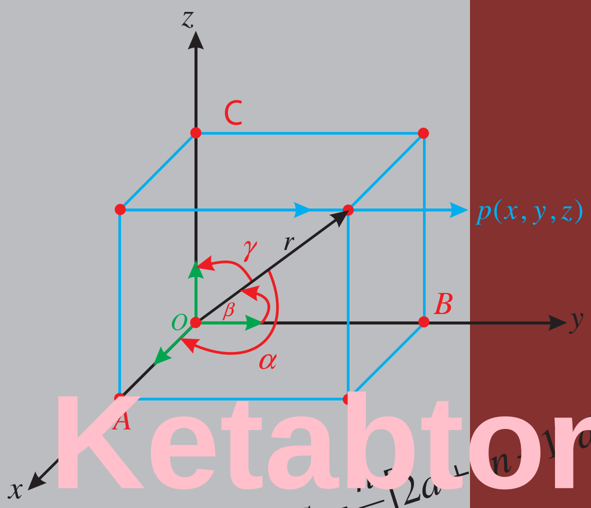
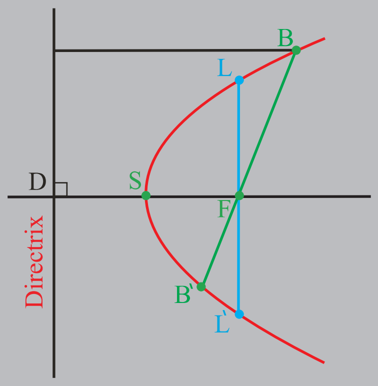
د پوهنې وزارت

رياضي ۱۱

ټولګی



$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$



رياضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

د پوهنې وزارت

رياضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هـ. ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو د څانګې علمي او مسلكي غړي

اډيټ كوونكي: د پښتو ژبې د اډيټ علمي او مسلكي غړي

ټولګی: يوولسم

د متن ژبه: پښتو

انكشاف وركوونكى: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي كتابونو د تأليف لوى رياست

خپروونكى: د پوهنې وزارت د اړيكو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ كال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځاى: كابل

چاپخونه:

برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي كتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار كې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونكو سره قانوني چلند كيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزير پيغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او بښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پيغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پيغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړليک

سرليک | مخونه

لومړی څپرکی مخروطي مقاطع

- مخروطي مقاطع ۳
- بيضوي ۵
- د بيضوي معادله ۹
- د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي ۱۳
- پارابولا ۱۷
- د پارابولا معادله ۱۹
- د هغې پارابولا معادله چې راس يې يو اختياري ټکی وي ۲۳
- هايپربولا ۲۷
- د هايپربولا معادله ۲۹
- د هغې هايپربولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي ۳۳
- د مستقيم خط موقعيت نظرمخروطي مقاطعو ته ۳۷
- د څپرکي مهم ټکي ۴۱
- د څپرکي پوښتنې ۴۴

دويم څپرکی مثلثات

- د ساين قانون ۴۹
- د کوساين قانون ۵۵
- د تانجنټ قانون ۵۹
- مثلثاتي مطابقتونه ٦۳
- مثلثاتي معادلې ٦۹
- دويمه درجه مثلثاتي معادلې ۷۵
- د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو يا سيستمونوحل ۷۹
- د څپرکي مهم ټکي ۸۹
- د څپرکي پوښتنې ۹۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم څپرکی فضايي هندسه

- اساسي مفاهيم او اکسيومونه ۹۵
- په درېِ بُعدي فضا کې کرښه او مستوي ۹۷
- په فضا کې موازي مستقيمونه ۱۰۱
- په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه ۱۰۳
- په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي گانې ۱۰۵
- په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي گانې ۱۰۷
- په فضا کې موازي مستوي گانې ۱۰۹
- د څپرکي مهم ټکي ۱۱۱
- د څپرکي پوښتنې ۱۱۳

څلورم څپرکی ترادفونه

- ترادفونه ۱۱۷
- حسابي ترادف ۱۱۹
- هندسي ترادف ۱۲۷
- د ترادفونو قسمي مجموعه ۱۳۳
- د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه ۱۳۷
- د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل ۱۴۱
- لايتناهي هندسي سلسلې ۱۴۳
- د څلورم څپرکي مهم ټکي ۱۴۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۴۹

پنځم څپرکی لوگاريتم

- اکسپوننشيل تابع گانې ۱۵۳
- لوگاريتم ۱۵۷
- لوگاريتمي تابع گانې ۱۵۹
- معمولي لوگاريتم ۱۶۳
- د لوگاريتم قوانين ۱۶۷
- د لوگاريتم د قاعدې اړول په بله قاعده ۱۷۱
- کرکتيرستيک او مانتيس ۱۷۵
- د لوگاريتم جدول ۱۷۹
- انتي لوگاريتم ۱۸۳
- خطي انټرپولېشن ۱۸۵
- د لوگاريتمي او اکسپوننشيل معادلو حل ۱۸۹
- درياضيکي عمليوپه سرته رسولو کې له لوگاريتم څخه کار اخيستنه ۱۹۳
- د څپرکي مهم ټکي ۱۹۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۹۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی متریکسونه

- متریکسونه ۲۰۵
- د متریکسونو ډولونه ۲۰۹
- د متریکسونو جمع او تفریق ۲۱۳
- په متریکس کې د سکالر ضرب ۲۱۵
- د دوو متریکسونو ضرب ۲۱۷
- د یوه متریکس ترانسپوز متریکس ۲۲۱
- دیترمینانت ۲۲۳
- د دیترمینانت خاصیتونه ۲۲۷
- د 2×2 مرتبې متریکسونو ضربي معکوس ۲۲۹
- له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل ۲۳۱
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه ۲۳۵
- د معادلو د سیستم حل د ګوس(Gouse) په طریقه ۲۳۹
- د شپږم څپرکي مهم ټکي ۲۴۳
- د څپرکي پوښتنې ۲۴۵

اووم څپرکی وکتورونه

- د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه ۲۴۹
- د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی ۲۵۱
- وکتورونه په سطح او فضا کې ۲۵۳
- په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات ۲۵۵
- د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه ۲۵۹
- د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل ۲۶۱
- د وکتوري ضرب حاصل ۲۶۵
- د څپرکي مهم ټکي ۲۷۵
- د څپرکي پوښتنې ۲۷۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی احصایه

دبدلونونو ضریب	۲۸۱
په نورمال منحني کې تیتوالی	۲۸۳
دنورمال توزیع دډول شاخصونه	۲۸۵
څو متحوله ټولنې	۲۸۷
د تیتوالي ګراف	۲۸۹
پیوستون او دپیوستون ضریب	۲۹۱
د خطي میلان معادله	۲۹۵
د اتم څپرکي مهم ټکي	۲۹۹
د څپرکي پوښتنې	۳۰۱

نهم څپرکی احتمالات

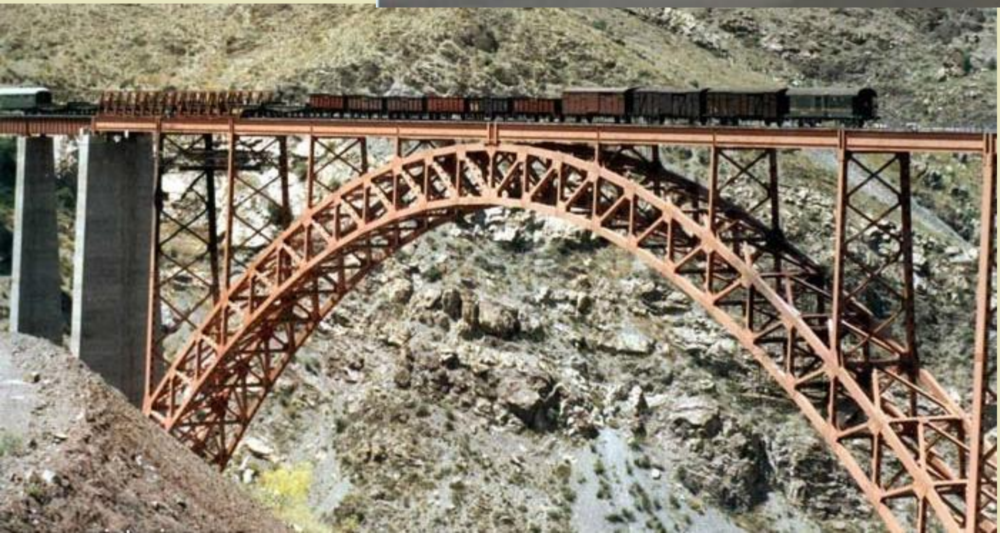
پرموټېشن یا ترتیب	۳۰۵
ترکیب یا کمبینیشن	۳۰۹
ترکیب	۳۱۱
تبدیل	۳۱۳
د بینوم قضیه	۳۱۷
دوه جمله یي احتمال	۳۱۹
د څپرکي مهم ټکي	۳۲۲
د څپرکي پوښتنې	۳۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

مخروطي مقاطع

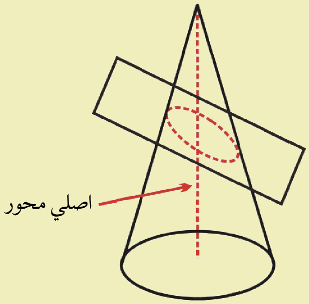
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

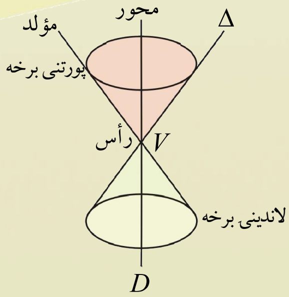
مخروطي مقاطع

sections of Conic



آيا ويلای شئ چې د يوې مستوي او مخروط د تقاطع لـه ګډ فصل څخه څه ډول منحني ګانې لاس ته راځي.

د مخروطي مقاطعو تعريف



د Δ او D دوه مستقيم خطونه داسې په پام کې نيسو چې يو بل د V پـه ټکـي کـې قطع کـړي. کـه چيـرې د D خـط ثابـت او د Δ خـط د هغـه پـه چـاپير وڅرخيږي، له دې څرخولو څخه پـه فضا کې دوه شکلونه چې يـو يـې د V (ټکی) پورته او بل يې د V د ټکي ښکته خواته جوړيږي. هـر يـو يـې مخـروط دی، لکه: مخامخ شکل د D مـستقيم خط د مخروط اصلي محور او د Δ مستقيم خط د هغه مولد دی.

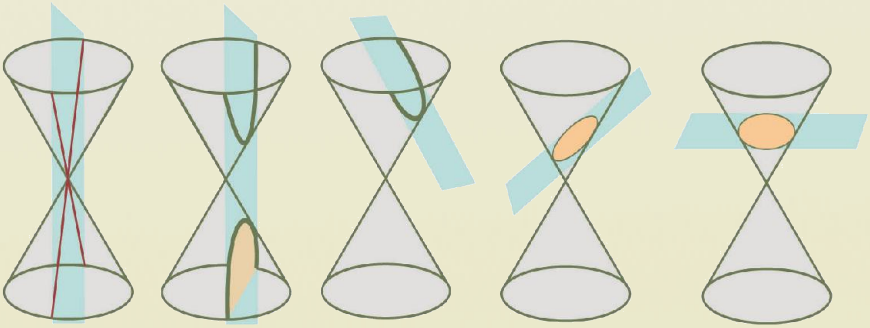
د يوې مستوي په واسطه د يوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفې منحني ګانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کيږي. په راتلونکي کې به هر يو په تفصيل سره ولوستل شي.

فعاليت

- يو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلـي محور بانـدې عمـود او يـا لـه قاعدو سره موازي وي، ويلای شئ، ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور تـه مايلـه وي، ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره موازي وي، نوتقاطع يا ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه يې سر په سر (منطبق) او قاعدې يې موازي وي، د يوې مستوي په واسطه چې اصلـي محور سره موازي وي قطع کړئ. ويلای شئ چې له ګډ فصل څخه يې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مـستوي د مخروط اصلـي محور پـه بر کـې ولـري، تقاطع يا ګډ فصل يې څه ډول هندسي شکل دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو لاس ته راغلی شکل یې یوه دایره(Circle) ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي نسبت د مخروط اصلي محور ته مایل وي، نو لاس ته راغلی شکل بیضوی (Ellipse) ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړی وي چې اصلي محور ته موازي اما هغه په بر کې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له لاس ته راغلي شکل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي دوه څوکي په څوکي مخروطونه داسې قطع کړي چې د مخروط له اصلي محور سره موازي وي خو هغه په ځان کې ونه لري نو، له لاس ته راغلي شکل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي سطحه اصلي محور په برکې ولري، نو لاس ته راغلی شکل یې له دوو متقاطع خطونو څخه عبارت دی چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوی دي.

پوښتنې

1- پورتنې شکل ته په کتو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

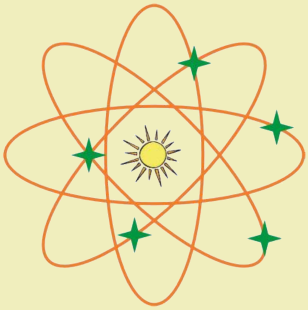
2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکي په څوکي مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

3- د یوې مستوي او یو مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په شکل کې یې وښیې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيضــوي

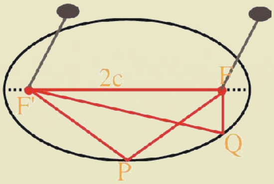
Ellipse



د سيارو حرکت د لمريز نظام په شاوخوا څه ډول منحني ګانې جوړوي؟

فعاليت

- د ميز پر سر د يوې سپينې کاغذي پاڼې پر مخ دوه ستنې په يوه معين او ثابت واټن سره د F او F′ پـه دوو ټکـو کې وټومبئ.
- د يو تار ځوکه چې اوږدوالی يې د دوو ستنو ترمنځ د فاصلې څخه زيات يا د $\overline{FF'}=2c$ وي، په دواړو ستنو کې وتړئ، لاندې شکل تـه پـه کتـو سره يو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وڅرخوئ.



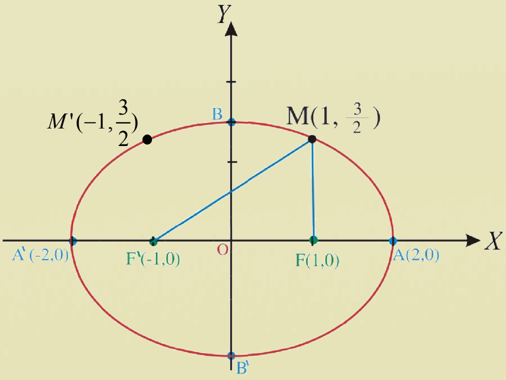
- هغه شکل چې له يوې بشپړې دورې څخه په لاس راځي څه ډول منحنی ده؟

له پورته فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

پايله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معين او ثابت واټن پـه انـدازه د تـار پـه غـاړه د پنسل لـه څرخولـو څخه پـه لاس راځي، بيضوي بلل کيږي، د F او F′ ټکي د بيضوي د محراقونو په نامه ياديږي.

فعاليت

- پـه مخـامخ شـکل کـې د F،F′، M،M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو تـرمنځ د فاصلې د پيـداکولـو لـه فـارمول څخـه پـه کـار اخيـستنې د $|MF'|$, $|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالـی پيـدا کـړی او د $|MF|+|MF'|$ جمع حاصل لاس تـه راوړئ او د $|AA'|$ اوږدوالی سره يې پرتله کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د بیضوي په محیط باندې وټاکئ او پورتنۍ ذکر شوې مرحلې د M' په ټکی باندې تطبیق کړئ. همدارنګه د M ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M\,F'| + |M\,F|$ او $|M'\,F| + |M'\,F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

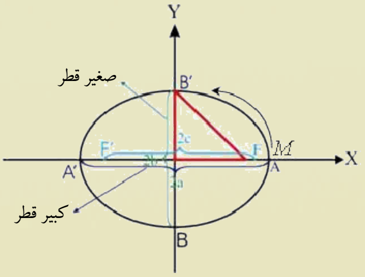
تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ثابتو ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی $(2a)$ ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکي چې په F او F' تورو ښودل شوي، د بیضوي محراقونه او A, A' د بیضوي راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M'\,F| + |M'\,F'| = 2a \quad , \quad |M\,F| + |M\,F'| = 2a$$

نو:

$$|M'\,F| + |M'\,F'| = |M\,F| + |M\,F'| = 2a$$

د بیضوي قطرونه او راسونه



بیضوي بې شمېره قطرونه لري، تر ټولو اوږد قطر یې چې له محراقونو څخه تېرېږي او بیضوي په دوو ټکو (A او A') کې قطع کوي، د کبیر قطر (Major axis) په نامه او ترټولو لنډ قطر یې چې د FF' د تنصیف په ټکي باندې عمود دی، د صغیر قطر (Minor axis) په نامه یادېږي. د A, A' او B, B' ټکي د بیضوی راسونه دي، کبیر قطر په $A\,A'$ چې اوږدوالی یې $AA' = 2a$ او صغیر قطر په BB' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، ښودل کېږي.

یاددښت

که چېرې د M ټکی د صغیر قطر په یوه راس باندې یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې، په پورته شکل کې: $\overline{MF} = \overline{MF'}$ سره کېږي.

د بیضوي له تعریف څخه پوهېږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه

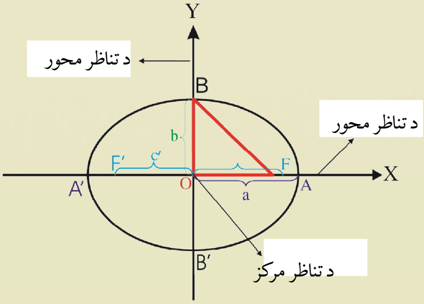
د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکې د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د بیضوي تناظري مرکز او تناظري محور

بیضوي دوه تناظري محورونه لري، یو یې اوږد محور چې د AA' پر قطر باندې منطبق دی، محراقي محور هم بلل کېږي او بل یې لنډ محور چې د BB' پر قطر باندې منطبق دی، تناظري محور په نامه یادېږي.

د دې دواړو تناظري محورونو د تقاطع ټکی د بیضوي تناظري مرکز بلل کیږي او په (O) سره ښودل کیږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$
$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$
$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزیت (Eccentricity): د محراقونو د اوږدوالي او د کبیر قطر د اوږدوالي نسبت ته عن المرکزیت وایې چې د یوې بیضوي شکل د هغه په واسطه ټاکل کیږي ، د بیضوي عن المرکزیت په e سره ښودل کیږي.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهېږو چې په هره بیضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کېږي، ولې؟

د بیضوي د عن المرکزیت او قطرونو تر منځ داسې رابطه $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ ده، د $e = \frac{c}{a}$ د رابطې په کارولو سره هغه لاس ته راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: که چيرې د e قيمت صفر ته نژدې شي، محراقونه د مرکز خوا ته نژدې کېږي او بيضوي تقريباً دايروي شکل غوره کوي. که چېرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کېږي چې يو اوږد شکل غوره کوي، د بيضوي د ډېرو مسايلو په حل کې د عن المرکزيت څخه کار اخيستل کېږي.

پوښتنې

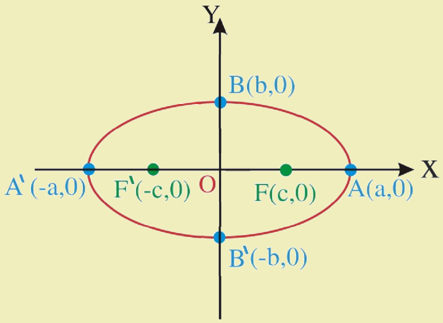
1 – که چېرې په بيضوي کې د کبير او صغير قطر اوږدوالی يو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحني په لاس راځي؟

2 – که چېرې د بيضوي عن المرکزيت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبير قطر او صغير قطر نسبت پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیضوي معادله

آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟



فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x,y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکي ته ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د MF او MF' اوږدوالی پیدا کړئ او دهغه په اساس د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

د بیضوي د معادلې ثبوت

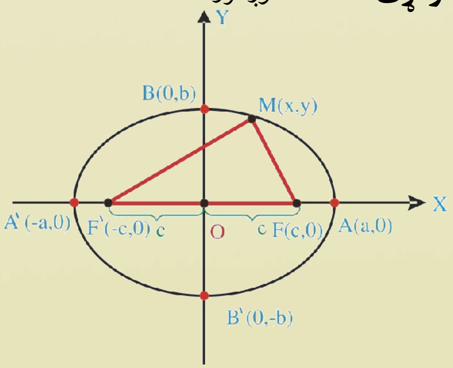
لومړی حالت: موږ لرو:

$$|MF|+|MF'|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

$$(\sqrt{(x-c)^2+y^2})^2=(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$



د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\quad /\div(-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا
$$a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0/(-1)$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کېږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توګه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

د بیضوي په پورته معادله کې a د کبیر قطر نیمایي او b د صغیر قطر نیمایي دی چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مرکز کې او محراقي محور یې د x پرمحور دی.

د کبیر او صغیر قطر د راسونو او د محراقونو مختصات عبارت وي له:

$$\begin{cases}A(a،\ 0)\\A'(-a,0)\end{cases}\qquad\begin{cases}B(0،b\ )\\B'(0،\ -b)\end{cases}\qquad\begin{cases}F(c،\ 0)\\F'(-c،\ 0)\end{cases}$$

دویم حالت: که چېرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له:
$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

د هغه ګراف رسم او د اوږد قطر، لنډ قطر د راسونو او محراقونو مختصات یې ولیکي.

لومړی مثال: که چېرې د بیضوي اوږد قطر د y پر محور باندې او اوږدوالی یې $|AA'|=6$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل:
$$|AA'|=2a=6\Rightarrow\ a=3$$
$$|BB'|=2b=4\quad\Rightarrow\ b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو:
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\quad\Rightarrow\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال:که چیرې اوږد قطر د x پر محور او اوږدوالی یې $|AA'|=10$ او د لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن المرکزیت قیمت پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پوهیږو چې:

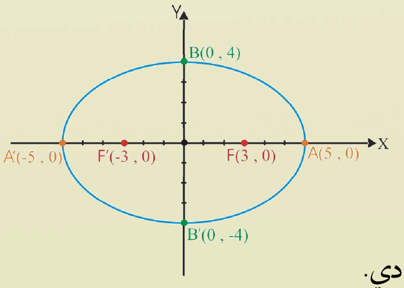
$$|AA'|=2a=10 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 5$$
$$|BB'|=2b=8 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 4$$

د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د c قیمتونه پیداکوو:

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm 3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3,0)$ څخه عبارت دي.

عین المرکزیت: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ دی.

دریم مثال: د داسې بیضوي ګراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

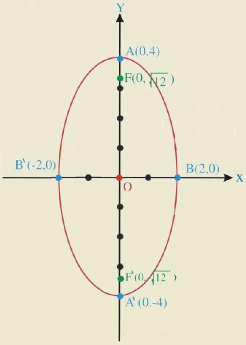
حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 ویشو او لاندې معادله لاس ته راځي:

$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16} \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \quad \Rightarrow \quad a=\pm 4 \quad \Rightarrow \quad A(0،4) \;،\; A'(0\;،\;-4)$$
$$b^2=4 \quad \Rightarrow \quad b=\pm 2 \quad \Rightarrow \quad B(2،0) \;،\; B'(-2\;،\;0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د محراقونو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$

څلورم مثال:د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $|PF| + |PF'| = 2a \qquad \ldots \text{I}$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د I په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2})} + 38 - 12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76 + 68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \ /\div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$|AA'| = 2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$
$$b^2 = 6^2 - (3\sqrt{2}\ )^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 9\cdot 2 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$|BB'| = 2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی او د محراقونو ترمنځ فاصله یې پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \qquad\qquad b)\ \dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې بیضوي معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت یې 0.8 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې بیضوي معادله چې مرکزیې یو اختیاري ټکی وي

آیا داسې بیضوي معادله پیدا کولای شو چې مرکزیې

د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

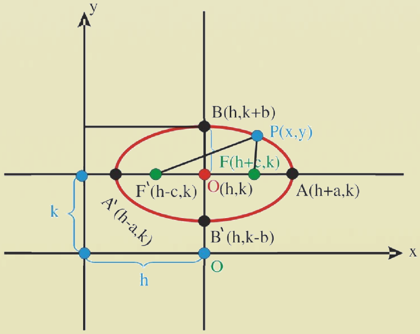
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

فعالیت

- یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې مرکزیې (h,k) اوږد قطریې د x له محور سره موازي وي.
- د $P(x,y)$ یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسئ او هغه له F او F' سره ونښلوئ.
- د بیضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نیولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B,B' وضعیه کمیات په شکل کې وښیاست.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول او د بیضوي د تعریف څخه په کار اخیستنې سره د بیضوي معادله په لاس راوړو:

د PF او PF' قیمتونه د بیضوي د تعریف په رابطه کې ایږدو.



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ )^2$$

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h-c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})/\div 4$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\quad /\div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h-c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې په بیضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو لیکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2\quad /\ \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لومړی مثال: د یوې بیضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د راسونو مختصات چې معادله یې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

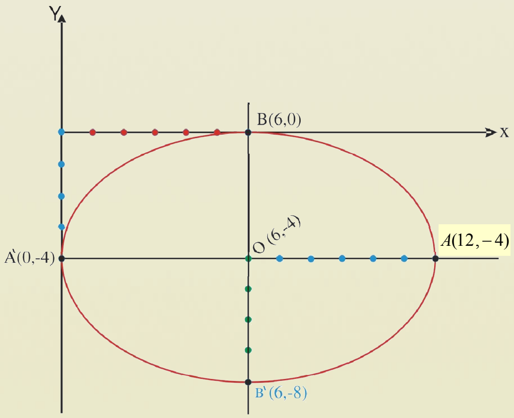
حل: څرنګه چې نوموړې معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات یې $(6,-4)$ دي، اوږد محور یې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36\Rightarrow a=\pm 6$$
$$b^2=16\Rightarrow b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

د اوږد قطر د راسونو مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6,-4)=A(12,-4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6,-4)=A'(0,-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تناظري محور د راسونو مختصات عبارت دي له:

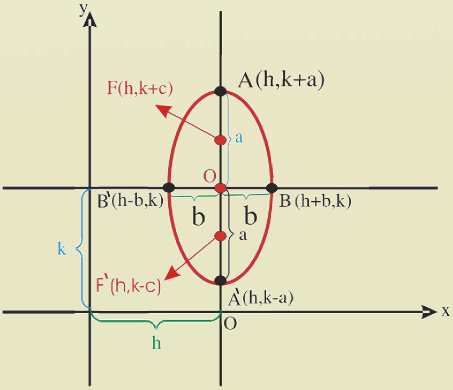
$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$

$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$

د محراقونو مختصات عبارت دي له:

$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$

$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5},-4)$$



دويم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$A(h\,,\,k+a)\,,\;A'(h,k-a)$$

$$B'(h-b\,,k)\,,\;B(h+b,k)$$

$$F'(h,k-c)\;,\;F(h\,,k+c)$$

يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، يعنې $A>0\,,\,C>0$ يا $A<0\,,\,C<0$

دويم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$

$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$

$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$

$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$

$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$

$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$

$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 ویشو: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنی معادله د داسې بیضوي معادله ده چې مرکز يې د (2، −1) ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخېستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$

$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$

$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-9-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساواتو دواړه خواوې په 36 ویشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د لاندې هر یوه بیضوي په معادلو کې د مرکز، محراقونو، راسونو مختصات او د کبیر قطر اوږدوالی پیدا کړئ.

$a)\ \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ $\qquad b)\ x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز يې د (1,2) ټکی، محراق يې د (2, 6) ټکی وي او د (4,6) له ټکي څخه تېره شي.

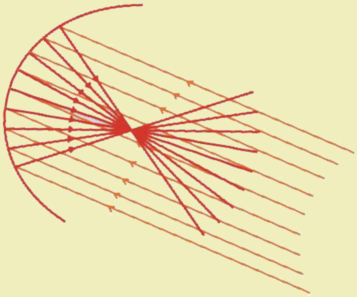
3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه يې رسم کړئ.

$a)\ 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0$ $\qquad b)\ 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

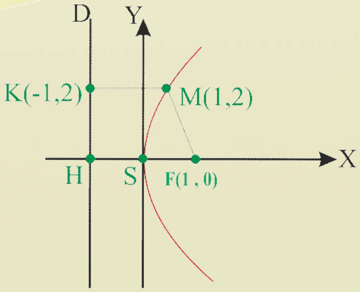
پارابـولا

Parabola



که چېرې د لمر وړانگې په يوې معقرې عدسـيې ولـوېږي، انعکاسـي وړانگې يې له کوم ټکي څخه تېرېـږي؟ دغـه ټکـی څـه نـومېږي او د عدسې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسـيې اصـلي محور په بر کې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعاليت

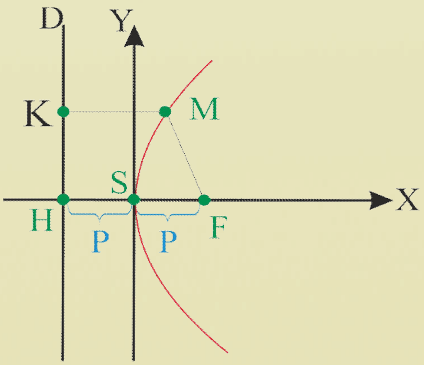


په مخامخ شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شـوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولـو لـه فـارمول څخـه پـه کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالـی پيـدا او يـو لـه بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکـي او يـوه ثابـت مـستقيم خـط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کېږي. دغه ثابت يـا مـستقر ټکـی د پـارابولا محـراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا هادي خط يا موجه خط (Directrix) وايي $\overline{MF} = \overline{MK}$

هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مـستقيم خـط عمـود وي، د پـارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه ياديږي.

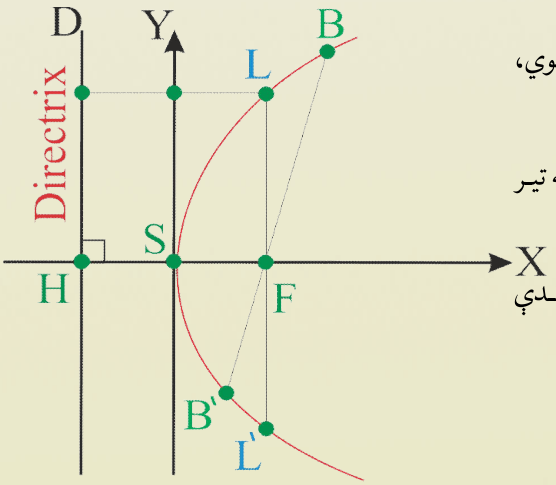


د تناظري محور او منحني ګـډ ټکـی د پـارابولا راس او پـه S سره ښودل کېږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

په پارابولا کې عن المرکزيت $(e = 1)$ دی، ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پارابولا وترونه

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي.

په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی.

LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کیږي.

پوښتنې

د پورته شکل په مرسته وښیئ چې د پارابولا د عمودي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ خط د اوږدوالي څو برابره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا معادله

څنګه کولای شو د هغه پارابولا معادله چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، پيدا کړو.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعاليت

- د وضعيه کمياتو قايم سيستم په پام کې ونيسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله يې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه يو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته يې K ووایاست.
- د F او K د ټکو مختصات وليکئ.

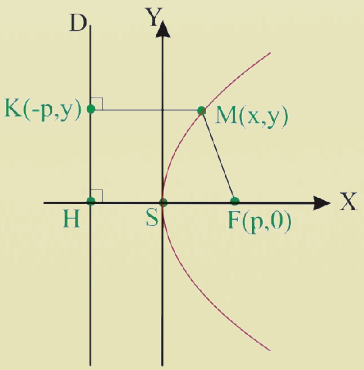
اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د F, M او K, M ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ او دا قيمتونه د پارابولا د تعريف په رابطه کې کېږدي. $|MF| = |MK|$

ثبوت لومړی حالت: پوهېږو چې

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قميتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ايږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

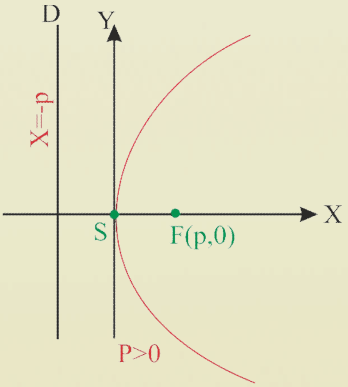
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

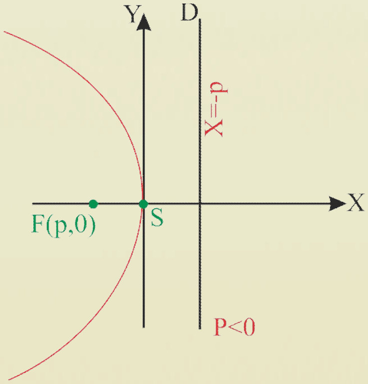
(c) ketabton.com: The Digital Library

وروستى رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې، محراق يې په $F(p,0)$ کې، د تناظر محور يې د x پر محور باندې منطبق دى او د موجه خط معادله يې $x=-p$ دى.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کيڼې خواته خلاصه ده.





لومړى مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي، د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، ويلاى شو $P=2>0$، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:

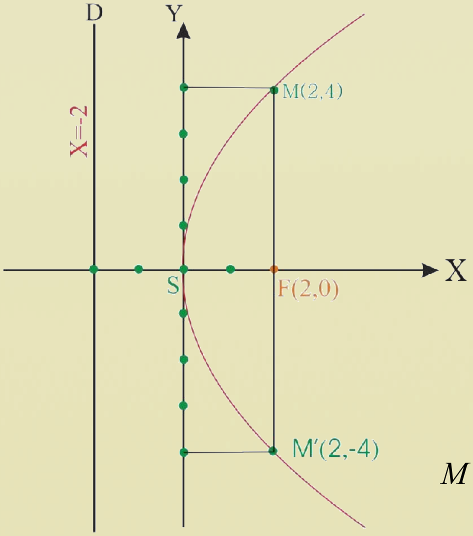
$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

که چېرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

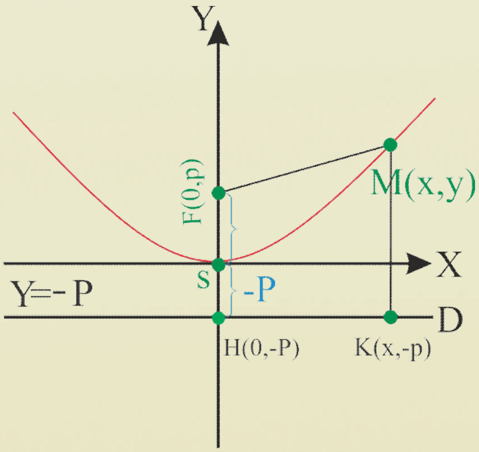
د عمودي وتر د انجامونو مختصات: $M(2,4)\ ,\ M'(2,-4)$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت: که چېرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقیم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیدا کړئ.

ثبوت: د پارابولا منحني پرمخ باندې د $M(x,y)$ ټکي په پام کې نیسو د تعریف له مخې لیکلای شو:



$$|\overline{MF}| = |MK|$$

$$|\overline{MF}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$|\overline{MK}| = \sqrt{(x-x)^2 + [(y-(-p)]^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

$$(\sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)})^2 \ /(\ \ )^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

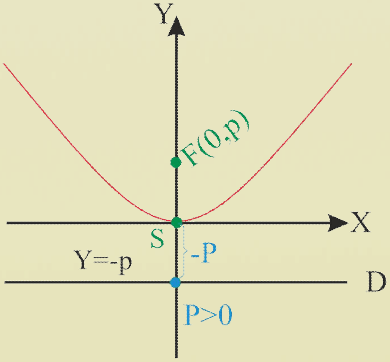
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

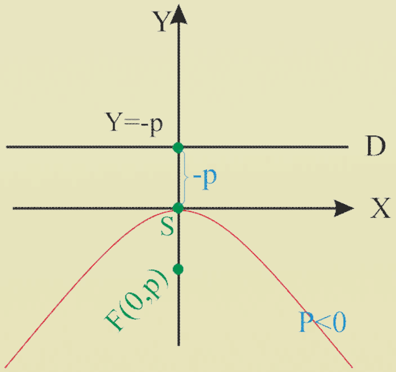
$$\Rightarrow x^2 = 4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیه کمیاتو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د y محور دی چې د محراق مختصات یې $F(0,p)$ او $y=-p$ یې د هادي مستقیم خط معادله ده.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس او محراق مختصات او د هادي خط معادله پیدا کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قیمت په لاس راوړو.

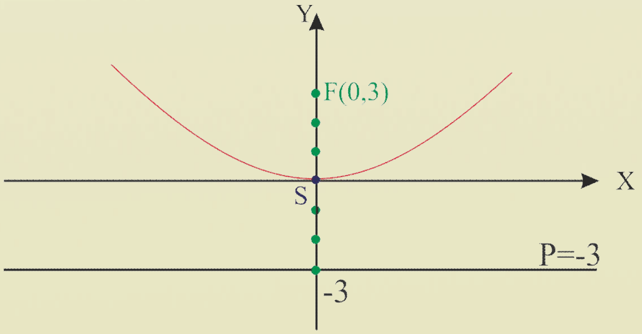
$$4p = 12 \Rightarrow p = 3$$

څرنگه چې $P = 3 > 0$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$



پوښتني

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعیه کمیات او د هادي (موجه خط) معادلې پیدا او گرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قیمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پیدا کړئ.

$a)\ S(0,0) \qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad F(-2,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې پارابولا معادله چې راس یې یو اختیاري ټکی وي

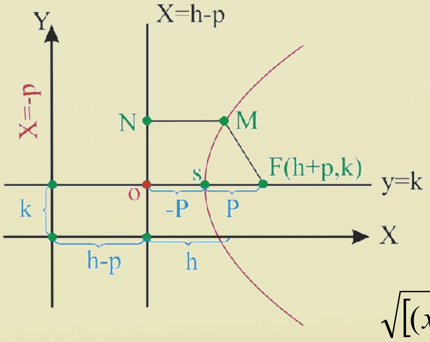
آیا د داسې پارابولا معادله پیدا کولای شو چې د راس مختصات یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي.

$$(y-k)^2=4p(x-h)$$
$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

فعالیت

- یوه پارابولا د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ چې راس یې (h,k) او تناظري محور یې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بیا د M له ټکي څخه یو عمود خط پر هادي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N وواياست.

لومړی حالت: د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فورمول څخه په ګټې اخیستنې سره د F,M او N,M ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړئ، بیا د هغې پارابولا معادله چې راس یې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.



ثبوت: څرنګه چې د F او M ټکو وضعیه کمیات پیژنو او همدارنګه د N وضعیه کمیات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعریف له مخې لیکو

$$|MF|=|MN|$$

$$\sqrt{[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2}=\sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

دواړه خواوې مربع کوو او له اختصار وروسته لیکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y-k)^2=[x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2=x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

د پورته رابطې له پراختیا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

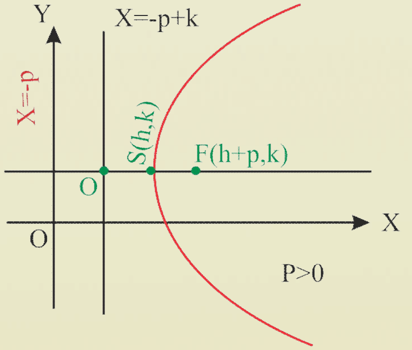
$$y^2-2ky+k^2=4px-4ph$$
$$(y-k)^2=4p(x-h)$$

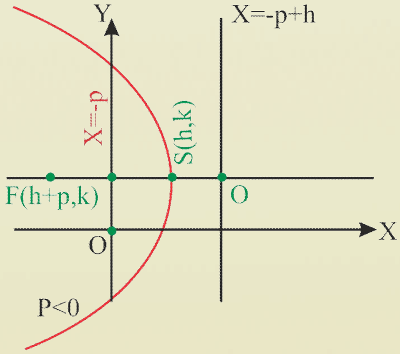
(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس او محراق وضعیه کمیات یې په ترتیب سره $S(h,k)$ او $F(h+p,k)$ دي، او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





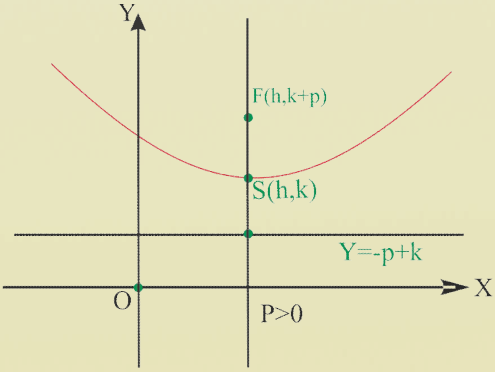
دویم حالت:د هغې پارابولا معادله چې راس یې (h,k) او د تناظر محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

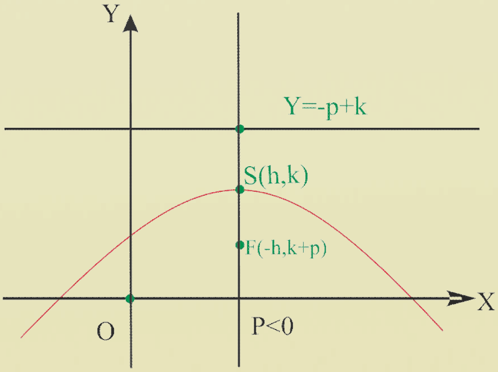
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چېرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چېرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړي مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $k = 2, h = 1$ کېږي، په دې صورت کې د پارابولا د رأس وضعيه کميات عبارت دي له: $S(1,2)$

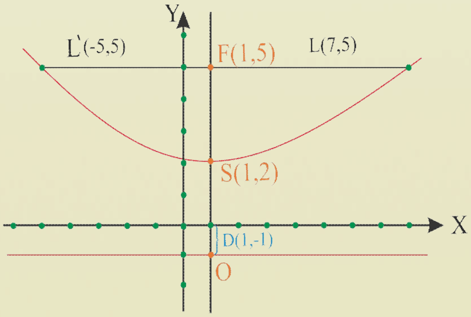
$$4p = 12 \Rightarrow p = \frac{12}{4} = 3$$

د محراق مختصات: $F(h, k+p) = F(1, 2+3) \quad \Rightarrow \quad F(1,5)$

د موجه خط معادله $y = k - P \quad \Rightarrow \quad y = 2 - 3 = -1$

د تناظر محور: $x = h \Rightarrow x = 1$

د عمودي وتر د انجامونو د مختصاتو د پيدا کولو لپاره د y قيمت چې په محراق کې لـرو پـه عـمومي معادلـه کې اېږدو يعني $y = 5$ دی.



$$(x-2)^2 = 12(5-2)$$
$$(x-1)^2 = 12 \cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 36$$
$$(x-1) = \pm 6$$
$$x_1 = 6 + 1 = 7, \;\; x_2 = -6 + 1 = -5$$
$$L(7,5) \qquad L'(-5,5)$$

دويم مثال: د $(y-4)^2 = -6(x+3)$ معادله په پام کې ونيسی، د پارابولا د راس او محراق مختصات، د موجه خط معادله، د تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پيدا او گراف يې رسم کړئ.

حل:دراس مختصات: $k = 4, h = -3 \quad \Rightarrow \quad S(-3,4)$

$$4P = -6 \Rightarrow P = -\frac{3}{2}$$

څرنگه چې $0 > -\frac{3}{2}$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

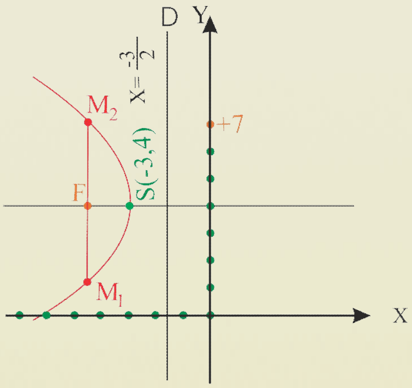
د محراق مختصات: $F(h+p, k) = (-\frac{9}{2}, 4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x = h - p \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y = k \quad \Rightarrow \quad y = 4$

د محراق $x = -\frac{9}{2}$ مختصې قيمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$

يادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې ګراف يوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې A يا C صفر وي نه دواړه $(C\neq 0\ ,\ A=0)$ وي يا $C=0, A\neq 0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په توسعوي ډول وليکئ.

دريم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معياري معادلې په ډول وليکئ د راس او محراق مختصات، د مؤجه خط او تناظري محور معادلې يې پيدا کړئ.

حل: په راکړل شوې معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته يې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې ليدل کېږي: $4P=-8 \quad \Rightarrow \quad P=-2$

د راس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \quad \Rightarrow \quad S(-3,1)$

د محراق مختصات: $F(h+p,k) \Rightarrow F(-3-2,1) \Rightarrow F(-5,1)$

د موجه خط معادله $x=h-p \quad \Rightarrow \quad x=-3+2=-1$

د تناظر محور : $y=k \quad \Rightarrow \quad y=1$.

پوښتنې

1. د لاندې پارابولا معادله پيدا کړئ، په داسې حال کې چې:

$S(1,3), F(-1,3)$

2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ معادلې ګراف د ټولو جزئياتو سره رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معياري معادلو په ډول وليکئ او ګراف يې رسم کړئ.

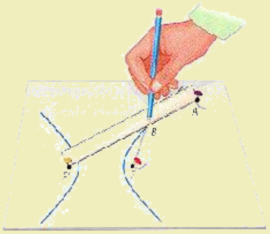
a) $y^2-6y+8x+41=0$ b) $x^2-2x-6y-53=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هـايپـربـولا

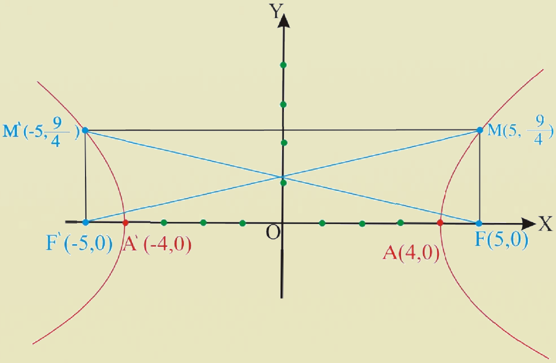
Hyperbola

پـه يوه مستوي کـې د ټولـو هغـو ټکـو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکـو څخه تـل لـه يـوه ثابـت اوږدوالـي سـره مـساوي وي، څـه ډول يـوه منحنـي کيدلای شي؟



فعاليت

- په لاندې شکل کې د F, F', M, M', A او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پيدا کړئ.
- د $|MF'| - |MF|$ د تفريق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره يې پرتله کړئ.
- پورتنی فعاليت د M' ټکي لپاره تطبيق او پايله يې وليکئ
- د $|MF'| - |MF|$ او $|M'F'| - |M'F|$ د تفريق حاصل يو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعاليت له سرته رسولو وروسته لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل يې له دوو مستقرو ټکو څخه تـل مـساوي اوږدوالی ولري، هايپربولا Hyperbola بلل کيږي، يعنې: $|MF'| - |MF| = |AA'| = 2a$

په شکل کې F او F' د هايپربولا محراقونه، M او M' د هايپربولا دوه اختياري ټکي دي.

د FF' منځنی ټکی د هايپربولا مرکز دی، د مرکز او هر يوه راس ترمنځ فاصله پـه a او د مرکـز او هـر يـوه محـراق ترمنځ فاصله په c سره ښيي. $AA' = 2a$ او $FF' = 2c$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

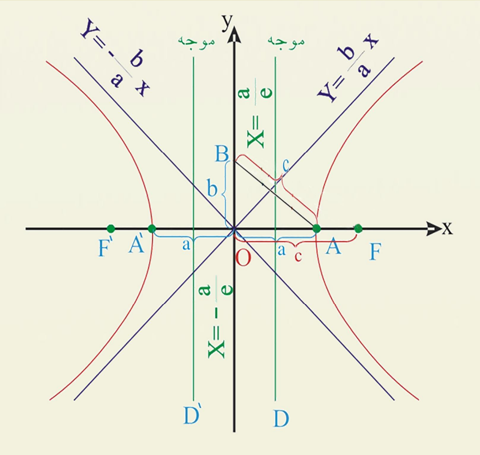
د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په څېر هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یو یې په FF' باندې منطبق دی او بل یې د FF' عمودي ناصف کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، د ها یپربولا مرکز بلل کېږي.

هغه تناظري محور چې له FF' څخه تیرېږي، د متقاطع محور (Transverse axis) په نامه یادېږي، ځکه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکو ته د هایپربولا حقیقي راسونه وایې او اوږدوالی یې له $|AA'| = 2a$ څخه عبارت دی.

هغه تناظري محور چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، د مزدوج محور (conjugate axis) په نوم یادېږي. د مرکز دواړو خواوته د B او B' دوه ټکي پر نوموړي محور باندې داسې په نظر کې نیسو چې $OB = OB' = b$ وي، دا دوه ټکي د هایپربولا غیرې حقیقي راسونه بلل کیږي چې ترمنځ یې فاصله $|BB'| = 2b$ ده.

په یوه هایپربولا کې د a, b او c اوږدوالي ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2 = a^2 + b^2$



عن المرکزیت: څرنګه چې په هایپربولا کې $c > a$ دی، نو $e > 1$ کیږي. چې د a, b, c او عن المرکزیت ترمنځ د $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ رابطه شته. د $e = \frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخیستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړې.

پوښتني

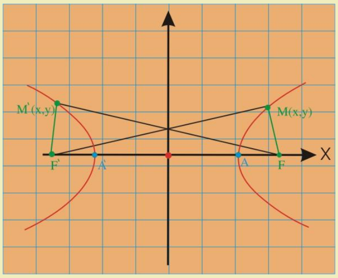
د هایپربولا یو شکل رسم کړئ او په هغه کې د هایپربولا مرکز، محراقونه، حقیقي او غیرې حقیقي راسونه، متقاطع او مزدوج محورنه وښیئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هايپربولا معادله

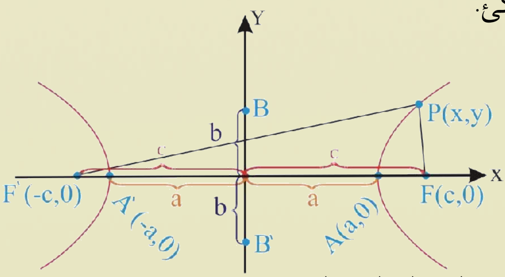
آيا داسې يوه هايپربولا رسمولای شئ چې مرکز يې

د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي؟



فعاليت

- داسې هايپربولا رسم کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی د هايپربولا د منحني په يوې څانګې باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F,P او F' ټکو ترمنځ د هايپربولا د تعريف رابطه وليکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د PF او PF' فاصلې پيدا کړئ او هغه د هايپربولا د تعريف په رابطه کې وليکئ.



د هايپربولا د معادلې د پيداکولو لپاره د تعريف له مخې لرو: $|PF'|-|PF|=2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساواتو د دواړو خواو له مربع کولو څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$\Rightarrow 4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ /\div 4$$

$$\Rightarrow cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بيا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$(cx-a^2)^2=a^2(x-c)^2+y^2$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې په هایپربولا کې $c^2 = a^2 + b^2$ رابطه شتون لري، نو $c^2 - a^2 = b^2$ کېږي، نو په پورته افاده کې

د $c^2 - a^2$ د قیمت په اېښودلو سره لیکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 /\div a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

پورتنی معادله د داسي هایپربولا معادله ده چې مرکز يې د وضعیه کمیاتو په مبدأ او محراقونه يې په افقي محور پراته دي.

دویم حالت: که چیرې د هایپربولا متقاطع محور $\overline{AA'}$ د y پر محور پروت وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

د پورتنی رابطې ګراف رسم، فارمول يې ثبوت او د محراقونو او راسونو مختصات يې پیدا کړئ.

د هایپربولا موجه خطونه

که چیرې د هایپربولا محراقونه د x یا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ویلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هایپربولا له مرکز ځخه د $\pm\frac{a}{e}$ یا $\pm\frac{a^2}{c}$ ځخه عبارت ده.

د هغې هایپربولا د موجه (ها دې) خطونو معادلې چې محراقونه يې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm\frac{a}{e}$ ځخه عبارت دي.

او د هغې هایپربولا د موجه خطونو معادلې چې محراقونه يې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\frac{a}{e}$ ځخه عبارت دي.

د هایپربولا مجانبونه

هغه مستقیم خطونه چې د هایپربولا له مرکز ځخه تیر اویه لایتناهي کې د هایپربولا له منحني سره مماس وي.

د هایپربولا مجانبونه بلل کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هايپربولا معادله په پام کې نيسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چيرې په پورتنی رابطه کې x لايتناهي ته نږدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نږدې کيږي په پايله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د يوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هايپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چيرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې يې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړی مثال: د هايپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پيدا او په شکل کې يې وښاياست.

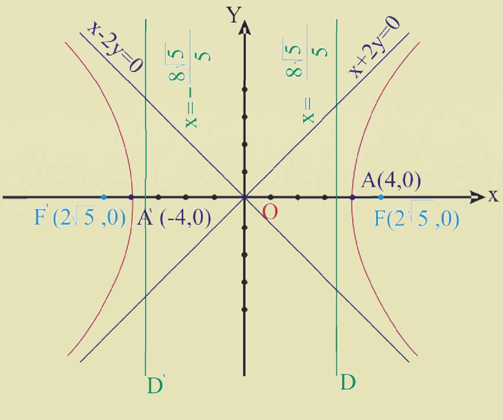
حل: دراسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

$$b^2=4\ \Rightarrow\ b=\pm2\ \Rightarrow\ B(0،2)،B'(0،-2)$$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنگه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي، له دې امله:



$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

يا: $x=\pm2y\ \Rightarrow\ x+2y=0,x-2y=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, معادله د هایپربولا یوه معادله ده، په نوموړې معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هایپربولا معادله ده چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د y محور یې متقاطع محور دی.

د راسونو مختصات: $a^2=4\Rightarrow a=\pm2\Rightarrow A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$

$$b^2=9\Rightarrow b=\pm3\Rightarrow B(3\ ,0)\ ,\ B'(-3\ ,0)$$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

$$F(0,\sqrt{13})\quad,\quad F'(0,-\sqrt{13})$$

د مجانبونو معادلې: څرنګه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې یې عبارت دي له:

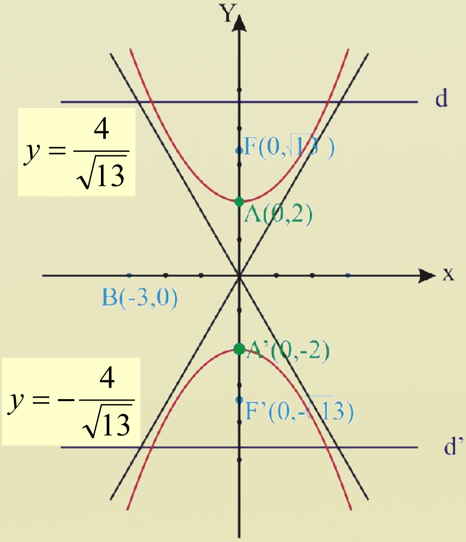
$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm2x$$

$$3y-2x=0\qquad,\qquad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: څرنګه چې د هایپربولا متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm\frac{4\sqrt{13}}{13}$$

$$y_1=\frac{4\sqrt{13}}{13}\ ,\quad y_2=-\frac{4\sqrt{13}}{13}$$



پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هایپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خطونو او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او ګراف یې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

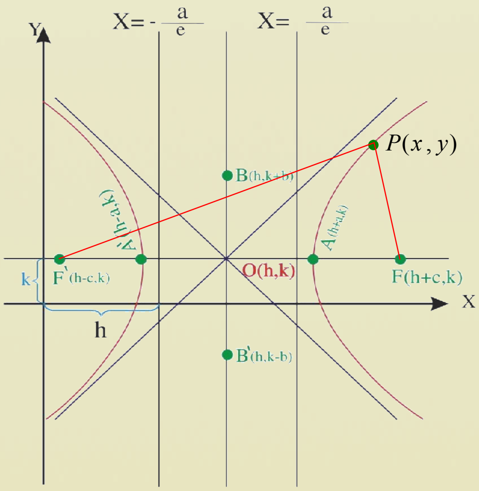
آيا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعاليت

- د وضعيه کمياتو په سيستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات يې (h,k) او متقاطع محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د هايپربولا د منحنی پرمخ باندې د $p(x,y)$ يو اختياري ټکی په پام کې ونيسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هايپربولا د مرکز (h,k) په پام کې نيولو سره د محراقونو مختصات يعنې F او F'، د راسونو مختصات يعنې A, A', B او B' په شکل کې وښاياست.



د شکل څخه په کار اخيستنې سره د $|PF'|-|PF|=2a$ رابطه حساب کړئ.

لومړی حالت: د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پيدا کولو له فارمول او د هايپربولا د تعريف له رابطې څخه په کار اخيستنې سره ليکلای شو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

يا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتنې مساواتو دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشابه حدونو له جمعي او تفريق وروسته ليکلاي شو:

$$cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}\ /(\ \ )^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+a^2(y-k)^2$$

د ضرب، او توانونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفريق کوو او پورتنی رابطه په لاندې ډول ليکو:

$$c^2x^2-a^2x^2-2c^2hx+2a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دي، نو پورته رابطه په لاندې ډول ليکو:

$$b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

دواړه خواوې په a^2b^2 ويشو:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}-\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

د حقيقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

د غيري حقيقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

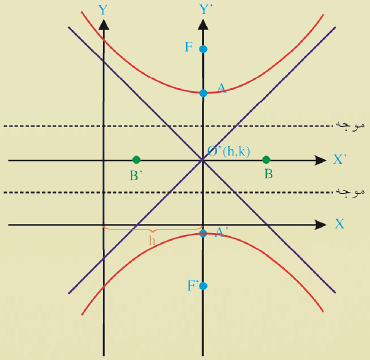
د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

د موجه خطونو معادلې: $x-h\pm\frac{a}{e}$

دويم حالت: که چيرې متقاطع محور د y له محور سره موازي وي، نو د هايپربولا معادله عبارت ده، له:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

د شکل له مخې د هايپربولا د رأسونو او محراقونو مختصات د مؤجه خطونو او د مجانبونو معادلې پيدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د هایپربولا پراختیایي معادله له $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A, B \neq 0$ او $A \neq B$ یا $A = B$ خو مختلف الاشاره وي.

لومړي مثال: د $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$ معادله په پام کې ونیسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او د مجانبونو معادلې پیداکړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معیاري ډول لیکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات: $k = -1, h = 3$ یعني $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

$$A(h+a,k) = A(3+4,-1) = A(7,-1)$$
$$A'(h-a,k) = A'(3-4,-1) = A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h,k+b) = B(3,-1+6) = B(3,5), \\ B'(h,k-b) = B'(3,-1-6) = B'(3,-7) \end{cases}$$

پوهېږو چې په هایپربولا کې: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k) = F(3+\sqrt{52},-1) \qquad F'(h-c,k) = F'(3-\sqrt{52},-1)$

که چیرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \;\Rightarrow\; y = \pm\frac{6}{4}(x-3) - 1 = \pm\frac{3}{2}(x-3) - 1$$

$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3) - 1 \;\; /\cdot 2 \Rightarrow 2y = \pm 3(x-3) - 2$$

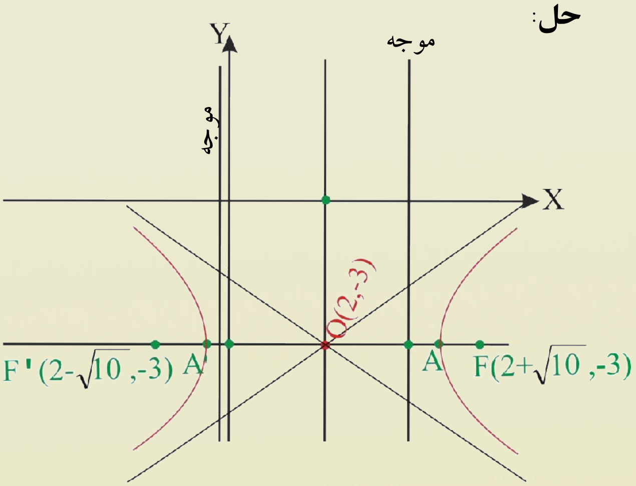
$$2y = 3x - 9 - 2 \;\Rightarrow\; 2y - 3x + 11 = 0$$

$$2y = -3x + 9 - 2 \;\Rightarrow\; 2y + 3x - 7 = 0$$

دویم مثال: د هایپربولا $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ معادله په پام کې ونیسئ. د مرکز، راسونو او د محراقونو مختصات او د موجه خطونو او محانبونو معادلې په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:



$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+3)^2-9\right]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

پورتنی معادله په معیاري ډول واړول شوه، لیدل کیږي چې $h=2$ او $k=-3$ یعني د مرکز مختصات یې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm 2 \quad , \quad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow \ c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: $F(h\pm c,k)\Rightarrow F(2+\sqrt{10},-3) \quad , \quad F'(2-\sqrt{10},-3)$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h\pm a,k)\Rightarrow A(2+\sqrt{6},-3) \quad , \quad A'(2-\sqrt{6},-3)$

د غیرې حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k\pm b)\Rightarrow B(2,-1) \quad , \quad B'(2,-5)$

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2\Rightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}+2$

د مجانبونو معادلې: څرنګه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو لیکلای شو:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$$
$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3/\cdot\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{6}y=\pm 2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\begin{cases}\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0\\ \sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0\end{cases}$$

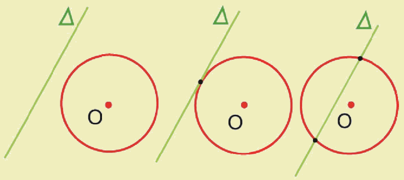
پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هایپربولا پر معیاري معادلې باندې واړوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مستقیم خط موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري مستقیم خط، یوه دایـره د امکـان پـه صـورت کې په څو ټکو کې قطع کولای شئ؟



فعالیت

د O دایره او د Δ مستقیم خط په پام کې ونیسئ:

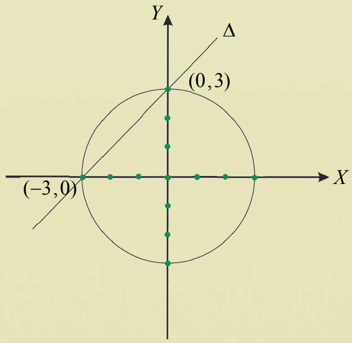
- یوه دایره او مستقیم خط داسې رسم کړئ، چې یوازې یو ګډ ټکی سره ولري.
- آیا کیدای شي چې یوه مستقیم خط، یوه دایره له دوو ټکو څخه په زیاتو ټکو کې قطع کړي؟
- که چیرې د دایرې د مرکز او مستقیم خط تر منځ واټن، د دایرې له شعاع څخه لوی وي. دایره او مـستقیم خط څو ګډ ټکي لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په یوه مستوي کې یوه اختیاري مستقیم خط او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هیڅ ګډ ټکی ونلري.

لومړی مثال: په وضعیه کمیاتو کې د $x^2 + y^2 = 9$ دایره او $y = x + 3$ مستقیم خط رسم او موقعیت یې و ټاکئ.

حل: په شکل کې لیدل کیږي، چې دایره او مستقیم خط یو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټکـو کـې قطع کـوي ددې پایلې د لاس ته راوړلو لپاره که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د دایرې پـه معادلـه کـې وضع کړو عین نتیجه په لاس راځي:



$$y = x + 3$$

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow x^2 + (x+3)^2 = 9$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x = 0$$

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -3$$

د x قیمتونه د $y = x + 3$ په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي.

$$y_1 = 0 + 3 \Rightarrow y_1 = 3$$

$$y_2 = -3 + 3 \Rightarrow y_2 = 0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ ټکي د دایرې او مستقیم خط د تقاطع ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي ډول کله چې د مستقیم خط له معادلې څخه د x یا y متحول قیمت د مخروطي مقاطعو په معادله کې کېږدو، د حل لپاره یوه دویمه درجه معادله لاس ته راځي چې حل یې د Δ په قیمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو،او پام وړ، پایلې لري:

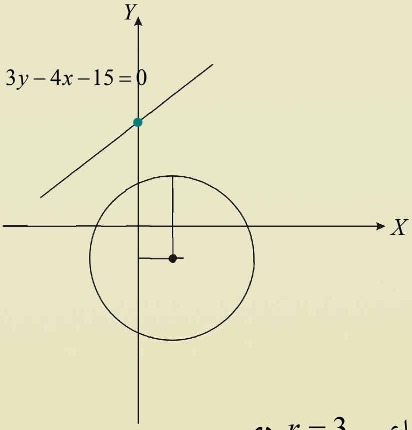
1- که چېرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول مستقیم خط او منحني یوبل په دوو ټکو کې قطع کوي.

2- که چېرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف یا مساوي حلونه لري او په دې ډول مستقیم خط د مخروطي مقاطعو له منحني سره یوازې یو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي، لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، مستقیم خط او منحني یو بل نه قطع کوي.

دویم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دایره او $3y - 4x - 15 = 0$ مستقیم خط په پام کې ونیسئ او موقعیتونه یې له یو بل سره و څېړئ.

حل: لومړی د دایرې معادله په معیاري شکل بدلوو.



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow \ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

د دایرې له معیاري معادلې څخه پوهېږو چې د دایرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع یې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقیم خط معادله معیاري شکل ته اړوو.

$$3y - 4x - 15 = 0 \Rightarrow 3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې د مستقیم خط له معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه د دایرې په معیاري معادله کې کېږدو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 41=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+369=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36900=-14400 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، نو مستقیم خط او دایره ګډ ټکی نه لري.

دریم مثال : د $y=x-1$ د مستقیم خط موقعیت د $y-x^2+1=0$ پارابولا ته وڅیړئ.

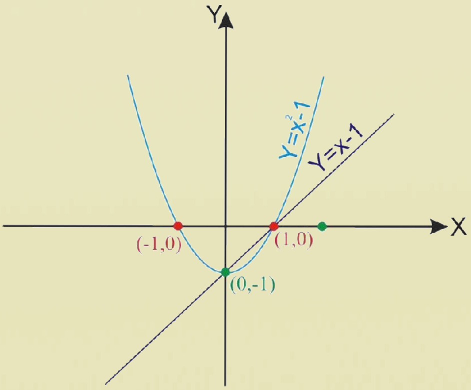
حل: د پورتنۍ مسئلې د څېړلو لپاره د y قیمت د پارا بول په معادله کې وضع کوو، او بیاګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \Rightarrow (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \Rightarrow x^2-x=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4(1)(0)=1-0 \Rightarrow \Delta=1$$



څرنګه چې $\Delta=1>0$ ده، نو $y=x-1$ مستقیم خط د $y-x^2+1=0$ پارابول په دوو ټکو کې قطع کوي چې کولای شو حلونه یې په لاندې ډول پیدا کړو.

$$x^2-x=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې کېږدو، نو د نوموړي مستقیم خط او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له : $(1,0)$, $(0,-1)$ چې دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم مثال: د $x=5$ مستقیم خط او $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بیضوي موقعیتونه وڅېړئ.

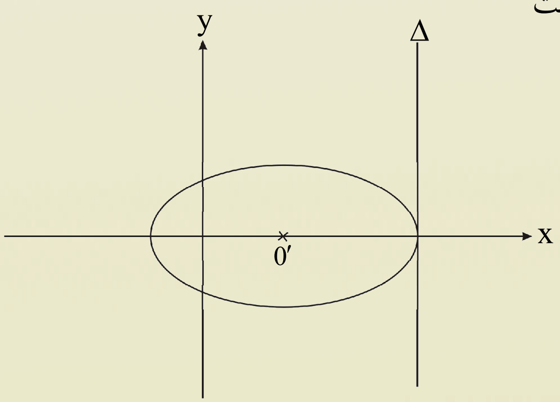
حـــل: کـه چېـرې د $x=5$ د مـستقیم خـط قیمـت

د بیضوي په معادله کې کښېږدو، نو په لاس راځي:

$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-1 \Rightarrow y^2=0$$

ځرنګه چې: $\Delta=b^2-4ac=0$



په دې ډول ویلای شو چې مستقیم خط او بیضوي یوګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A,B,D,E,F\in IR \quad ,Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

د پورتنی معادلې د پېژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ او یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ او یو شان علامې ولري، یو بیضوی دی.

3- که چېرې $A,B\neq 0$ ، $A\neq B$ یا $\mathrm{A}=\mathrm{B}$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولا ده.

4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یو پارابولا ده.

$$Ay^2+By+Cx+D=0 \text{ او } Ax^2+Bx+Cy+D=0$$

پوښتنې

1- د لاندې معادلو ډول د هغوی د ګرافونو د رسم کولو وروسته وټاکئ.

$a)\ \ y^2-2y+x+3=0$ $\quad b)\ \ 9x^2+9y^2=27$

$c)\ \ 25x^2+16y^2=400$ $\quad d)\ \ x^2-y^2=0$

$e)\ \ y^2+6y-x+2=0$

2- د $9x^2+4y^2=36$ بیضوي او $y=3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y=x$ خط او $x^2-2y^2=4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د مستوي تقاطع له مخروط سره په مختلفو حالتونو کې مختلف منحني ګان منځ ته راوړي چې د مخروطي مقاطعو په نوم يادېږي.

بيضوي: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه يې د فاصلو د جمعي حاصل يو ثابت اوږدوالی وي، بيضوي بلل کيږي، مستقر ټکي چې په F' او F تورو ښودل شوي، د بيضوي محراقونه بلل کيږي او $AA'=2a$ ثابت اوږدوالی دی

محراقونه	دلنډ قطر انجامونه	د اوږده قطر انجامونه	د مرکز وضعيه کميات	معادلې	شمېره
$(c,0),(-c,0)$	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	1
$(0,c),(0,-c)$	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(0,0)$	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	2
$(h\pm c,k)$	$(h,k\pm b)$ په لنډ قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	$(h\pm a,k)$ په لوی قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	(h,k)	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	3
$(h,k\pm c)$	$(h\pm b,k)$ په لنډ قطر باندې چې د x له محور سره موازي دی	$(h,k\pm a)$ په لوی قطر باندې چې د y له محور سره موازي دی	(h,k)	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$	4

د بيضوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې A او C دواړه هم علامه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارابولا: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او ثابت مستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي، دغه ثابت يا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقيم خط ته د پارابولا هادي(موجه) وايي.

تناظري محور	د موجه خط معادله	د محراق مختصات	دراس وضعيه کميات	د پارابولا معادلې	شميره
$x=0$	$x=-p$	$F(P,0)$	$S(0,0)$	$y^2=4Px$	1
$y=0$	$y=-p$	$F(0,P)$	$S(0,0)$	$x^2=4Py$	2
$y=k$	$x=h-p$	$F(h+p,k)$	$S(h,k)$	$(y-k)^2=4P(x-h)$	3
$x=h$	$y=k-p$	$F(h,k+p)$	$S(h,k)$	$(x-h)^2=4P(y-k)$	4

د پارابولا عمومي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ يا $C=0$ وي، نه دواړه ($C\neq 0, A=0$ يا $C=0, A\neq 0$ وي)، په پارابولا کې عن المرکزيت $e=1$ سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هایپربولا: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربولا بلل کیږي.

د مجانبونو معادلې	د موجه خطونو معادلې	محراقونه	غیر حقیقي رأسونه	د رأسونو وضعیه کمیات	د مرکز وضعیه کمیات	د هایپربولا معادلې
$y=\pm\frac{b}{a}x$	$x=\pm\frac{a}{c}$	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{a}{c}$	$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې.	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې.	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$	$F(h\pm c,k)$	$B(h,k\pm b)$	$A(h\pm a,k)$	$S(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$	$F(h,k\pm c)$	$B(h\pm b,k)$	$A(h,k\pm a)$	$S(h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

د هایپربولا عمومي معادله $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده، په داسې حال کې چې $A=B$ یا $A\neq B$ ، خو مختلف الاشاره وي. په هایپربولا کې عن المرکزیت $e>1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې په نښه او کرښه ترې تاو کړئ.

1- که چېرې یو مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

$a)$ بیضوي $b)$ دایره $c)$ هایپربولا $d)$ دوه متقاطع خطونه

2- د بیضوي محراقونه هغه ټکي دي چې د بیضوي له مرکز څخه:

$a)$ برابر واټن لري $b)$ مختلف واټنونه لري

$c)$ د اوږد قطر نیمايي واټن لري $d)$ د لنډ قطر نیمايي ده.

3- که چیرې M د بیضوي یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ د اوږده قطر اوږدوالی وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

$|MF|-|MF'|=2a \quad (a$ $|MF|+|MF'|=a \quad (b$

$|MF|+|MF'|=2a \quad (c$ $|MF'|+|MF|=0 \quad (d$

4- د بیضوي عن المرکزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

$e=\frac{a}{c} \quad :(a$ $e=\frac{c}{a} \quad :(b$ $e=\frac{b}{c} \quad :(c$ $e=\frac{c}{b} \quad :(d$

5- په بیضوی کې د لنډ قطر، اوږد قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

$a^2=b^2-e^2 \quad (a$ $a^2+b^2=c^2 \quad (b$

$a^2=b^2+e^2 \quad (c$ $a^2=b^2+c^2 \quad (d$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې که $p>0$ سره وي، نو:

$a)$ د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. $b)$ دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

$c)$ دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده $d)$ دپارابولا خوله کیڼې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. د محراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$F(-1,-2) \quad (a$ $F(-1,4) \quad (b$ $F(-1,2) \quad (c$ $F(-4,-1) \quad (d$

8- که چېرې F او F' د هایپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هایپربولا د محیط یو ټکی کېدلای شي؟

$|PF|+|PF'|=2a \quad (a$ $|PF|-|PF'|=a \quad (b$

$|PF|-|PF'|=2a \quad (c$ $|PF|-|PF'|=0 \quad (d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9- د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته　　b) د x محور ته

c) د x او y محورونو ته　　c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10- په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیي؟

a) $e<1$　　b) $e=1$　　c) $e>1$　　d) $e=-1$

11- د $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.　　b) د x پر محور باندې دی.

c) د x پر محور عمود دی.　　d) د y له محور سره موازي دی.

12- په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکي څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره　　b) دایره　　c) پارابولا　　d) بیضوي

13- د $y^2=-4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$　　b) $(4,2)$　　c) $(2,0)$　　d) $(-2,0)$

14- د $4x^2+4y^2+8y+3=0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې　　b) بیضوي　　c) پارابولا　　d) هایپربولا

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2+4y^2=4$　　$b)\ 9x^2+2y^2=15$

$c)\ 16x^2-96x+9y^2+90y+225=0$　　$d)\ x^2+12x-120y+288=0$

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a=4$ ، $e=0,8$ دي او کبیر قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b=6$ $e=0,8$ دي او کبیر قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

3- په لاندې معادلو کې د بیضوي کبیر قطر، صغیر قطر، د راسونو او محراقونو مختصات پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2+y^2=4$　　b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- د پارابولا لاندې معادلې لومړی په معیاري شکل ولیکئ او بیایې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

5- د هایپربولا لاندې هره یوه معادله په معیاري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

6- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د حقیقي راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

7- د هغې هایپربولا معادله پیدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د حقیقي راسونو مختصات او د محراقونو ترمنځ اوږدوالی يې 4 واحده وي.

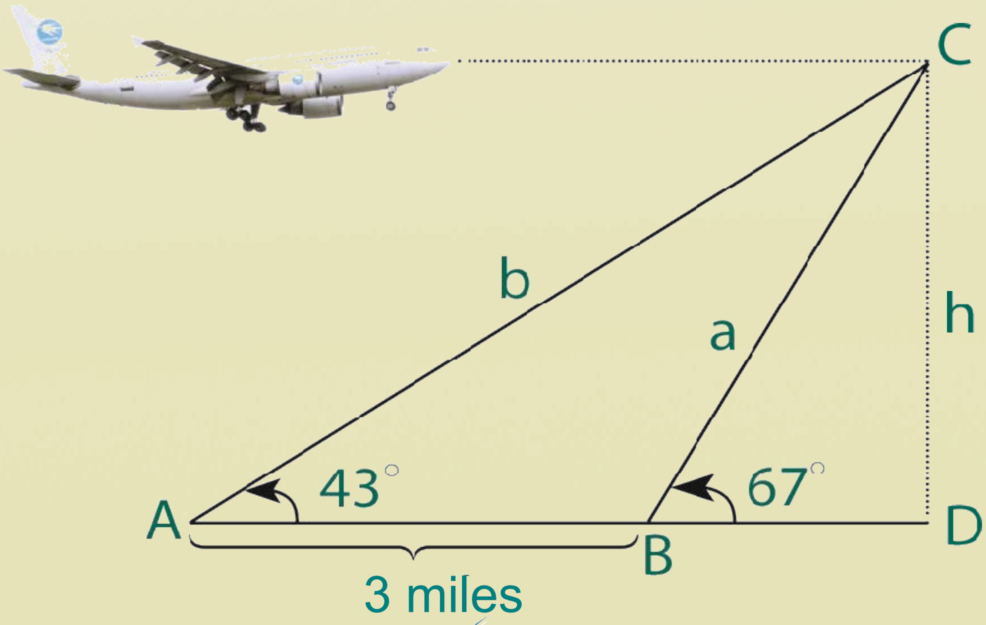
8- د $y = 2x$ مستقیم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

مثلثات

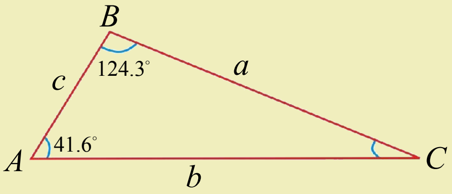
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساين قانون

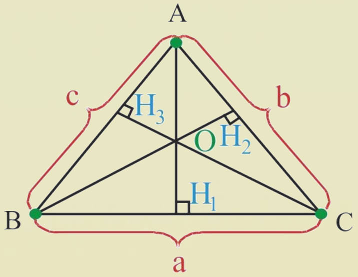
Law of sine



خرنگه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاويې اندازه پيدا کړو؟

فعاليت

- د ABC يو حادهالزاويه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالى يې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د ($\overline{AH_1}$, $\overline{BH_3}$, $\overline{CH_2}$) ارتفاع ګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او ACH_1 په قايمالزاويه مثلثونو کې د ($\overline{AH_1}$) ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يو له بله سره يې پرتله کړئ.
- د ABH_2 او BCH_2 په قايمالزاويه مثلثونو کې د ($\overline{BH_2}$) ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پيدا او يو له بله سره يې پرتله کړې.



له پورتني فعاليت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړاى شو.

ثبوت: د ACH_1 او ACH_1 په قايمالزاويه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) رابطو له پرتلې څخه ليکلى شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

او يا:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \text{I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول د ABH_2 او BCH_2 قایم‌الزاویه مثلثونو په مرسته لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH}_2}{c} \Rightarrow \overline{BH}_2 = c\sin A \quad .... (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH}_2}{a} \Rightarrow \overline{BH}_2 = a\sin C \quad .... (4)$$

د (3) او (4) د رابطو له پرتلې څخه لرو چې: $c\sin A = a\sin C \,/ \div ac$

اویا:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \text{II}$$

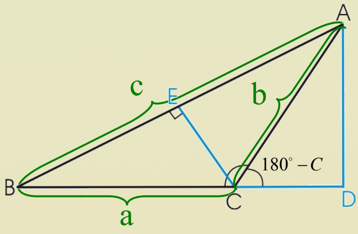
د I او II د رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادېږي.

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې چې C, B, A یې زاویې او c, b, a یې د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:

د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده

د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع ګانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهېږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو :

$$\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} ......(1)$$

همدارنګه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} ......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پر بل وېشو:

د تناسب د خواصونو له مخې د وسطینو ځایونه بدلوو. $\frac{\sin C}{\sin b} = \frac{c}{b}$

نو :

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \text{I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د ACE قایم الزاویه مثلث له مخې لیکلی شو:
$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} .....(3)$$

د BEC په مثلث کې لیدل کیږی:
$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} .....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا یو پر بل ویشو:
$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

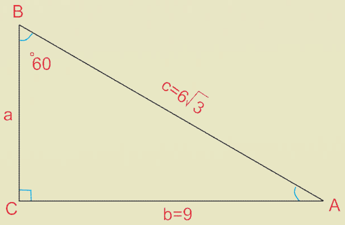
که چیرې د وسطینو ځایونه بدل کړو، نو:
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} ......(II)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

فعالیت

- د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅیړئ او ثبوت یې کړئ.

لومړی مثال:په لاندې ABC قایم الزاویه مثلث کې د یوې ضلعې او دوو زاویو قیمت پیدا کړئ داسې چې د یوې زاویې او دوو ضلعو قیمت درکړل شوی دی؟



حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3\cdot 3}{9} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{9}} = 1 \quad \Rightarrow \sin C = 1$$

خرنګه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $C = 90^\circ$

همدارنګه پوهیږو چې په یوه مثلث کې:
$$A + B + C = 180^\circ$$
$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$A = 180^\circ - 150^\circ$$
$$A = 30^\circ$$

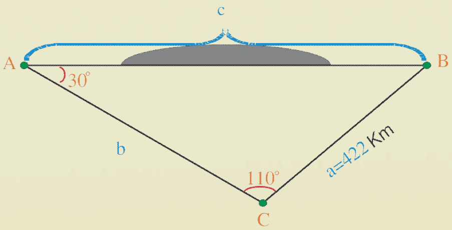
(c) ketabton.com: The Digital Library

د a ضلعې قیمت په لاندې ډول پیداکولی شو :

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}\Rightarrow a=b\cdot\frac{\sin A}{\sin B}\Rightarrow a=9\cdot\frac{\sin 30^\circ}{\sin 60^\circ}=\frac{9\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=3\sqrt{3}\,cm$$

دویم مثال: یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې یې یوه غونډۍ پرته ده پیداکړي.



حل: د ساین د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ ترمنځ رابطه په پام کې نیسو:

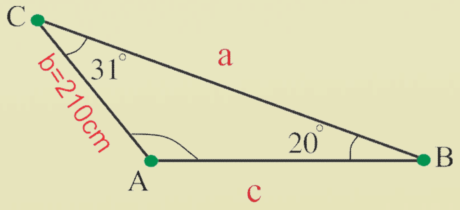
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422km\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

څرنګه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $$c=\frac{422km\cdot 0.9396}{0.5}\Rightarrow c=793.0224km$$

دریم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعې اندازه درکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاویې او دوو ضلعو اندازې پیداکړئ.



حل: پوهیږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومه زاویه یې داسې پیداکولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a ضلعې د اوږدوالي د پیداکولو لپاره د ساین قانون په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$\Rightarrow a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

څرنګه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771\cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$

$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پیداکوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$\Rightarrow c=\frac{210cm\cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

څرنګه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ دی د قیمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$\Rightarrow c=\frac{210\cdot 0.5150}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.228cm$$

یادونه:

د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

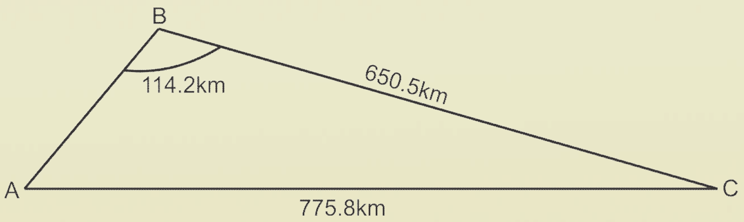
- دوې زاویې او د معلومې زاویې مخامخ ضلع یې معلومه وي، یعنې: ($A \ AS$).
- دوه ضلعې او د معلومې ضلعې مخامخ زاویه یې معلومه وي، یعنې:(SAS).

باید ووایو چې دلتهA د Angle او s د side مخفف دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

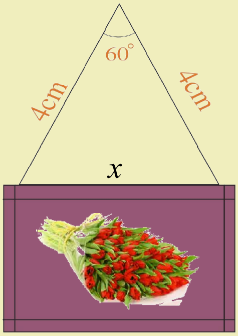
1. که چیرې د یوه قایم الزاویه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a = 8m$ ، $b = 6m$ او $c = 10m$ وي، د مثلث د زاویو اندازه پیدا کړئ.
2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین قانون

Law of cosine

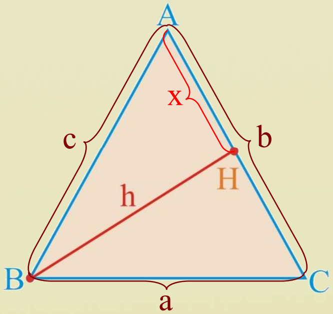


د یوه شکل چارت د مېخ په مرسته د دېوال پر مخ ځړول شوی دی، که چېرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو $4cm$ وي او د منځ زاویه یې 60° وي، د تار د دوو ټکو ترمنځ واټن (x) څرنګه پیدا کولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د A, B, C راسونو مخامخ ضلعې په ترتیب سره په a, b, c وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع د H په ټکی کې ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په ABH قایم‌الزاویه مثلث کې د $\overline{AH}$ قیمت د A زاویې د کوساین د له جنسه پیدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:



ثبوت: د ABC په حادة‌الزاویه مثلث کې د $\overline{BH}$ ارتفاع رسموو

$$\overline{CH} = b - x \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{BH} = h$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \text{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالی پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \text{II}$$

د I په رابطه کې د h^2 قیمت لیکو

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د AHB په قايم‌الزاويه مثلث کې:

$$\cos A = \frac{x}{c} \quad \Rightarrow \quad x = c \cdot \cos A$$

په $a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$ رابطه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قيمت اېږدو، نو:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \text{يا} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

پايله: په يو اختياری مثلث کې مو دا

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \ldots I \qquad \text{يا} \qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

رابطه ثبوت کړه، په همدې ډول لاندې رابطې هم ثبوت کولای شو.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \ldots .II \qquad \text{يا} \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \ldots .III \qquad \text{يا} \qquad c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$$

په هر مثلث کې د يوې زاويې کوساين (Cos) مساوی دی د زاويې د دواړو ضلعو د مربعاتو مجموعه منفي د زاويې د مقابلې ضلعې مربع د زاويې د دواړو ضلعو د حاصل ضرب په دو چند باندې.

فعاليت

- د تېرمخ د مثلث د شکل په مرسته د کوساين قانون د II او III رابطې ثبوت کړئ.

يادونه: د کوساين قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- چې دوې ضلعې او د منځ زاويه يې معلومه وي.(SAS).
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي.(SSS).

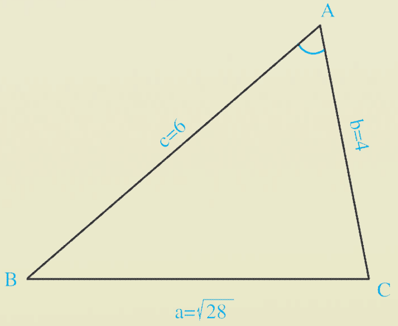
د ساين او کوساين د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پيدا کولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د يوه مثلث د عناصرو پيدا کول	
کله چې د يوه مثلث د دريو ضلعو اوږدوالی معلوم وي، د کوساين له قانون څخه ګټه اخلو.	(SSS) (ضلع، ضلع، ضع
کله چې د يوه مثلث د دوو زاويو او د يوې معلومې زاويې د مقابلې ضلعې اندازه معلومه وي، د ساين له قانون څخه ګټه اخلو.	SAA (زاويه، زاويه، ضلع)
کله چې د يوه مثلث د دوو ضلعو او د يوې معلومې ضلعې د مقابلې زاويې اندازه معلومه وي، د ساين له قانون څخه ګټه اخلو.	ASA (زاويه، ضلع، زاويه)
کله چې د يو مثلث د دوو ضلعو او د هغوی ترمنځ د زاويې اندازه معلومه وي، د کوساين له قانون څخه ګټه اخلو.	SAS (ضلع،زاويه، ضلع)
امکان نه لري	AAA (زاويه، زاويه، زاويه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو دريو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاويې اندازه وټاکئ.

حل:



$$a=\sqrt{28}\quad,\quad b=4\quad,\quad c=6\quad,\quad A=?$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$

$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot4\cdot6\cos A$$

$$28=16+36-48\cos A\quad\Rightarrow\quad 28=52-48\cos A$$

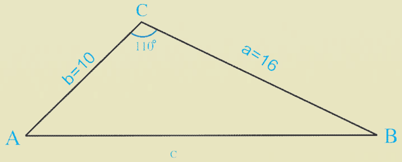
$$48\cos A=52-28\qquad\Rightarrow\quad 48\cos A=24$$

$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{A=60^\circ}$$

دويم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $a=16\ ,\ b=10$ واحده او د منځ زاويه يې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی يې پيدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)(10)\cos110^\circ$$

$$c^2=256+100-320\cos110^\circ$$

$$c^2=356-320\cos110^\circ$$

$$c=\sqrt{356-320\cos110^\circ}$$

څرنگه چې: $\cos110^\circ=-0.342$ دی، نو:

$$c=\sqrt{356-320(-0.342)}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{356+109.44}$$

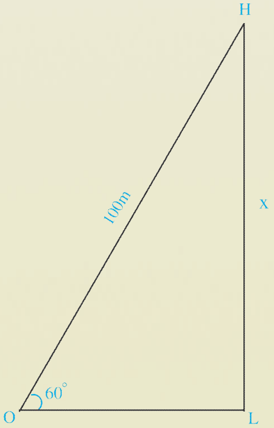
$$\boxed{c=21.57}$$

درېيم مثال: يو پتنگ(کاغذ پران) له $100m$ تار سره په هواکې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاويه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنگ لوړوالی پيدا کړئ.

حل: د OHL په قايم‌الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}\quad\Rightarrow\quad x=100\cdot\cos60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوساین قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

څلورم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې د $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 5, c = 8$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیداکړئ.

حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارلو سره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیداکوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

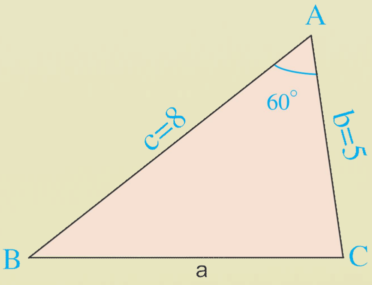
$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



پوښتنې

1. که چېرې د ABC په مثلث کې $b = 4ft, a = 5ft$ او $A = 45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.

2. که چېرې په یوه مثلث کې $a = 3cm$ او $b = 9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

آیا په هـر مثلـث کـې د زاویـو او ضـلعو تـرمنځ مخامخ اړیکه شتون لري؟

فعالیت

- د ساین قانون رابطه ولیکئ او هغه له D سره مساوي په پام کې ونیسئ.
- د $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$ تناسب هر نسبت په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنۍ اړیکې لومړی جمع او بیا یې تفریق کړئ.
- لاس ته راغلې اړیکې یو پر بل وویشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پایلې فورمول ولیکئ.

د پورته فعالیت د سرته رسولو وروسته لاندې پایله لاس ته راځي.

پایله: په هر مثلث کې د ټانجنټ قانون عبارت ده له :

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

ثبوت: د ساین قانون دوه نسبتونه له D سره مساوي لیکو:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{b}{\sin B}=D \Rightarrow b=D\sin B \quad , \quad \frac{a}{\sin A}=D \Rightarrow a=D\sin A$$

پورتنۍ اړیکې لومړی جمع او بیا تفریقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$

$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنۍ اړیکې یو پر بل وېشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

د ضرب له فورمولونو څخه لرو:

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

خرنګه چې $\cot\frac{A-B}{2}=\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې رابطې ثبوت کړئ.

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}\quad,\quad\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

- پورتنی رابطې په یوه مثلث کې د ټانجنټ قانون بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A=90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$

$$\Rightarrow B+C=180^\circ-A=180^\circ-90^\circ\Rightarrow B+C=90^\circ\quad ...I$$

$$B+C=90^\circ\Rightarrow\frac{B+C}{2}=45^\circ$$

$$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

خرنګه چې $\tan 45^0=1$ سره ده، نو:

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

پوهېږو چې $\tan 30=\sqrt{\frac{3}{3}}$ سره ده، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow \tan 30^\circ=\tan\frac{B-C}{2}$$
$$\frac{B-C}{2}=30^\circ\Rightarrow B-C=60^\circ \quad ...II$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

$$B-C=60^\circ \quad ....\ \mathrm{I}$$
$$B+C=90^\circ \quad ....\ \mathrm{II}$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په اېښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دويم مثال: که چېرې د ABC په مثلث کې $c=432\ ,\ B=42^\circ\ \ 30'$ او $a=925$ وي، د د تانجنټ قانون څخه په ګټې د مثلث نورې نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \ \Rightarrow\ A+C=180^\circ-B \ \Rightarrow\ A+C=180^\circ-42^\circ\ \ 30'$$
$$\Rightarrow A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ \ 30'\Rightarrow A+C=137^\circ\,30'\ \ ....\ \mathrm{I}$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2}\Rightarrow\frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\,90'}{2}=68^\circ\ \ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}\Rightarrow\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432}\ \Rightarrow\ \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$
$$\Rightarrow 1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45'\ \Rightarrow\ \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.571$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.363\cdot 2.571 \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2} = 0,933$$

$$\Rightarrow \frac{A-C}{2} = 43^0 \Rightarrow \boxed{A-C = 86^\circ \quad \dots\dots\ \text{II}}$$

اوس د I او II رابطو په پام کې نیولو سره د A زاویې قیمت پیدا کوو:

$$A+C = 137^\circ\ 30' \quad \dots I$$
$$\underline{A-C = 86^\circ \qquad} \dots II$$
$$2A = 223^\circ\ 30 \Rightarrow 2A = 222^\circ\ 90' \Rightarrow A = 111^\circ 45'$$

اوس غواړو د C زاویې قیمت پیدا کړو:

$$A+C = 137^\circ 30' = 136^\circ 90'$$

$$\Rightarrow C = 136^\circ\ 90' - A = 136^\circ 90' - 111^\circ 45'$$
$$\Rightarrow C = 25^\circ 45'$$

اوس د ساین قانون په مرسته د b ضلعې اوږدوالی پیداکوو:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = c\cdot\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = 432\cdot\frac{\sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ\ 45'}$$

په پورته رابطه کې د زاویو د ساین قیمتونه لیکو:

$$\sin 25^\circ\ 45' = 0.434$$
$$\sin 42^\circ\ 30' = 0.676$$
$$b = 432\cdot\frac{0.676}{0.434} = 672.885$$

پوښتنې

د مثلث نامعلومې اجزاوې د ټانجنټ قانون په کارونې سره پیداکړئ.

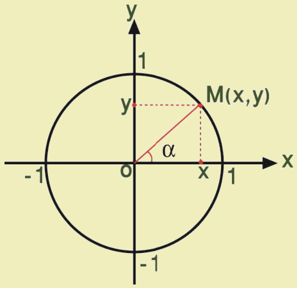
a) که چېرې $a = 35\,ft$, $B = 60^\circ$ او $C = 75^\circ$ وي.

b) که چېرې $A = 45^\circ$, $b = 37m$ او $B = 75^\circ$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پــوهېږو چــې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ یــو الجبــري مطابقــت دی، ځکــه د a او b پــه ټولــو قیمتونــو ســره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آیا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ یو مثلثاتي مطابقت کېدلی شي؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د α د مختلفو قیمتونو لپاره د A او B افادو قیمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قیمتونه پرتله او رابطه یې ولیکئ.

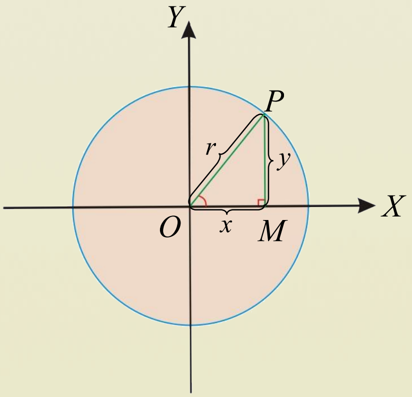
له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف لاس ته راځي.

تعریف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې پـه ټولـو قیمتونـو سره ، د مـساوات دواړه خـواوې برابـرې شـي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي،لکه: $\dfrac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1} = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$

که α هر قیمت واخلي، د پورته مساواتو دواړه خواوې مساوي کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په دایره کې د OMP قایم‌الزاویه مثلث

د سموو او کولای شو وېلې لیکو:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

د فیثارغورث د قضیې خخه کولای شو ولیکو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 ویشو:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2} \quad \text{یا} \quad (\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ لیکو.

نو لیکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

د مثلثاتو اساسي رابطې عبارت دي له:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

د مثلثاتو فرعي رابطې عبارت دي له:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tag\ \alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ رابطه ثبوت کړو.

ثبوت: د فیثاغورث د قضیې په کارلو سره لیکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 ویشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2=(\frac{r}{x})^2$

په نتیجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}=\sec\alpha$ او $\frac{y}{x}=\tan\alpha$ د قیمتونو په ایښودلو سره کولای شو

ولیکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \quad , \quad 1+\cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

په عمومي توګه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات د یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاس ته راوړو، یعنې د مطابقتونو یوې خواته مختلفې عملیې لکه: مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سر ته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاس ته راشي، که چېرې د یوې الجبري افادې حدود د یوې یا څو زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي رابطو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو. د موضوع د لا ښه پوهېدو لپاره لاندې مثلثاتي مطابقتونو مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\ \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta = 1+\tan^2\beta$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta = \sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta = \cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta = 1+\tan^2\beta$$

درېیم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta) = ?$$

حل: $(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta) = \cos^2\beta(1+\dfrac{1}{\cos^2\beta}) = \cos^2\beta(\dfrac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta}) = \cos^2\beta+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت د کیڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$

$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښایاست چې $\frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A \Rightarrow \frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2=(\tan A)^2=\tan^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: لاندي مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: د کيڼي خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قيمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه ايږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}=\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهيږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}=(\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}})^2$ دی.

اوس د معادلې ښۍ خوا په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم مثال: د $\dfrac{1+\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=2\sec x$$

پوښتنې

1. د مثلثاتو د اساسي رابطو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادله افاده پیدا کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 250^{\circ}}{\cos 250^{\circ}}$ $\qquad b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $\qquad c)\ \dfrac{1}{\cos 80^{\circ}}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $\qquad b)\ \cot^2\beta$

3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

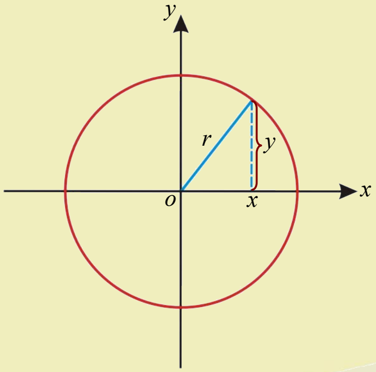
$a)\ \dfrac{\csc\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $\qquad b)\ \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

$c)\ \dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=\tan\alpha$ $\qquad d)\ \dfrac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation



پوهیږو چې $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ یو مثلثاتي مطابقت دی، آیا $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ یو مطابقت دی که یوه معادله؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta=0$ او $1+tag^2\beta=\sec^2\beta$ د β د کومو قیمتونو لپاره صحیح دي.

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قیمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta=0$ ترمنځ څه ډول اړیکې شتون لري.

_ آیا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

_ آیا $1-2\sin\beta=0$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت یوه معادله کېدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په یو حالت باندې حل کولی شو.

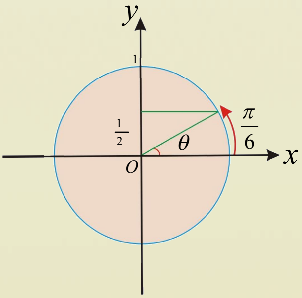
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت: $a\sin\alpha + b = 0$

د پورتنی معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

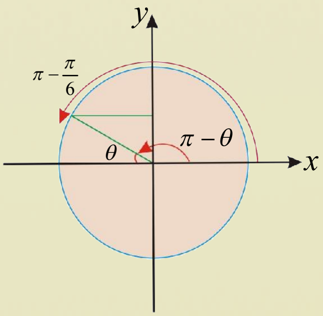
حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $2\sin x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin x = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2}$



اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو

چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ شي.

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې یې پیدا

کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \frac{\pi}{6}, \ 2\pi + \frac{\pi}{6}, \ 4\pi + \frac{\pi}{6}, \ldots, \ 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه

هغه زاویې پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}, \ 3\pi - \frac{\pi}{6}, \ 5\pi - \frac{\pi}{6}, \ldots, \ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ معادلې حل په لاندې دوو ستونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6}, \ 2\pi + \frac{\pi}{6}, \ 4\pi + \frac{\pi}{6}, \ldots, \ 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}, \ 3\pi - \frac{\pi}{6}, \ 5\pi - \frac{\pi}{6}, \ldots, \ (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني ستونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \wedge \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \ k \in Z\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پيدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \;\Rightarrow\; 2\sin x=3 \;\Rightarrow\; \sin x=\dfrac{3}{2}$

اوس د $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاويه پيدا کوو چې $\sin x=\dfrac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاويې د $\sin$ د -1 او $+1$ په منځ $(-1\le \sin x\le 1)$ دی، نو هغه زاويه چې $\sin$ يې $\dfrac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

دویم حالت: $a\cos x+b=0$

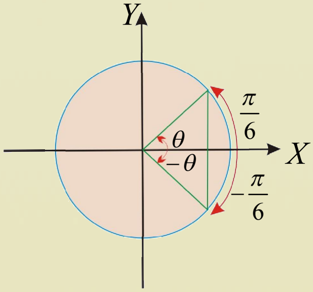
د پورتنۍ معادلې د حل مناسب ځواب د پيدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پيدا کړئ.

حل:له پورتنۍ معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0\,,\,\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه پيدا کوو يا لټوو چې $\cos$ يې $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\dfrac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو ليکلی شو چې $\cos\ x=\cos\ \dfrac{\pi}{6}$.



اوس د مثلثاتي دايرې په پام کې نيولو سره ټولې هغه زاويې چې $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پيدا کوو.

$$x=\frac{\pi}{6}\;,\;\;2\pi+\frac{\pi}{6}\;,\;\;4\pi+\frac{\pi}{6}\ldots$$

$$x=-\frac{\pi}{6}\;,\;2\pi-\frac{\pi}{6}\;,\;\;4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنيو حلونو سټ داسې ليکل کېږي : $x=2n\pi\pm\theta, n=1,2,3\ldots$

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\;,\;\;k\in z\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څو حلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0,2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\frac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ يې مساوي دی له:

$$A=\left\{x/x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

ليدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دريم حالت: $a\tan x+b=0$

د عمومي حل د پيداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځير شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

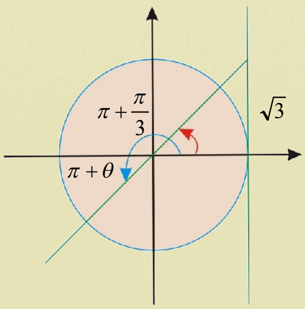
حل: له پورتنۍ تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاويه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{3}$ يا 60° څخه عبارت ده.

له دې امله پورتنۍ معادله د $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ په صورت کې لاسته راځي، په مثلثاتي دايره کې وينو چې کومې زاويې له $\tan\frac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.

$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ldots\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ldots\right\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي ډول پورتني ستونه داسې ليکلی شو چې: $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{3}\quad k\in Z\right\}$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره لرو چې: $A=\{x/x=k\pi+\theta\ ,\quad k\in Z\}$

دويم مثال: لاندې معادله حل کړئ.

$$\tan\ x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan\ x=\tan\frac{\pi}{6}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{6}\quad k\in Z\right\}$

دريم مثال:د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحيح عددونه ليکو، تر څو هغه زاويې چې د $[0\ ,\ 2\pi\ ]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12}\ \begin{cases}\xrightarrow{k=0}\ x_1=\dfrac{7\pi}{12}\\[2mm] \xrightarrow{k=1}\ x_2=\pi+\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{19\pi}{12}\end{cases}$$

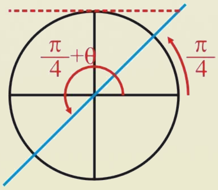
څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنی معادلې څخه $\cot x$ پيداکوو: $\cot x=1\quad\Leftarrow\quad \cot x-1=0$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاويه گورو چې cot يې $(+1)$ وي او هغه زاويه لـه $\frac{\pi}{4}$ يـا 45° څخه عبارت ده :

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو: $\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$$x = \frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\dots$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\dots$$

نو د معادلې د حل سټونه په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}\ ,\ 2\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 4\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\dots\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 3\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ 5\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\dots\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}\ ,\ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4},\quad k \in Z\right\}$$

يا په عمومي ډول د هرې θ زاويې لپاره داسې ليکو: $A = \{x / x = k\pi + \theta\ ,\ k \in Z\}$

دريم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}\ ,\ k \in Z$$

پوښتني

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پيدا کړئ.

$a)\quad 3\cos x + 5 = 0$

$b)\quad \tan x = \sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

پە تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دویمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې a, b, c او d ثابت عددونه دي.

$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنۍ معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} \Rightarrow y_2 = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنۍ زاویه چې ساین یې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده، نو:

$$A = \left\{ \begin{array}{ll} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & \\ & k \in Z \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & \end{array} \right\}$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad , \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول لـه مخې د $\sin x = \frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A = \left\{ \begin{matrix} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{matrix} \qquad k \in Z \right\}$$

دویم مثال: د $\cos 2x + \sin x = 0$ معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

که چېرې په پورتنۍ معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2 - y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2y+1)(y-1) = 0$$
$$2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y = -1 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 1$$

د $\sin x = y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولی دی، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x = y_1 = -\frac{1}{2}$$
$$\sin x = y_2 = 1$$

په دې ډول د $\sin x = -\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې ساین یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A=\left\{\begin{array}{l}\sin x=1 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{2} \\ \sin x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6}\end{array}\right\}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{2},\ \ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ 4\pi+\frac{7\pi}{6},\ 6\pi+\frac{7\pi}{6},\ \ldots\right\}$$

يا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad ,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\ ,\ n=0,1,2,3\ \ldots\right\}$$

دريم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ\ ,\ \pi\ ,2\pi,3\pi\ ,4\pi,\ 5\pi\ ,\ \ldots\}$$

$$A_2=\left\{\frac{\pi}{4},\ \pi-\frac{\pi}{4},2\pi+\frac{\pi}{4},3\pi-\frac{\pi}{4},\ldots\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل ستونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو يا سيستمونو حل

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

د الجبري معادلو سيستم مو حل کړ. آيا د مثلثاتي معادلو سيستم حلولای شئ؟

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سيستمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس يا زاويه ده، x او y مجهول قوسونه يا زاويې دي.يو له دغو سيستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\text{sinx} + \text{siny} = a \ \dots \ \text{I}\\ \text{x} + \text{y} = \alpha \dots\dots\dots\dots \ \text{II}\end{cases}$$

د لومړۍ معادلې قيمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره ليکو، څکه چې د دوو ساينونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} = a \dots \ I\\ x + y = \alpha \dots . II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قيمت يعنې α د I په معادله کې اېږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \dots \ I$$

د I اړيکې دواړه خواوې په $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتنۍ معادلې ښۍ لوری له $(+1)$ څخه لوی او له (-1) څخه کوچنی نه دی، څکه چې د قوس يا زاويې ساين دی. يا په بل عبارت مربع يې له يو څخه لوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرې مساوات د $1 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 0$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره

صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کیږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړی معادلې کیڼ لوري شکل

ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ldots I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\ldots II\end{cases}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow 2x=\frac{2\pi}{2}\quad\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې اېږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: د دغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

ځرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړې.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\ \frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیستم د حل شرط ته په کتنو سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2}\leq a\leq \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0\leq a\leq 1$$

د II معادلې کيڼ لورى د تحويل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل څانته غوره کوي:

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

څرنگه چې $\sin x\sin y=1$ دى، بنا پر دې $\cos(x-y)-\cos(x+y)=2$

له بلې خوا $x+y=\pi$ دى نو: $\cos(x-y)-\cos\pi=2$

همدارنگه پوهېږو چې $\cos\pi=-1$ دى.

نو: $\cos(x-y)-(-1)=2\Rightarrow\cos(x-y)+1=2$

$$\Rightarrow\cos(x-y)=2-1\Rightarrow\cos(x-y)=1$$
$$\cos(x-y)=\cos 0^\circ$$
$$x-y=0\Rightarrow x=y$$

د I له معادلې څخه د x قيمت پيداکوو:

$$x+y=\pi\Rightarrow x+x=\pi\Rightarrow 2x=\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2}\quad,y=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\quad x=y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم گروپ: دغه گروپ څلور لاندې سیستمونه تشکيلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=a\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \dfrac{\cos x}{\cos y}=a\end{cases}$$

چې α معلومه زاويه او a معلوم عدد دى. x او y مجهول قوسونه يا زاويې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: **لیدل کیږي چې دغه سیستم له دریم گروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:**

$$\frac{\text{sinx}-\text{siny}}{\text{sinx}+\text{siny}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کېږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل څانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x - y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ x - y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې اېږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x - y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - y = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = y \Rightarrow \frac{2\pi - \pi}{6} = y$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

څلورم ګروپ: دغه ګروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases}$$

څرنګه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2 - 4 + 4a\cot\alpha \geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x - y) = \tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهېږو چې $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \sqrt{3}$

د $\tan x - \tan y = -2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې اېږدو:

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \sqrt{3}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1 + \tan x \cdot \tan y} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \tan x \cdot \tan y = -2$$

یا:

$$\Rightarrow \tan x \cdot \tan y = -3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو:

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = -3 .... \quad I \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} .... \quad II \end{cases}$$

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې ایږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{2}$$

پنځم گروپ: دغه گروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تیر په څیر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له:

$$-1 \leq \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \leq 1$$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\dfrac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کیږي چې دغه سیستم په پنځم گروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]$

قیمتونه په اړونده اړیکه کې ایږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)]}$$

د $x+y$ قیمت د سیستم له لومړی معادلې څخه په پورتنی اړیکه کې ایږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y)+\cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y)+\cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت یې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y)-\cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x-y = \frac{5\pi}{6}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x-y = 5\frac{\pi}{6} \\ x+y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases} -$$

$$2x = \frac{5\pi}{6}+\frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم ګروپ: په دغه ګروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x\pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له: $-1\leq\frac{a-1}{a+1}\sin\alpha\leq 1$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کیڼې خوا کې د صورت او مخرج قیمتونه د $\sin$ او $\cos$ له جنسه داسې ایږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنګه چې $x-y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو:

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2} \Rightarrow x+y=\frac{\pi}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نومورې سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6}.....I \\ x-y=\frac{\pi}{2}.....II \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او وواياست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

$$a)\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالی یې b, a او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\ ,\quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\ ,\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو گروپونو وېشل شوي دي:

لومړی گروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني

لاندې پوښتنې په ځير سره ولولئ، هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چېرې $A = 20^\circ$, $b = 10$, $c = 7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی يې عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چېرې $a = 8$, $b = 5$ او $c = 10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چېرې $A = 48^\circ$, $B = 22^\circ$ او $a = 5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x - \cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

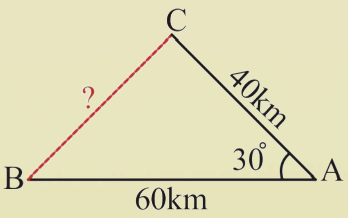
لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چېرې د $A = 30^\circ$, $c = 8$, $b = 5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پيدا کړئ.

2. که په يوه مثلث کې $a = 8$, $b = 5$, $c = 10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.

3. د ABC په مثلث کې که $\dfrac{c}{b} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ او $A = 30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.

4. دوې بېړۍ د A له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5. د $\cot^2\beta$ او $\sin\beta$ له جنسه $\cos\beta$ محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

$b)\ \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

$c)\ \tan A+\cot A=2\csc 2A$

$d)\ \dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$e)\ \dfrac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\dfrac{A}{2})$

$f)\ \cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

$a)\ \cos^2 x+\cos^4 x=0$

$b)\ \tan^2 x-4\tan x+3=0$

$c)\ 4\cos\beta-2=0$

$d)\ \cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

$e)\ \cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آيا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات يو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

$a)\ \dfrac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

$b)\ 1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

$c)\ \cos 4x+2\sin^2 2x$

$d)\ (\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سيستمونه لومړی تشخيص او بيا يې حل کړئ.

$a)\ \begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

$b)\ \begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

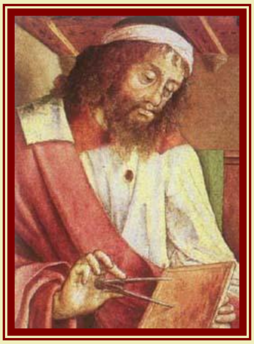
دريم څپرکی

فضايي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اقلیدس تصویر چې نوموړی د دوه بُعدی او درې بُعدی هندسي بنسټ ایښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



اساسي مفاهيم او اکسيومونه

د اقليدس د هندسي مفاهيمو څېړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه يادېږي.

هغه هندسي مفاهيم، چې په دريو اړخونو(بعدونو) کې څېړل کېږي، فضايي هندسه نومېږي.

فعاليت

- د مفاهيمو په برخه کې لکه: لومړني اصطلاحات، دليل، برهان او قضيو په هکله فکر وکړئ. خپل منځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بيان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعريف وکړو:

لومړنۍ اصطلاح گانې Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنيو اصطلاح‌گانو څخه سترگې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهيم او مفکورې چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه، مستوي او فضا.

منطقي دليل او برهان Logical Reason:برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه و روستنيو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. موږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضيهTheorem: هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توگه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، دمېزڅنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. د مستقيم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تېرېدلای شي مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح (تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

بايد فکر مو وي چې يو مستقيم خط دواړو خواوو ته تر لايتناهي پورې غزيدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نقطې يوازې او يوازې يو مستقيم خط ځرگندوي.

دويم اصل: هر مستقيم خط لږ ترلږه دوې ځرگندې نقطې لري چې په يو مستقيم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په يوه مستقيم خط باندې واقع نه وي.

دريم اصل: کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو.

مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولگي تخته د مستوي مفهوم ځرگندوي او مستوي د لومړنۍ اصطلاح (تعريف شوې نه ده) په توگه منل کېږي.

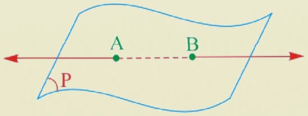
لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د يوه مستقيم خط په استقامت واقع نه وي.

دويم اصل: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

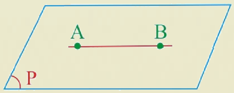
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم اصل: که چیرې د یوه مستقیم خط دوې نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

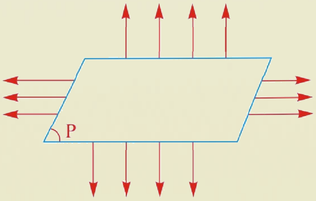
په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمیدلوته اړتیا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه: د کاغذ مخ، د لرګي تخته، چې هر یو یې یوه مستوي څرګندوي رسمیږي، خو په فضایي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتیا شته، ځکه چې په فضایي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ډیرې دي. زیاتره په فضایي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هوارې سطحې په واسطه ښودل کیږي او په یوه کونج کې یې یو توری لیکي.



مستوي نه ده



محدوده مستوي



نا محدوده مستوي

دا مستوي ګانې چې په پورته شکلونو کې لیدل کیږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلایتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي ګانې په پورته شکلونو کې لیدل کیږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او ریاضي کې استعمالیږي، په فضایي هندسه کې هم استعمالیږي.

هغه اکسیومونه چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضایي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخیستل کیږي.

سربیره په مسطحه هندسه په فضایي هندسه کې هم یو لړ ځانګړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانیږي.

د مستوي لومړنی اکسیوم: هغه مستقیم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم: له هغو دریو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تیریږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسیوم: که چیرې دوې مستوي ګانې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چیرې یو ګډ مستقیم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوو مستوي ګانو مشترک فصل وایي.

فضا: فضا هم د لومړني اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه پیژنو.

لومړی اصل: دلایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وایي.

دویم اصل: لږتر لږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. څرګنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی میز د څلورو پښو لرونکي میز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاحګانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم

کوم حالتونه لرې؟

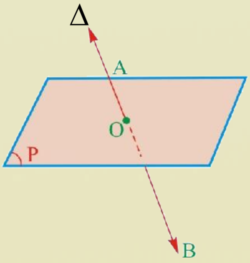
درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

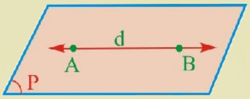
فضا دلایتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو او دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه(جزء) دی.

د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت: یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

1. که چېرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.

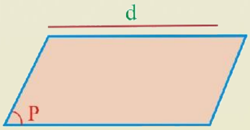


2. که چېرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه په مستوي منطبقه ده او یا داسې ویل کېږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده، د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

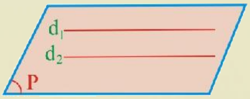
3. كه چېرې يوه مستقيمه كرښه له يوې مستوي سره هيڅ ګډه نقطه و نـه لـري، دا مـستقيم لـه مـستوي سـره موازي دى، مثلاً په لاندې شكل كې د d مستقيم خط له P مستوي سره موازي دى.



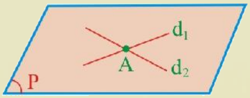
له يو بل سره د دوو مستقيمو كرښو نسبي حالت:

1- كه چېرې دوه مستقيم خطونه په يوه مستوي كې شامل وي، نومورې خطونـه د همغـې مـستوي خطونـه بلل كېږي، او يو له لاندينيو حالتونو څخه لري.

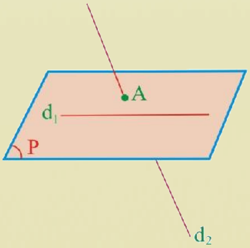
په يوې مستوي كې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل كېږي چې هېڅ ګډټكى ونه لري.



2- په يوه مستوي كې دوه خطونه چې يوه ګډه نقط ولري، متقاطع خطونه بلل كېږي.



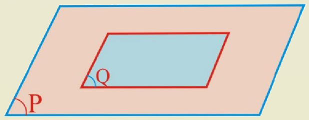
3- دوه مستقيم خطونه چې په يوه مستوي كـې پراتـه نـه وي او كومـه مـشتركه نقطه هـم و نـه لـري، متنـافر خطونه بلل كېږي؟



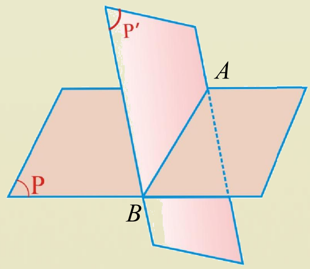
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو مستوي‌گانو نسبي حالت:

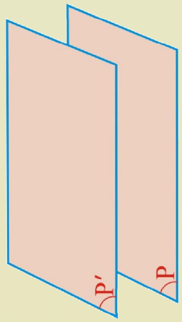
په عمومي ډول دوې مستوي‌گانې لاندې درې حالتونه لري.



منطبق: كه چېرې دوې مستوي‌گانې لږ تر لږه درې مشتركې نقطې ولري چې د يو مستقيم خط په امتداد پرتې وي، يو پر بل منطبقې مستوي‌گانې بلل كېږي، لكه: په مخامخ شكل كې د P او Q دوې مستوي‌گانې يو پر بل منطبقې دي.



متقاطع: كه چېرې دوې مستوي‌گانې يو گډ مستقيم خط ولري متقاطع مستوي‌گانې بلل كېږي. دغه د AB مشترك خط ته مشترك فصل هم وايي. لكه: مخامخ شكل.



موازي: كه چېرې دوه مستوي‌گانې هيڅ كوم گډ ټكى و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توگه د P او P' مستوي‌گانې.

فعاليت

- په فضا كې له يوې نقطې څخه څو مستقيم خطونه تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقيم خطونه تېرېږي؟
- له يوې نقطې څخه څو مستوي گانې تېرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي گانې تېرېږي؟
- له دريو نقطو څخه څو مستوي گانې تېرېږي چې درې واړې نقطې پكې شاملې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

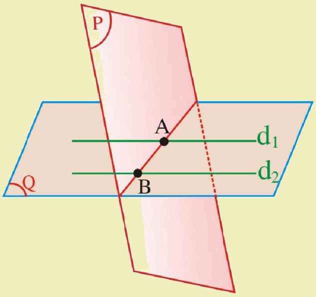
3- که چېرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي‌ګانې یوه له بلې سره څه اړیکې لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستقیم خطونه

آیا په فضا کې مستقیم خطونه موازي دي؟



تعریف:

دوه مستقیم خطونه چې په یوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسیوم:له یوې خارجي نقطې څخه له یوې مستقیمې کرښې سره یوازې او یوازې یوه موازي مستقیمه کرښه رسمولای شو او بس.

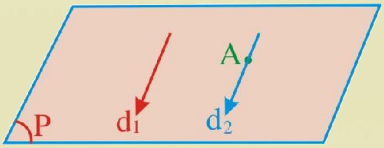
فعالیت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقیم خط چې د A ټکی وربانديې پروت نه وي، په پام کې ونیسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقیم خط څخه څو مستويګاني تېریدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعالیت څخه د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: د یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم خط سره یوازې یو موازي مسقیم خط رسمولای شو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقیمې کرښې څخه یوازې یوه د P مستوي تېرېږي، ولې؟



اوس د P په مستوي کې د A له نقطې څخه یوازې د d_2 مستقیم خط د d_1 له مستقیم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سموالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او یوه د A نقطه د P له مستوي څخه د باندې په پام کې ونیسئ.

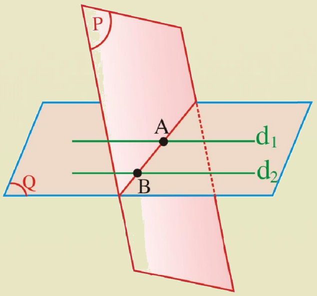
- آیا د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یوه بله مستوي ټاکلی شي؟
- که چېرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکي کې قطع کړي، آیا د P مستوي به د d_2 مستقیم خط هم قطع کړي؟
- آیا دوې مستوي‌ګانې یوه بله د یوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 یو له بل سره موازي مستقیمونه د Q په مستوي کې پراته دي.

که د P مستوي د d_1 مستقیم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقیم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه یوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-ګانې د A یوه مشترکه نقطه لري، که چېرې دوې مستوي‌ګانې یوه له بل په یوه نقطه کې قطع کړي، نو ویلای شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌ګانې د d_2 مستقیمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي.



څکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

پوښتنې

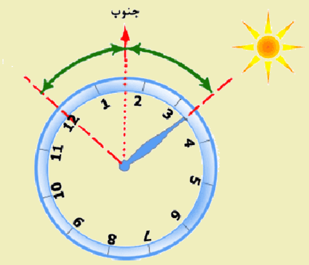
1- که چېرې دوه مستقیم خطونه له یوه درېیم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چیرې د E او F مستوي‌ګانې سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_1 // L_2$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترک فصل او د F او P له مشترک فصل سره موازي دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه



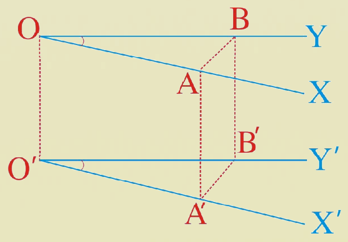
که چېرې د يوې زاويې دوراني لوری د ساعت د عقربې په مخالف لوري حرکت وکړي، زاويه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عين لوري) وي زاويه منفي ده.

فعاليت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاويې داسې په پام کې ونيسئ چې ضلعې يې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مساوي قطعه خطونه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بېل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لري، دليل يې ووياست، د OAB او $O'A'B'$ جوړ شوي مثلثونه له يو بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت له مخې د قضيې متن او ثبوت په لاندې ډول بيانولی شو.

قضيه:په فضا کې دوې زاويې چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، يوه له بلې سره مساوي دي.



ثبوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاويې په پام کې نيسو، داسې چې $\overline{OX}//\overline{O'X'}$ او $\overline{OY}//\overline{O'Y'}$ دي، يو لوری هم لري. په شکل کې د OX او $O'X'$ پر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.

نو د $OAA'O'$ شکل يوه متوازي‌الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري دي. نو $ABB'A'$ هم يوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{A'B'}=\overline{AB}$ دی.

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{A'B'}=\overline{AB}$, $\overline{A'O'}=\overline{OA}$ او $\overline{O'B'}=\overline{OB}$ دي

له دې امله $A'\hat{O}'B'=A\hat{O}B$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قضيې پايله:

i) که په ترتيب سره د دوو زاويو ضلعې موازي او هم لوري وي، نومورې زاويې يو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاويو يوه، يوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو يوه، يوه ضلع يې موازي او مختلف جهتونه ولري، د دغو دواړو زاويو پراخوالی 180° دی.(ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه:

تعريف: په فضاکې د دوو متنافر و مستقيمونو ترمنځ زاويه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د يوې مستوي په يوه اختياري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقيمونو د رسمولو په واسطه حاصلېږي

پوښتنې

1- که د دوو زاويو پراخوالی سره مساوي وي او د يوې زاويې يوه ضلع د بلې د زاويې ضلعې سره موازي وي، آيا د هغو زاويو نورې ضلعې يو له بل سره موازي دي. ولې؟

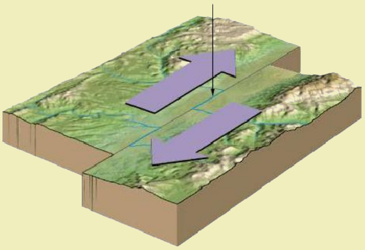
2- که د دوو زاويو ضلعې سره موازي وي، ثابت يې کړئ چې د دغو زاويو، ناصف‌الزاويې سره موازي او يا سره عمود دي.

3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقيمونو ترمنځ زاويه پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستويګانې

يوه مستقيمه کرښه هغه وخت له يوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.
مستوي ګانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.



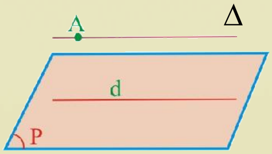
فعاليت

که چېرې د d مستقيم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقيم سره موازي وي، آيا د Δ مستقيم د P له مستوي سره موازي کېدلای شي؟

- دوې د P او Q متقاطع مستويګانې او يو مستقيم خط له دغو مستوي ګانو څخه بهر د P او Q له مستويګانو سره موازي په پام کې ونيسئ.
- د d مستقيم(مشترک فصل) د Δ له مستقيم خط سره موازي کېدای شي؟
- له يوې ټاکلي نقطې څخه د d_1 او d_2 دوه مستقيمو کرښو سره څو موازي مستويګانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعاليتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضيو متن او ثبوت په ترتيب بيانوو.

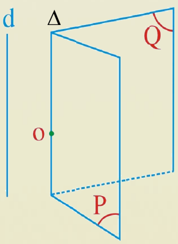
قضيه: که يو مستقيم خط د يوې مستوي له يوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقيم خط له همدې مستوي سره موازي دی.

ثبوت:د d مسقيم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقيم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقيمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقيمه کرښه قطع کړي، د d مستقيمه کرښه چې د Δ له مستقيمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضيې خلاف ده، ځکه د d مستقيمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقيم قطع کولای نشي.



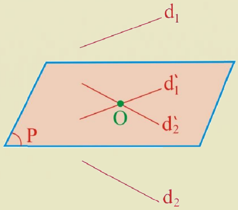
(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستوي ګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه: مخامخ شکل.
که د P ، Q د مستويګانو د Δ په مشترك فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستويګانو یعني په P او Q کې شامل دی.

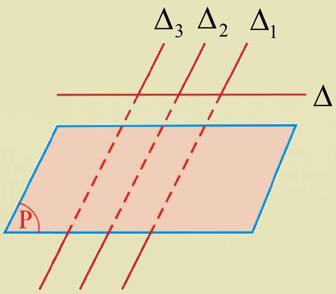
قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.



ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟
که چېرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟



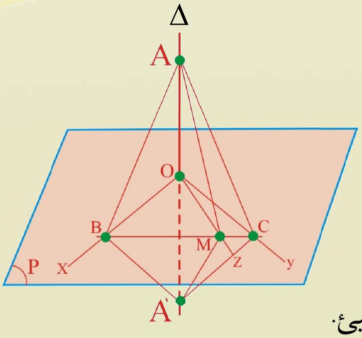
2- که چېرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې متعامدې مستقیمې کرښې او مستوي گانې

که د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي، د Δ په مستقیمې کرښې باندې عمود دي؟

فعالیت



- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقیمونه د Δ په مستقیم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختیاري مستقیمه کرښه په پام کې ونسیئ.
- د Δ له مستقیمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

یو اختیاري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقیمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقیمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقیمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA`}$ سره څه اړیکه لري.

- د OZ مستقیمه کرښه د Δ پر مستقیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.

قضیه: که د Δ یوه مستقیمه کرښه پر هغو دوو مستقیمو کرښو چې دواړه د Δ مستقیمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تیرېږي، عمود ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: دوې مستقيمې کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نيسو، دا دوه مستقيمونه د Δ پر مستقيم چې د(O) له نقطې څخه تېرېږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختياري مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د Δ له مستقيمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې يو قاطع رسموو چې د $\overline{OX}$ د B او $\overline{OY}$ د C او oz مستقيم د M په نقطه کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه $\overline{AA'}$ منځنۍ عمودونه دي، نو

$$\overline{BA}=\overline{BA'}$$

$$\overline{CA}=\overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکی دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د C,B او M نقطې ثابتې پاتې کېږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کېږي، نو ليکلی شو. $\overline{MA'}=\overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقين دی او د $\overline{MO}$ منځنی په عين وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنی عمود دی په نتيجه کې د Δ مستقيمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

فعاليت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقيمې کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X يوه اختياري نقطه د BC پر مستقيمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې د X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چېرې د d_1 او d_2 خطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي‌گانې رسمولای شئ؟

2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آيا ټولې هغه مستوي گانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دي؟

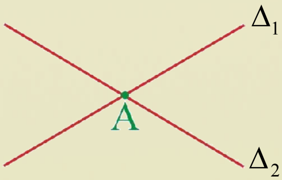
(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې

دوې مستوي‌ګانې چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کېږي.

فعاليت

- د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسيئ
- له دې دوو مستقيمو خطونو او د A له نقطې څخه يوه مستوي تېرولی شو.

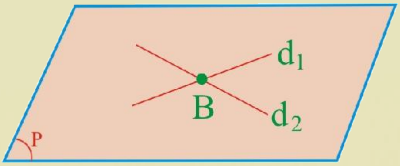


- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقيمې کرښې چې په ترتيب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او يو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.
- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقيمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړيکه لري؟

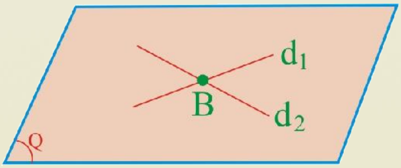
د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانولی شو.

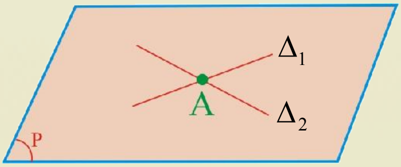
قضيه: که د يوې مستوي دوې متقاطع مستقيمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقيمو کرښو سره موازي وي، نومورې مستوي‌ګانې سره موازي دي.

ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او يوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقيم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم يوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي‌ګانې سره موازي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library





څرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو د d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چیرې د P او Q مستوي ګانې یو بل سره قطع کړي، مشترك فصل يې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کیږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه متقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستوي ګانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.

پوښتنې

که چیرې د E او F مستوي ګانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرتې وي، آیا $L_1 // L_2$ دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنی اصطلاحگاني Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توگه. ټکی، کرښه، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړونو څخه و روسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

ټکی: موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توگه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تېغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي.

مستقيم خط د لومړنی اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

د متقاطع مستوي گانو اکسيوم: که چېرې دوه مستوي گانې يو گډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستوي گانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم (تعريف شوې نه ده) لومړنی اصطلاح په توگه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بُعدي فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدي فضا ده.

له يو بل سره په فضا کې د دوو مستقيمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د يوې مستقيمې کرښې او يوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستوي ګانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقيمونه:

دوې مستقيمې کرښې چې په يوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقيمونه بلل کيږي.

په فضا کې د دوو مستقيمونو تر منځ زاويه:په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاويې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقيمونه او مستوي: يو مستقيم خط له يوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کيږي، چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقيمونه او مستوي ګانې:

که د Δ مستقيم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تيريږي، د Δ پر مستقيمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي ګانې:دوې مستوي ګانې، چې هيڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي ګانې بلل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړۍ ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a _ د AB له خط سره موازي دی

b _ د AB خط يې له منځه تېرېږي

c _ د AB خط عمودي ناصف دی

d _ د AB له خط سره موازي دي يا له AB څخه تېرېږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a _ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b _ د Δ خط يوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c _ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d _ د Δ خط يوازې د P مستوي له يوه خط سره موازي دی.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه يوه مستوي نه تېرېږي له:

a _ هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دی.

b _ له دوو متقاطع خطونو څخه

c _ د يو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه

d _ څلور متمايزې مختلفې نقطې

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

a _ که د Δ مستقيم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b _ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' يو له بل سره موازي دي.

c _ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d _ که دوې مختلفې مستوي‌گانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نوموړې مستوي‌گانې د ياد شوي ټکي په امتداد کې شريکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0 b) 1 c) 2 d) بې شمېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې لـه مـستوي سـره موازي دی.

b _ که يو خط يو له متقاطع مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

c _ که يو خط يوه له دوو موازي مستوي ګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

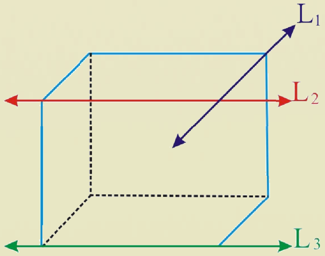
d _ که يوه مستوي يوه له دوو موازي مستويګانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

1- که چېرې د E او F مستوي ګاني يوله بله سره موازي او د L_1 مستقيم خط د E په مستوي کې او د L_2 مستقيم خط د F په مستوي کې واقع وي آيا $L_1 // L_2$ دي؟

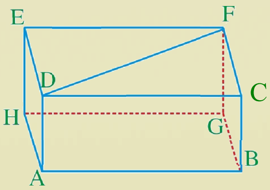
2- که دوه مستقيم خطونه له يوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمـود کيـدای شي.

3- پـه لانـدې مـستطيل کـې د L_1, L_2 او L_3 خطونـو موقعيت نظر يو بل ته څرګند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې يـې مـوازي او کومې جوړې متنافرې دي؟



4- که د P_1 او P_2 مستويګانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستوي ګانې په خپل منځ کې موازي دي؟

5- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي يو مستطيل دی.



a _ د دوو مستويګانو نومونه واخلئ چې پر AD عمـود وي او ووايـئ ولې عمود دي؟

b _ د دريو قطعه خطونـو، نومونـه واخلـئ چې پـر $ABCD$ مـستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاويه قايمه ده.

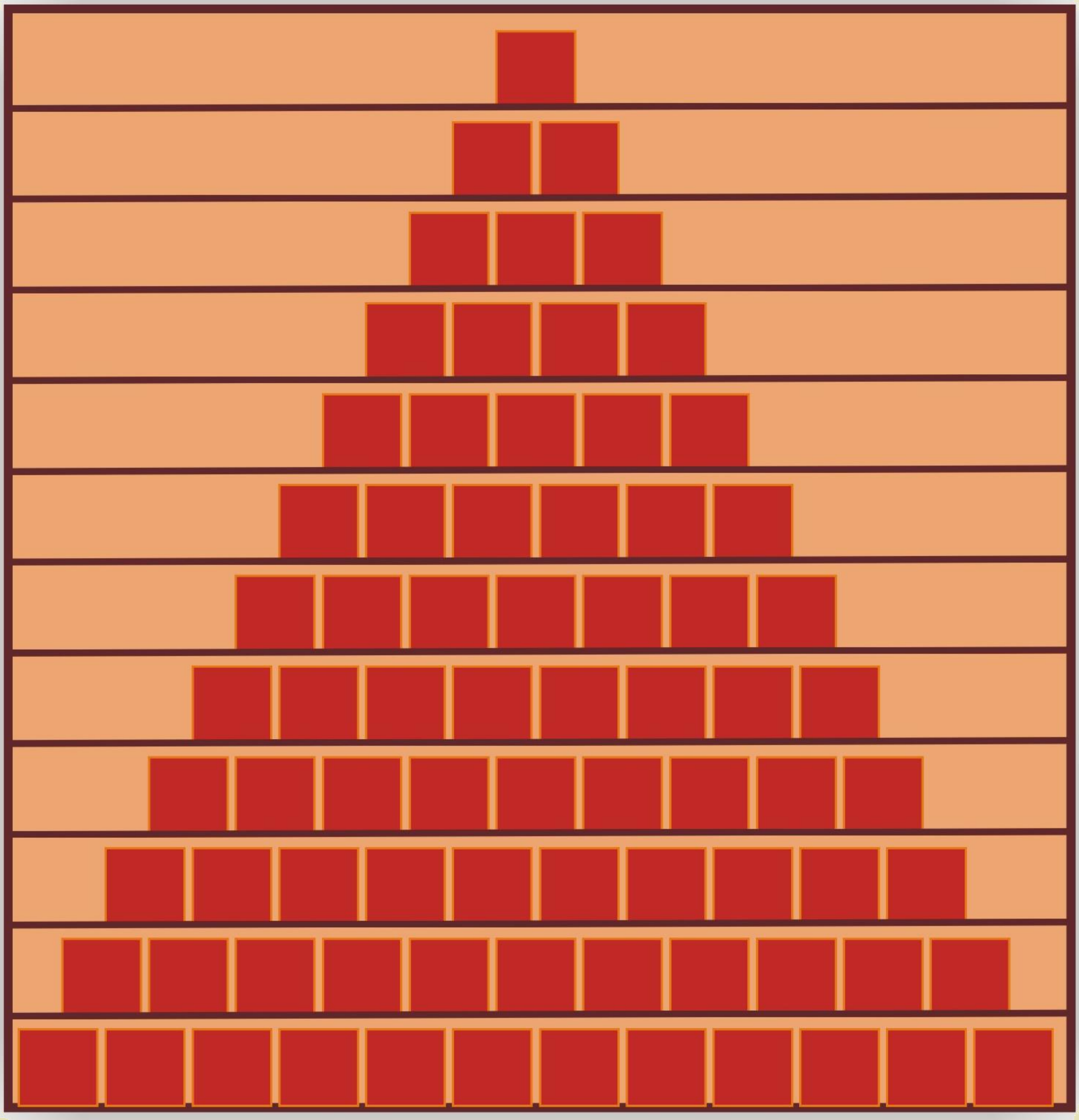
d _ د $D\hat{F}C$ زاويه قايمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلي

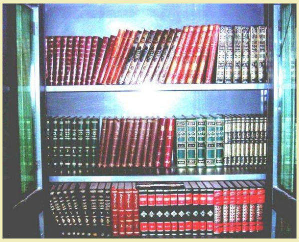
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

تـرادفـونه

Sequence



په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, ... , a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادیږي،
یا ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نوموړي ترادف حدونه دي، a_1 یې لومړی حد او a_2 یـې دویـم حـد او a_n دترادف $n-$ام حـد دی، تـرادف پـه لنـډ ډول داسـې لیکـي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ پـه دې حالـت کـې a_n د تـرادف $n-$ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2,4,6,8, \dots ,2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1,3,5,7, \dots ,2n-1$
د 5 د مضربونو ترادف	$5,10,15,20, \dots ,5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري $n-$ام حد په واسطه ټاکل او تعریفیږي؛ مثلاً:

$$a_n = 2n \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$
$$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$
$$c_n = 5n \quad , \quad n = 1,2,3, \dots$$

فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتیږي متزاید ترادف بلل کیږي، لکه:
د جفت، طاق او 5 د مضربونو عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمیږي، متناقص ترادف بلل کیږي، لکه:
د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \dots , \frac{1}{5n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزايد دي، که متناقص؟

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \qquad , \qquad a_n = 1,4,9,16,25,36,\ \dots$$

حل:

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \qquad , \qquad b_n = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\ \dots$$

ليدل کېږي چې د a_n ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول زياتېږي، نو د a_n ترادف متزايد دی، همدارنګه ليدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف يو متناقص ترادف دی.

يادداښت: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر يې معلوم وي معين ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د غير معينو ترادفونو په نامه يادېږي.

دويم مثال: د $1,2,4,8\dots$ ترادف په پام کې ونيسئ او $n-$ ام حد يې پيدا کړئ. $a_n = 2^{n-1}$ دی.

حل: $n-$ ام حد يې $an = 2^{n-1}$ دی.

دريم مثال: که د يوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستي حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه يې پيدا کړئ.

حل: د 5 لومړنيو حدونو د پيدا کولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قيمتونه ورکوو او په ترادف کې يې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7,\ \dots \\ \frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\ \dots \end{array}\right\}$$

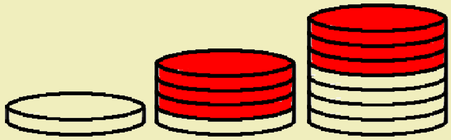
2- که يو ترادف د $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ په شکل راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه يې وليکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences

که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یې یو ثابت عدد وي، دا ترادف په څه نوم یادیږي.



فعالیت

- د مخامخ عددونو نوترادف په پام کې ونیسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وریسي حد ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترادف له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له کیڼي څخه ښي خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف ویلای شو :

تعریف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادیږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر(Common deference) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کیږي که d یو مثبت عدد($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کیږي، لکه: په لاندې مثالونو کې:

$$2,5,8,11,14,17,\ ...$$

$$\left.\begin{aligned} d&=5-2=3\\ d&=8-5=3\\ d&=11-8=3\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ d=3>0$$

څرنګه چې $d>0$ دی نو ترادف متزاید دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم ترادف په پام کې نیسو:

$$4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, \ ...$$

$$\left.\begin{aligned} d &= 0-4 = -4 \\ d &= -4-0 = -4 \\ d &= -8-(-4) = -4 \\ d &= -12-(-8) = -4 \\ d &= -16-(-12) = -4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d = -4 < 0$$

ځرنګه چې $d < 0$ دی نو ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې 2 وي.

حل: ځرنګه چې لومړی حد یې $a_1 = \frac{3}{2}$ او ګډ توپیر یې $d = 2$ دی، نو په عمومي ډول لیکلای شو:

$$a_1 \ , a_2 \ , a_3 \ , \ ...$$

$$a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

اوس د $a_1 \ , a_2 \ , a_3 \ , ... \ , a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1 \ , (a_1 + d) \ , \quad (a_1 + 2d) \quad , \quad (a_1 + 3d), \ ...$$

$$\frac{3}{2} \ , (\frac{3}{2} + 2) \ , \quad (\frac{3}{2} + 2 + 2) \quad , \quad (\frac{3}{2} + 2 + 2 + 2), \ ...$$

$$\frac{3}{2} \ , \quad \frac{7}{2} \quad , \quad \frac{11}{2} \quad , \quad \frac{15}{2} \ , \ ...$$

دویم مثال: کوم یو له لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$$a) \ 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ ...$$

$$b) \ 1, 2, 4, 8, 16, \ ...$$

a د جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګډ توپیر په لاس راوړو:

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$$

$$d = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

ليدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ تـوپير $\frac{1}{2}$ ثابت عـدد دی، نـو د حـسابي تـرادف تعريف پر بنسټ ويلی شو چې نوموړی ترادف يو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

1 , 2 , 4 , 8 , 16

$$d = 2 - 1 = 1$$

$$d = 4 - 2 = 2$$

$$d = 8 - 4 = 4$$

$$d = 16 - 8 = 8$$

ليدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپير يـو ثابت عـدد نـه دی، نـو تـرادف حسابي ترادف نه دی.

په يوه حسابي ترادف کې د n-ام حد ټاکل:

که چېرې د يوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ldots, a_n$ لومړی حد په a او ګډ تـوپير يـې d وي، د n-ام حـد د پيدا کولو لپاره له لاندې تحليلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $\ldots, 5, 7, 9, 11,$ ترادف په پام کې نيسو.

$$5, 7, 9, 11, \ldots$$

$$d = 7 - 5 = 2$$

$$5, 5 + 2, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$$

$$a_1 = 5,\ a_2 = 5 + 2 \cdot 2,\ a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$$

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \ldots$$

په عمومي ډول ليکلای شو چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتني مثال په پام کې نیولو سره په عمومي توگه کولای شو ولیکو چې:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 - a_1 = d \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 - a_2 = d \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 - a_3 = d \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d$$
$$\vdots$$
$$a_n - a_{n-1} = d \quad \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n - ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پایله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه . . . , 12 , 5 , 2− حسابي ترادف 30-ام حد پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ d &= 5-(-2) = 7 \\ n &= 30 \\ a_{30} &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_n &= a + (n-1)d \\ a_{30} &= -2 + (30-1)7 \\ a_{30} &= -2 + 29 \cdot 7 \\ a_{30} &= -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{aligned}$$

دویم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمیر په لاس راوړئ.

$$35\ ,\ 40\ ,\ 45\ ,\ .\ .\ .\ ,2000$$

حل: پوهیږو چې:

$$\left.\begin{aligned} a &= 35 \\ d &= 40-35 = 5 \\ a_n &= 2000 \end{aligned}\right\}$$

$$a_n = a + (n-1)d$$
$$2000 = 35 + 5n - 5$$
$$2000 = 30 + 5n$$
$$2000 - 30 = 5n$$
$$1970 = 5n \quad \Rightarrow \quad n = 394$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که چېرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیدا کړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دی.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\quad \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\underbrace{2x-4}_{a_n},\underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad \Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4\quad \Rightarrow\ 4x-5x=4+8=12\quad \Rightarrow\ -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1\quad,\quad 2(-12)-4\quad,\quad 3(-12)+3$

$$-24+1\,,-24-4,-36+3\ \ \Rightarrow -23,-28,\ -33,-38,-43,\ \ ....$$

یادداښت

که د یوه حسابي ترادف n – ام او m – ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n=a+(n-1)d\qquad ....\ I$$
$$a_m=a+(m-1)d\qquad ....\ II$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نـو د I اړیکـې څخـه II اړیکـه کمـوو، پـه پایلـه کـې کـولای شـو گـډ تـوپیر داسـې پـه لاس راوړو $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}$ (ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې d گډ تـوپیر، a_n د تـرادف $n-$ ام حد ، a_m د ترادف $m-$ ام حد دی.

دریم مثال: د یوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد یې 47 دی، گډ تـوپیر او لـومړی حـد یـې پیـدا کړئ، په پای کې د ترادف ۹ حدونه ولیکئ.

$\square, \square, \square, \square, 27, \square, \square, \square, 47$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=47 \\ n=9 \\ a_m=27 \\ m=5 \\ d=? \\ a=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}=\dfrac{47-27}{9-5}=\dfrac{20}{4}=5 \\ d=5 \\ a_n=a_1+(n-1)d \quad \Rightarrow 47=a_1+(9-1)5=a+40 \\ \Rightarrow \quad 47-40=a_1 \quad \Rightarrow a_1=7 \end{array}$$

ترادف یې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونیکي ترادف: د $\{a_n\}$ یوه ترادف ته هغه وخت هارمونیکي ترادف وایي چې معکوس یې $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ یو حسابي ترادف وي.

لومړی مثـال: د ... $2,4,6,8,10,$ تـرادف یـو حسابي تـرادف دی، څکـه چې $d=2$ دی، د دغـه ترادف د حدونو معکوس یعنې... $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{10},$ یو هارمونیکي ترادف تشکیلوي.

دویم مثال: د طبیعي عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی. $n-$ ام حد یې ولیکئ.

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}, \;\ldots\; ,\frac{1}{n}$$

$$\{a_n\}=\frac{1}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال : که چېرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هارمونیکې ترادف یې په لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}\,,\,(\frac{1}{4}-3)\,,\,(\frac{1}{4}-3-3)\,,\,(\frac{1}{4}-3-3-3)\,,\,(\frac{1}{4}-3-3-3-3)\,,\ldots$$

$$\frac{1}{4}\,,-\frac{11}{4}\,,-\frac{23}{4}\,,-\frac{35}{4}\,,-\frac{47}{4}\,,\ldots$$

فعالیت:

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هارمونیکي حسابي اوسط: که درې مسلسل عناصر a_{n-1} ، a_n او a_{n+1} په داسې حال کې چې $n = 2\,,\,3\,,\,4\ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنګه چې $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}\cdot\frac{1}{2} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1}\cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنۍ اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط ښیې، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکي اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2\cdot 8)}{2+8} = \frac{2\cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 -ام حد پیدا کړئ. $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ ,\ ...$

2- آیا $\frac{5}{4}, 1, \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالي په صورت کې یې مشترک توپیر پیدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

5- له لاندې ترادفونو څخه کوم یو حسابي ترادف نه دی.

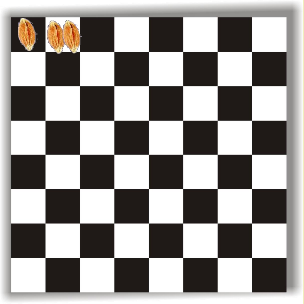
$a)\ 2\ ,\ \frac{9}{4}\ ,\ \frac{5}{2}\ ,\ \frac{11}{4},\ ...$

$b)\ 3\ ,6\ ,9\ ,12,\ ...$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هندسي ترادف

Geometric Sequences



که د شطرنج د یوې تختې په لومړۍ خانه کې یوه دانه غنم او په دویمه خانه کې یې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستی خانه کې د مخکنۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخیره خانه کې(یوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعالیت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونیسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \ldots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړیکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

پایله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت یې یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادیږي، یعني:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \ n = 1,2,3, \ \ldots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \ a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت تاکل کیږي چې لومړی حد او ګډ نسبت یې معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $96 , 48 , 24 , 12 , 6 , \ldots$ هندسي ترادف په پام کې ونيسئ ،ګډ نسبت يې په لاس راوړئ.

حل: هر حد يې په مخکيني حد باندي وېشو:

$96 \rightarrow 48 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6$

$q = \frac{48}{96} = \frac{1}{2}$ $\quad q = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$ $\quad q = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ $\quad q = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

ليدل کيږی چې $q = \frac{1}{2}$ يو ثابت عدد وی.

فعاليت

- په يوه هندسي ترادف کې $a_1 = 2$ او $q = 3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پيدا کړئ.

يادونه

$q > 1$ لپاره ترادف متزايد د ی.

$q < 1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q = 1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دويم مثال: د $2700 , 900 , 300 , 100 , \ldots$ هندسي ترادف په پام کې ونيسئ لومړی حد او ګډ نسبت يې په لاس راوړئ او وواياست چې پورتنی هندسي ترادف متزايد دی او که متناقص.

حل:

$$\text{لومړی حد} = a = 2700$$

$$\text{ګډ نسبت} = q = \frac{900}{2700} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

په پورتني مثال کې $q = \frac{1}{3} < 1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حدد پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چېرې هندسي ترادف د $a_1, a_2, a_3, a_4, \;.......an$ په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \quad \Rightarrow \; a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \quad \Rightarrow \; a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \Rightarrow \; a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, a_4, \;.......$ په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

n - ام حد		خلورم حد	دریم حد	دویم حد	لومړی حد
a_n	, ... ,	a_3	a_3	a_2	a_1
$\downarrow$	, ... ,	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$a_1 q^{n-1}$	, ... ,	$a_1 q^3$	$a_1 q^2$	$a_1 q$	a_1

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پيدا کړئ.

حل: $5\ ,\ -10, 20, -40,\ ....$

$$\left.\begin{aligned} a &= 5 \\ q &= \frac{-10}{5} = -2 \\ n &= 6 \\ a_6 &= ? \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &a_n = aq^{n-1} \\ &a_6 = 5(-2)^{6-1} \\ &a_6 = 5(-2)^5 \Rightarrow a_6 = 5(-32) \\ &a_6 = -160 \end{aligned}$$

دويم مثال: د .... , 2 , 4 , 8 هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{aligned} n &= 12 \\ a &= 8 \\ q &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &a_n = aq^{n-1} \\ &a_{12} = 8(\frac{1}{2})^{12-1} = 8(\frac{1}{2})^{11} = 8\frac{1}{2^{11}} \\ &a_{12} = \frac{8}{2^{11}} = \frac{2^3}{2^{11}} = 2^{3-11} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} \end{aligned}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د a ,M او b, M ترمنځ اړيکه پيدا کړئ.

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{M}{a} \\ q &= \frac{b}{M} \end{aligned}\right\} q = q \Rightarrow \frac{M}{a} = \frac{b}{M} \Rightarrow M^2 = a \cdot b$$

$$M = \sqrt{a \cdot b}$$

له پورتني فورمول څخه ويلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقيقي عددونه وي، نو د M حقيقي مثبت عدد ته د a او b هندسي وسط(Geometric mean) وايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a=3 \\ b=12 \end{array}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیدا کړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5=a\cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\dfrac{32}{2}=16 \quad \Rightarrow q^4=16 \quad \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{array}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف يې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2, 4, 8, 16, 32$

فعالیت

- که په هندسي ترادف کې a_n, n – ام حد، n د ترادف د حدونو شمیر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیدا کړئ.

پنځم مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \ , \quad x+3 \quad , \ x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \quad \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \quad \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \ , \quad x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \ldots$

$b)\ -4, -2, 0, 2, 4,\ \ldots$

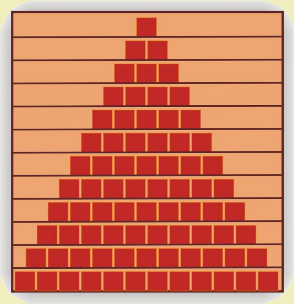
3- د $\ldots, \frac{5}{8}, \frac{5}{2}, 5$ هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

4- د $\sqrt{3}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړې.

5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترادفونو قسمي مجموعه



a - په لسم کتار کې د قوطيو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطيو شمېر پيدا کړئ؟

فعاليت

- د $2, 4, 6, 8, ...$ ترادف په پام کې ونيسئ.
- د دويم او دريم حدونو د جمعي حاصل وليکئ.
- د لس لومړيو پرله پسی حدونو د جمعي حاصل پيدا کړئ.
- د n – ام حد د جمعي حاصل وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانېږي:

ځرنګه چې د لومړي د n حدونو د جمعي حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه يې وليکو، نو ځکه يې دوه يا درې لومړی حدونه ليکو او وروسته له دريو ټکو n – ام حد ليکو.

ځرنګه چې يو ترادف د بې نهايت حدونو لرونکی دی، که د زياتو حدونو د جمعي حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعي حاصل يې ستونزه جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف د n لومړيو حدونو $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n$ د جمعي حاصل په لاندې ډول ليکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

د اسانتيا او لنډيز لپاره په محاسبو کې $\sum$ له دې سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنۍ او ښکتنۍ نښې دا راښيي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول طبيعی عددونه اخلي، i د انډکس په نامه يادېږي. د يوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د i , n , k , j حروف ډېر معمول دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k=\sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+\cdot\cdot\cdot+2n$

لومړی مثال: لاندې مجموعه ($\sum \frac{1}{1^i}$ $\sum_{i=1}^{7}$) په انکشافي شکل وليکئ.

حل: $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1089}{420}$

دويم مثال: لاندې د جمعي حاصل د ($\sum$) په شکل وليکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \ldots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \ldots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \ldots\ +n^2=\sum_{i=1}^{n} i^2$$

دريم مثال: لاندې مجموعه په انکشافي شکل وليکئ.

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2)=?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^{n} i(i+2)=4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\ldots+n(n+2)$$
$$=4\cdot 6+5\cdot 7+6\cdot 8+\ldots+n(n+2)$$
$$=24+35+48+63+\ldots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}=\frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1}=\frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}$$
$$=\frac{4032+3888+3780+3696}{3024}=\frac{15396}{3024}=\frac{5132}{108}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر اوسه مو يوازې د يوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وخېړه، که وغواړو د يوه ترادف د $\{a_n\}_{n\in IN}$ ټولو حدونو د جمعې حاصل پيدا کړو، په دې صورت کې ليکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبيعي عددونه اخېستلای شي.

د $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ سلسله د بې نهايت سلسلې(Series) په نامه يادېږي.

د $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد يا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنګه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهايت شمېر جمع کړو، خوپه رياضي کې د ځينو قاعدو په کارولوسره کولای شو، يوې سلسلې ته ديوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د يوې سلسلې د n حدونو مجموعه پيدا کړو.

د يوې سلسلې د n لومړيو عناصرو مجموعه $\ldots + a_n + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_k$ د نومورې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه يادېږي، که هغه په S_n وښيو، نو لرو:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6 = 1+2+3+4+5+6 = 21$$
$$S_8 = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوي سلسلي او c يو ثابت عدد وي لاندي، خاصيتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ \dots \ + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتني

1. لاندي مجموعي حساب کړئ.

$a)\ \sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$ $\qquad$ $b)\ 3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$ $\qquad$ $c)\ \sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندي مجموعي د $\sum$ په شکل کي وليکئ.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$

$b)\ 1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

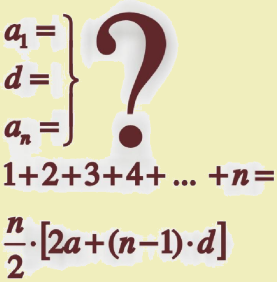
$c)\ 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1)$

3. لاندي قسمي مجموعي په لاس راوړئ.

$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$ $\qquad$ $b)\ \sum_{i=1}^{n} (3i - 2)$ $\qquad$ $c)\ \sum_{i=1}^{n} (2 + 5i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه



که $a_1 , a_2 , a_3 ,\dots ,a_n$ يو حسابي ترادف وي، نو $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ د يوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کېدلای شي؟

که چېرې ديوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ويل کېږي. يا په بل عبارت د يوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وايي.

په يوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد يې a ګډ فرق يې d او اخيري حد يې a_n وي، د حدونو جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S=a+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_{11}+3d)+\dots+(a_n-2d)+(a_n-d)+a_n \quad \dots \text{ I}$$

$$S=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+(a_n-3d)+\dots+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1 \quad \dots \text{ II}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\dots+(a_1+a_n)+a_1+a_n}_{n \text{ خلې } n(a+a_n)}$$

$$2S=n(a+a_n) \Rightarrow S=\frac{n}{2}(a+a_n)\dots\text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښيي چې لومړی حد، اخيري حد اود جملاتو شمېر يې معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$$a_1 = 4$$

$$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4+25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپير ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \text{ .... III}$$

دويم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{aligned} a &= 7 \\ d &= 4 \\ n &= 201 \\ S_{201} &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ & S_{201} = \frac{201}{2}[2\cdot 7 + (201-1)4] \\ & S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200\cdot 4) \quad \Rightarrow \quad S_{201} = \frac{201}{2}(14+800) = \frac{201}{2}\cdot 814 \\ & S_{201} = 81807 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د طبيعي عددونو سلسله په پام کې ونيسئ لومړی حد، ګډ تـوپير او n – ام حـد يـې وليکـئ ورروسـته د مسلسلو طبيعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبيعي جفتو پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم يوه حسابي سلسله ده چې فورمول يـې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8 \quad ...$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \Rightarrow S_n=n(n+1) \end{array}$$

دريم مثال: د جفتو پر له پـسې عـددونو د سلـسلې $(2+4+6+8+...)$ د 200 لومړيوحـدونو د جمعـې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \Rightarrow S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

څلورم مثال: د $2+4+...+$ جفتو عددونو د سلسلې د 200 حدونو مجموعه پيدا کړئ.

فعالیت

- د طبيعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او $n-$ ام حدونه پيدا او همدرانگه د نومړو ترادفونو د لسو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\ \ 2,0,-2,-4,\ \ldots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

2. که يو ترادف د $2,5,8,11,\ \ldots$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قيمتونه حساب کړئ.

$a)\ \ S_8$ $\qquad$ $b)\ \ S_{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعي حاصل

که چېرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړۍ برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعي حاصل یې مساوي په 2 مڼو شي.

فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړی جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چېرې دویمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعي حاصل د فورمول پیداکولو لپاره څه وړاندیز لرئ؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعي حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ قیمت عبارت دی، له: $q \neq 1$ ، $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

د پورتنې اړیکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ \ldots\ + a_1q^{n-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ \ldots\ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad \ldots\ldots\ldots\ II$$

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$q \neq 1$$

د پورتني رابطې صورت او مخرج په (1-) کې ضربوو

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{(q-1)}$$

پاسنۍ اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعي حاصل په لاس راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی. د پاسني ترادف 5 لومړي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 \\ a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 \\ a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1} \\ a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \\ a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$$2, 6, 18, \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $\ldots, \frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 2$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $3, 6, 12, \ldots, 384$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په $\ldots, 36, 12, 4$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n – ام حد قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ سره لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي.
آیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

که چېرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د متباعدې سلسلې(Divergent series) په نامه یادېږي.

او که چېرې $|q| < 1$ وي، د متقاربې سلسلې(Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعده وي $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایته وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقاربه وي($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که متقارب سلسله ($|q|<1$) او د جملو شمېر یې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له: $S_\infty = \dfrac{a}{1-q}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنګه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده:

$$a_1+a_2+a_3+\dots=\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\dots=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323\dots=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\dots$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\dots$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\dots]$$

د قوس دننه دهندسي ترادف د جمعې حاصل دی لومړی حدیې (۱) او د حدونو ترمنځ نسبت یې $\frac{1}{100}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پاسنۍ سلسله کې $a=1$ او $1> \left|q\right|=\left|\frac{1}{100}\right|=\frac{1}{100}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\overline{3}=0.3333\ ...\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ ...\ ]$$

لیدل کېږي چې په پاسنۍ سلسله کې $a=0.3$ او $\left|q\right|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$S=\frac{a}{1-q}=0.\overline{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow 0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots$

2. لاندې اعشاري متوالي کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \ldots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادیږي.

پورتني هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی

یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو

ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی

ترادف د حسابي ترادف په نامه یادیږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر وروستي او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي،

د هندسي ترادف په نامه یادیږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه $a_{n+1}\ ,\ a_n\ ,\ a_{n-1}$ په داسې حال کې چې

$n = 2, 3, 4, \ldots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت دی له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots \ + a_n = \sum\limits_{1=1}^{n} a_i$ د بې نهایته سلسلې (Series) په نامه

یادیږي.

او د $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \ a_1 + a_2 + a_3 + \ \ldots +$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعې قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بې نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q|<1$ وي، متقاربه سلسله او د n جملو د جمعې حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کيږي او قيمت يې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q|\geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايته وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايته ده، يعنې $S_n = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې پيدا او له هغه څخه کرې تاو کړئ.

1. د $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$ ترادف $n-$ام حد کوم دی؟

$a)\ \frac{\sqrt{n}-1}{n}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ $\quad c)\ \frac{n}{n-1}$ $\quad d)\ \frac{n+1}{n}$

2. که $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف $n-$ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

$a)\ 3$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 5$ $\quad d)\ 6$

3. د $\ldots, 3, -1, -5, -9-$حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

$a)\ 35$ $\quad b)\ 38$ $\quad c)\ -35$ $\quad d)\ -38$

4. د $\ldots, 1.3, 1, 0.7, 0.4, 0.1$ حسابي ترادف ګډ توپير عبارت دی، له:

$a)\ 0.3$ $\quad b)\ 0.1$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

5. د $\ldots, 6, 12, 24, 48, 96$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت دی له:

$a)\ -\frac{1}{2}$ $\quad b)\ \frac{1}{2}$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ -\frac{2}{3}$

6. د $5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \ldots$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

$a)\ \frac{3}{512}$ $\quad b)\ \frac{5}{510}$ $\quad c)\ -\frac{5}{512}$ $\quad d)\ \frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

$a)\ S_n = a\frac{1+q^n}{1-q}$ $\quad b)\ S = a\frac{q^n-1}{q-1}$

$c)\ S = a\frac{1+q^n}{1+q}$ $\quad d)$ هيڅ يو

8. په بې نهايته هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

$a)\ q = 0$ $\quad b)\ |q| > 1$ $\quad c)\ |q| < 1$ $\quad d)$ هيڅ يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبيعي عددونه لرو چې د څلورو مضرب وي؟
2. د 21 او 31 ترمنځ په بېلا بېل ډول درې حسابي وسطونه وليکئ. $21,\square,\square,\square,31$
3. که ديوه حسابي ترادف د لومړي او وروستي جملې مجموعه $(a_1 + a_n = 24)$ او د n لومړيو جملو مجموعه يې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟
4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$3,5,7,9,11,\ ...$$

5. که د يوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله يې 192 وي ،ګډ نسبت يې وټاکئ.
6. د يوه هندسي ترادف د 8 لومړيو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د څلورو لومړيو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.
7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$$0.1+0.01+0.001+0.0001+...$$

8. د يوه ناپايه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد يې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پيدا کړئ.
9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېلا بېل ډول وليکئ.

$$3,\square,\square,\square,\square,96$$

10. د $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+...$ هندسي سلسلې د اتو لومړيو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
11. که $a=4$ او $d=3$ وي، هارمونيکي ترادف د $n=12$ لپاره په لاس راوړئ.
12. لاندې متوالي کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

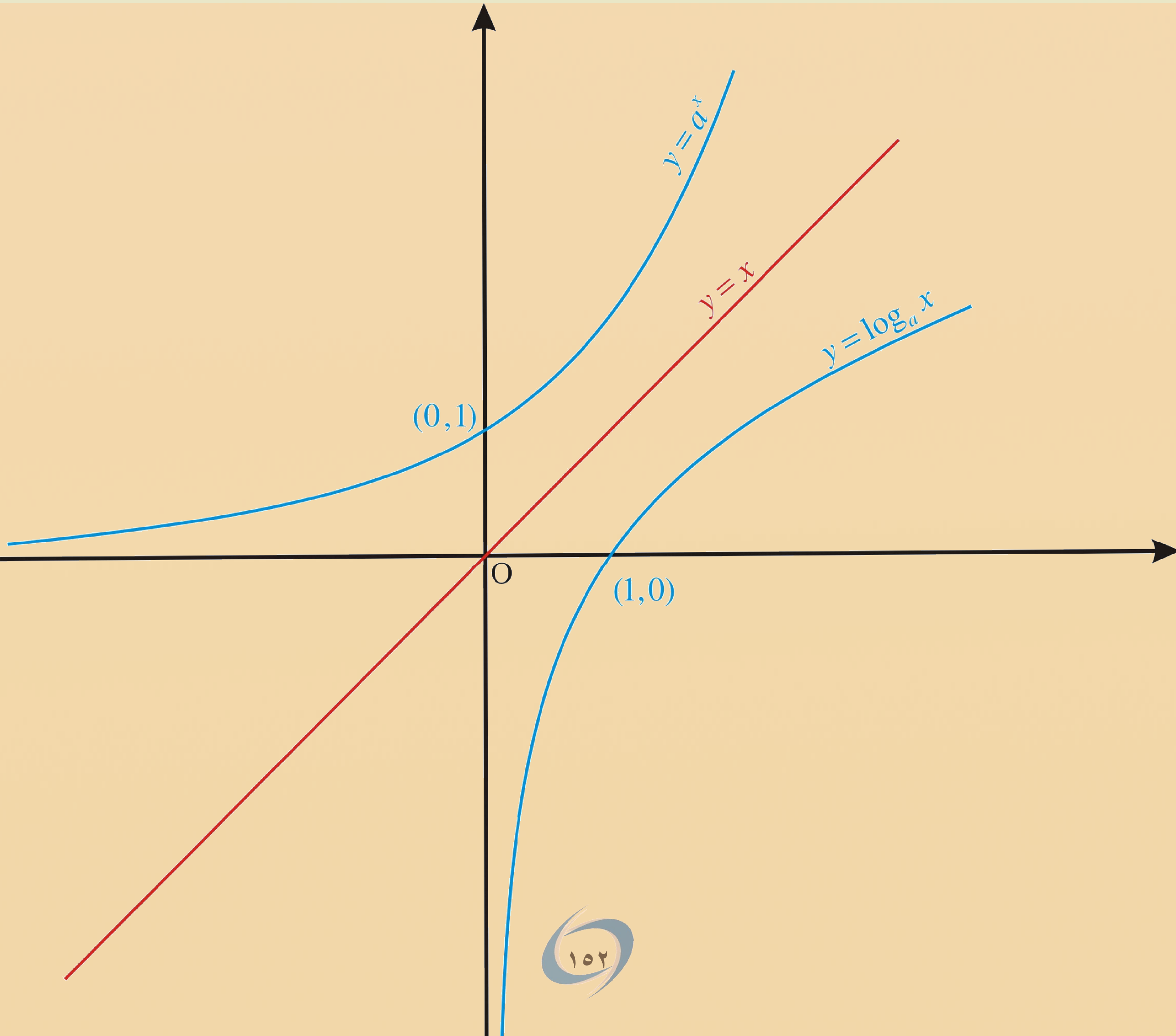
$a)\ 2.\overline{8}$ $\qquad b)\ 3.\overline{57}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

لوګاریتم

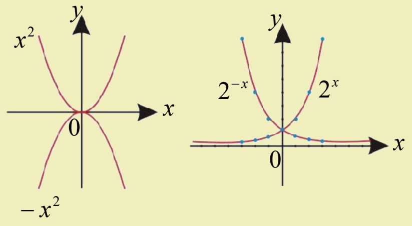
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشیل تابع گاني

Exponential function



پوهیږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته یوله بل سره متناظر دی. آیا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو د ګرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعریف

که چېرې a یو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\}\quad,\quad x\in IR\quad,\quad f: IR\to IR^+$$
$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګاني د 2 په قاعده دي.

فعالیت

- د $x\in Z$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع ګراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x)=2^x$ تابع متزایده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه دوضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.

- پورتنی فعالیت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

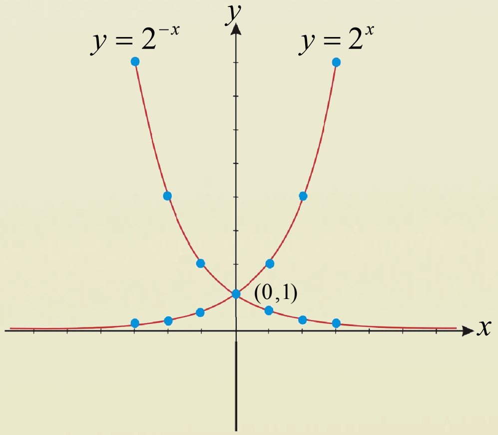
له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قیمت د $x\in Z$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده

د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه نظر y محور ته متناظر دي، یعنې د $y=2^x$ تابع ګراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع ګراف له هر ټکي سره یوپه یو متناظر دی.

یادښت: که چېرې په اکسپوننشیل تابع کې $a>1$ وي متزاید، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $y=2^{x}$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه رسموو.

د $y=2^{x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

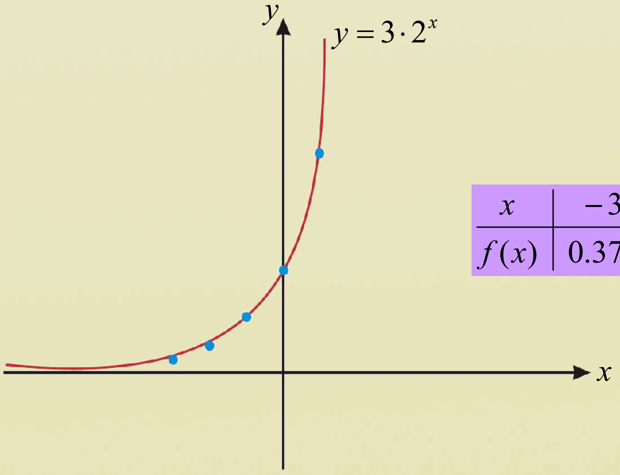
د $y=2^{-x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع ګراف رسم کړئ

حل: د پایلې په پام کې نیولوسره پوهېږو چې د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع قاعده $a=2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتني اکسپوننشیل تابع ګراف دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې ګراف رسم کېږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تېرو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص په لاندې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یو په یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

3. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
4. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تېرېږي.
5. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
6. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع یې $Log_a x$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

دلاندې اکسپوننشيل تابع ګانو ګرافونه په قايمو مختصاتوکې رسم کړئ.

a) $f(x) = 2 \cdot 3^{x}$

b) $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

c) $f(x) = (\frac{1}{2})^{x}$

d) $f(x) = (4)^{-x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لـوگاريـتم

Logarithm

آيـا كـولاى شـئ چې اكسپونـنـشيل تـابع پـه بـل ډول هـم وليكئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعاليت

لاندې جدول بشپړكړئ

$y =$ دركړل شوي عددونه	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
$a^x =$ طاقت لرونكي عددونه		10^{-3}				10^4
$x =$ توان	-4			2		

- د 10^{-3} طاقت لرونكى عدد قاعده او توان څو دي؟
- آيا ديوه عدد قاعده او توان د 1 عدد كيدلاى شي؟
- آيا تاسوكولاى شئ چې طاقت لرونكى عدد په بل ډول وښاياست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعريف كولاى شو، بيان كړو.

تعريف: د طاقت لرونكي عدد يوې بېلې ښوونې تـه لوگـاريتم وايـي، يـا پـه بـل عبـارت د مجهـول تـوان محاسـبه د لوگاريتم په نامه يادېږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنى اړيكه كې a ته د لوگاريتم قاعده (Base) او y ته لوگاريتمي عدد وايي، د يوه طاقت لرونكي عدد توان له لوگاريتم څخه عبارت دى ،كه د قاعدې په اندازه توان لوړشي، راكړل شوى عدد په لاس را كوي.

په تېر جدول كې د 10 د قاعدو توانونه دراكړل شوو عددونو له لوگاريتم څخه عبارت دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

مثال: د لوګاریتم د تعریف په ګټې اخیستې سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتنې

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې طاقت لرونکی عددونه د لوګاریتم په شکل ولیکی

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

$c)\quad 10^4 = 10000$

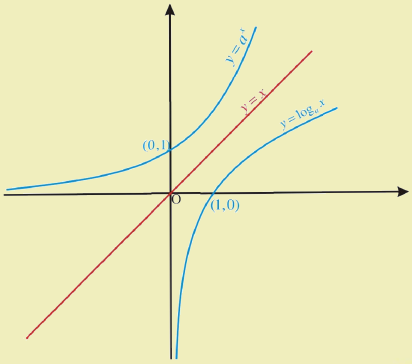
$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

$e)\quad y = 2^x$

$f)\quad y = 3^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي تابع ګانې



آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شی هغه تابع ګانې چې معکوسه لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.

تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده.

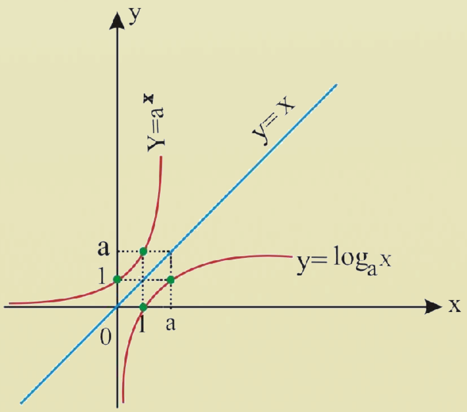
د یوې $(a \in IR^+$ او $a \neq 1)$ اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریتمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښودل کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري، د $f(x)=a^x$ او $g(x)=\log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابعګانې او ګرافونه یې د $y=x$ مستقیم ته متناظر دي.

$$y=a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1}: IR^+ \to IR, f^{-1}(x)=\log_a x,\ a\in IR^+,\ a\neq 1$$

د $f(x)=a^x$ تابع ګراف د $x=1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني جدول څخه ليدل کېږي:

که چېرې $a > 1$ وي، نود $\forall x_1 , x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 0$ لپاره $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

لومړی مثال: د $y = 3^x$ او $y = \log_3 x$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: د $y = 3^x$ تابع په پام کې نيسو:

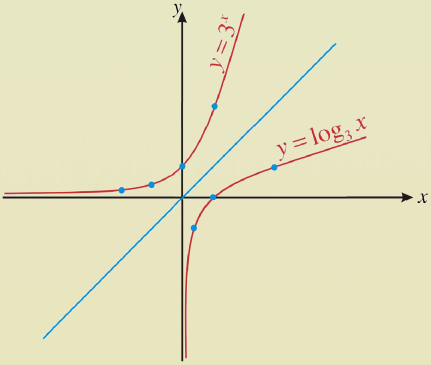
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y = \log_3 x$ تابع په پام کې نيسو:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \log_3 1 \end{array}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = \log_3 3 \end{array}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \end{array}\right\} (\frac{1}{3}, -1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعاليت

د $y=2^x$ او $y = (\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشيل تابع ګانود ګراف په پام کې نيولو سره او د اکسپوننشيل تابع ګانو د تعريف له مخې ددوی داړوندو معکوسو لوګاريتمي تابع ګانو قيمتونه د $x = 1, 2$ لپاره پيدا کړئ او نتيجه يې په عمومي ډول وليکئ.

پايله: د هرې لوګاريتمي تابع لکه: $y = \log_a x$ د يوې اختياري قاعدې لپاره لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1 \ , \ a \in IR \ , a > 0 \ , a \neq 1$

دویم مثال: که چېرې $f(x) = \log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(1), f(3^{-2}), f(9), f(3)$ په لاس راوړئ.

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پر ځای قیمتونه ایږدو.

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$

$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$

دریم مثال: که $\log_3 x = 4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 \Rightarrow x = 81$

د تېرومعلوماتو څخه په ګټې اخیستې سره د لوګاریتمي تابع خاصیتونو په لاندې ډول بیا نیرو.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د حقیقي عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0 = 1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.

څلورم مثال:

د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمت د $x = 16, \frac{1}{8}$ لپاره پیداکړئ.

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$

$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = \log_2 (\frac{1}{8}) = \log_2 2^{-3} = -3\log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمت د $x = 28, \sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتني

1. د $f(x) = \log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(32), f(\frac{1}{32}), f(1), f(2)$ کې پیدا کړئ.
2. د $f(x) = \log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معمولي لوګاريتم *Common logarithm*

او طبيعي لوګاريتم *Natural logarithm*

آيا يوازي 2 او 3 د لوګاريتم قاعدې دي، او که نور عددونه هم د لوګاريتم قاعده کېدلی شي ؟

$$\left.\begin{array}{l}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{array}\right\} = ?$$

تعريف

څرنګه چې ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کېدای شي د لوګاريتم قاعده شي، خويه عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کېږي.

1 – معمولي لوګاريتم: هغه لوګاريتم چې قاعده يې 10 وي، د معمولي لوګاريتم Common logarithm يا (Briggs سيستم) په نامه يادېږي (Briggs) دهغه عالم نوم دی چې دغه سيستم منځ ته راوړی دی معمولی لوګاريتم د log په سمبول يې ښيي او په لاندی ډول ښودل کېږي.

$$f: IR^+ \longrightarrow IR\ ,\ \ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 \ = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

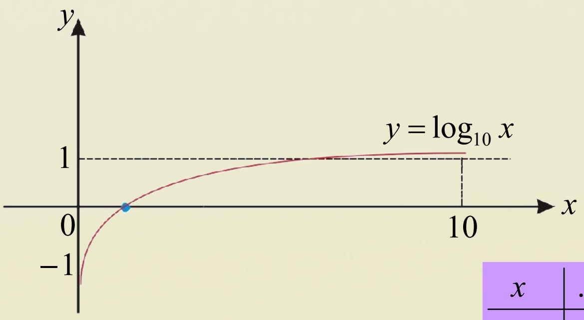
$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\vdots$$

$$n \in z\ ,\quad \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x د مختلفو قیمتونو له مخې یې ګراف رسموو



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2– طبیعی لوګاریتم: هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادېږي او په ln سره ښوول کېږي، او داسی لیکو: $f: IR^{+} \to IR, F(x) = \log_e x = \ln x$:

eیو غیر ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت یې عبارت دی له: $e = 2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^{x}$ لیمت څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیدا کول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادېږي او $f(x) = e^{x}$ تابع د اکسپوننشیل تابع په نوم یادېږي او داسې هم لیکي: $Exp(x) = e^{x}$

د $y = e^{x}$ تابع ګراف لکه: $y = a^{x}$ تابع ګراف په څیر ده.

د $y = e^{x}$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

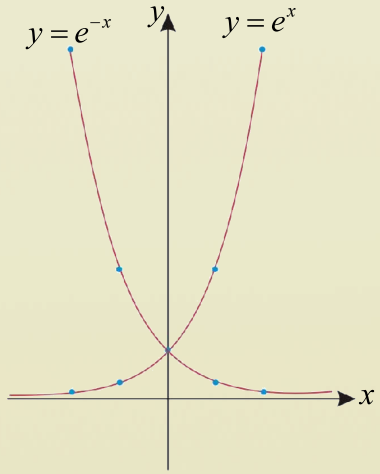
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y = e^{-x}$ په تابع کې x ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنيو تقريبي قيمتونو په پام کې نيولو سره د $y=e^{x}$ او $y=e^{-x}$ تابعګانو ګرافونه رسموو:



د طبيعي لوګاريتم مطالعه په لوړو رياضياتو کې لکه: ساينس، انجنيري، تجارت او تخنيک کې زيات استعمال لري.

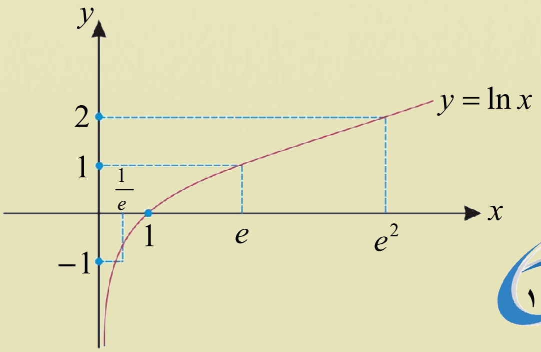
د طبيعي لوګاريتم د تابع $y=\ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}, \ln e^{-1}\ \ln e^{0}, \ln e^{3}, \ln e^{2}$ او $\ln e^{1}$ پيدا کړئ.

حل: د تعريف په پام کې نيولو سره لرو چې: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^{1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{1} \Rightarrow y=1$$
$$\ln e^{2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{2} \Rightarrow y=2$$
$$\ln e^{3}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{3} \Rightarrow y=3$$
$$\ln e^{0}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{0} \Rightarrow y=0$$
$$\ln e^{-1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\ln e^{-2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

د $y=\ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $y = \ln\frac{1}{e^7}$ قیمت پیدا کړی.
- د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتني

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\log_e e^8$ $\qquad$ $b)\ln\frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$ $\qquad$ $d)\log\frac{1}{10^{-2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

پوهېږي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قانون ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قانون ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په څودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځیني قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$$a \in IR^+ ,\ a \neq 1, \log_a a = 1$$

ثبوت: پوهېږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\},\ a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}\ , a^0 = 1$ نو

$$\log_a 1 = 0$$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون:د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموعې سره مساوي دی یعنې:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

ثبوت: که چیرې ولرو.

$$x = a^p \ \ldots \ \mathrm{I}$$

$$y = a^q \ \ldots \mathrm{II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو: $x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنۍ اړیکې له دواړو خواوو لوګاریتم نیسو: $\log_a(x \cdot y) = p + q$

د p او q قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړي مثال: د 50 عدد لوګاریتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دویم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4(2 \cdot 2 \cdot 4) = \log_4(4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

فعالیت

- دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

خلورم قانون: د دوو عددونو د تقسیم لوګاریتم د لوګاریتمونو له تفاضل سره مساوی دی، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چېرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرونو:

$$\left.\begin{aligned} x &= a^p \dots\dots\dots\; I \\ y &= a^q \dots\dots\dots\; II \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \log_a x &= p \\ \log_a y &= q \end{aligned}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل ووېشو.

$$\frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنۍ اړیکې له اطراف څخه لوګاریتم نیسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q د قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3890$

دويم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبيقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy} = \log\ (5y)$$

$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$

$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د يوه توان لرونکي عدد لوګاريتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاريتم لـه حاصل ضرب سره يعنې که چېرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x \cdot x \cdot x \cdot\ \dots\ \cdot x)$$

$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{n \text{ خلې } lag_a x}$$

په پايله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخيستنې سره کولای شو وليکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دويم مثال: دغه لوګاريتم $\log_3 \sqrt[3]{9}$ پيداکړئ؟

حل: $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 \sqrt[3]{3^2} = \log_3(3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعاليت

- لاندې لوګاريتمونه پيداکړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\qquad$ $\log_5 \sqrt{8} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ \log_4(5x^2) = ?$

$b)\ \log_{10}(10x^2y) = ?$

$c)\ \log_{10}5 + \log_{10}20 = ?$

$d)\ \log_{12}36 + \log_{12}4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې پـه خـارج قسمت واړوئ، د امکان پـه صـورت کې وروستي ځواب په لاس راوړئ.

$a)\ \log_7 \dfrac{63}{49} = ?$

$b)\ \log \dfrac{125}{80} = ?$

$c)\ \log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

$d)\ \log_{10}1000 - \log_{10}100 = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$a)\ \log_{10}(0.0001)$ $\qquad$ $b)\ \log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شوی وي، خرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: د دوو عددونو د لوګاریتمونو د تقسیم حاصل چه په عین قاعده وي مساوي ده په:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت:د ثبوت لپاره $\log_b m = y$ او معادل شکل يې يعنې $m = b^y$ ليکو اوس لـه اطرافو څخه د a پـه قاعده لوګاریتم نیسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$$

اوس د y قیمت په پورتني اړیکه کې اېږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنۍ اړيکې دواړه خواوې په $\log_a b$ وېشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړی.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3\cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاریتم څخه چې هغه د کو لوګاریتم (co-logarithem) په نامه یاد یږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5\cdot 1 = -5$

اووم قانون: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نیسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1 \ldots I$

د I په رابطه کې د 1 عدد په ځای لیکلی شو چې $1 = \log_M M$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاریتم نیسو یعني $\log_a M = x$

په پورتنی اړیکه کې د x په ځای قیمت اېږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعالیت

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$\log_{64} 2 = ?$ $\log_4 \sqrt{25^6} = ?$

اتم قانون: دیوه عدد لوګاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نیسو او هغه داړوند طاقت په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاریتم نیسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a m$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د m په ځای قیمت ایږدو:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتني قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

$$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x \qquad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x \qquad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}(\frac{3}{-1})\cdot 1 = -18$$

فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبیعي لوګاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوګاریتمونو یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x . \log_a b$ له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې چې b, a او x مثبت عددونه او a او b د 1 خلاف دي:

که چېرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې $b=e$ او $a=10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x=\frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x=\log x=\log_e x\cdot\log_{10} e$$

$$\log x=\log_{10} e\cdot\ln x$$

څرنګه چې $\log_{10} e=0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x=0.4343\cdot\ln x$$

لومړی مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x=2.3026\cdot\log x$$

$$\ln 4.69=2.3026\cdot\log 4.69$$

$$\ln 4.69=2.3026\cdot 0.6712=1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیدا کړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73=1.9066$ وي.

حل: د تېرې اړیکې په ګټې اخیستې سره لرو چې:

$$\log x=0.4343\cdot\ln x$$

$$\log 6.73=0.4343\cdot\ln 6.73$$

$$=0.4343\cdot 1.9066=0.8280$$

پوښتنې

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4}=?$ $\qquad b)\ \log_9 27=?$

$c)\ \log_8 4=?$ $\qquad d)\ \log_{121} 14641=?$

$e)\ \ln 672000$ $\qquad f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 0.235$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرکټرستیک او مانتیس

Characteristic and Mantissa

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

پوهیږو چې:

$\log_{10} 1000 = 3$, $\log_{10} 100 = 2$, $\log_{10} 1 = 0$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمېر او لوګاریتم ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟

تعریف

پوهېږو چې د x هر حقیقي مثبت عدد د $x = S \cdot 10^n$ په شکل لیکل کیدای شي، داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد وي.

که چېرې د x لوګاریتم غوښتل شوی وي، په لاندې ډول یې پیدا کولای شو.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n\log 10 = \log S + n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1 \le S < 10$ وي، S د x د لوګاریتم مانتیس یا اعشاري برخه او n چې یو تام عدد دی، د x د لوګاریتم مشخصه یا کرکټرستیک څخه عبارت دی. څرنګه چې $1 \le S < 10$ دي نو.

$$\log 1 \le \log S < \log 10$$
$$0 \le \log S < 1$$

له پورتنی اړیکې څخه داپایله په لاس راځي چې دیوه عدد (له ۱۰ کوچنی او له یوه لوی یا مساوي) لوګاریتمې یې د یو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعالیت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001 = 10^{-3}$	$0.01 = 10^{-2}$	$1 = 10^{0}$	$1000 = 10^{3}$	$4 = 10^{0.602}$	$7 = 10^{0.845}$	$10 = 10^{1}$	$20 = 10^{1.390}$
د عددونو لوګاریتمي شکل	$\log_{10} 0.001$		$\log_{10} 1$			$\log_{10} 7$		$\log_{10} 20$
لوګاریتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاریتمونه چې د 0، 10، 100, 1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څو سره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چېرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرسټیک یې صفر دی.
- که چېرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرسټیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چېرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرسټیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرسټیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومېږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10د عدد توان له کرکټرسټیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10د توان په څېر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل:

$a)\quad 2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)\quad 573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$$c)\quad 0.0028 = \frac{28}{10000} = \frac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$$

قاعده: که چېرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نو د هغه عدد دلوګاریتم کرکټرسټیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمېر، منفي یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرسټیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمېر له 3 سره برابر دی، نو کرکټرسټیک یې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرسټیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې د ښي خوا د صفرونو له شمېر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرسټیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3})\\ &= \log 2 + \log 10^{-3}\\ &= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکټرسټیک یې -3 دی.

له تېرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرسټیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرسټیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست؟

$a)\ \log 0.9560$ 　 $b)\ \log 956.0$

$d)\ \log 2345$ 　 $e)\ \log 3.875$

$c)\ \log 9560$ 　 $f)\ \log 0.0009560$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم جدول

څرنګه چې په تېرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم له دوو برخو(کرکټرستیك او مانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیدا کولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{array}{l}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{array}\right\} = ?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهېږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، څرنګه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخی او مانتیس یې د لوګاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی ټاکل کېږي، دغه جدول یې تر ځینې 7 ، تر 5 او ځینې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري د تامو عددونو د ارقامو د شمېر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه: 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښۍ خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

لومړی مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$

$$\log 765 = \log(7.65 \cdot 10^2)$$

$$= \log 7.65 + \log 10^2$$

$$= \log 7.65 + 2$$

مانتیس ← $\log 7.65$ ، کرکټرستیك ← 2

د 2 عدد د کرکټرستیك څخه عبارت دی او دمانتیس د پیدا کولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7 4										
7 5						↓				
7 6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
7 7										
7 8										
7 9										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دويم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړئ؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^{1}$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70 ⋮ → 79 ⋮	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**

د 709 عدد د 9 ستون لاندي لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 7.09 عدد مانتيس 0.8506 دی، په پايله کې يې لوګاريتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دريم مثال: د 0.0247 لوګاريتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2.47 عدد په 24 – ام سطر او 7 – ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوګاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \overline{2}.3927$$

يادونه: څرنګه چې مانتيس هميشه مثبت دی، که کرکټرستيک منفي وي او وغواړو دواړه د يوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستيک له پاسه ليکو، مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \overline{2}3927$$

فعاليت

- د لوګاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوګاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولوسره د 15 , 105, 900 , $\frac{3}{4}$, 0.007 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\log(105) = \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$
$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$
$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$
$$= 0.95424 + 2$$
$$= 2.95424$$

$$\log(\frac{3}{4}) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$
$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \overline{3}.84570$$

پوښتنې

1. دلاندې لوګاريتمونو کرکتېرستيک په شفاهي ډول وواياست او مانتيس يې د جدول له مخې پيدا کړئ.

$a)$ $\log 222$ $b)$ $\log 0.921$

$c)$ $\log 928$ $d)$ $\log 527$

$e)$ $\log 0.024$ $f)$ $\log 2400$

$h)$ $\log 0.00024$ $j)$ $\log 24$

2. د لاندې لوګاريتمونو قيمتونه په لاس راوړئ.

$a)$ $\log(2.73)^3$ $b)$ $\log \sqrt[5]{0.0762}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتي لوګاریتم

Anti Logarithm

که چیرې د یوه عدد لوګاریتم راکړل شوی وي خرنګه کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

تعریف: که چېرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم بلل کېږي یعنې $y = anti\log x$

مثلاً که چېرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاریتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعالیت

- که چېرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نوموړي عدد کرکټرسټیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرسټیک دی، نو N یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: $\log N = 2.9939$ دی د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نوموړي لوګاریتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوګاریتم په جدول کې پیدا کوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داړوند سطر ښي لوری ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتنی پوښتنه کې 2 د کرکټرسټیک په توګه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمېریې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې: $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti\log 2.9939 = 986$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: که چیرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه: د تېر په څیر لیکو، څرنګه چې 953 مانتیس ښیي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنګه چې کرکټرستیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې N یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$
$$\log 9.53 = 0.9791$$
$$anti\log 0.9791 = 9.53$$

دريم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پیدا کړئ.

په مثال کی لیدل کیږی چې کرکټرستیک او مانتیس دواړه منفي دی او په جدول کې منفي عدد وجود نه لری، ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، د 1 عدد له مانتیس سره جمع او له کرکټرستیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتیس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886 .
کرکټرستیک ښیي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ دري صفرونه ځای لري

$$anti\log -3.05531 = 0.000885 \quad \text{نو} \quad N = 0.000885$$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ 2 \qquad b)\ 0.2 \qquad c)\ 0.02 \qquad d)\ 0.0002$

حل:

$$a)\ \log 2 = 0.3010$$
$$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \bar{1}.3010$$
$$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \bar{2}.3010$$
$$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \bar{4}.3010$$

له پورتني مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوګاریتم مانتیس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه یو شان مانتیس 0.3010 لري، ښي او یا چپ لوري ته د صفرونو زیاتول په مانتیس باندې کومه اغیزه نه لري.

پوښتنې

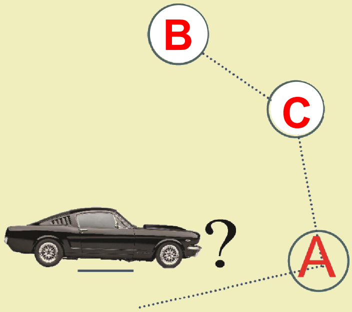
دلاندې هر یوه انتي لوګاریتم قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479 \qquad b)\ anti\log -5.0521$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطي انټرپولېشن

Linear Interpolation



یوګړندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقیقوکې د A ښارته او یونیم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسیږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسیږي.

فعالیت

- که چیرې $\log B = b, \log A = a$ راکړل شوی وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقیقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکلي ډول وواياست چې که (a, b) یوبل ته نژدې عددونه وي، نود C لوګاریتم چیرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قیمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پایله: که چیرې دیوه نامعلوم قیمت د پیداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، په دې صورت کې نوموړې طریقه د خطي انټرپولېشن په نامه یادیږي.

که یو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاریتم له دري رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاریتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پیداکولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونویه منځ کې پراته دي چې لوګاریتمونه یې په جدول کې شته، او په لاندې ډول یې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چیرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونیسو ، نو په دې صورت کې لیکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

$$\text{د لوګاریتمونو توپیر } 0.0008 \; d\left[\begin{array}{cc} \text{لوګاریتمونه} & \text{عددونه} \\ 0.7193 & 5.240 \\ x & 5.235 \\ 0.7185 & 5.230 \end{array}\right] 0.005 \qquad 0.010 \text{ د عددونو توپیر}$$

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو له بل سره متناسب دي جوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$
$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال: د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\begin{aligned}\log 0.0007957&=\log(7.957\cdot 10^{-4})\\ &=\log 7.957+\log 10^{-4}\\ &=\log 7.957-4\log 10\\ &=\log 7.957-4\end{aligned}$$

د 7.957 عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، لیدل کېږي چې کرکټرستیک یې $4-$ دی، خو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$
$$\log 7.950=0.9004$$

څرنګه چې $7.950<7.957<7.960$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x = \log 7.957$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه يې لوګاريتم په لاس راوړو.

$$\begin{array}{c} \text{عددونه} \qquad \text{لوګاريتمونه} \\ 0.01\left[\begin{array}{lcc} & 7.96 & 0.9009 \\ 0.007\Big[& 7.957 & x \\ & 7.950 & 0.9004 \end{array}\Big]d\right]0.0005 \end{array}$$

د عددونو توپير 0.01 ، د لوګاريتمونو توپير 0.0005

$$\frac{d}{0.0005}=\frac{0.007}{0.01}\Rightarrow$$

$$d=0.0005\frac{0.007}{0.01}=0.00035\approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتيس سره جمع کوو:

$$0.9004+0.0004=0.9008$$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957=0.9008+(-4)=\overline{4}.9008$$

دريم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاريتم پيدا کړئ.

حل: که چېرې $anti\log 4.5544=x$ وضع شي، نو بايد x پيداکړو، له پورتنی اړيکې څخه داسې پايله په لاس راځي.

$$\log x=4.5544=4+0.5544$$

$$\log x=\log(t\cdot 10^{4})=\log t+4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتيلوګاريتم يې پيدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قيمت د انټرپوليشن په طريقه پيدا کوو، د عددونو تفاضل لکه: په تېرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب يې د تېرېه شان تشکيلوو.

$$\begin{array}{c} \text{عددونه} \qquad \text{مانتيسونه} \\ 0.01\left[\begin{array}{lcc} & 3.59 & 0.5551 \\ d\Big[& t & 0.5544 \\ & 3.58 & 0.5539 \end{array}\Big]0.0005\right]0.0012 \end{array}$$

د عددونو توپير 0.01 ، د مانتيسونو توپير 0.0012

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d=0.01\cdot\frac{0.0005}{0.0012}=\frac{0.000005}{0.0012}=0.0041667$$

$$d=0.0042$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د t د قیمت پیدا کولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددوو عددونو لوګاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتني

په لاندې اړیکو کې د x او z قیمتونه پیدا کړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582$ $\qquad$ $b)\quad x = \log 6.289$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلې

Exponential and logarithmic equations

آیا تر اوسه مود $5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

$$\log_2(x^2-1)=3$$

$$5^x = 5^{\frac{1}{2}x-2}$$

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلو په نامه یادېږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره که چېرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خوا وو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32 \Rightarrow 2^{x-1}=2^5 \Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازمویئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$
$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$
$$9x-3=4 \Rightarrow 9x=4+3$$
$$9x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

آزمونه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \quad \Rightarrow \; 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \quad \Rightarrow \; (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \quad \Rightarrow \; 2^4 = 2^4$$

فعالیت

- په $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږی. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیداکولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په ګټې اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1) = 3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \quad , \qquad x = \pm 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال:په $\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2) = 2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2) = \log_3 9^2$$

ځرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2 = 9^2 \Rightarrow x+2 = 81 \Rightarrow x = 81-2$$
$$x = 79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x - \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} 4 = 0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او ویش په کارولو سره پورتنی معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4 = \log_{\sqrt{5}} \frac{3\cdot 5}{4} = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2) = x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2) = x+1 \Rightarrow 3^{2x}+2 = 3^{x+1}$$
$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$
$$(3^x)^2 - 3\cdot 3^x + 2 = 0$$

که $3^x = t$ وضع کړو،نو:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$
$$t_1 = 1 \quad , \quad t_2 = 2$$

$$3^x = t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$3^x = t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x_2 = \log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36) - 2\log(-x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$

پوښتني

په لاندې لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو کې د x قیمت په لاس راوړئ.

$a)\quad (11)^{3x-1}=11$

$b)\quad 7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه

آياکولای شو د اعشاری عددونو عمليې لکه ضرب، تقسيم، توان او جذر د لوګاريتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{28.8}{78.8} \\ 3.17\cdot 88.2 \end{matrix}\right\} = ?$$

د ضرب حاصل پيدا کول د لوګاريتم په مرسته: کولای شو ددوو يا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاريتم د لاندې قانون له مخې پيدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاريتم په مرسته پيدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس ليکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

ليدل کيږي چې د0.4466 مانتيس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او0.4472 مانتيسونو په منځ کې شته.

له جدول څخه ليدل کيږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

	عددونه	مانتيسونه		
د عددونو توپير 0.01	2.79	0.4456		د مانتيسونو توپير 0.0016
d	t	0.4466	0.0006	
	2.80	0.4472		

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسي حال کي چي $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهېږی؟

دووه یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعي حاصل پیدا کوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیدا کړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعني : $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\frac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لرو چې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti\log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پیداکولو لپاره لومړی دمقسوم له لوګاریتم څخه د مقسوم علیه لوګاریتم کموو، وروسته ددغه تفاوت انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.

فعالیت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاریتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاریتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اویاکسرونه وي، د لوګاریتم له پنځم قانون څخه کار اخلو یعني $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ویلای شوچې: دیوه توان لرونکي عدد قیمت پیداکولو لپاره لومړی د عدد توان په لوګاریتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاریتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.

فعالیت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قیمت د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې حاصل ضرب د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\quad \dfrac{8}{737} = ?$ $\qquad b)\quad \dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومیږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د $(0،1)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوګاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي.

دلوګاریتمي تابع خواص

- دلوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تېرېږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوګاریتمي تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوګاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- څلورم قانون $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \dfrac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\dfrac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \dfrac{1}{n} \log_a x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم ډولونه:

معمولي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کېږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کېږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوګاریتم په نامه یادېږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کېږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چېرې $\log x = n + \log S$ وي داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتي لوګاریتم (antilogarithm): که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم دی یعنې

$y = anti\log x$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد ددوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادېږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمي معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلې په نامه یادېږي، د مجهول د پیداکولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجودوي، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړى تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

$a)\ 4 \qquad b)\ -4 \qquad c)\ 3 \qquad d)\ -3$

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اړيکه کې د b قيمت عبارت دی له:

$a)\ \frac{1}{4} \qquad b)\ 81 \qquad c)\ \sqrt{81} \qquad d)\ -4$

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قيمت په لاس راوړئ.

$a)\ 0 \qquad b)\ 4 \qquad c)\ 8 \qquad d)\ 9$

4. د x قيمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

$a)\ 2 \qquad b)\ 3 \qquad c)\ 4 \qquad d)\ 5$

5. $\log_2 16 = ?$

$a)\ 4 \qquad b)\ 3 \qquad c)\ 5 \qquad d)\ -4$

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

$a)\ 3 \qquad b)\ -3 \qquad c)\ 4 \qquad d)\ 5$

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قيمت عبارت دی له :

$a)\ \frac{1}{2} \qquad b)\ -\frac{1}{2} \qquad c)\ 1 \qquad d)\ -1$

8. د x قيمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

$a)\ x=-3 \qquad b)\ x=9 \qquad c)\ x=-9 \qquad d)\ x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه ياکرکټرسټيک عبارت دی له:

$a)\ 0 \qquad b)\ 1 \qquad c)\ 2 \qquad d)\ 3$

10. د يوه عدد دلوګاريتم معکوس عبارت دی له:

$a)\ \log_a m = \frac{1}{\log_a m} \qquad b)\ \log_a m = -\frac{1}{\log_a m} \qquad c)\ \log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ $\qquad d)$ هيڅ يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $\quad b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $\quad d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e)15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $\quad f)\ \log\sqrt{x+1} = 1-\frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2-\log 20$ $\quad h)\ \log_5(x-1)-\log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوګاریتمي افادې د لوګاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $\quad b)\log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $\quad e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\quad \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $\quad b)\quad \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\quad \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $\quad d)\quad \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $\quad e)\quad \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوګاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $\quad b)0.8954$ $\quad c)4.5682$ $\quad d)\bar{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوګاریتم حساب کړئ.

$a)89500$ $\quad b)\ 91$ $\quad c)3065.3$ $\quad d)\log 0.002$

6. د لوګاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\quad 2.01\cdot 52.9$ $\quad b)\quad (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888\div 256$ $\quad b)\ 17.3\div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوګاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)(7.42)^3$ $\quad b)(-84.7)^2$ $\quad c)\sqrt{418}$ $\quad d)\sqrt{0.21}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاريتم جدول چې مانتيس يې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

(c) ketabton.com: The Digital Library

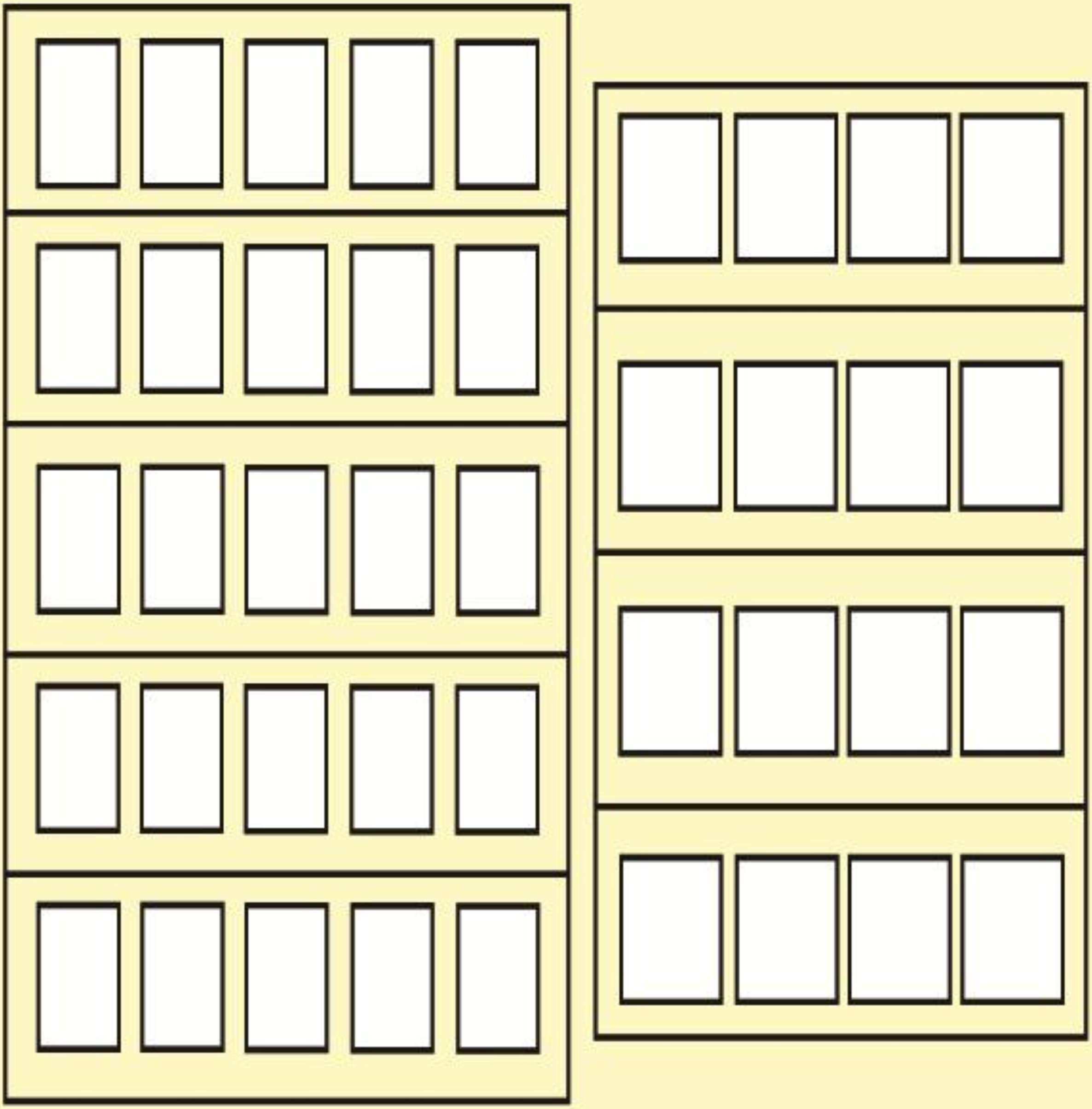
No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

متریکسونه

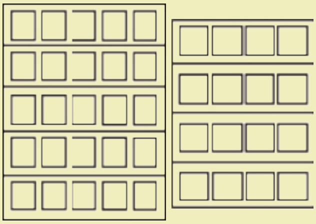
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

متریکسونه

Matrixes



د خو پوړیزې ودانۍ تصویر په پام کې نیسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لویې ودانۍ د کړکیو شمېر $5\cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.

فعا لیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر یعنې $M'(x',y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړیکې ولیکئ.
- پورتنۍ اړیکې د ضریبونو په څېر ولیکئ.
- د پورتني فعالیت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p'، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ سرته ورسوئ.

د پورتني فعالیت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنا چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او یا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر یو $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یوه نوې وسیله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ هر یو د p',p او s',s دېټکوبـدل شـوې وسـیله ده.

لاندې هرې یوې وسیلې ته (چې دېټکود بدلولو د بدلیدو دنده په غاړه لري) مېټریکس وایي.

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

تعریف:د شیانو، عددونو یا تورو ګېډئ چې په سطري او ستوني ډول، په یوه مستطیلي جدول کې ترتیب شي، د مېټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مستطیلي جدول هر عنصر د مېټریکس د عنصر پـه نامـه یـادېږي. لـوی حروفونـه د $A,B,C...$ مېـټریکس ښیي او واړه حروفونه $a,b,c...$ د مېټریکس عناصر دي.

د عددونو هر یولاندی جدول یو مېټریکس په ګوته کوي.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 7 & 5\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

لومړی سطر، دویم سطر، دریم سطر

لومړی ستون، دویم ستون، دریم ستون

$$B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

لومړی سطر، دویم سطر، دریم سطر

$$C=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3} & 7 & -2\end{pmatrix}$$

کرښه

که چېرې a د یوه مېټریکس په $i-$ام کرښه او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} پـه شـکل ښـودل کېږي چې i او j طبیعي عددونه دي، په ترتیب سـره د سـطر او سـتون لـه شـمېر څخه ښـکارندویي کـوي.

$$i=1,2,3... \ , \ j=1,2,3...$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}...a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}...a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}...a_{mn}\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټريکس مرتبه: که د A د مېټريکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر يې n وي، وايو چې د A مېټريکس مرتبه د $m\times n$ څخه عبارت دی اوداسې ويل کېږي چې m په n کې مېټريکس او ليکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر مېټريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه مېټريکس مرتبه ښيي.

فعاليت

- د لاندې مېټريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه مېټريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعنې $A=(X)_{1\times1}$ ، نو د A مېټريکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times1}=7$

مثال: لاندې مېټريکسونه د مستطيلي جدول په ډول وليکئ.

$a)\qquad (a_{ij})_{2\times2}=(i+j)_{2\times2} \qquad\qquad b)\qquad (a_{ij})_{3\times2}=(i\cdot j)_{3\times2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د مېټريکس عمومي شکل ليکو، د a جزء د مېټريکس عمومي شکل 2×2 کې يو مېټريکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\quad a_{12}=1+2=3\quad ,\quad a_{21}=2+1=3\quad ,\quad a_{22}=2+2=4$

په پايله کې غوښتل شوی مېټريکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د مېټريکس عمومي شکل يو (3×2) کې مېټريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot1=1\ ,\quad a_{21}=2\cdot1=2\quad ,\quad a_{31}=3\cdot1=3$

$a_{12}=1\cdot2=2\ ,\quad a_{22}=2\cdot2=4\quad ,\quad a_{32}=3\cdot2=6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې غوښتل شوی مېټریکس عبارت دی له:
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

دوهمه مرتبه مېټریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي، مثلاً:
$\begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a = -1$ او $b = 2$ وي، آیا $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ مېټریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې مېټریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې مېټریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3} = (2i + 3j)_{3\times3}$ $\qquad b)\ (a_{ij})_{2\times3} = (\frac{i}{j})_{2\times3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټريکسونو ډولونه

د مېټريکـــسونومخامخ شـــکلونه څـــو ســـطرونه اوځوستونونه لري؟

آیاصفرونه دمېټریکس عناصر کیدای شي؟

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(4 \quad 5 \quad 6)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. **سـطري مېـټريکس**(Row Matrix)**:** هغه مېـټريکس چـې يـوازې او يـوازې يـو سـطر ولـري، سـطري مېټريکس يې بولي، مثلاً: $A=(4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1\times 4}$

2. **ستوني مېټريکس** (Column Matrix)**:** هغه مېټريکس دی چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً: $A=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$

3. **صفري مېټريکس**(Null matrix): هغه مېټريکس چې ټول عناصرېې صفرونه وي، له صفري مېټريکس څخه عبارت دی او د $0_{m\times n}$ په شکل يې ښيي.

$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

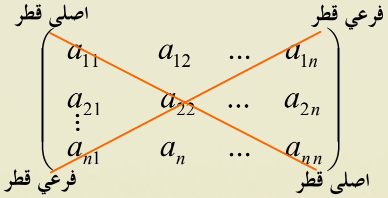
4. **مربعي مېټريکس**(Square Matrix)**:** که چېرې په يوه مېټريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي مېټريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad m=n \;\Rightarrow\; 3=3$$

هر مربعي مېټريکس دوه قطرونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه قطر چې عناصر يې $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر(Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې $a_{n1}, \dots, a_{1n}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فعالیت

- داسې مېټريکسونه وليکئ چې مرتبې يې 1×3 او 1×4 وي، دا څه ډول مېټريکسونه دي؟

5. **قطري مېټريکس** (Diagonal Matrix)**:** هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري مېټريکس په نامه يادېږي.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times2} \quad , \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

6. **سکالر مېټريکس** (Scalar Matrix)**:** هغه قطري مېټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر مېټريکس په نامه يې يادېږي، لکه:

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد مېټريکس** (Unite Matrix)**:** که چېرې په يو سکالر يا قطري مېټريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول مېټريکس ته واحد مېټريکس وايي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\dots0 \\ 0 & 1 & 0\dots0 \\ 0 & 0 & 1\dots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\dots1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې متریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې متریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چېرې په یوه مربعي متریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، په دغه صورت کې متریکس د مثلثي متریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چېرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي متریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي متریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي متریکس او B ښکتنی مثلثي متریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 3 & 7 & 9\end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 9\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) متریکس:

که چېرې د A متقابل متریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه متریکس دی چې هر عنصر د A متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو متریکس وي، نومتقابل متریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n} \overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow} -A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 5\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -3 & -4\end{pmatrix} \Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2 & -4 & -5\\ 1 & -2 & 0\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې متریکسونه په پام کې ونیسئ، مرتبې او اړوند نومونه یې وټاکئ:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\qquad b)\ B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\qquad c)\ C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$d)\ D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad e)\ E=\begin{pmatrix}5 & -6 & 7 & 8\end{pmatrix}\qquad f)\ F=\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$$

$$g)\ G=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}\qquad h)\ H=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متریکسونو جمع او تفریق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ متریکسونو کې د هغوی د جمعې او تفریق

په اړه د امکان په صورت کې څه ویلای شئ.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

1) **د متریکسونو جمع:**

که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه متریکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه متریکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر یې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، یعني د دوو متریکسونو جمع کول یوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو متریکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقیقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. **د متریکسونو تفریق:**

د جمعې عملیې ته ورته کولای شو، د دوو متریکسونو تفاضل یا د تفریق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفریق حاصل یې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټریکسونو د جمعې او تفریق خاصیتونه:

1. د مېټریکسونو جمع کول دبدلون خاصیت لری، خو د مېټریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعنې:

$A+B=B+A$

$A-B\neq B-A$

2. د مېټریکسونو جمع او تفریق اتحادي خاصیت لري. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د مېټریکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د مېټریکسونو په تفریق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو مېټریکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفریق حاصل يې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د یوه مثال په واسطه وښایاست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د A او B مېټریکسونو مرتبې سره خلاف دي، نو له دې امله يې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د A د مېټریکس مرتبه 3×2 او د B مېټریکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې مېټریکسونه د امکان تر بریده جمع او تفریق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په مېټریکس کې د سکالر ضرب

مونږ د مېټریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله که

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یو **مېټریکس** او K یو سکالر وي،

د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ؟

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **مېټریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **مېټریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد مېټریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجرا کولو وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **مېټریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وي، نو د KA له C له **مېټریکس** څخه عبارت دی، په داسې حال کې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$KA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1 & 2\cdot3 & 2\cdot6 \\ 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot0 \\ 2\cdot1 & 2\cdot0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په مټریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چېرې A او B دواړه د یو شان مرتبې مټریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دویــم مثــال: کـه چېـرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکـړل شـوي وي، وښایاسـت چـې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 6\\ 2(-3) & 2\cdot 9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot 6 & 3\cdot 12\\ 3(-6) & 3\cdot 18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\ \beta)A=(3\cdot 2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot 3 & 6\cdot 6\\ 6(-3) & 6\cdot 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha\ A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot 3 & 3\cdot 6\\ 3(-3) & 3\cdot 9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتنې

1. کـه چېـرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکـړل شـوي وي. پـه مټریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو مېټريکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

اياد دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟

تاسو د دوو مېټريکسونو د جمعې لپاره پيدا کړل چې $A+B=B+A$ دی، د مېټريکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

تعريف

دوه مېټريکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونيسئ، د دې لپاره چې دا داوړه مېټريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړی مېټريکس د ستونونو شمېر د دويم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مېټريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو مېټريکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر يې د لومړي مېټريکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر يې د دويم مېټريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مېټريکس لومړی سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي مېټريکس دويم سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه دويمه سطر کې يې ليکو، دغې عمليې ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مېټريکس په دويم مېټريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مېټريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښيو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو متریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

دویم پړاو

لومړی پړاو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1)\\ -1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د متریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخېستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\\ (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1) & 2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2\\ (-2)(1)+1\cdot2+2(-1) & -2(3)+1\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+6+1 & 6+0-2\\ -2+2-2 & -6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

درېیم مثال: $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot7\\ 5\cdot3+2\cdot6 & 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot0+2\cdot7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18 & 2+3 & 0+21\\ 15+12 & 10+2 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 5 & 21\\ 27 & 12 & 14\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون په صورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

خلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot 4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot 4+2(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot 2+4\cdot 1 & (-3)(-1)+4\cdot 2\\ -4\cdot 2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD=DC$ دی.

د مټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومي ډول د دوو مټریکسونویه ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

دویم خاصیت: د مټریکسونو ضرب د اتحادي ضرب خاصیت لري. که چېرې B, A او C د $m\times n$ مرتبې مټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

a) $A(B+C)=AB+AC$

b) $(A+B)C=AC+BC$

c) $K(AB)=(KA)B=A(KB)\ ,\quad K\in IR$

d) $IA=AI=A$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

د لاندې مټريکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه میټریکس ترانسپوز

Transpose of Matrix

که په یو میټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوی میټریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادېږي؟

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ میټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولیږدوی، هغه نوی میټریکس چې په لاس راځي ویې لیکئ.
- که چېرې د یوه میټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو، هغه نوی میټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړي میټریکس سره مساوي دی، نوی میټریکس په څه نوم یادېږي؟

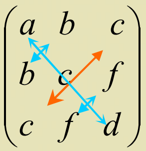
له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چېرې د یوه میټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی میټریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز(Transpose) میټریکس څخه عبارت دی، د A ترانسپوز میټریکس په A^T بښودل کېږي. د ترانسپوز میټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چېرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$ وي، نو ترانسپوز میټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times 2}$، که یو ترانسپوز میټریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A میټریکس ته متناظر میټریکس (Symmetric Matrix) وايي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر میټریکس دی، ځکه: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=A$

د متناظر میټریکس پېژندل: په متناظرو میټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټرانسپوز متریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ټرانسپوز متریکس ټرانسپوز له خپل لومړي متریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ټرانسپوز متریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ټرانسپوز متریکسونو سره مساوی دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$(-A)^T = -A^T$

فعالیت

- که چېرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، وښایاست چې:

$$(A-B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې متریکسونو ټرانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times 3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

پوښتنې

1. د A او B متریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ټرانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

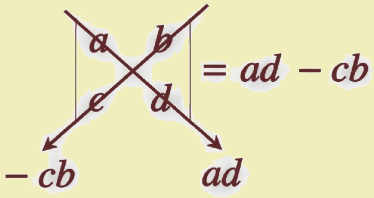
2. په پورتنیو متریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ټرانسپوز متریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ديټرمينانت

Determinant

په يوه عددي مثال کې يو مربعي مټريکس داسې وټاکئ چې د $ad - bc$ حاصل تفريق مساوي په صفر شي.



تعريف

که چېرې د A مټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټريکس له ديټرمينانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د مټريکس ديټرمينانت په $|A|$، det A او يا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښودل کيږي.

په همدې ډول که چېرې د $n \times n$ مرتبې يو مټريکس چې n سطرونه او n ستونونه ولري، اړوند ديټرمينانت يې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ يو مربعي مټريکس په پام کې نيسو او د تعريف سره سم لرو چې:

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}_{n x n}$$

د 2×2 مرتبې مټريکسونو د ديټرمينانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مټريکس ديټرمينانت په لاندې ډول تعريفوو.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ مټريکس ديټرمينانت حساب کړئ.

حل: $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 7\cdot 4 = 6 - 28 = -22$

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ مټريکس ديټرمينانت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3×3 مېټريکسونو د ډيټرمېنانت محاسبه: د $A_{3\times3}$ مېټريکس، ډيټرمېنانت په پام کې نيسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times3}$ ډيټرمېنانت د محاسبې لپاره لاندې ټکي په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ډيټرمېنانت محاسبه او د لومړي ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دويم پړاو: دويم ستون او دريم سطر حذفوو، د 2×2 مرتبې ډيټرمېنانت محاسبه او د دويم ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د ډيټرمېنانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دريم پړاو: دريم ستون او دريم سطر له منځه وړو، د 2×2 مرتبې ډيټرمېنانت محاسبه، د دريم سطر او دريم ستون د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A ډيټرمېنانت مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لاندې ديټرمينانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=(6\cdot 2-1(-3))\cdot 4=(12+3)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & 3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=-(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix}2 & 6 & -3\\ 5 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 7\end{vmatrix}=(2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعاليت

- د $A=\begin{vmatrix}a & 0 & 3\\ -4 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}$ له ديټرمينانت څخه د a قيمت په لاس راوړئ.

دويمه طريقه: **د ساروس په طريقه د ديټرمينانت محاسبه**: پـه دغـه طريقـه کـې د ديټرمينانـت دوه لـومړي سـتونونه ښـي لورې ته په لاندې ډول تکرار ليکو:

$$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

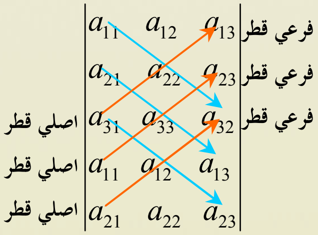
فرعي قطرونه

اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر يوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصـر يولـه بـل سـره ضـربوو او وروسته يې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعـي قطرونـو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د متريکس ديټرمينانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32})-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړي او دویم ستون د لېږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیټرمینانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تیر په ډول کړنه سرته رسوو.



دویم مثال: د لاندې دیټرمینانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M|=\left|\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

$$=\big(3\cdot3\cdot6+2\cdot0\cdot5+(-1)(-4)(-2)\big)-\big((-1)\cdot3\cdot5+3\cdot0(-2)+2(-4)\cdot6\big)$$

$$=(54+0-8)-(-15+0-48)=46+63=109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیټرمینانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیټرمینانت لاندې برخې ته ولیږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیټرمینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}\ ,\quad b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}\ ,\quad c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}\ ,\quad d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. د لاندې دیټرمینانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}\ ,\quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډیټرمینانت خاصیتونه

که چیرې په یوه ډیټرمینانت کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د ډیټرمینانت په قیمت کې تغیر راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعالیت

- د $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ ډیټرمینانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ ډیټرمینانت په پام کې ونیسئ، ترانسپوز یې په لاس راوړئ ، وروسته یې $|A^T|$ ډیټرمینانت محاسبه کړئ او وښایاست چې $|A^T|=|A|$.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

که چیرې $A_{n\times n}$ یو میټریکس وي، د $|A|$ ډیټرمینانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ میټریکس د یوه سطر او یا یوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ډیټرمینانت مساوي له صفر سره دی.
$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0\ ,\quad |A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0$$

2. که چیرې د $A_{n\times n}$ میټریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ډیټرمینانت یې مساوي له صفر سره دی.
$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ میټریکس د یوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دی.
$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A میټریکس ډیټرمینانت او A^T میټریکس ډیټرمینانت یو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ډیټرمینانت ځینې نور خاصیتونه یا ځانګړنې هم لري، لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې په یوه دیټرمینانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیټرمینانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\1 & 2 & -2\\3 & 1 & 0\end{vmatrix}$ دیټرمینانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیټرمینانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\1 & 2 & -2\\3 & 1 & 0\end{vmatrix}\Rightarrow(0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 4\\2 & 1 & -2\\1 & 3 & 0\end{vmatrix}=(0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیټرمینانت کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شي، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله په لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیټرمینانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیټرمینانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیټرمینانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیټرمینانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\8 & 2 & 21\\20 & 1 & 25\end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیټرمینانت په لومړي ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیټرمینانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}16 & 3 & 22\\8 & 2 & 21\\20 & 1 & 25\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}4 & 3 & 22\\2 & 2 & 21\\5 & 1 & 25\end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دیټرمینانت دخواصو په مرسته د لاندې دیټرمینانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$a)\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 3 & 4\\0 & 5 & 6\end{vmatrix}$ $b)\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\7 & 9 & 11\\0 & 0 & 0\end{vmatrix}$ $c)\begin{vmatrix}3 & 5 & 8\\0 & 4 & 2\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2×2 مرتبه يې مېټريکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آيا د حقيقي عددونودضرب قاعده مو په ياد ده؟

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

د a حقيقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

په همدې ډول د ځينو مربعي مېټريکسونو لپاره هم دا خاصيت، د مېټريکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس په پام کې ونيسئ او ديټرمېنانت يې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس د A له مېټريکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي مېټريکس په پام کې نيسو، که چېرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليکلی شوچې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په ياد ولرئ: د A مربعي مېټريکس ته منفرد مېټريکس(Singular Matrix) ويل کېږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مېټريکس ته غير منفرد مېټريکس(non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې $|A|\neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو مېټريکس د معکوس مېټريکس لرونکی دی چې:

1. مېټريکس مربعي وي.
2. ديټرمېنانت يې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښاياست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ يو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ليدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B يو د بل معکوس دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الحاقي مېټريکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي مېټريکس د پیداکولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی مېټريکس چې لاس ته راځي، له الحاقي مېټريکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو مېټريکس معکوس مېټريکس لري چې دیټرمینانت یې د صفر خلاف وي، یعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې مېټريکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چېرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس مېټريکس یې پیداکړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=-8\neq 0$

لیدل کېږي چې د A مېټريکس دیټرمینانت د صفر خلاف دی، نو د A مېټريکس معکوس مېټريکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & \frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموینه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ویلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مېټريکس چې دیټرمینانت یې د صفر خلاف یعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې مېټريکسونو څخه کوم یو مېټريکس معکوس لري.

$a)\quad A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ $\qquad b)\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې مېټريکسونو معکوس مېټريکس په لاس راوړئ او وازموئ.

$1)\quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2)\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad 3)\quad C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له معکوس متریکس څخه په کاراخیستني د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس متریکس څخه په ګټه اخیتسنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو متریکس، د مجهولینو متریکس، د ضریبونو او مجهولینو متریکس ولیکئ.
- هر متریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلې معادلې اطراف د ضریبونو د متریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سیستم د چپ لوري د ضریبونو متریکس، B د ښي لوري د ثابتو عددونو ستوني متریکس او X د مجهولو عددونو ستوني متریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلېږي:

$$A\,X = B$$

$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخېستنې سره، د $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ خطي دوه مجهوله سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مټریکس دیټرمینانت د صفر خلاف دی، نو د A مټریکس معکوس لري نو سیستم د حل وړدی چې په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 5-2\cdot 7 \\ -1\cdot 5+1\cdot 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\qquad y=2$$

دویم مثال: له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 3x-\ y=3 \end{cases}$ سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\quad ,\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\quad ,\quad A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ |A|\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کيږي چې $|A|\neq 0$ دی، نو A معکوس مټريکس لري.

$$AdjA=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}AdjA=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 2+2\cdot 3\\ -3\cdot 2+5\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+6\\ -6+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ x=4\quad,\quad y=9$$

دريم مثال: د x او y په کومو قميتونوکې لاندې معادلې په يو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases}2x-3y=4\\ 4x-6y=1\end{cases}$$

حل:

د ياد شوي سيستم حل د سيستم د ضريبونو د مټريکسونو له تشکيل څخه په لاس راوړو:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}4\\ 1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -6\end{vmatrix}=-12+12=0$$

څرنګه چې د A مټريکس ديټرمېنانت صفر دی، نو د A مټريکس معکوس نه لري، په پايله کې ويلای شو چې سيستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټې اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه

Crammer's rule

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}$$
$$y=\frac{|A_y|}{|A|}$$
$$z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

آیا کولای شو، د ضریبونو د متریکس د دیټرمینانت او له مجهولینو یعنې د x, y, z سره د متناظرو متریکسونو د دیټرمینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضریبونو متریکس یې په A سره ښیو:

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1$$
$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2$$
$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د x, y او z قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A|\neq 0$ وي.

$$X=\frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y=\frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتیب سره د x, y او z اړوند متناظرو متریکسونو دیټرمینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سیستم زیات شوي متریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړی ستون د x ضریبونو په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمینانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون د y ضریبونه په ځای د ځلورم ستون هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د مټریکس دیټرمینانت محاسبه کوو. او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون د z ضریبونو په ځای ځلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې مټریکس دیټرمینانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخیستنې سره $|A_x|$ ، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

$$\left(\begin{array}{cc:c}1 & -3 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: لاندې درې مجهوله سيستم د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x-2y+2z=-4 \\ x+3y+z=5 \\ 2x+2y-z=11 \end{cases}$$

حل:

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} =-9-4+4-12-6-2 \\ =-21-8=-29\neq 0 \end{array}$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سيستم حل لري.

$$|A_x|=\left|\begin{array}{ccc|cc} -4 & -2 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 11 & 2 & -1 & 11 & 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} =12-22+20-(66-8+10) \\ =10-68=-58 \end{array}$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -4 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 11 & -1 & 2 & 11 \end{array}\right| \begin{array}{l} =-15-8+22-(20+33+4) \\ =-23+22-57=-58 \end{array}$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 11 & 2 & 2 \end{array}\right| =99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

میزان:

د x, y او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \quad -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \quad 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \quad 11=11$$

فعالیت

دگرامر په طریقې د لاندې معادلو سیستم حل په لاس راوړئ.

$$\begin{cases} 2x-3y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د معادلو د سیستم حل دګوس($Gouse$) په طریقه

آیا کولای شو له مټریکس څخه په کار اخېستنې سره

د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو؟

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو مټریکس او ثابت قېمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملیو باندې د جمع، تفریق، ضرب او تقسیم سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د مټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots..$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل:د ضریبونو مټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطردتفریق حاصل په دویم سطر کې لیکو.}]{R_1-R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په(-1) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې لیکو.}]{R_2\cdot(-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2\,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4 \Rightarrow x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1-R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له دویم سطر څخه لومړي سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینودضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړی پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2\to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم گام کې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3\to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \Rightarrow z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+21=7 \Rightarrow -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دریم پړاو کې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې ایږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2x+3=5$$
$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

امتحان: لاسه ته داغلي قیمتونه د معادلو په سیستم کې وضع کوو.

$$2\cdot 1+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2+6-3=5 \quad , \quad 5=5$$
$$3\cdot 1+2+2\cdot 3=11 \Rightarrow 3+2+6=11 \quad , \quad 11=11$$
$$4\cdot 1-2(2)+3=3 \Rightarrow 4-4+3=3 \quad , \quad 3=3$$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$
$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$
$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right) \xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{\text{لومړی پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{\text{دویم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{\text{دریم پړاو}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

لیدل کیږي چې په لاس راغلی متریکس کې د x_2, x_1 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

یاملرنه: که چېرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو متریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د ګوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ \quad -3y = -6 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مېټريکس تعريف: يوه ګېډۍ عددونه يا توري چې په سطري او ستوني ډول په يوه مستطيلي جدول کې ځای پر ځای شوي وي. د مېټريکس(Matrix) په نامه يادېږي.

د مېټريکسونو ډولونه:

- **سطري مېټريکس**: هغه مېټريکس چې يوازې يو سطر ولري.
- **ستوني مېټريکس**: هغه مېټريکس چې يوازې يو ستون ولري.
- **صفري مېټريکس**: هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې صفرونه وي.
- **مربعي مېټريکس**: هغه مېټريکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر يې سره برابر وي.
- **مساوي مېټريکسونه**: دوه مېټريکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر يې يو په يو سره برابر او مساوي وی.
- قطري مېټريکس هغه مېټريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مېټريکس بلل کېږي.
- **سکالر مېټريکس**: هر قطري مېټريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره برابر وي، سکالري مېټريکس بلل کېږي.
- **واحد مېټريکس**: په هر سکالري مېټريکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مېټريکس بلل کېږي.

په مېټريکسونو باندې لومړني عمليات:

- **د مېټريکسونو جمع او تفريق**: د مېټريکسونو جمع او تفريق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n}\pm B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}\pm(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

د مېټريکسونو د جمعې او تفريق خواص:

1) $A+B=B+A$ 2) $A-B\neq B-A$

3) $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$ 4) $A+0=0+A=A$

5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مېټريکس کې د سکالر ضربول: که $K\in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA=K(a_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

په مېټريکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

c) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

د دوو مېټريکسونو ضرب: د دوو مېټريکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مېټريکس د ستونونو شمېر، د دويم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B=(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=(C_{ij})_{m\times p}=C_{m\times p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنې د دوو مېټریکسونو د ضرب حاصل هغه دریم مېټریکس دی چې د سطرونو شمېر یې له لومړي مېټریکس سره او د ستونونو شمېر یې له دویم مېټریکس سره برابر وي.

د مېټریکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مېټریکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د یوه مېټریکس ترانسپوز مېټریکس: که د یوه $A_{m\times n}$ مېټریکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مېټریکس چې لاسته راځي ،د ټرانسپوز مېټریکس په نامه یادېږي. د A ترانسپوز مېټریکس په A^T سره ښیي.

مثلثي مېټریکس: که په یوه مېټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مېټریکس د مثلثي مېټریکس په نامه یادېږي.

متناظر مېټریکس: که د A یو مېټریکس له خپل ترانسپوز A^T مېټریکس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A مېټریکس ته متناظر مېټریکس وایي.

دیټرمېنانت: که د A مېټریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مېټریکس له دیټرمېنانت شخه عبارت دی، او د $|A|$ یا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د دیټرمېنانت خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مېټریکس د یوه سطر او یا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو دیټرمېنانت یې صفر دی، یعنې:
$$\det A = |A| = 0$$
2. که د دیټرمېنانت دوه سطرونه او یا دوه ستونونه سره برابر وي، نو دیټرمېنانت یې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مېټریکس د یوه سطر یا ستون عناصر د بل سطر یا ستون د عناصرو مضرب وي، نو دیټرمېنانت یې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مېټریکس او د A ترانسپوز مېټریکس دیټرمېنانتونه سره مساوي وي، یعنې: $|A^T| = |A|$

د مېټریکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مېټریکس په پام کې نیسو ،که چېرې د B مربعي مېټریکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مېټریکس د A د مېټریکس معکوس دی او د A د مېټریکس معکوس مېټریکس په A^{-1} سره ښیي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سیستم حل:

- له معکوس مېټریکس څخه په ګټه اخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل.
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه.
- د ګوس په طریقه د خطي معادلو د سیستم حل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړۍ تاو کړئ.

1. که $|A| = 3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیدا کړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $\quad b)\ 9$ $\quad c)\ \frac{1}{9}$ $\quad d)\ 3$

2. که $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی مټریکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m = 1, \frac{1}{2}$ $\quad b)\ m \neq 1$ $\quad c)\ m = 0$ $\quad d)\ m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه مټریکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax = A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $\quad d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ مټریکس لاندې د $y = 2x$ د خط بدلون منونکي خط پیدا کړئ.

a) د y محور $\quad$ b) د x محور $\quad$ c) $y + 2x = 0$ $\quad$ d) $y = 0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیټرمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

$a)\ x = 1, 2$ $\quad b)\ x = 3, 1$ $\quad c)\ x = \frac{1}{2}, 3$ $\quad d)\ x = 3, 2$

6. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیټرمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $\quad b)\ 39$ $\quad c)\ 19$ $\quad d)\ 9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B \qquad b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او وواياست چې $AB=BA$ دی.

3. لاندې مېټريکسونه په پام کې ونيسي:

$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 2\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

اشتراکي خاصيت، توزيعي خاصيت او د مېټريکسونو ضرب د درو مېټريکسونو لپاره وښاياست.

4. لاندې ديټرمېنانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې مېټريکس معکوس مېټريکس د الحاق(ad joint) په طريقه پيدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د کرامر په طريقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x+y+z=6\\ x-2y+2z=10\\ 3x-y-z=4\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x_1-2x_2=4\\ 2x_1+4x_2=5\end{cases}$$

7. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د گوس په طريقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases}2x-3y+3z=0\\ 3x+2y-5z=0\\ 5x-4y-2z=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}2x+3y-7=1\\ 2y+27=-2\end{cases}$$

8. د لاندې خطي معادلو سيستمونه د معکوس مېټريکس په طريقه حل کړئ.

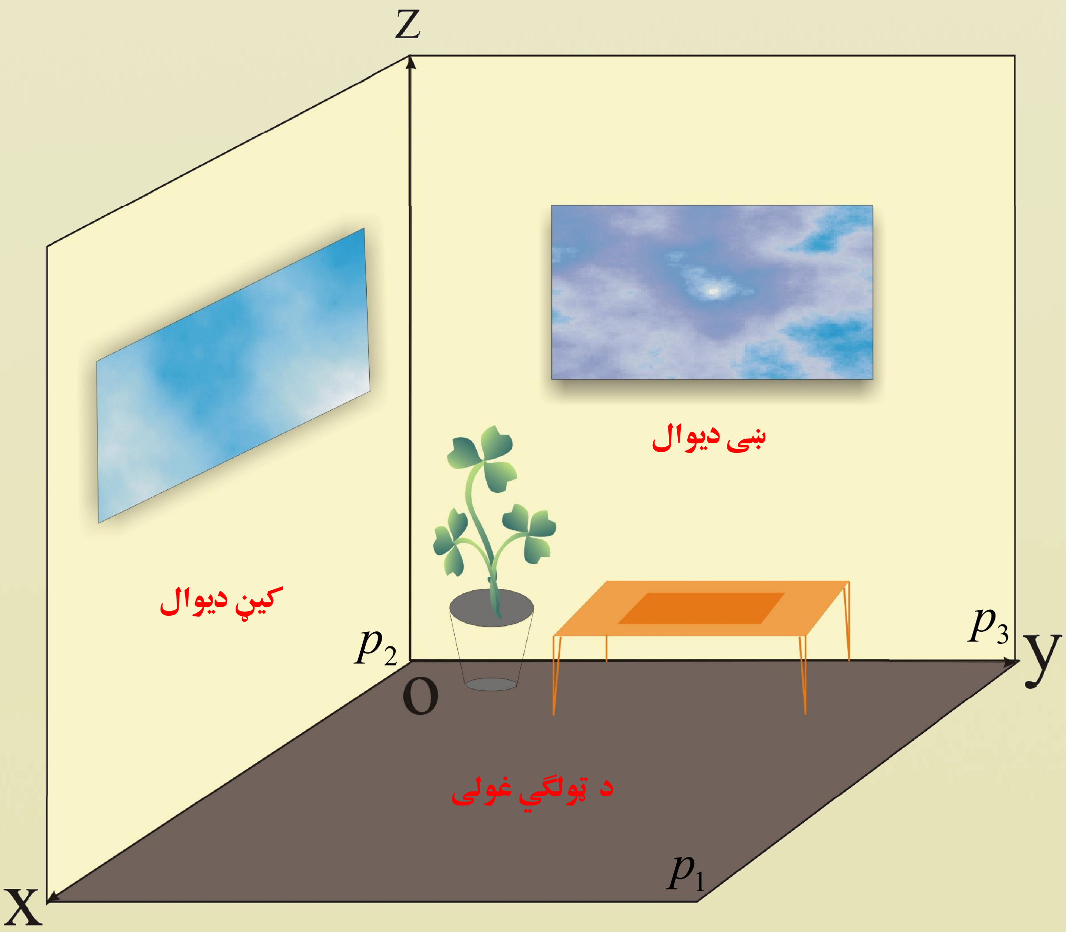
$$a)\ \begin{cases}3x+y+1=0\\ 4x+3y-2=0\end{cases} \qquad b)\ \begin{cases}x-y=2\\ x+2y=-1\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

وکتورونه

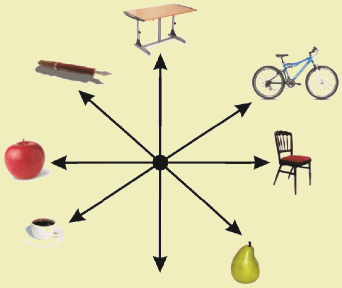
(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه

له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.



تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لکه: قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادېږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د B (5,5) مختصات ولري.
- د پورتني راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې سره توپیر ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او د مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کېږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، لکه:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکی وي.
2. که چېرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

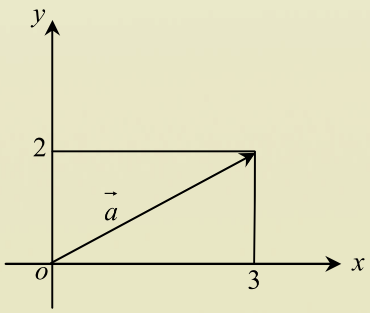
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

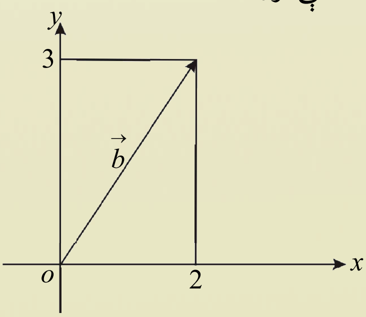
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





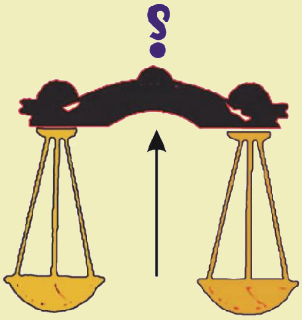
یـــادونه: د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو پـه سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتنې

1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:
   a. د هر یوه وکتور دری ممثل وکتورونه رسم کړئ.
   b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.
   c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

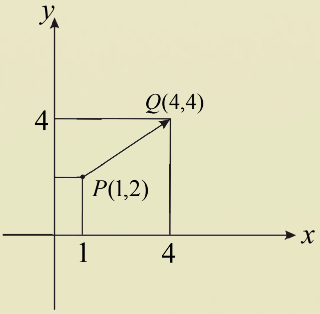


د تلې دوه هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې ترل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څېر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:

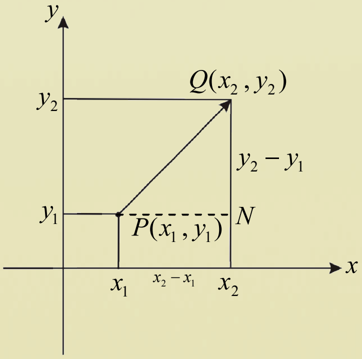
- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟



- د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟

د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$

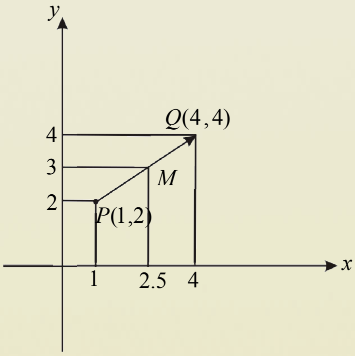


- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{x_1+x_2}{2}\\\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\ \frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ \frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\ 3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\ 3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{{a_x}^2+{a_x}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\ y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\ \frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\ \frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\ 4.5\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتنې

د لاندې ورکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکي پیدا کړئ.

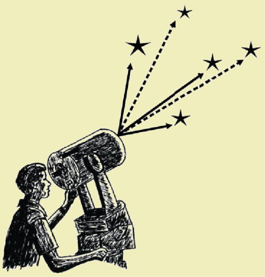
$i)\ B(2,7)\quad ,\quad A(3,4)$

$ii)\ N(5,1)\quad ,\quad M(1,5)$

$iii)\ Q(8,8)\quad ,\quad P(1,8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورونه په سطح او فضا کې



د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تګلوري لیدل په فضا کې ځانګړي وکتورونه ښیي.

د یوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره یوه بېلګه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کیماتو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیتونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دي، په مستوي کې له $\vec{u}$ یو وکتور سره څه توپیر لري چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a\in IR$ یو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده)

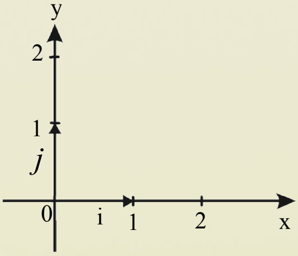
ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

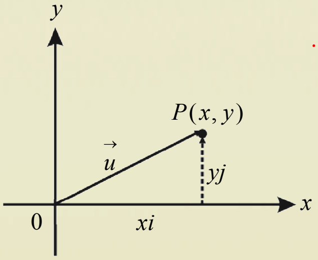
(c) ketabton.com: The Digital Library

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. هر اختیاري وکتور لپاره لرو: $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دی چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحد وکتور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره تري کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

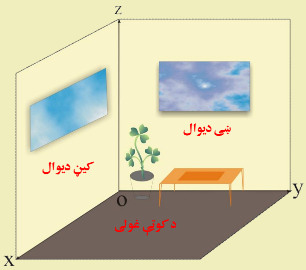
$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې يو ټکی وټاکئ آيا داسې يوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولي او مجاور ديوال ته وټاکو؟

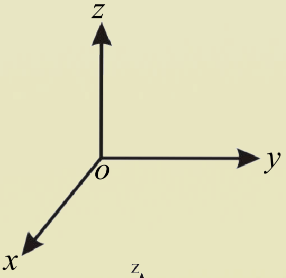
تعريف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x, y, z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعريفيږي:

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) / x, y, z \in IR\}$$

هغه درې مستويګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه يو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستويګانې بلل کيږي.

د دغو مستويګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قايمې زاويې جوړوي چې هغه د درې بُعدي فضا قايم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قايم مختصات داسې نوموي چې که يو تن ودريږي، هغه محور چې د ليدونکي د تنې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د ليدونکی د ليد په لور دی د y محور او هغه محور چې د ليدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبارت دی . چې د قايمو مختصاتو مبداء ښيي.

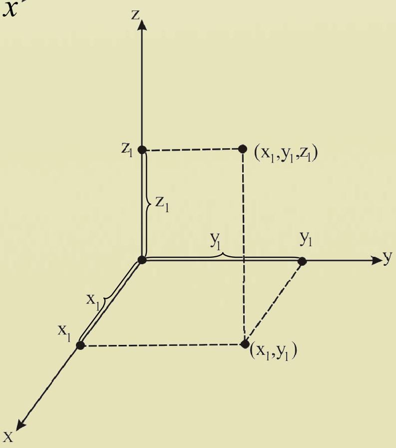


په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دي چې له درې واړو مستويګانو څخه يې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستوي ګانو څخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښيي.

په درې بعدي فضا کې د يوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قايمو مختصاتو کې د $A(x_1, y_1, z_1)$ ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نيولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د x له محور څخه موازي خط د y له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی يې چې (x, y) دی، پيدا او وروسته له ياد شوي ټکي څخه يو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پايله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتيب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: په درې بعدي فضا کې د y, x او z مختصو منفي جهتونه د نومړو محورونو له امتداد يافته څخه عبارت دی.

فعاليت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3\ ,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قايم سيستم کې وښاياست.

په فضاکې د $P(x,y,z)$ يو ټکی چې د $\vec{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي فضا يا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نيسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$ ، $\vec{v}-\vec{w}$ ، $2\vec{w}$ او $\left|\vec{v}-2\vec{w}\right|$ پيدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

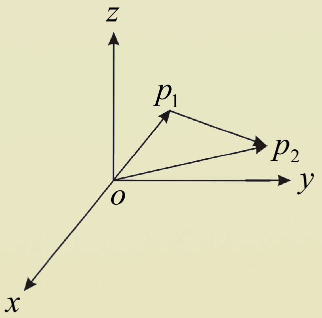
يادونه:

A- کيدای شي سطحي ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضاکې په پام کې نيول شوي، د z,y,x محورونو په امتداد د واحد وکتورونو په نامه ياد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نيولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختياري وکتور د واحد وکتور په پام کې نيولو سره په لاندې توګه ښودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضاکې د دوو ټکو ترمنځ واټن:** که چيرې $\vec{OP_1}$ او $\vec{OP_2}$ د $P_1(x_1,y_1,z_1)$ او $P_2(x_2,y_2,z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پيداکولو لپاره لرو:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښيي.

C- که په درې بُعدي فضاکې د يو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي يعنې $(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2,y_2,z_2)=(x,y,z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پيداکولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتو سره چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیتونو په مبدأکې پرته ده د C جز له فورمول څخه ګټه اخلو:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $ii)\ \left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=?$ $\qquad i)\ \vec{u}+2\vec{v}=?$

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$

$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$$

$$ii)\quad \vec{u}-\vec{v}-\vec{w}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}-4\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}-6\vec{i}-9\vec{j}+3\vec{k}=-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}\right|=\left|-8i-12j+2k\right|=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}=\sqrt{212}$$

پوښتني

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.

2. په دریم مثال کې چې $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

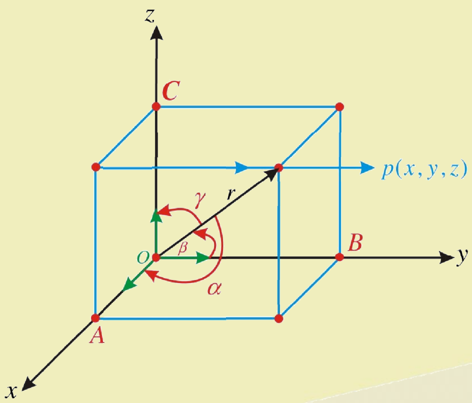
$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?$ $\qquad b)\ \left|\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}\right|=?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v},\vec{v}$ او $\vec{w},\vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

4. د هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه وکتور د جهت زاويې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β, α او γ زاويې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په کتو سره ليکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور جهت کوساینونه په لاندې ډول وليکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنيو اړيکو چپ لوری مربع کوو او وروسته يې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}$$

پوهېږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، په داسې حال کې چې د پورته شکل په شان β, α او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ د وکتور زاويې او $\vec{k}, \vec{j}, \vec{i}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آیا ویلاي شئ چې د α , β او γ زاویې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
- که چیرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور د جهت زاویو د کوساین لپاره یوه گډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

پایله: که په فضاکې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ ، راکړل شوی وي، نو د جهت د

زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

د پورتنۍ پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې: $\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسیر عبارت دی، له: $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\begin{pmatrix}\dfrac{\vec{v}_x}{|\vec{v}|}\\ \dfrac{\vec{v}_y}{|\vec{v}|}\\ \dfrac{\vec{v}_z}{|\vec{v}|}\end{pmatrix}$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پیدا کړئ؟

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $\qquad b)\ v-3\vec{w}=?$ $\qquad c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پیدا کړئ چې د $\alpha\vec{i}+(\alpha+1)\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینرۍ او فزیک په زده کړه کې په کارېږي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چېرې:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ دہ، که نه؟

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړې او $(0\le\theta\le\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

(i $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

(ii $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

(iii $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

(iv که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.
- په فضا کې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

i) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

ii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصیت یا ځانګړتیا).

iii) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (په جمع د ضرب توزیعي خاصیت).

iv) $(c\cdot\vec{u})\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ د ضرب توزیعي خاصیت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

حل: د تعریف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

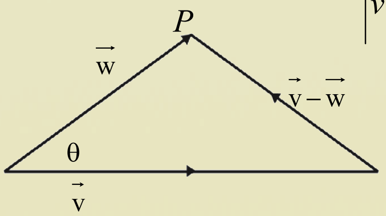
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$

$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دویم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د یوې مستوي دوه وکتورونه وي، وښایاست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعریف له مخې لرو: $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



څرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ ، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پایله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنی اړیکی څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2||x_2^2+y_2^2|-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta \,/\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که چېرې د $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري د ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نيولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښاياست چې د $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$

$$=8+12-20=0 \quad\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنگه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه يو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قيمت داسې پيدا کړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پايلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})\ (3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad\Rightarrow\quad 6+\alpha+5\alpha=0\ ,\ \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښاياست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د يو قايم الزاويه مثلث ضلعې دی.

حل: که $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونيسو، نو دريمه ضلع يې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نيولو سره چې د مثلث دريمه ضلع ټاکي عبارت دی له:

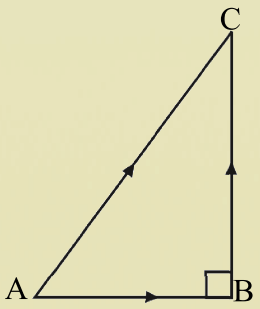
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دريمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښيو چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\ (\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1. وښاياست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ وکتور مرتسمونه د $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتیب سره له b,a او c سره مساوي دي.

2. وښاياست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړیکې وجود لري:

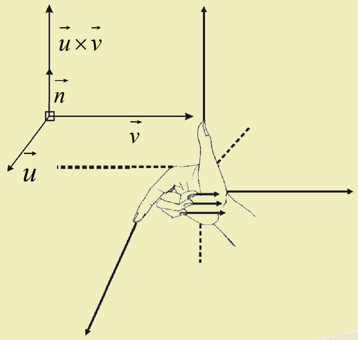
$$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کیڼ) پـه واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونـه داسـې وښـيو چـې $\vec{u}$ د ورغـوي پـه جهت، $\vec{v}$ د ښنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښي لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتـوري ضـرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په تکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنو تـر منځ زاویـه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونـو پـه واسـطه جـوړه شـوې مـستوي لـه عمـود واحـد وکتـور څخـه عبـارت دی، د ښـې لاس قاعـدې پـه واسـطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمـه ده چـې د وکتورونـو خطـي ترکیـب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلالیت) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سـټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

که $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \ldots\ ,\vec{a}_n$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_1,\alpha_2,\ \ldots\ ,\alpha_n\in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتـور پـه داسـې حـال کـې چـې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتـور د $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ \ldots\ ,\vec{a}_n$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادیږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوی وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: که $\vec{a}_1 = (2,3)$ او $\vec{a}_2 = (5,1)$ وکتورونه راکړل شوي وي، وښایاست چې د $\vec{a} = (6\ ,-5)$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: خرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 \ \ = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$
$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10$$
$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$
$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13}$$
$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$
$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$
$$\vec{a} = (6\ ,-5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورنو کې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور پـه لاس راځي، نو وموليدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکيب په واسطه د يوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې د شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحدو وکتورونو د ضريبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښيو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1 , x_2) = (x_1 , 0) + (0 \ , \ x_2)$

نو: $= x_1(1 \ , 0) + x_2(0 \ , 1)$

که $e_2 = (0 , 1)$ او $e_1 = (1 \ , 0)$ وي.

نو: $(x_1 , x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$

او په بل ډول يې هم ليکلای شو:

$$(x , y) = (x , 0) + (0 , y) = x(1 , 0) + y(0 \ , 1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = (x , y , z) = (x_1 \ , 0 \ , 0) + (0 , x_2 \ , 0) + (0 \ , 0 \ , \ x_3)$$
$$= x_1(1 , 0 \ , 0) + x_2 \, (0 \ , 1 \ , 0) + x_3(0 , 0 \ , 1)$$

څرنګه چې $e_1 = (1 , 0 , 0)$, $e_2 = (0 , 1 , 0)$ او $e_3 = (0 , 0 , 1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1 , x_2 , x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$
$$(x , y \ , z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1 , x_2 , \ldots , x_n) = (x_1 \ , \ 0 , \ldots , \ 0) + (0 \ , \ x_2 , \ \ldots , \ 0) + \ldots + (0 , 0 \ , \ldots , x_n)$$
$$= x_1(1 \ , 0 , \ldots , 0) + x_2(0 , 1 , \ldots , 0) + \ldots + x_n(0 \ , \ 0 , \ldots , \ 1)$$
$$= x_1 \, e_1 + x_2 \, e_2 + \ldots + x_n \, e_n$$

په داسې حال کې چې $e_1 , e_2 , \ \ldots \ , \ e_n$ طبيعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1 , \vec{a}_2 , \ \ldots \ , \vec{a}_n$ وکتورونه په يوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي(خطي استقلال) لري، که چېرې دغه خطي ترکيب $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنګه $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ وي.

فعاليت

که $S = \{(1 \ , 0 \ \ , 0) \ , (0 \ , 1 \ , 0) \ , (0 \ , 0 , 1)\}$ وي وښاياست چې S خطي خپلواکي لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غیرې خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط خطي غیر خپلواک یا خطي انحصار لري، که چېرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو، په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چېرې له ټولو سکالرونو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه په لاندې ډول راکړل شوې دي $\vec{a}_1=(1,2,0)$, $\vec{a}_2=(0,3,1)$, $\vec{a}_3=(2,3,1)$ وښایاست چې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونه خطي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=\alpha_1(1,2,0)+\alpha_2(0,3,1)+\alpha_3(2,3,1)=0$

دویم پړاو:

$$=(\alpha_1,2\alpha_1,0)+(0,3\alpha_2,\alpha_2)+(2\alpha_3,3\alpha_3,\alpha_3)=(0,0,0)$$
$$=(\alpha_1+0+2\alpha_3,2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3,0+\alpha_2+\alpha_3)=(0,0,0)$$

دریم پړاو:

$$\begin{cases}\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0\\ 0+\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_3=0\\ 2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

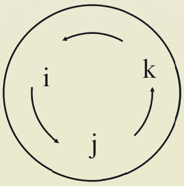
څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\alpha_2=-\alpha_3$$
$$2\alpha_1+3(-\alpha_3)+3\alpha_3=2\alpha_1-3\alpha_3+3\alpha_3=0\Rightarrow 2\alpha_1=0\,,\ \alpha_1=0$$
$$\alpha_1+2\alpha_3=0$$
$$0+2\alpha_3=0 \ \Rightarrow\ \alpha_3=0$$
$$2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3=0$$
$$0+3\alpha_2+0=0\ \Rightarrow\ 3\alpha_2=0 \quad , \quad \alpha_2=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت



د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښیي.

- وښایاست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{j}\,,\vec{i}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه: د ورکړل شوي دایرې په ښي لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي. د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

$$\text{i)}\quad \vec{u}\times\vec{u}=0$$

$$\text{ii)}\quad \vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$$

$$\text{iii)}\quad \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$$

$$\text{iv)}\quad \vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: که چېرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونه صفر نه وي، نو وښایاست چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د تعریف نه په ګټې اخیستنې سره لیکو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$
$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$\left.\begin{matrix}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{matrix}\right\} ,\quad \left.\begin{matrix}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{matrix}\right\} ,\quad \left.\begin{matrix}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{matrix}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$
$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k})$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$
$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ a_1&b_1&c_1\\ a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال نه په ګټې اخیستنې سره پوهېږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$
$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$
$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(درې ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ دضرب حاصل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنیو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پایلې یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ وکتور سره هم جهت دی.

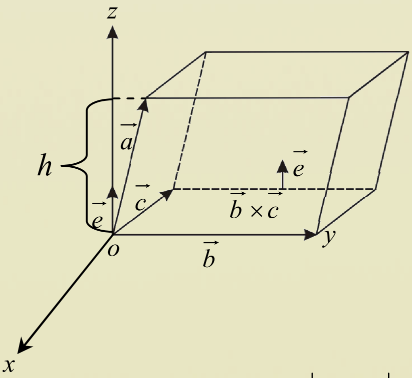
په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\neq(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\neq(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

iii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iiv) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b})=0$



د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اړیکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دی، څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ د متوازي-السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:

$$\text{د متوازي‌السطوح حجم}=v=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|(\vec{a}\cdot\vec{e})=\vec{b}\,|\vec{a}\times\vec{c}\,|\,\vec{e}$$

$$v=\vec{b}(\vec{a}\times\vec{c})=\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|h$$

تطبیقاتي مسئلې:

1- که چیرې $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب غوښتل کیږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، آیا دغه وکتور یوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهیږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

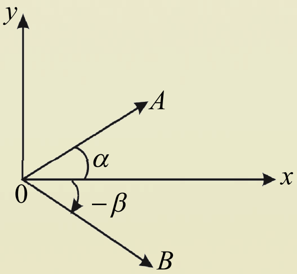
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د $\vec{a}\times\vec{b}=7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k}=-(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k})=-\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x,y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهېږو: $\hat{AOB}=\alpha+\beta$

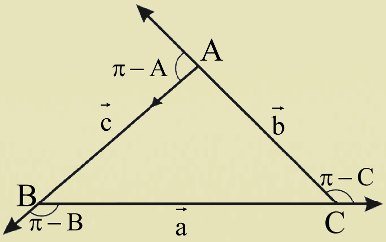
له بلې خوا پوهېږو چې $\vec{OA}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB}=\cos(-\beta)\,\vec{i}+\sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i}-\sin\beta\,\vec{j})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ \cos\beta & -\sin\beta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta)=-\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow\ \left|\left|\vec{OA}\right|\times\left|\vec{OB}\right|\right|=\left|-\vec{k}\right|\cdot\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$$

$$\Rightarrow\ \vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}\qquad ....\ (i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c} = -\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c}) = -\vec{a}\times\vec{c} = \vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad \left|\vec{b}\times\vec{c}\right| = \left|\vec{c}\times\vec{a}\right|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\sin(\pi-A) = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin(\pi-B)$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\,|\vec{c}|\ \sin A = |\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A = a\sin B\ \ /\div ab$$

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}\quad \text{..........}\ (ii) \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\quad \text{..........}\ (ii)$$

د پورته په خبر که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b} = -\vec{a}\times\vec{b} = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\ (\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}\times\vec{a}$$

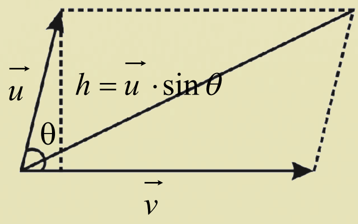
$$|\vec{c}|\,|\vec{b}|\sin A = |\vec{b}|\,|\vec{a}|\sin C$$

$$c\sin A = a\sin C\ \ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\ \ \text{.....}\ iii \qquad \text{یا} \qquad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې څخه د ساین قضیه لاسته راځي:
$$\frac{a}{SinA}=\frac{b}{SinB}=\frac{c}{SinC}$$

4- د یوې متوازي الاضلاع مساحت: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه د θ د لاندې شکل په څېر په پام کې نیسو. ګورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازي الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پیدا کولو لپاره کولای شو، ولیکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

څرنګه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $h=|\vec{u}|\sin\theta$ = ارتفاع ده

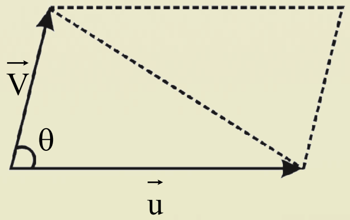
$$\text{د متوازي الاضلاع مساحت} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\sin\theta = |\vec{u}\times\vec{v}|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني د يوې متوازي الاضلاع مساحت، د يوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پایله:څرنګه چې د یوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نیمايي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نیولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}\,(\text{د متوازي الاضلاع مساحت}) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2 + t + 2$، $\vec{a}_2 = 2t^2 + t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2 + 2t + 2$ وي وښایاست چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟

2. وښایاست چې $\vec{a} = 2i + 3j + 4k$ او $\vec{b} = 4i + 6j + 8k$ وکتورونه یو له بل سره کوم ډول خطي اړیکه لري؟

3. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1)$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دی.

4. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پیدا کړئ چې: د $P(0,0,0)$، $Q(-1,2,4)$، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړی شوي وي.

5. که $\vec{u} = 2i - j + k$ ، $\vec{v} = 4i + 2j - k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

   i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي مهم ټکي

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادیږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په ښېر ښودل کیږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب ځخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ ښیو او د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ = د $\vec{a}$ اوږدوالې د P او Q منځنې ټکی $M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$ د $\vec{PQ}$ د منځنې ټکې کمیتونه یا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږدوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

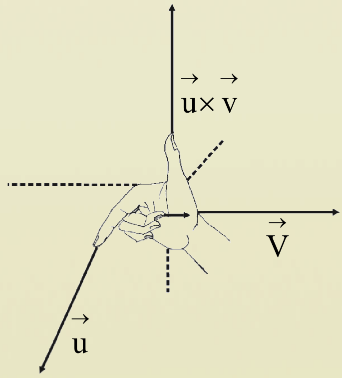
د وکتورونو سکالري او وکتوری ضرب حاصل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,Cos\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کیږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې د حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پر وکتورونو عمود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه سره د ښي لاس قاعدې په واسطه ټاکل کیږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت ګوته په قایم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت ګوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د ځنګل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټه ګوته د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور حاصل ضرب ښیي.



په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

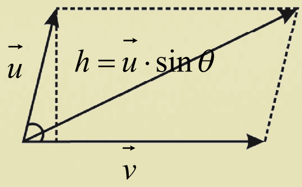
که $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوي وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب یعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکیلیږي.

$|\vec{u}\times\vec{v}|=$ د متوازي الاضلاع مساحت



(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څېر ولیکئ.

3): که چېرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چېرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چېرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

$(iv$: د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چېرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يي د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

$i): \quad P(0,0,0), \quad Q(2,3,2), \quad R(-1,1,4)$

$ii): \quad P(1,-1,-1), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوی وي.

$i): \quad A(0,0,0), \quad B(1,2,3), \quad C(2,-1,1), \quad D(3,1,4)$

$ii): \quad A(1,2,-1), \quad B(4,2,-3), \quad C(6,-5,2), \quad D(-3.5,-4)$

$iii): \quad A(1,-1,1), \quad B(-1,2,2), \quad C(-3,4,-5), \quad D(-3,5,-4)$

9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي ؟

$i): \quad \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

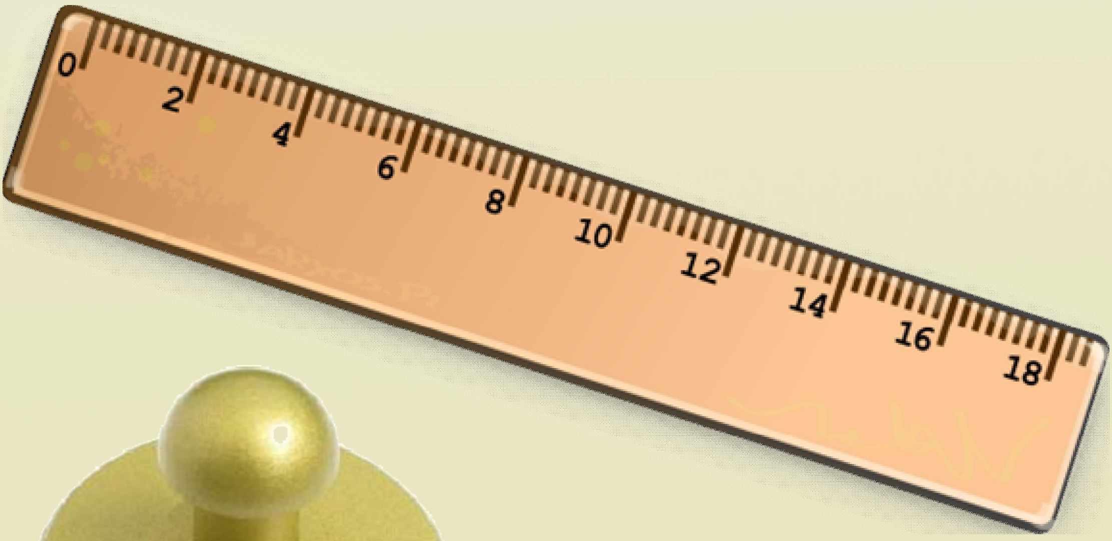
$ii): \quad \vec{u} = i + 2j - k\,, \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{\text{وزن}}{\text{وزنه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چېرې د یوې ټولنې تیتوالی په متر او د بلې ټولنې په کیلوګرام ښودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه تیتوالی په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د تیتوالی د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چېرې معیاري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو په لاس راغلی مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغییراتو ضریب یا نسبي تیتوالی داسې کارول کېږي، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب چې په $C \cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط باندې په لاس راځي اویو مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي یعنې:

$$\text{دبدلونونو یا تغییراتو ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \qquad \text{یا} \qquad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوې وي.
- که چېرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري ټلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

دکوم یوه لامپ تصویر له پاسنیو ډولونو څخه د نسبي تیتوالي یا دبدلون ضریب قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C\cdot V_A>C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېر تیتوالی لري، ولې ټېنګښت یې کم دی.

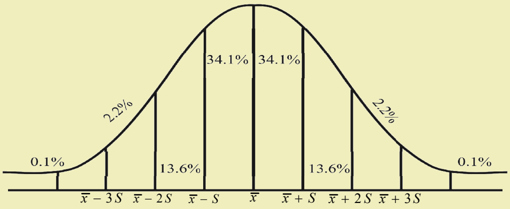
پوښتنې

1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

1 3 4 5 6

2. که چېرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دي؟
3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



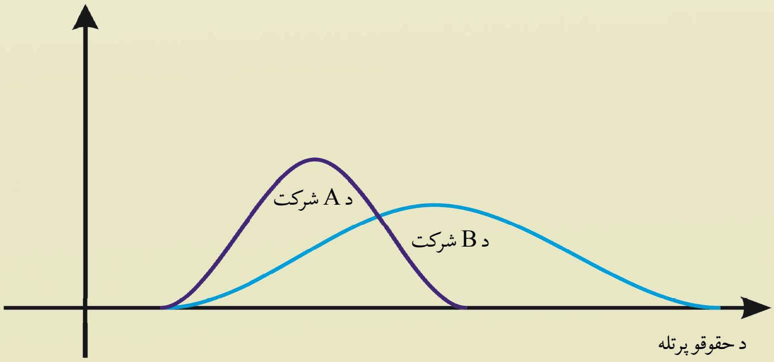
په نورمال منحني کې تيتوالی

اوريدلي به مو وي چې وايي: يو ښه تصوير د زر کلميو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعاليت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأديه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تاديه ډېره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأديې په ميزان کې خپلو کارمندانو ته لړه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأديات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معياري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چېرې $\bar{x}$ اوسط او S معياري انحراف وي؛ نو 68% دپلټني موارد په $(\bar{x}-S\ ,\ \bar{x}+S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په شا او خوا د معياري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټني موارد په $(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+2S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معياري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټني موارد په $(\bar{x}-3S\ ,\ \bar{x}+3S)$ فاصله کې يعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معياري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په یوه نورمال منحني کې له $2S$ ځخه ډېر انحراف غیر عادي او له $3S$ ځخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط ځخه فاصله یا واټن ولري، د تیتوالي یا تیتې ډېټا په نامه یادیږي.

مثال: که د یوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانی او معیاري انحراف یې مساوي په 700 افغانی وي نو:

الف: له نورمال توزیع ځخه د فیصدي په ګټه اخیستنې سره، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: آیا ویلای شئ چې د 1400 افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دی؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x}\pm S$ ، $\bar{x}\pm 2S$ ، $\bar{x}\pm\ 3S$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د S له مخې	فاصله د افغانیو له مخې	فیصدي
$\bar{x}\pm S$	11800 – 13200	68%
$\bar{x}\pm 2S$	11100 – 13900	96%
$\bar{x}\pm\ 3S$	10400 – 14600	99.6 %

د ب حل: لومړی $\bar{x}-1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ یعنې 1400 افغانیو په اندازه 1500 افغانی له اوسط ځخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S وویشو په لاس را ځي:

$$\frac{1500}{700}=2.1$$

په دې ډول د 1400 افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې ځخه زیات او له $\bar{x}$ ځخه پورته دی.

پوښتنه

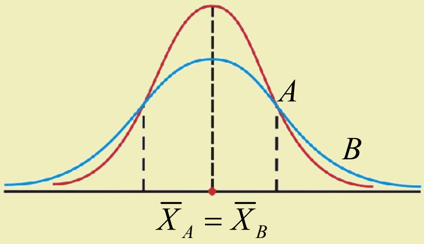
که چېرې 62.28% فیصده مشاهدات د $(\bar{x}-S\,,\,\bar{x}+S)$ په فاصله کې پراته وي، آیا ویلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالي منحني سره وښایاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دنورمالې توزيع دډول معيارونه

د مرکزي تيتوالي دوه معيارونه يو زيات شمېر د يـوې احـصايوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي.

ددې لپـاره چـې د يـوې احـصايوي مجمـوعې اطلاعـات، تناظر او د مثبت او منفـي اشـارو لرونکـي وي؛ نـو لـه کـوم ډول منحني څخه بايدګټه واخلو.



فعاليت

- په يو ه نورماله توزيع کې وسط، اوسط او د موډ معيارونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزيع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کميتونو په اړه څه فکر کوئ؟
- که چېرې يوه توزيع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسـط تفاضل څو ده؟
- که چېرې دواړه توزيع ګانې يو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او ټيټوالي له اړخه به څه وضعيت ولري؟

دتوزيع د ډول معيارونه په دوو لاندې حالتونو کې څېړل کېږي:

1- **د خمېدلو skewness معيار**: هغه توزيع چې د اوسط په دواړو خواوو کې متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضريبونو ښودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضريب: دا هغه معيار دى چې د خمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعريف شوى دى:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \overline{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دى چې يوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ د نو توزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزيع مثبت خمېدل (possitve skewness) لري، يعني ښي لورې ته خمېدګې لري.

اوکه $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزيع منحني منفي خمېدل (negative skewness) لري يعني کيڼ لورې ته خمېدګي لري.

که چېرې دکثرت جدول موجود وي، خمېدګي(عدم تناظر) يې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i - \overline{x})^3}{S^3}$ فورمـول پـه واسـطه پيداکېږي. چې f_i فريکونسي ښيي.

ب: د پيرسون د خمېدلو ضريب: د پيرسون ضريب په لاندې ډول تعريف شوى دى.

$$Sk_{(p)} = \frac{3(\overline{x} - med)}{S}$$

په متناظره توزيع کې د پيرسون د خميدلو ضريب مساوي په صفر دى. د پيرسـون د خمېـدلو د لـو ضـريب مثبـت او منفي قيمتونه په ترتيب سره د توزيع د منحني مثبت يا منفي خمېدل ښيي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- **د پړسوب kurtosis معیار**: د پړسوب معیار ددې ښودونکی دی چې د توزیع یوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټیټوالي لري.

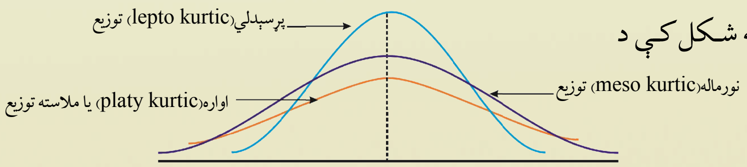
د پړسوب شاخص هغه معمولي معیار دی چې د یوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب معیار فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i - \overline{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فریکونسي، x_i ډېټا او $\overline{x}$ د x_i اوسط او S معیاري انحراف دی.

د پړسوب معیار د توزیع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه معیار د پرتله کېدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د α_4 ضریب د درې ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې په شکل کې د هغوي توزیع ښودل شوي ده ښیي.



حل: د نورمالي توزیع د پړسوب د درجې او میزان د پرتله کېدو لپاره لکه: یو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالي توزیع لپاره د α_4 قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې α_4 له 3 څخه زیاته وي نظر نورمال منحني ته د منحني پړسوب زیات دی.

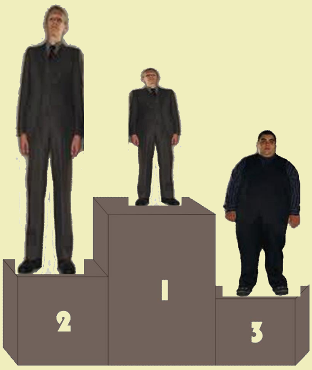
یا په بل عبارت یوه پړسیدلی توزیع چې څوکه لري او که چیرې α_4 له 3 لږ وي، نظر نورمالي منحني ته یې پړسوب کم دی چې د ملاستې یا اوارې توزیع په نامه یادېږي.

پوښتني

د یوه ټولګي د زده‌کوونکو د احصایې د مضمون نمرې په لاند ې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پړسوب ضریب حساب کړئ.

نمرې	د زده‌کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

(c) ketabton.com: The Digital Library



خو متحوله ټولنې

کـه چېرې د خپـل يـوه ټولګيـوال د ونـې پـه انـدازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه تـه پـه پـام د هغـه د وزن پـه اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعاليت

آيا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند يو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د يوه سړي د ونې او وزن مقدار د يو متحول په توګه کولای شو چې وړاندې يې کړو؟
- که وغواړو چې د يوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار يو ځای وڅېړو، نو دغه يوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګيوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- لاس ته راغلي معلومات د مرتبو جوړو په توګه وليکئ.
- هغه ټکي چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د يوه خط په واسطه يې وصل کړئ.
- آيا ويلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعاليت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولين دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې يوازې يو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او يا له هغو څخه زيات متحولين ولري، دکار دآساني لپاره معمولاً د يو يا خو متحولينو تر منځ درياضيکي اړيکې په مرسته د قايمو مختصاتو په قايم سېستم کې جوړيږي.

په لومړي ګام کې به دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دويم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولينو په څېر په يوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته يو ګراف را ښيي.

مثال: يو متخصص د غذايي رژيم يو ډول تأثير په يو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول يې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بيا يې د عمليې په تطبيق پيل کړي چې په پای کې يې بيا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې معلومات په لاس راغلی دي: $(1,8),(2,3),(1,7),(3,5),(2,4)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول لومړی مختصه د موږك لومړنی او دويمه مختصه د موږك وزن دغذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته ښيي.

- معلومات په يوه سطري او ستوني جدول کې ترتيب کړئ؟
- كه چېرې ډېټا د يوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولين ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نيسو:

5	4	3	2	1	د موږکانو شمير
2	3	1	2	1	د موږکانو لومړنی وزن
4	5	7	3	8	د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن

لاندې ستوني جدول په پام کې نيسو.

د موږکانو شمېر	د موږکانو لومړنی وزن	د غذايي رژيم له تطبيق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پورتني ډېټا يوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

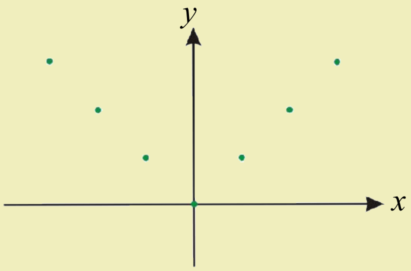
پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورونه، لکه: اوبه، کود، د کود ډول، لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آيا ويلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولينو سره سروکار لرئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیتوالي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله یې ولیکئ:

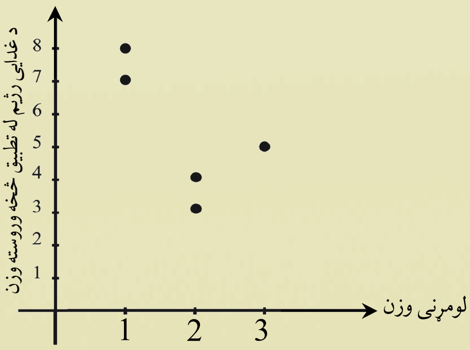
فعالیت

لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغو ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغله له y څخه یو واحد کم کړئ، نو د لاس ته راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلي قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر مورګانو دغذایي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)

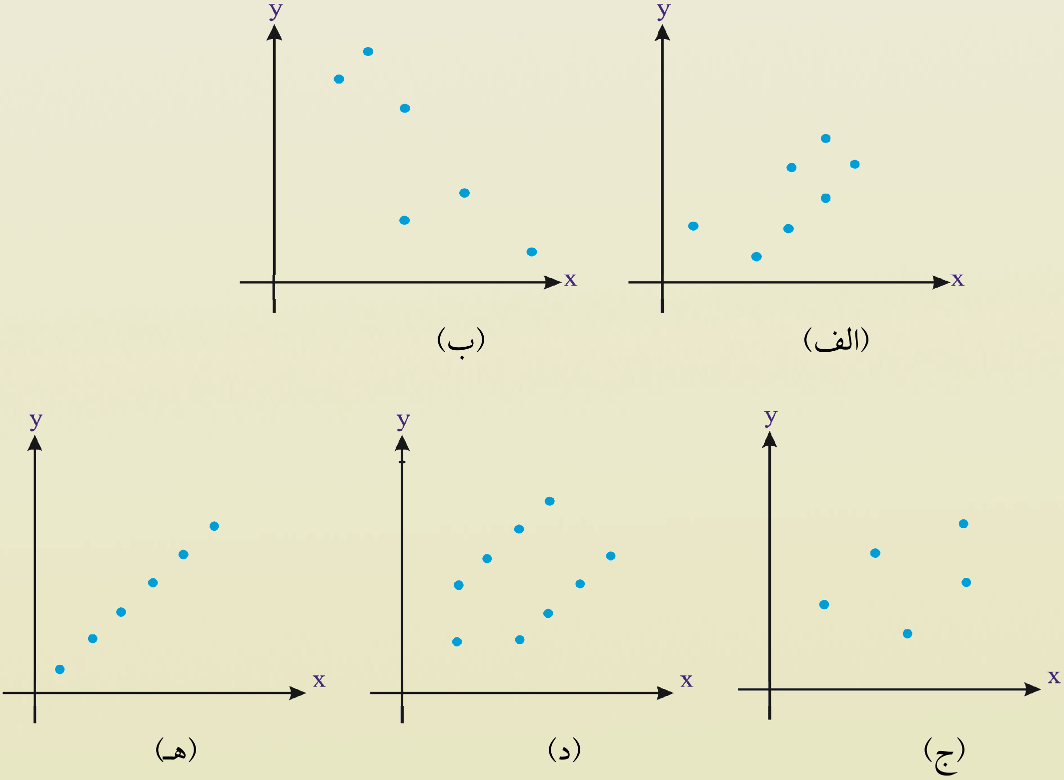


دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.

پورتنی ګراف چې د مورګانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه ده چې په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً: لاندې ګرافونه په پام کې ونیسئ:

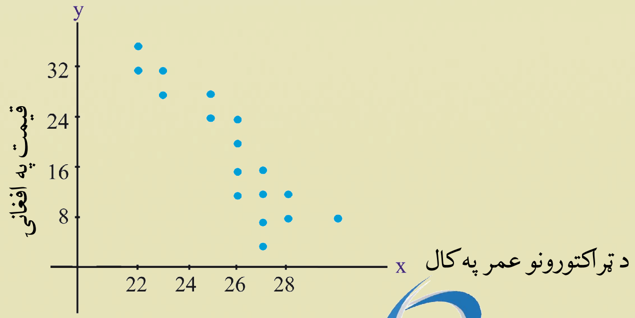


د(الف) په ګراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په ګراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په ګراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونویه اړوند نه ورکوي ځکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر دقت سره په دې ګراف کې د(الف) او (ب) ګرافونو پـه پرتلـه زیاتـه ده، د (هـ)پـه ګراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

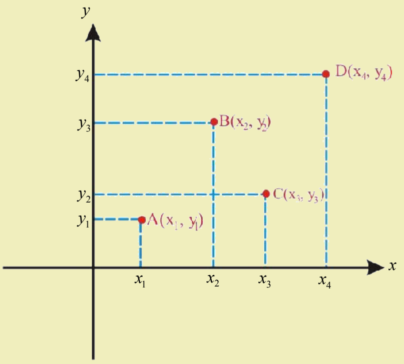
پوښتنې

لاندې ګراف دیو شمېر ټراکټرونو عمر راښيي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکـه یـا ارتبـاط وینـې؟ توضیح یې کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

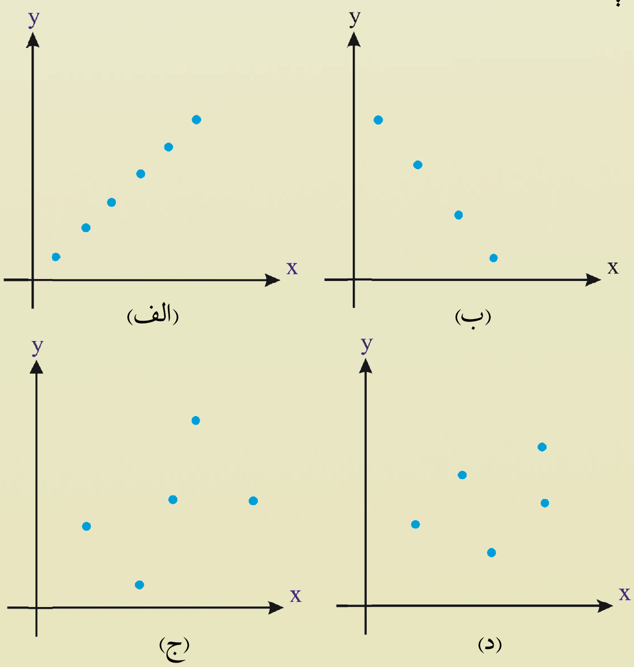
پیوستون او دپیوستون ضریب



د C, B,A او D ټکي لکه: مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟

فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چېرې ټکي په مستوي کې یوې مستقیمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې د y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معیار غواړو در وپېژنو چې د ټکو پیوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پیوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوی ده، د پیوستون د ضریب په نامه یاد او په r سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r=\frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n}-(\text{د } x \text{ ونو اوسط})(\text{د } y \text{ ګانو اوسط})}{(\text{د } x \text{ ونو معیاري انحراف})(\text{د } y \text{ ګانو معیاري انحراف})}=\frac{\frac{\sum xy}{n}-\bar{x}\,\bar{y}}{S_x\,S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذایي رژیم څخه وروسته ډېټا لکه: لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د موږکانو شمېره	لومړنی وزن X	له عملیې څخه وروسته وزن y	د x او y دضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروستني غذایي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

حل: که چیرې x لومړني وزنونه او y د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته وزنونه او $n=5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونیسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دی له:

$$\bar{x}=\frac{9}{5}=1.8 \qquad , \qquad \bar{y}=\frac{27}{5}=5.4$$

$$S_x^2=\text{د } x \text{ ونو واریانس}=\frac{(1-1.8)^2+(2-1.8)^2+(1-1.8)^2+(3-1.8)^2+(2-1.8)^2}{5}$$

$$=\frac{0.64+0.04+0.64+1.44+0.04}{5}=\frac{2.8}{5}=0.56$$

$$S_y^2=\text{د } y \text{ ګانو واریانس}=\frac{(8-5.4)^2+(3-5.4)^2+(7-5.4)^2+(5-5.4)^2+(4-5.4)^2}{5}$$

$$=\frac{6.76+5.76+2.56+0.16+1.96}{5}=\frac{17.2}{5}=3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}}=\frac{\sum x\cdot\sum y}{n}=\frac{(1\cdot 8)+(2\cdot 3)+(1\cdot 7)+(3\cdot 5)+(2\cdot 4)}{5}=\frac{44}{5}=8.8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پیوستون ضریب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\ \cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

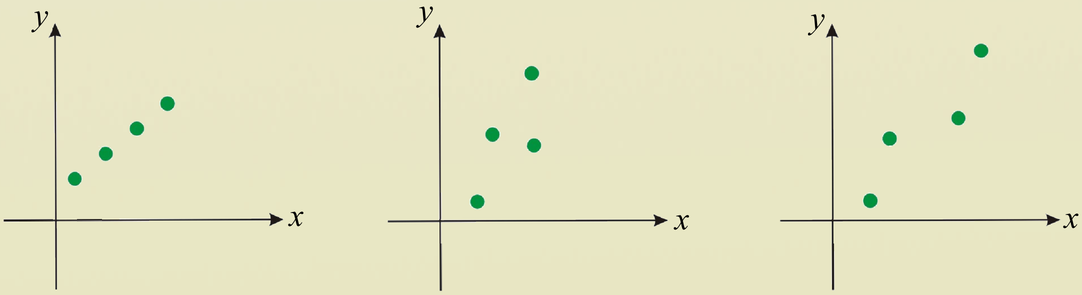
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د -0.67 ضریب د x او y ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکې ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نیسئ:

x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5



(الف) (ب) (ج)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیمت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت ته د ټکو تر منځ د پیوستون ضریب لږ دی د (ج) په شکل کې خرنګه چې ټکي د مستقیمې کرښې د(ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې د(ب) له حالته زیات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پیوستون ضریب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{ونو واریانس } x \text{ د} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{ګانو واریانس } y \text{ د} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{ګانو دضرب حاصل } y \text{ او } x \text{ د} = (1\cdot3)+(2\cdot5)+(3\cdot7)+(9\cdot4) = 70$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$r =$ دپیوستون ضریب $= \dfrac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \dfrac{2.5}{2.5} = 1$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$\bar{x} = 2.5$, $\bar{y} = \dfrac{24}{4} = 6$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= \dfrac{16+0+0+16}{4} = 8$

د x او y گانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

د پیوستون ضریب $= \dfrac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{y} = \dfrac{23}{4} = 5.75$, $\bar{x} = 2.5$

د x ونو واریانس $= 1.25$ ، د y گانو واریانس $= 4.6875$

$\dfrac{\text{د } x \text{ او } y \text{ گانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$

د پیوستون ضریب $= \dfrac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \dfrac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقداورنه خط ته نژدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

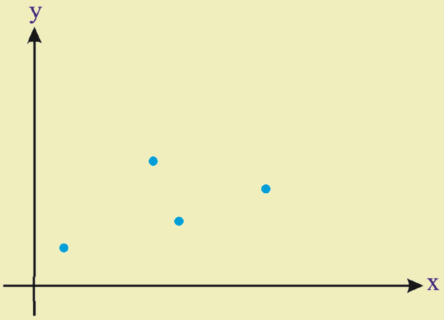
د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولگیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

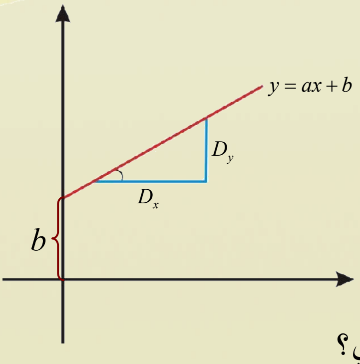
د خطي ميلان معادله

The linear regression equation



فرض کړئ چې يو پاشلی ګراف په لاندې ډول راکړل شـوی وي. يـوه مـستقيمه کرښـه چـې معادلـه يـې د $y = ax + b$ پـه ډول ورکـړل شـوي وي، پيـدا کـړئ چې ګراف يې ټولو ټکو ته نږدې فاصله يا واټن ولري.

فعاليت

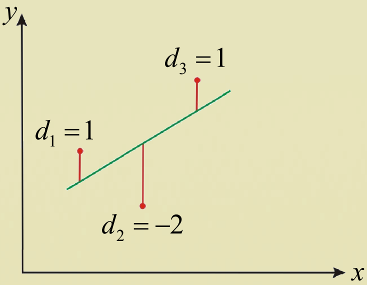


په مخامخ شکل کې يوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف يې مستقيمه کرښه ده، رسم شوې ده.

- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولين په کوم نوم يادېږي؟
- د $y = ax + b$ مستقيمې کرښې ميل پيدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د يو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چېرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزايد او که متناقص دی؟

همدغه راز که چيرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

او که چېرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

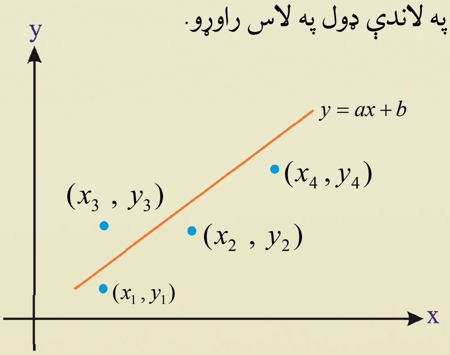


مخامخ شکل په پام کې ونيسئ:

د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

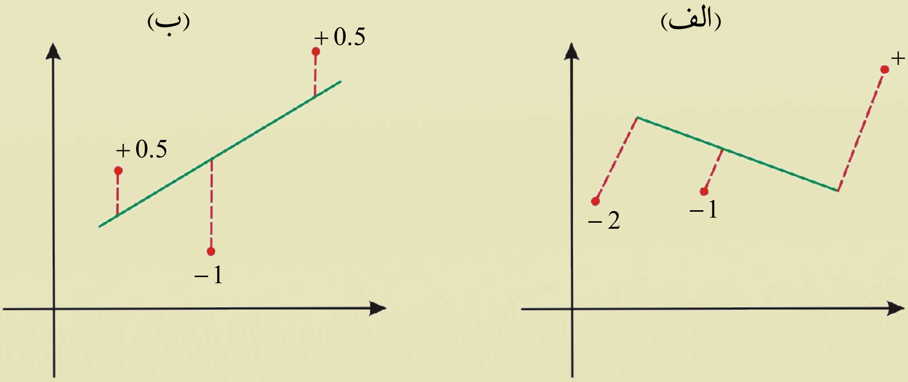
له پورتني فعاليت څخه پوهېږو چې د $y = ax+b$ معادله يوه خطي تابع ده چې د a ضريب ددې معادلې ميل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چېرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.
پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax+b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقيمې کرښې په ګراف پراته دي.
هر څومره چې د پاشلي ټکی مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چېرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چيرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تګلاره چې د لږکيو يعني اصغري مېتود جوړونې[1] مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف(متفرقه دياګرام يا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.



او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې $y = ax+b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تيره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دويم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسمو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخيصوو.



---

the method of least square -[1]

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتب ډول د(الف) له حالته ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله نشو ویلای چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې مثبت او منفي خطاوې یو له بله د منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$ د خطاګانو د دویم توان مجموع

$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$ د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعاتو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چېرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع} = \sum (y-\bar{y})^2 = \sum [y-(ax+b)]^2$$

$$= \sum (y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + \ldots..$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلې، ورننو ځو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$a = r\frac{sy}{sx}b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \qquad , \qquad b = \frac{\sum xy - n\bar{x}\,y}{\sum x^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعاتو تګلارې په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پایله: د ریگریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو کې چې ورسره تړلې دی، د استفادې وړ گرځي.

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریگریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: خرنگه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \Rightarrow \quad S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \quad \Rightarrow \quad S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum x\,y}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b\cdot 3$$

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = -1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2-(-1)(3) = 2+3 = 5$$

په دې ډول د ریگریشن معادله عبارت ده له: $y = ax + b = -x + 5$

پوښتنه

که چیرې $y = 2x+3$ د y د ریگریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط به څومره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی لکه:

$$\frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}} = \text{د بدلون ضریب} \quad \text{یا} \quad C \cdot V = \frac{S}{\overline{x}}$$

دغه ضریب ډېر ځلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\overline{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چېرې ډېټا سره مساوي وي، نو د ټیټوالي ټول معیارونه مساوي له صفر سره دي.

په نورماله منحني کې ټیټوالی: نورماله منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورماله منحني کې ډېټا په نورماله توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کېدل او معیاري انحراف په نورماله توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابر وي.

د نورمالې توزیع د شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید څرنګوالی د کږېدواو پرسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو معیار د کږېدو او پیوستون د ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره پکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \overline{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i (x_i - \overline{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\overline{x} - med)}{S}$$

د پرسېدو(جګېدلو) معیار د پرسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دي. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې موخه یوه دوه متحوله ټولنه ده لکه: د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې دغه راز ټولې اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تيتوالي ګراف: د تيتوالي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل په يوه مستوي کې د قايمو مختصاتو په سېستم کې ښودل کېږي. کيداى شي د ټکو او تيتوالي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعات زموږ په اختيار کې راکړي.

الف: آيا داسې نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړيکه ښيي، شته او که نه؟

ب: د يو ډول اړيکې د شتون په صورت کې دغه اړيکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړيکه خطي وي، نو څه ډول اړيکه ده؟

پيوستون او د پيوستون ضريب: پيوستون د متحولينو ترمنځ د اړيکو د مېنډلو درجه ده، کله کله دواړه متحولين په يوه لورې بدلون کوي يعنې x او y دواړه په يوه کرښه لوى او ياهم کوچنى شي، چې پيوستون يې مستقيمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولينو اندازه يو د بل پر خلاف بدلون وکړي يعنې که چېرې x لوى شي y کوچنى کېږي. او يا هم برعکس صورت نيسي.

د پېژندنې ډېر ښه معيار د پيوستون شتون او نه شتون دى او حتا د خطي پيوستون ډول، جهت او ميزان د پيوستون ضريب دى، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\bar{x}\,\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنيو اړيکو کې $\sum xy$ د xونو او yګانو د ضرب د حاصل مجموع، $\bar{x}$ د xونو اوسط او $\bar{y}$ د yګانو اوسط دى، همداراز S_x د xونو معياري انحراف او S_y د yګانو معياري انحراف دى.

د ريګريشن کرښه: ريګريشن(تخميني) د تابع د يوه متحول له قيمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دى، چې د يو يا څو مستقلو متحولينو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولينو ترمنځ اړيکې افاده کوي، د ريګرېشن معادلې په نامه يادېږي.

کولاى شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعاتو د محاسبې په طريقه حساب او همدارنګه د a او b ضريبونه د دغې طريقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \qquad , \qquad b = r\frac{S_y}{S_x}$$

چې S_y د y معياري انحراف او S_x د x معياري انحراف دى، په داسې حال کې چې r د پيوستون ضريب، $\bar{x}$ د xونو اوسط او $\bar{y}$ د yګانو اوسط دى.

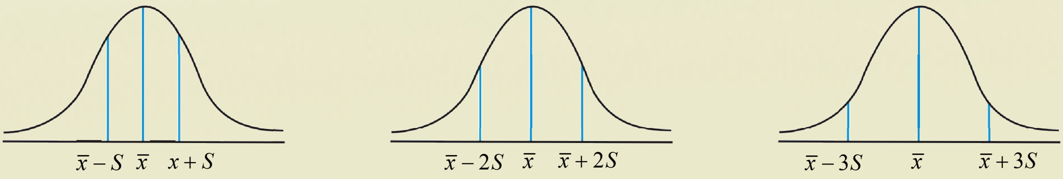
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1-که چیرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\overline{x}=50$ او واریانس یې $S^2=64$ وي، د بدلون ضریب y چې له $y=2x+10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چیرې د هر زده کوونکي په نمرو کې %20 نمبرې ورزیاتې شي، نو د نمرو د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحني ګانو کې پرته ده، ولیکئ؟



4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې سره وواياست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولګیوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جګوالی او د قاعدې د مساحت تر منځ اړیکې؟

5- د یو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمیر او د زدکوونکو د نمبرو تر منځ چې د %20 له مخې اخیستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پایلې وڅیړئ؟

6- مخامخ ډیټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډیټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

که چیرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډیره، که لږه ده؟

که چیرې د پیوستون ضریب د $+1$ او -1 عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وایئ؟

د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دو A او B ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنيو اعدادو په پام کې نيولو سره:

الف: د معلومات د تيتوالي گراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقيمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقيمه کرښه نظر د ريگرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چېرې x او y سره بشپړ پيوستون او معکوس ولري، يعنې $S_x = S_y$، نو د y نسبت x ته د ريگرېشن خط کوم دی؟

1) $y = -\frac{1}{2}x + b$ 2) $y = \frac{1}{2}x + b$ 3) $y = x + b$ 4) $y = -x + b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د رياضي او فزيک د مضمون 20% د آزموينې پايلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د رياضي نمبرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزيک نمبرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د رياضي نمبرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزيک نمبرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ريگريشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آيا د دوو آزموينو د پايلو تر منځ اړيکې شتون لري؟

12- پر چنگښو د خوراک د مالگې د 5 او يو فيصده محلول اغيزې د يون پلازما پر ميزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالگې په محلول کې د پاتې کېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د يون پلازما ميزان (mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پورتنی جدول کې متحولين وڅېړئ؟

ـ په پورتنيو متحولينو کې کوم يو خپلواک او کوم يو ناخپلواک متحول دی؟

ـ يو داسې گراف رسم کړئ چې د دواړو متحولينو ترمنځ اړيکه وښيي؟

ـ د دې گراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښاياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

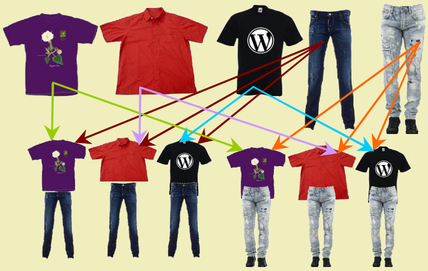
احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرموټېشن یا ترتیب

Permutation



که چېرې درې بېلابېل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، په څو ډوله کولای شو هغه سره جوړه جوړه واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزموېئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و دریږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څو درې رقمي عدونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وي.
- د پورتنی فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او ووایې چې څه اړیکې سره لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمیر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1$ سره دي.

- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \ldots\ \cdot n}_{n\ \text{ځلې}\ n} = n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عدد لپاره د $(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot n)$ حاصل ضرب په لنډ ډول په $n!$ (n – فکتوریل) ښودل کېږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن (Permutation) په نامه هم یادېږي په P_n سره ښودل کېږي. که چېرې تکرار په ترتیب کې ناشونی او یا مجازنه وي نو د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره $P_n = n!$ سره کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چېرې په ترتیب کې تکرار شونی او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې عبارت دي له. $(k \le n)$, $P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}$ او دارنګه معنا ورکوي چې یو عنصر په n ترتیب کې k ځلې تکرار شوي دي.

لومړی مثال: (1) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(2) د هر یوه طبیعي عدد لپاره وښیئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i):د تعریف له مخې لرو چې:

$$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$$

$$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$$

$$8! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ \dots \ \cdot n = (1\cdot 2\cdot 3\cdot \ \dots \ \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دویم مثال: د آزموینې لپاره په یوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګیو د سوېې آزموینې لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په لیکه کښېني چې د هر یو د ځای تغییر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب !16 دی چې تکرار پکې ناشونی دی. که چېرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاربږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^k = \frac{n!}{k!}$, $(k \le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چېرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16 = 43680$$

که چېرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1,k_2,\ \dots\ ,k_n)}$ n ترتیبه یا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m ګروپه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!, k_2!\cdot\ \dots\ \cdot k_n!$ په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1,k_2,\ \dots\ ,k_n)} = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot k_3!\cdot \dots \cdot k_n!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمېر عبارت دی له: $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544 , 55454 , 54554 , 45554 , 45545

45455 , 44555 , 54545 , 55445 , 54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 میني بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نومړي ټرانسپورټ په سروېسونو او میني بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال آباد پورې د نومړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د میني بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نومړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساوي دي په: $5\times3=15$

پنځم مثال: د $8,7,2$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه پرته له تکراره جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

د دریم رقم ځای	د دویم رقم ځای	د لومړي رقم ځای	
2	3	4	دامکاناتو ډولونه

پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4\cdot3\cdot2=24$ او د فورمول له مخې لرو چې:

$$P_4^{(3)}=\frac{4!}{(4-3)!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1!}{1!}=24$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

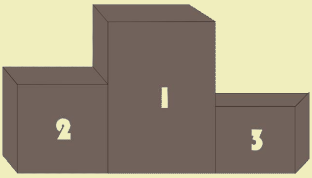
پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هیڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه ګردي میز په شاوخوا کې کښېني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کښېني.
3. په څو ډول کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زېړ توپونه سره خوا په خوا په یو کتار کې کېږدو. د هم رنګه توپونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیب یا کمبینیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه توپیر سره لري؟

مخکې له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بینوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0\le k\le n \quad , \quad k,n\in IN$$

فعالیت

- د پورتني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\binom{2}{k}$, $k=0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2=\square a^2+\square ab+\square b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$ $k=0,1,2$ له قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنګه چې $1=\binom{2}{0}=\binom{2}{2}$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n\in IN$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بینوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\binom{4}{k}$, $k=0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0\le k\le n$ سره دی لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{0}=1 \quad , \quad \binom{n}{n}=1 \qquad \text{(i)}$$

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r} \qquad \text{(ii)}$$

(iii) له n څخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یاکمبینیشن د r له n شیانو څخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کېدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي، نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې له 7 تنو څخه 4 تنه و ټاکو، نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\frac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کېږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن څخه ده چې له 7تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دی؛ یعنې لرو چې: $P(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

پوښتنې

1- له اوو حرفونو څخه لکه: A, B, C, D, E, F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

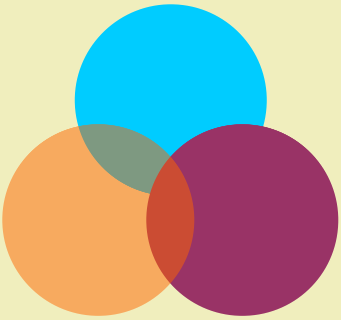
2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

3- له 4 نارینه‌وو او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤول وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیب

Combination



آیا پوهېږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژېړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړېږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولګیوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چېرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دویم د سرګروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د دريې تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تر بله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو ګروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوی ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n بنودل کېږي او عبارت له $\binom{n}{k}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی‌مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتيب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26!}{26!\cdot 4!}=27405$$

دويم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي ستونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقيقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمېر يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=10$$

پوښتنې

1- که چېرې په يوه آزموينه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

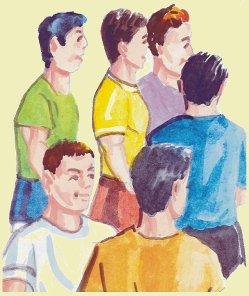
2- په يوه مستوي کې پنځه ټکي چې په يوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونيسئ د دې ټکو په نښولولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چيرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تبـدیـل

Variation



په یوه المپیاکې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شتون لري؟

فعالیت

- د n بېلابېلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمېر شیان ټاکو،د هغوی مجموعي شمېر څو دی؟
- که چېرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او … شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دواړو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!{\cdot}C_k^n$ سره کېږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!{\cdot}C_k^n = k!{\cdot}\frac{n!}{k!{\cdot}(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

حل:مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

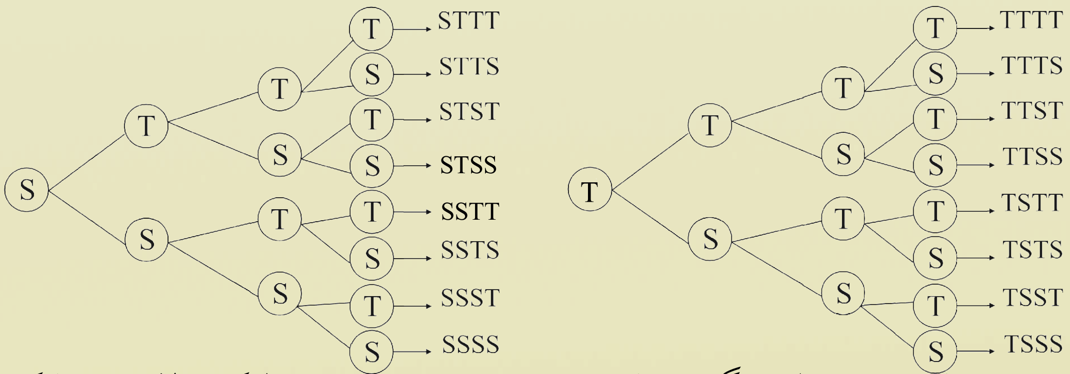
$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot 27\cdot 29\cdot 28\cdot 26!}{26!} = 657520$$

پورتنی حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د امکاناتو شمېر		د ټاکنو ډول k غړي له n غړو څخه
له تکرار سره $k \leq n$	پرته له تکراره $k \leq n$	
$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$	$P(n,k) = n! \quad , \quad n = k$	ترتیب یا پرموټېشن
$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	ترکیب یا کمبینیشن
$V_k^n = n^k$	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	تبدیل یا وریشن

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغور ځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضا کې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $= S$ او خط $= T$) دی.



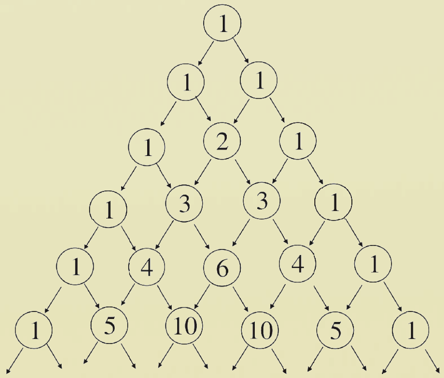
د پاسنې مثال د شیر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورځله		دري خله		دوه خله		یوځل		هیڅ ځل		د سکي غورځول
احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	
1/16	0	1/8	0	1/4	0	1/2	0	1	0	د خط د راتګ شمیر
4/16	1	3/8	1	2/4	1	1/2	1			
6/16	2	3/8	2	1/4	2					
4/16	3	1/8	3							
1/16	4									

که چېرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادیږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کیڼې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بینهایت پورې دوام ورکړو، چې که چېرې هغوی د یو دوه جمله‌یي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه: د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي، مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله‌يې په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده یو شان ده:

$$(a+b)^0 = \textcircled{1}$$
$$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$$
$$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$$
$$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$$
$$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^3$$

$$\textcircled{1}$$
$$\textcircled{1}\ \textcircled{2}\ \textcircled{1}$$
$$\textcircled{1}\ \textcircled{3}\ \textcircled{3}\ \textcircled{1}$$
$$\textcircled{1}\ \textcircled{4}\ \textcircled{6}\ \textcircled{4}\ \textcircled{1}$$

چې دغه ضریبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضریبونو استعمال په لاندې ډول لیکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k− امه مرتبه کې عبارت دې له: $P(\text{خط راتگ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. د فوټبال په یوه سیالۍ کې 12 ټیمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دویم او دریم مقام ته وټاکو.

2. د یوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازي او د استازي د مرستیال په توګه وټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم قضيه

د پاسکال د مثلث له مخې د بينوم د انکشاف ضريبونه وټاکئ.

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

```
              1
           1     1
        1     2     1
     1     3     3     1
  1     4     6     4     1
1    5    10    10    5    1
```

فعاليت

- په يوه ناخاپي تجربه کې چې يوازې دوه ناخاپي پېښې د A او $\overline{A}$ پېښېږي، يعنې د $\{A, \overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پېښې احتمال عبارت دی له:
- که چېرې $P(A) = P$ د A د پېښې احتمال وي، د هغې د مکملې پېښې احتمال يعنې $\overline{A}$ څو دی $P(\overline{A}) = ?$
- د پورتنۍ تجربې له بيا بيا تکرار څخه که چېرې د A حادثې پېښېدو ته 1 او د نه پېښېدو حالت ته يې 0 ووايو لاندې جدول د تجربې د بيا بيا تکرار يعنې $n = 2$ لپاره بشپړ کړئ.

د بينوم د ضريبونو ارايه	احتمال	ممکنې پايلې	k
$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$	$(1-p)^2$		0
	$2p(1-p)$	10	1
$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$		11	2
$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = ?$	$(p+(1-p))^2$		

د $B(n,p,k)$ ليکنه د برنولي د مسالې د احتمال په نامه يادېږي.

$$B(n,p,k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

د بينوم د حدونو د انکشاف مجموع يعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه لاندي پايله په لاس راځي:

پايله: په يوه ناڅاپي تجربه کې چې د نموني فضا غړي يې په مساوي احتمال په تجربه کې بيابيا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بينوم د انکشاف $k-$ ام حد کې لاندي احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بينوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه يادېږي او ليکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پيدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په يوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونيې فضا کې داسې فرضوو چې د کال د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زوکړې ورځ د سوال وړ ده نه د زرکړې کال.

په دې ډول Ω په نمونيې فضا کې ټول امکانات له 365 ورځو څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

د A حارثه $\qquad |\Omega|=(365)^k$

په دې ډول اوس که چېرې د A ناڅاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په يوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نيسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې نا څاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو:

$$P(\overline{A})=\binom{365}{k}=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-\binom{365}{k}=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$$

پوښتنې

وښيئ چې:

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0 \qquad (I)$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n \qquad (II)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پايلې په دوه ناڅاپي پېښو چې له يو بل سره هيڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتيب کړو.
موضوع د سټ د تيوري له مخې په يوه اختياري نمونه‌يي فضا Ω کې، دوه ناڅاپي پېښو ته چې اتحاد يې نمونه‌يي فضاوي په مثال کې يې تشريح کړي.

فعاليت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه يې پېژنئ يا دونه وکړئ او يوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي يا ناڅاپي پېښو په ارايه چې ټوله نمونه‌يي فضا يې يوازې دوه غړي ولري.
- آيا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګانې يې له 2 څخه زيات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې يوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څنګه کولای شو چې يوه نمونه‌يي فضا چې ډېر غړي لري، په يوه داسې نمونه‌يي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چېرې د دا ډول فضاګانو د يو غړي د پېښې احتمال p وي، د بلې پېښې د احتمال قيمت به څو وي؟
- که چېرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمېر له n ځلې ($0 \le k \le n$) ورېل او نور يې بايلل دي و، د k ځلې برياليتوب (P) په n ځلې تکرار کې پيدا کړئ؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: د هرې ناڅاپي تجربې نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې يوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

- که چېرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د يو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بايلل دي.
- که چېرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې او د بايللو احتمال به $q=1-p$ سره دي، يعنې لرو چې:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

= k، – ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چېرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$ ، د بایللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناخاپي پېښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابیږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې لـه هغې جملې څخه k ځلې یې وړل وي، یـوې دوه عنصره نمونه‌یي فضا ته وځیرئ؟

دویم مثال: په یوه کورنۍ کې چې 5 ماشومان لري، د دې احتمال چې لـه اولادونـو څخه 2 تنـه هلکـان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چېرې د اولادونو د هلك او نجلۍ زوکړې چانس برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$$ د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي.

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځیدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چېرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

$$\binom{6}{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^4.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$$ =(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي)

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلـو احتمـال یـې مـساوي پـه $\frac{1}{3}$ وي، کـه چېرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چېرې د سکې د خط راتللو حالت ته وړل او احتمـال یـې p پـه پـام کـې ونیـسو، نـو د خـط د نـه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی یعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \begin{array}{c}\text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدوکې}\\ \text{لږ تر لږه 3 ځله شېږ راشي.}\end{array}\right\rangle = \binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3ځلې شېږ}}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{1 ځل خط}}+\binom{4}{4}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېږ}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال یې له 0.99 څخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

د هر n ځلې شیر راتګ احتمال $-1=$ دی لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ یا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به یې له 0.99 څخه لوی وي.

پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړی چې:

(i): په 4 ځله غورځیدوکې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځیدوکې، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځیدوکې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېریدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي مهم ټکي

فکتوریـــــل: د هــر n طبیعــي عــدد لپاره د n، ... $1\cdot2\cdot3\cdot$ د ضــرب حاصــل پــه لنــډ ډول پــه $n!$ (n فکتوریل) ښودل کېږي، د تعریف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموتېشن یا ترتیب: د n غړو ترتیب په P_n ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتیب کې تکرار غیر مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتیبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دی په:

$$P_k^n = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$$

$\binom{n}{k}$, n د k **له پاسه**: د $\binom{n}{k}$, n د k له پاسه، د بینوم هغه ضریبونه دي چې k د بینوم د توان پــه ټاکلو سره، د ضریبونو لپاره داسې صورت نیسي:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ ، } n,k \in IN \text{ ، } 0 \le k \le n$$

- له n شیانو څخه د r شیانو ترکیبونه په:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{ ، } \quad r \le n$$

وریشن یا تبدیلونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د k انتخابي غړو له n غــړو څخه مطلوب وي، په نامه دي، n په k تبدیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبینوم قضیه: د $(a+b)^n$ دو جملهیي انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د یوې تجربې په n ځلې تکرار کې، چې هر حالت یې p او د $q=1-p$ احتمال لري.

د k – ام ځلې ورلو یعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بایلل ګڼل کېږي؛یعنې $q=1-p$ سره دي اوصورت نیسي:

$$\left\langle \begin{array}{c}\text{د k ځلې ورلو د احتمال قیمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې}\end{array} \right\rangle = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ ، } 0 \le k \le n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ دربدلی شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، حنظله او حبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخیستلو لپاره ودریږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 ګروپونو وویشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library