
د معدې او کولمو ناروغی، د بدن د معافیت سیستم کمزوري	سکروي ناروغی	د اوریو ساتنه او د بدن د مقاومت د زیاتوالي لامل کېږي	د ستروس د کورنۍ مېوې، گلپي، سره بانجان او کچالو	C (Ascorbic Acid)

گڼه	مواد	د تولید کال	کارول یې
1	انسولین	1982 م	شکرې ناروغۍ
2	د وینې د خټه کیدو فکتور	1983 م	هیموفیلی ناروغۍ
3	ایکومیبیواکس HB	1986 م	د هیپاټایټیس B واکسین
4	سوماتو تروپین	1987 م	د ودې د هورمون کمښت
5	اکتیوازي انزایم	1987 م	د زړه ودریدل
6	ارتروپونین	1988 م	د وینې کموالی

ضیایی ترکیب (Photosynthesis):



د نخامیه غدې هورمونونه			
گڼه	هورمون	د هدف انساج	اغیزې یې
1	ACTH (Acreno Cortico Tropic H.)	ادرینال غدې	د کورټیزول د هورمون ترشح یا نور سټروید هورمونونه د ادرینال د کارټکس څخه
2	FSH (Follicle Stimulating H.)	تخمدانونه او خصبې	د نارینه او ښځینه گمیتونو انکشاف او د جنسي غدو فعالیت تنظیموي
3	LH (luteinizing H.)	تخمدانونه او خصبې	د تخمې اچولو په وخت کې د تخمې ازادیدل له تخمدانونو او خصیو څخه د جنسي هورمونونو ترشح تحریکوي
4	Prolactin	د شېدو غدې	د شیدو غدو ته انکشاف ورکوي او په تیونو کې د شیدو تولید تحریکوي
5	GH (Growth H.)	د پراښاج د تایروید هورمونونو ازادیدل	د کریندو کو، هډوکو او عضلاتو وده تحریکوي
6	TSH (Thyroid Stimulating H.)	تایروید غده	د تایروید غدې پواسطه، د تایروید هورمونونو ازادیدل تحریکوي

له پښتورگو څخه د اوبو بيا ځلې جذب او د وينې درگونو انقباض تحريکوي	پښتورگي او د وينې رگونه	ADH (Anti-Diuretic H.)	7
درحم انقباض او د شيدو ترشح کوي	د شيدو غدې او رحم	Oxytocin	8

د مونوهايبريسد تزويج لپاره د پونيټ مربعگانې که چېرې (2) نباتات د قد لپاره دوه مختلف اليلونه ولري (هيټروزايگوس وي) د پونيټ د مربعگانو له مخې به د جينوتايپ تناسب (1:2:1) دی خو د فينوتايپ له نظره به $\frac{3}{4}$ لوړ قد او $\frac{1}{4}$ ټيټ قد دي.

بنځينه جينونه → ↓ په	F	f
F	FF	Ff
f	Ff	ff

پای

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**