بسم الله الرحمن الرحیم

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: اقتصادي رياضي

څانګه: بانکداري او د تجارت اقتصاد

مولف: محمد دهقانمل

ژباړن: عزت الله څواب

د څار کمېټه:

- محمد آصف ننګ د تخنيکي او مسلکي زده کړو معين
- ديپلوم انجنير عبدالله کوزايي د تعليمي نصاب رييس
- محمد اشرف وحدت په تعليمي نصاب کې د معينيت د مقام سلاکار

د علمي تصحيح کمېټه:

- عبدالجميل ممتاز
- محب الرحمن محب
- احمد فهيم سپين غر

د ګرافيک او ډيزاين څانګې مسئول : محمد جان عليرضايي

ګرافيک او ډيزاين: محمد سليم خان

چاپ کال: ۱۳۹۲ لمريز کال

تيراژ: ۱۵۰۰

چاپ ځل: لومړی

وېب پاڼه: www.dmtvet.gov.af

برېښناليک: info@dmtvet.gov.af

کډ ISBN: ۹۷۸۹۹۳۶۳۰۰۵۹۰

Ketabton.com

د چاپ حق د تخنيکي او مسلکي زده کړو له معينيت سره خوندي دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطـــن افغانســـــتان دی
دا عـــــزت د هر افـــغان دی

کــور د سولې کـــور د تورې
هر بچـــــی یې قـــهرمان دی

دا وطـــن د ټولو کــــور دی
د بلوڅــــــو د ازبکـــــــو

د پـــښتون او هـــــزاره وو
د ترکمنـــــــو د تاجکــــــو

ور سره عـــرب، ګــــوجر دي
پامیــــریان، نورستانیــــان

براهــوي دي، قـــزلباش دي
هم ایمـــاق، هم پـــــشه یان

دا هیـــواد به تل ځلیـــــږي
لکــــه لمـــر پر شـــنه آسمان

په سینــــه کې د آسیـــــا به
لکــــه زړه وي جـــــاوېدان

نـــوم د حــــق مـــو دی رهـــبر
وایـو الله اکبـــر وایـو الله اکبـــر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې وزير پيغام

ګرانو زده کوونکو، محصلانو او درنو ښوونکو!

د يوې ټولنې وده او پرمختګ کاملاً د همغې ټولنې د پياوړو کاري کادرونو، بشري قوې او ماهرو فکرونو په کار او زيار پورې تړلي دي. همدا بشري قوه او کاري متې دي چې د هيواد انکشافي اهدافو ته د رسيدو لارې چارې طی کوي او د يوه نيکمرغه، مرفه او ودان افغانستان راتلونکی تضمينوي.

انسان په خپل وار سره د الله تعالی له جانبه او هم د خپل انساني فطرت له اړخه مؤظف او مکلف دی چې د ځمکې په عمران او د يوه سوکاله ژوند د اسبابو او ايجاباتو د تکميل لپاره خپل اغيزمن نقش، همدارنګه ملي او اسلامي رسالت ادا کړي.

له همدې ځايه ده چې د يوه ژوندي او فعال انسان نقش، د خپل ژوند د چاپيريال او خپلې اړوندې ټولنې په اړه، تل مطلوب او په هيڅ حالت کې نه نفی کيږي او نه هم منقطع کيږي.

په ټول کې د پوهنې نظام او په خاصه توګه د تخنيکي او مسلکي زده کړو معينيت مسووليت او مکلفيت لري چې د اسلامي ارزښتونو، احکامو او همداراز معقولو او مشروعو قوانينو ته په ژمنتيا سره، د افغانستان په انکشاف کې فعاله، چابکه او موثره ونډه واخلي، ځکه دغه ستر او سپيڅلي هدف ته د رسيدو په خاطر د انساني ظرفيت وده، د حرفوي، مسلکي او تخنيکي کادرونو روزنه او پراختيا يو اړين مقصد دی. همدا په تخنيکي او مسلکي زده کړو مزين تنکي ځوانان کولی شي چې په خپلې حرفې او هنر سره په سيستماتيک ډول د هيواد انکشاف محقق او ميسر کړي.

جوته ده چې په افغانستان کې د ژوند تګ لاره، دولتداري او ټولنيز نظام د اسلام له سپيڅلو احکامو څخه الهام اخيستی، نو لازمه ده چې زموږ د ټولنې لپاره هر ډول پرمختګ او ترقي بايد په علمي معيارونو داسې اساس او بنا شي؛ چې زموږ د کارګر نسل مادي او معنوي ودې ته پکې لومړيتوب ورکړ شي. د حرفوي ظرفيت جوړونې تر څنګ د ځوانانو سالم تربيت او په سوچه اسلامي روحيې د هغوی پالنه نه يوازي پخپل ذات کې يوه اساسي وجيبه ده، بلکې دا پالنه کولی شي چې زموږ وطن پخپلو پښو ودروي، له ضعف څخه يې وژغوري او د نورو له سياسي او اقتصادي احتياج څخه يې آزاد کړي.

زموږ ګران زده کوونکي، محصلان، درانه استادان او مربيون بايد په بشپړه توګه پوه شي، چې د ودان او نيکمرغه افغانستان ارمان، يوازې او يوازې د دوی په پياوړو متو، ويښ احساس او نه ستړي کيدونکي جد او جهد کې نغښتی او د همدغو مسلکي او تخنيکي زده کړو له امله کيدای شي په ډيرو برخو کې د افغانستان انکشافي اهداف تر لاسه شي.

د دې نصاب له ټولو ليکوالانو، مولفينو، ژباړونکو، سموونکو او تدقيق کوونکو څخه د امتنان تر څنګ، په دې بهير کې د ټولو کورنيو او بهرنيو همکارانو له مؤثرې ونډې او مرستو څخه د زړه له کومي مننه کوم. له درنو او پياوړو استادانو څخه رجامندانه هيله کوم چې د دې نصاب په ګټور تدريس او فعاله تدريب سره دې د زړه په ټول خلوص، صميمي هڅو او وجداني پيکار خپل ملي او اسلامي نقش ادا کړي.
د نيکمرغه، مرفه، پرمختللي او وياړمن افغانستان په هيله

فاروق وردګ
د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړلیک

څپرکي	سرلیکونه	پاڼې
لومړی	د توابعو لمېټ او د هغو اهمیت	۱-۲۸
دویم	مشتق	۲۹-٥٤
دریم	قسمي، ترکیبي او کلي مشتق نیونه	٥٥-۷۲
	سرچینې او اخیستنې	۷۳
	د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام	۷٤

(c) ketabton.com: The Digital Library

مقدمه

اقتصادي رياضي د بانکدارۍ، اقتصاد او تجارت د څانګې د مهمو او اساسي مضامينو له ډلې څخه ده، چې محصلين يې په زده کولو سره د بانکي محاسبو او د تجارت د اقتصاد لپاره اړين مهارتونه ترلاسه کولای شي.

په لومړي څپرکي کې د توابعو لمټ، لمټ او په مسلکي برخو کې د هغو د کارولو په اړه توضيحات وړاندې شوي دي. په دويم څپرکي کې بيا مشتق، د مشتق ډولونه، د هغو اړوندې قاعدې او اړوند تمرينات له پوره شننې سره ځای پرځای شوي دي.

په دريېم څپرکي کې د قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نيونې په اړه توضيحات او تشريحات وړاندې شوي دي. د څپرکي د موضوعاتو د نچوړ تمرينونه راوړل شوي، چې د يادو تمرينونو حل د محصلينو لپاره د درس په ښه درک کې مهمه مرسته کولای شي.

هيلمن يم د دې ټولګې په چاپ سره د دې برخې د استادانو د ستونزو يوه برخه حل شي او د درنو استادانو او ګرانو محصلينو لپاره اړينې اسانتياوې منځ ته راوړي.

په درناوي

محمد دهقان مل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ټولیزه موخه

په محاسبوي چارو کې اړین مهارتونه ترلاسه کول او د اقتصادي ریاضي د اړوندو مسایلو حل؛ څو له قاعدو سره سم د تولید، صنعت او احصایې په برخو کې ترې ګټه واخستل شي او د انسان ورځنۍ ژوند ورباندې هوسا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

د توابعو لمټ او د هغو اهمیت

ټولیزه موخه

لوستونکي کولای شي د توابعو د لمټ اساسي مفهوم، د هغې اصول او قواعد درک کړي، لازم مهارتونه په کار یوسي، کولای شي مسایل حل کړي او د ټولنیز ژوند په ټولو ساحوکې یې د ګټې اخېستو وړ وګرځي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي له پای ته رسولو سره لوستونکي کولای شي:

۱- د لمټ مفهوم په اساسي بڼه درک کړي.

۲- لمټ تعریف کړي او د هغو په قوانینو پوه شي.

۳- دا $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0-\infty$ $\infty-\infty$ لمټونه محاسبه کړای شي.

٤- د مثلثاتي توابعو لمټ تعریف او د هغو سوالونه په سمه توګه حل کړي.

د لمټ اساسي مفهوم

انټروال! په لغت کې فاصلې ته وايي، د رياضي په اصطلاح کې د دوو مختلفو عددونو ترمنځ فاصلې ته انټروال وايي. انټر وال په درې ډوله دی:

۱. تړلی انټروال

۲. نیم پرانیستی انټروال

۳. پرانیستی انټروال

۱. تړلی انټروال: هغه انټر وال دی، چې د دوه نقطو د انجام درلودونکی وي.

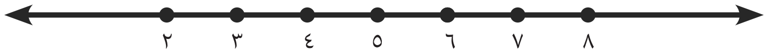
لکه [8, 2] لوی قوس د تړلي قوس علامه راښيي.

د فورمول په شکل یې دارنګه نوشته کولای شو. $[\ xEIR : 2 \leq x \leq 8x]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې شکل ښودل کېږي، لکه (١) شکل

(١)شکل



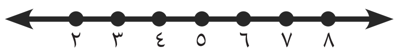
٢- نیم خلاص انتروال یا نیم تړلی انتروال: هغه انتروال دی، چې یو انجام په کې داخل او بل پکې نه وي لکه.[2,8 ،) (2,8 [کوچنی قوس د خلاص والي علامه راښیي او لوی قوس د تړل کېدو علامه راښیي.

$A = [\ x \in IR / 2 > x < 8]$

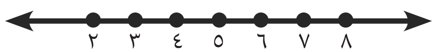
یعنې

$B = [\ x \in IR / 2 \le x < 8]$

(٢) شکل



(٣) شکل



٣- خلاص انتروال: هغه انتروال دی، چې د نقطو انجام په کې شامل نه وي.
مثال (3,1) یعنې $P = [\ x \in IR : 3 < x < 11]$

د یوې تابع حد یا د یوې تابع لمټ

مجاورت: هر خلاص انتروال د خپلو شاملو عناصرو مجاورت وي، لکه(2,8)
یو خلاص انتروال دی، چې له ٣ تر ٧ عناصر په هغه کې شامل دي او(2,8) انتروال د دې ټولو عناصرو مجاورت دی.

متناظر مجاورت: هر خلاص انتروال د خپل ځان وسطي متناظر مجاور وي، لکه(2,8) انتروال چې د متناظر مجاورت نقطه یې (٥) ده، باید وویل شي، چې د مجاورتونو هره نقطه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېر متناظرونه لري.

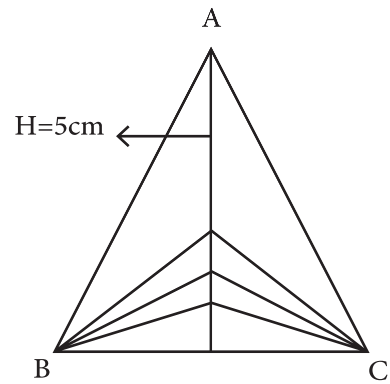
که (b,a) د x عدد یو مجاورت وي، داسې چې x د (b,a) وسطي نقطه راشي. دا چې (b,a) د x د متناظر مجاورت په نوم یادېږي.

مثلاً $(0,2)$ چې متناظر مجاورت د هغه دی، د r د هر مثبت عدد لپاره $(r\rangle 0)$, $(c-r,+r,$ د C یو مجاورت وي (٤ شکل)

(٤) شکل

مخکې له دې چې لمټ (حد) تعریف کړو، هغه د مثالونو په واسطه واضح کوو او په (٦) شکل کې د ABC مثلث په نظر کې نیسو.

چې قاعده یې a=6cm او ارتفاع یې h=5cm او مساحت یې په F ښایو، لرو چې



$f = a.h.\frac{1}{2}$

(٥) شکل

$F = \frac{1}{2}.6.5 = 15cm$ که قاعده ثابته وساتو او ارتفاع ته یې تغیر ورکړو؛ نو مساحت یې هم تغیر کوي او د h تابع دی، یعنې $F(h) = \frac{1}{2}6.h$ چې په لاندې جدول کې د h او $F(h)$ ځینې قیمتونه ښودل شوي.

h	5	3	1	0,5	0,2	0,1	0,02	0,001
F(h)	15	9	3	1,5	0,6	0,3	0,06	0,003

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته جدول څخه معلومېږي، چې دh په کمېدو F(h) هم کمېږي. هغه وخت چې h او د F(h)مساحت صفر ته نيږدې کېږي F(h) هم صفر ته تقرب کوي. په دې حالت کې ويلای شو چې دF(h) صفر دی او په رياضي کې يې په لاندې شکل ليکو:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

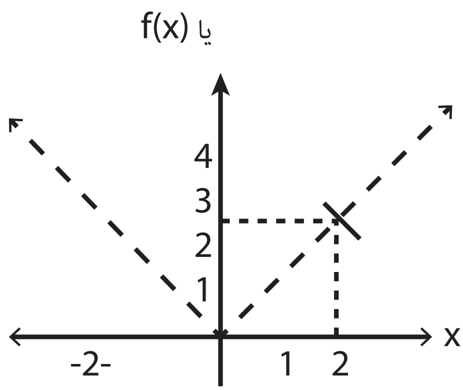
مثال: د $f(x) = x^2$ تابع په نظر کې نيسو،کله چې 2⟵x ته نيږدې کېږي f(h) کوم قيمت ته تقرب کوي.

x	1	1,5	1,9	1,99	1,99	1,999	-2-	2,001	2,01	2,02	2,1	2,5	3
F(x)	1	2,25	3,61	3,9601	3,980025	3,996001	- 4-	4,004001	4,04401	4,0804	4,41	6,25	9

په پورته جدول کې ليدل کېږي، کله چې x د 2 خواته نيږدې کېږي F(x) د 4 خواته تقرب کوي.

يعني

$$\lim_{n\to 2} f(x) = \lim_{n\to 2} x^2 = 4$$



شکل (6)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته مثال کې ليدل کېږي، چې د توابعو د لمټ د پيدا کولو لپاره په يو a کې د ذکر شوې نقطې په يوه مناسب مجاورت کې د تابع وضعيت مطالعه شو او مطلوب لمټ پيدا شو.

که دې لمټ ته د عمومي لمټ نوم ورکړو، ليکلی شو چې: $\lim_{x\to a} f(x)=b$

د b عدد د f د يوې تابع لمټ د a په نقطه کې يادېږي. که د N د هر مجاورت لپاره د b نقطه د D يومجاورت د a نقطه د f د تعريف په ناحيه کې موجود وي او د هر x لپاره عنصر له D د f(x) عنصرله N وي. يعنې $\lim_{x\to a} f(x)=b$ بايد ووايو حتمي نه ده، چې a په a ⟶ n د تعريف په ناحيه کې F شامل وي.

د توابعو لمټ

لمټ د تحول د اندازې د ټاکلو د نهايي قيمتونو او يا د توابعو له مخې مهم وي. د معاصرې رياضي عمومي مسايل له پخوا نه مشتق، سلسلې او نور له لمټ نه په ګټه اخيستو تعريف او توضېح کېږي.

د تحول تقرب (په يوه نقطه کې د يوې تابع ښي او کيڼ حد ته) ويل کېږي، چې x متحول د a ټاکلي عدد ته تقرب کوي، که چېرې په خپل زړه a ته نيږدې کېدای شي. يعنې د x او a تر منځ تفاوت له دواړو عددونو څخه کوچنی 8<0 تر ټولو کوچنی شي. پورته مفهوم په سمبوليک شکل دارنګه ليکل کېږي. $8>0:|x-a|\angle 8$

Lim x=a يا x ⟶ a يا | x-a | ⟶ 0

له ښي خوا د متحول تقرب ($x\to a^+$) که په يو متناقص تصاعدکې دx قيمتونه شتون ولري، داسې چې تدريجاً څومره يې چې زړه وغواړي a ته نيږدې شي، لکه:

$x\to a^+$ X: a+0, 1, a+0,01, a+0,001, a+0, 0001,……….

له کيڼې خوا د متحول تقرب ($x\to a^-$) که چېرې متزايد تصاعد کې د x قيمتونه ټاکل کېدای شي، داسې چې تدريجاً په خپل زړه a ته نيږدې شي. دا رنګه

$x\to a^-$ X: a-0,1, a-0,01a-0,001,a-0,0001,……

بايد وويل شي، چې د x متحول تقرب a عدد ته معادل دی، دواړو خواوو (ښي او کيڼ) ته له تقرب سره $x\to a \Leftrightarrow (x\to a^+, x\to a^-)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:

وښيئ چې $\lim_{x\to3}(4x+8)=20$

حل: د اختياري عدد لپاره $\in>0$ (ابتسيلون) قبلوو، چې $\in\angle(4X+8)-20$ وي $\delta>0$ عدد تعينوو.

$\Rightarrow|4X-12|<\in\Rightarrow|(4X+8)-20|\angle\in$ | دواړه خواوې په 4 تقسيموو چې

$\Rightarrow 4|X-3|<\in$ $\qquad \frac{4|X-3|}{4}<\in/4\Rightarrow|X-3|\in/4$

نو د $\delta=\in/4$ لپاره لرو، چې

$|x-3|<\delta\Rightarrow|x-3|<\in/4$ $\qquad \Rightarrow 4|1-3|<\in\Rightarrow 4x-12<\in$

د 8 عدد جمع او منفي کوو $4x+8-8-12<\in$

$|(4x+8)-20|<\in\Rightarrow Lim(4x+8)=20$ $\qquad 3\quad x$

دويم مثال: د x متحول د 4 عدد ته تقرب کړی، دا $x\to4$ مفهوم توضيح کړئ!

x:4,1 ,4,01,4,001,4,0001………. 4^{+}

حل

x:3,9 ,3,99 ,3,999,3,9999……… 4^{-}

په پای کې بايد ووايو، چې $x\to4$

د تابع لمټ

هر کله چې د f(x) تابع په يوه خلاص انتروال کې، چې د a عدد په هغې کې شامل دی. تعريف شوی وي د x متحول a ته په تقرب f(x) په خپله خوښه L عدد ته نيږدې شي، ويلای شو چې د f(x) تابع لمټ عبارت له Lڅخه دی.کله چې x، a تقرب وکړي، په لاندې شکل ليکو چې

$\lim_{x\to a}f(x)=$ يا $1f(x)_{x\to a}=1$

د لمټ تعريف:

د f(x) تابع د L عدد سره مساوي دی، کله چې $x\to a$ ته تقرب کړي.

که $\in>0,\delta>0:|x-a|<f\Rightarrow|F(x)-L|<\in$

(c) ketabton.com: The Digital Library

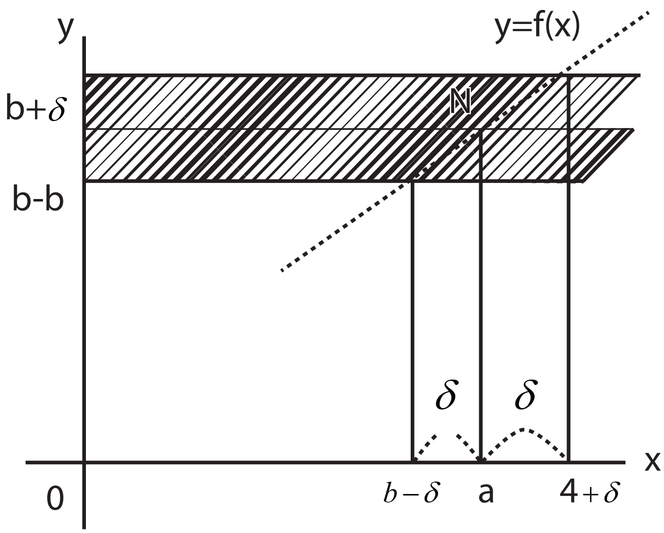
$\in > 0, \delta >: a - \delta < x < a + f \Rightarrow l - \in < f(x) < l + \in$

دا چې:

$\in > 0, \delta > 0 : x \in (x - f, x + f) = f(x) \in (l - \in, l + \in)$

يا پورته تعريف په لاندې شکل ليکل کېداى شي.

$$\lim_{x\to a} f(x) = I \Leftrightarrow (|x-a| \to 0 \Rightarrow |f(x) - L| \to 0)$$



(۷) شکل

ښي او کيڼ لمتونه

۱: د f(x) تابع د a په عدد کې د ښي لمټ لرونکې L_1 ده، که د هر $0 < \in$ لپاره د $0 < \delta$ کوچنى عدد شتون ولري، داسې چې

$x \in (a, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (L1 - \in, L1 + \in)$

$\lim_{x\to a} f(x) = l_1$ يا $\lim_{x\to a^+} f(x) = 1$

2 f(x) د تابع په a کې د کيڼ L_2 لرونکې ده، چې د هر $0 < \in$ لپاره د $0 < \delta$ يوعدد شتون لري، داسې چې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x \in (a-\delta-a) \Rightarrow f(x) \quad (L2-\in, L2+\in)$$

او يايې په سمبوليک شکل ليکو چې

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x\langle 2}} f(x) = l_2 \; \lim_{x \to a^-} f(x) \;\; = l_2$$

۳- د $f(x)$ تابع هغه وخت چې $x \to a$ د L لمټ لرونکی وي.

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ په دې شرط چې $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

بايد ووېل شي هغه وخت، چې د يوې تابع ښي او کيڼ ليمټونه له يو بل سره مساوي نه وي د لمټ لرونکي نه ده.

مثال:- وښايه چې $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x-3} = 6$

حل: فرضوو چې $0 < \in$ يو عدد δ موجود وي، داسې چې.

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x-3} - 6 \right| < \in$$

دا چې $\left| x-3 \right| < \delta$ وي، د δ اندازه د $\in$ له جنس څخه پيدا کوو.

$$\left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} \right| - 6 < \in \qquad \left| x+3-6 \right| < \in \Rightarrow \left| x-6 \right| < \in$$

که $\in = \delta$ وي په نتيجه کې $\left| x-3 \right|$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: ثابت کړئ، چې $\lim_{x\to 5}(4x-3)=17$ دی.

حل: د هر متناظر مجاورت $(\in 2,\in 1)$ لري که چېرې $\in$ یو مثبت عدد $0<\in$ دی: د $(17-\in,17+\in)$ مجاورت لپاره $(\in 2,\in 1)$

باید D=(a$_1$,a$_2$)مجاورت د 5 د عدد $(5\in D)$ پیدا کړو، داسې چې د هر x لپاره له D یا L f(x)=4x-3 په N کې شامل وي، یعني

$$17\in\langle 4x-3\langle\quad 17+\in$$

$$20\quad\in\langle 4x\langle 20+\in$$

دواړه خواوې په 4 تقسیموو $\frac{5.\in}{4}<x<5\frac{5+\in}{4}$

نو د $\frac{5.\in}{4}<x<5\frac{5+\in}{4}$ لپاره او همدارنګه $17-\in<4x-3<17+3$ صدق کوي.

نو $D=\frac{5.\in}{4}<x<5\frac{5+\in}{4}$ په نتیجه کې د هر x لپاره له D څخه f(x) په N کې شامل دی او که $\in=\frac{1}{2}$ فرض شي.

$$N=\left(17-\frac{1}{8},17+\frac{1}{8}\right)=(16.5.\quad 19.5)\quad D=\left(5-\frac{1}{8},5+\frac{1}{8}\right)=(4.875.5.125)$$

د یوې تابع لمټ ته راجع قضیې

لومړی قضیه: په عمومي ډول د هرې خطي تابع لرو چې $f(x)=mx+b$

$$\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$$

دوهمه قضیه: که $m=0$ وي د $f(x)=mx+b$ خطي تابع لاندې شکل اختیاروي. دې $f(x)=b$ تابع ته ثابته تابع وایي، چې لمټ یې په a کې له b سره مساوي دی. \

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} b=b$$

دریيمه قضیه: که په خطي تابع کې $b=0$ وي او $m=1$ وي $f(x)=x$ تابع کېږي، دې ته د لمټ تابع ویل کېږي. د تابع لمټ د a په نقطه کې عبارت له a څخه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to a} mx = ma \Rightarrow m = 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$$

څلورمه قضیه: که د g.f توابع د a په نقطه کې لمټ ولري، لاندې قضیې صدق کوي.

$$\underset{x\to a}{Lim}\, f(x) = b \qquad \underset{x\to a}{Lim}\, g(x) = c$$

د توابعو د جمعې د حاصل لمټ له مجموعي لمټونوسره مساوي دی.

$$\underset{x\to a}{Lim}(f+g)(x) = \underset{x\to a}{Lim}\, f(x) + \underset{x\to a}{Lim}\, g(x) = b + c$$

$$\underset{x\to a}{Lim}(f-g)(x) = \underset{x\to a}{Lim}\, f(x) - Lim(g(x) = b - c$$

پنځمه قضیه: په یوه نقطه کې د ضرب د حاصل لمټ مساوي دی په یوه نقطه کې د لیمټونو له ضرب سره

$$\underset{x\to a}{Lim}(f.g)(x) = \underset{x\to a}{Lim}\, f(x).\underset{x\to a}{Lim}\, g(x) = b.c$$

شپږمه قضیه: په یوه نقطه د خارج قسمت لمټ مساوي دی، د خارج قسمت لمټ د لمټونو په هغه نقطه کې په دې شرط چې $\underset{x\to a}{Lim}\, g(x) \neq 0$ وي

$$\underset{x\to a}{Lim}\, f(x)$$

$$\underset{a\to x}{Lim}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\underset{x\to a}{Lim}\, f(x)}{\underset{x\to a}{Lim}\, g(x)} = \frac{b}{a}$$

اوومه قضیه: که لمټ $\underset{x\to a}{Lim}\, f(x) = b$ او μ یو ثابت عدد وي، د تابع لمټ په هغه نقطه کې ضرب ثابت عدد دی.

$$\underset{x\to a}{Lim}(\mu f(x)) = \mu.\underset{x\to a}{Lim}\, f(x) = \mu.b$$

اتمه قضیه: د یوې جذري تابع لمټ په یوه نقطه کې مساوي د لمټ د جذر د هغه تابع په هغه نقطه کې که $\underset{x\to a}{Lim}\, f(x) = b$ وي یعنې

$$\underset{x\to a}{Lim}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\underset{x\to a}{Lim}(f(x)} = \sqrt[n]{b}$$

که چېرې $\sqrt[n]{b}$ موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د $\lim\limits_{x\leftarrow 4}\sqrt{x+5}$ لمټ پیدا کړئ!

$$Lim\sqrt{x+5}=\sqrt{Lim(x+5)}=\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$$

نهمه قضیه: که $Lim\frac{x^n-a^n}{x-a}=n_a^{n-1}$ وي نظر د مطابقتونو قانون ته لرو:

$$\lim_{x\to a} x^n-a^n=\lim_{x\to a}(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}\cdot a+x^{n-3}\cdot a^2+........+a^{n-1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot a+a^{n-3}\cdot a^2+....+a^{n-1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}\cdot a+a^{n-3}+a^2.........+a^{n-1}=a^{n-1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a}(a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}\cdot a+a^{n-1}+.........+a^{n-1}=n_a^{n-1}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n_a^{n-1}$$

مثال: د $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^5-2^5}{x-2}$ پیداکړئ

حل: فورمول ته په کتو لرو، چې: $\lim\limits_{n\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^5-2^5}{x-a}=5.2^4=80$$

مثال: $\lim\limits_{x\to a}(x^3+5x^2-3x+7)$ پیداکړئ، که چېرې $x\to a$ ته تقرب وکړي

$$\lim_{x\to a}(x^a+5x^2-3x+7)=2^2+5\cdot 2^2-3\cdot 2+7$$
$$=8+20-6+7=29$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: لاندې لمټ پیدا کړئ $\lim\limits_{x\to a}\frac{5x^3-6x^2-6x+2}{2x^2+3x-12}$

حل:

$$f(x)=5x^3+6x^2-6x+2$$
$$g(x)=2x^2-3x-12$$
$$\lim_{x\to a} f(x)=f(2)$$
$$\lim_{x\to 2} \quad g(x)=g(2)$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)}=\frac{f(2)}{g(2)}=$$
$$\Rightarrow\frac{5\cdot(2^3)-6(2^3)-6.2+}{2.(2^2)+3.2-12}=\frac{40-24-12+2}{8+6-12}=\frac{6}{2}$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to 2}\frac{5x^3-6x^2-6x+2}{2x^2+3x-12}=3$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ وي، ثبوت کړئ.

حل: فرض کوو چې $\in>0$ د δ عدد موجود دی داسې چې

$$\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|\angle\in$$

کله چې $|x-3|<\in$ وي، د δ اندازه د $\in$ له جنسه لاسته راوړو

$$\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|\angle\in$$
$$\Rightarrow x+3-6\angle\in\Rightarrow|x-3|\angle\in$$

داسې چې δ مساوي دی له $\in$ سره، اوس د $\angle\in$ $|$ -6 $|x^2-9|$ $|x-3|\angle\delta=x^2-9|$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6 \Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=6$$
$$\Rightarrow x+3=6 \Rightarrow 3+3=6 \Rightarrow 6=6$$

مثال: $\lim_{x\to 3}\left(x^3-3x+\frac{2}{x}\right)$ پيداکړئ.

حل:

$$F(x)=\left(x^2-3x+\frac{2}{x}\right) \Rightarrow F(x)=\frac{x^3-3x^2+2}{x}$$
$$\Rightarrow F(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow \lim_{x\to 3}F(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\lim h(x)}$$
$$=\frac{g(3)}{h(3)}=\frac{(3^3)-3(3^2)+2}{3}=\frac{27-27+2}{3}=\frac{2}{3}$$

مثال: $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$ پيداکړئ.

حل: $f(x)$ يو ه ناطقه تابع ده، يعنې $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$

دا چې $x\to 4$ صفر کېږي ا و 4 د f د تعريف په ناحيه کې شامل نه دی او $x\neq 4$ لاسته يې راوړو.

$$\lim_{x\to 4}F(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-3)(x+4)}{x-4}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=8$$

بې نهايت د تابع د لمټ په حيث

ويل کېږي، چې $\lim_{x\to 4}f(x)=\alpha$ که د خپلې خوښې Mڅخه لوی د هر عدد لپاره د δ مثبت پيدا شوی وي، داسې چې له $\in|x-a|$ غير مساوات څخه $\in|x-a|$ غير مساوات په لاس راځي لکه $\lim_{x\to 4}(x)=\alpha \Rightarrow M>0,\delta>0$ داسې چې $|x-a|<\delta \Rightarrow |F(x)|>M$

دلته دې شکل ته اوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱- هر کله چې f(x)>M وي $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = a$ دی.

۲- هر کله چې f(x)>M وي $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -a$ دی

مثال: پيدا کړئ چې $\lim\limits_{x\to a}\frac{2x+1}{x} = 2$ دی

حل: د $\in > 0$ عدد لپاره فرض کوو، چې $\left|\frac{2x+1}{x} - 2\right| < \in$

$$\Rightarrow \left|\frac{2x}{x} + \frac{1}{x} - 2\right| < \in \Rightarrow \left|2 + \frac{1}{x} - \right| < \in$$

$$= \left|\frac{1}{x}\right| < \in \Rightarrow x > \frac{1}{\in}$$

که د $N = \frac{1}{\in}$ لپاره شرط دی $\lim\limits_{x\leftarrow a}\frac{2x+1}{x} = 2$ سم دی.

مثال: $\lim\limits_{x\leftarrow a}\frac{x^2+2x}{x^2}$ محاسبه کړئ.

حل:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to a}\frac{x^2(1+2/x)}{x^2} = \lim_{x\to a}(1+2/x)$$

$$\lim_{x\to a} 1 + \lim_{x\to a}(2/x) = 1 + 0 = 1$$

مثال: په داسې حال کې چې $\lim\limits_{x\to a} 2(x) = \alpha, \lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$ پيداکړئ.

يعنې: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x^2} = \infty$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x} = \infty$ وي.

حل:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1-x^2}}{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1-x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(1-x)(1+x)}\cdot\frac{1-x}{x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+x^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $F(x)=\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x}$ وي او $2(x)=\lim_{x\to1}=\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x^2}$ وي داسې حل کېږي.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{2(x)}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{x}{1}-x}{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to1}\frac{x}{1-x}\cdot1-x^2$$

$$\lim_{x\leftarrow1}x(1+x)=1+1=2$$

مثال: $\lim_{x\to a}(2-x^2)=-a,\lim_{x\to1}(x^2+5)=a$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a}\left[\left(x^2+5\right)+\left(2-x^2\right)\right]=\lim_{x\to a}(5+2)=7$$

د لمټ محاسبه او ځینې مبهم حالات

د لمټونو په محاسبه کې د ضرب د حاصل مجموعه او ځینې وخت د توابعو نسبت د مبهمو شکلونو $\infty-\infty,\infty-\infty,0-\infty,\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0}$ سره مخامخ کېږو، چې ځینې حالتونه یې په لاندې ډول دي.

۱- **په $\frac{0}{0}$ حالت کې:** که $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ $\frac{0}{0}$ ولرو، داسې چې F(x) ، g(x) پولینومي توابع وي، په صورت او مخرج کې یې مشترک فکتور (x-a) دی.

او په بعضو حالاتو کې کېدای شي مضاعف او یا څو ځلي وي.

لومړی مثال-

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-2}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{2-2}=\frac{2}{0}=\infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h^2)-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{(x+h^2)-x^2}{h}=2x$$

مثال: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$ پیدا کړئ!

حل: دا چې x=2 د $\frac{0}{0}$ شکل اختیاروي، د لمټ د پیدا کولو لپاره د تابع صورت او مخرج د صورت او مخرج په مزدوج کې ضربوو، لرو چې:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-\sqrt{x+2})(x+\sqrt{x+2})(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-(x+2)(\sqrt{4x+1}+3)(\sqrt{4x+1}+3)}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(x+\sqrt{x+2})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x+\sqrt{x+2})}=\lim_{x\to 2}\frac{(2+1)(\sqrt{4.2+1}+3)}{4(2+\sqrt{2+2})}=$$

$$=\frac{(3)(\sqrt{9}+3)}{4(2+2)}=\frac{3.\overset{3}{\cancel{6}}}{4.\underset{2}{\cancel{4}}}=\frac{9}{8}$$

۲- $\frac{\infty}{\infty}$ **حالت:** کله چې $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)}{g(x)}$ د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل اختیار کړي، $\frac{F(x)}{g(x)}=\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{g(x)}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حالت کې د $\frac{\infty}{\infty}$ شکل ته بدلېږي. د دې طریقې په پیروۍ سره کولی شو ابهام رفع کړو؛ خو کېدای شي ځینې وخت سخت مثال هم آسانه حل شي. په دې حالت کې د کسر صورت او مخرج همزمان د متحول په لوړ طاقت تقسیموو، ابهام له منځه ځي، په دې شرط چې $\frac{\infty}{\infty}$ حالت د دوو توابعو په نسبت کې، چې له دې جملې څخه په پولینوم کې ښکاره شي.

مثال: هغه لمیتونه چې $\frac{\infty}{\infty}$ حالت لري، غواړو څو مثالونه یې د نمونې په شکل حل کړو.

$$a)\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+4}{x^2-12x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2})}{x^2(1-\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}}=\frac{3-,+0}{1-0+0}=\frac{3}{1}=3$$

دویم مثال:

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+5}{6x+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(8+\frac{5}{x})}{x(6+\sqrt{\frac{x}{x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{5}{x}}{6+\sqrt{\frac{x}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{5}{x}}{6+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x8+\frac{5}{x}}{x(6+\sqrt{\frac{x}{x.x}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{5}{x}}{6+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

درېیم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-x+5}{\sqrt{9x^4+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(9-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^2\sqrt{9+\frac{1}{x^4}}}=$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$$

څلورم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+3}{x^2-8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{x^2(1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$$

۳- درېیم حالت $(0\quad\infty)$ **:**

$\lim_{x\to a}\{F(x).g(x)\}$ ممکنه ده په $0.\infty$ شکل وي، په دې حالت کې لمټ $F(x)\,g(x)=\dfrac{F(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ د $\dfrac{0}{0}$ شکل اختیاروي، موږ لاندې مثالونه د نمونې په شکل حل کوو.

مثال:

$$\lim_{x\to5}\left[(x^2-25).\frac{1}{x-5}\right]=\lim_{x\to5}\frac{x^2-25}{x-5}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}=\lim_{x\to5}(x+5)=5+5+10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال:

$$\lim_{x\to 4}\left[\left(x^2-16.\right)\frac{1}{x-4}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=8$$

دریيم مثال: $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}$ مقدار محاسبه کړئ!

که $x=y^5$ او $a=b^5$ فرض کړو، لرو چې:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{a}}{x-a}=\lim_{x\to b}\frac{y-b}{y^5-b^5}=\lim_{x\to b}\frac{y-b}{(y-b)(y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{1}{y^4+y^3b+y^2b^2+yb^3+b^4}=\frac{1}{5b^4}=\frac{1}{5.\sqrt[5]{a^4}}$$

4- $\infty-\infty$:

که $\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]$ د $\infty-\infty$ شکل ولري.

په دې حالت کې $f(x)-g(x)=f(x)(1-\frac{g(x)}{f(x)})$ یو له دغو $\frac{\infty}{\infty}$ او یا $\infty-0$ حالاتو ته اوړي، باید یاده شي، چې که د دوو کسرونو د تفاضل حالت او یا د جذرونو د تفاضل شکل اختیار کړي، د یو بل څخه د کسرونو د تفریق کولو، په مزدوجونو باندې د جذري افادو ضرب او تقسیم په نتیجه کې ابهام د حذف قابل وي.

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x+1}-\sqrt[5]{x}$ لمټ محاسبه کړئ!

حل:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})$ پیدا کړئ!

$$\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^2})=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{1-x^2}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^5-8x^3)=\lim_{x\to\infty}[x^5(1-\frac{8}{x^2})]=\infty.1=\infty$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x+1}$ لمټ پیدا کړئ!

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x+1})(x+\sqrt{x^2+5x+1})}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-5x-1}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x-1}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}\Longrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x(-5-\frac{1}{x})}{x+\sqrt{x^2+5x+1}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x(-5-\frac{1}{x})}{x(1+\sqrt{x^2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}})}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5-\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-5}{1+1}=-\frac{5}{2}$$

پنځم مثال: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{x+1})$ پیدا کړئ!

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-x+1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}=\frac{-1}{\infty}=0$$

بې نهایت د لمټ په حیث په بې نهایت کې

دا چې $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ دی، که د هر لوی او M مثبت عدد لپاره د N یو مثبت عدد وټاکل شي، داسې چې د $|x|>N$ غیر مساوات څخه د $|f(x)|>M$ غیر مساوات لاس ته راشي، په سمبولیک شکل داسې لیکو.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow M>0, N>0/|x|>N\Rightarrow f(x)<M$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورتنيو تشېحاتو کې څلور حالته مطرح کېږي، چې عبارت دي له:

$$1)x > N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$2)x < -N : f(xM < -M \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$3)x < -N : f(x) > M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$4)x > N : f(x) < -M \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

د توابعو محدوديت

1- f(x) تابع په يوه نقطه کې محدوده نومېږي، څکه چې $|f(x)|$ قيمتونه د M له يوه ټاکلي عدد څخه لوېدلی شي، يعنې $|f(x)| \le M$.

2- f(x) تابع کله چې $x \to a$ محدوده وي، که په يوه (a-f,a+f) مجاورت کې د a څخه محدوده وي.

3- f(x) تابع د $x \to \infty$ لپاره محدوده ده، که د N مثبت عدد موجود کړی شي، د هر x لپاره د $|x| > N$ تابع f(x) محدوده ده ، لکه f(x)=cosx په IR کې محدوده ده او $g(x) = \frac{x+1}{x}$ تابع د $x \to \infty$ لپاره محدوده ده.

بې نهايت کوچنۍ توابع

د d(x) تابع په $x \to a$ کې بې نهايت کوچنۍ نومېږي، که $\lim_{x\to a} d(x) = 0$ وي.

۱: د دې لپاره چې $\lim_{x\to a} d(x) = b$ وي، لازمه او کافي ده، چې f(x) د b ثابت عدد د مجموعې په حيث او د d(x) بې نهايت کوچنۍ تابع په $x \to a$ وړاندې کېدی شي، يعنې:

$$\left.\begin{matrix} f(x) = b + d(x) \\ \lim_{x\to a} d(x) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = b$$

۲- کله چې d(x) په $x \to a$ کې بې نهايت کوچنۍ وي، چې صفر نه شي؛ نو

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{d(x)} = \infty$$

۳- د بې نهايت کوچنيو توابعو مجموعه بيا هم يوه بې نهايت کوچنۍ تابع ده.

4- د بې نهايت کوچنۍ تابع د ضرب حاصل او محدوده تابع يوه بې نهايت کوچنۍ تابع وي.

۵- هرکله d(x) بې نهايت کوچنۍ او u(x) داسې تابع، چې لمټ يې صفر کېدای نه شي؛ نو $v(x) = \frac{d(x)}{u(x)}$ تابع بې نهايت کوچنۍ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: $d(x)=x^2-4$ تابع بې نهايت کوچنی ده، ځکه چې که $x\to 2$ تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 2}(x^2-4)=4-4=0$$

دويم مثال: $d(x)=x^2-4$ په $x\to 3$ بې نهايت کوچنی ده.

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=(3)^2-9)=9-9=0$$

دربيم مثال: $d(x)=\frac{1}{2x}$ په $x\to\infty$ بې نهايت کوچنی ده.

$$\lim_{x\to\infty} d(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0$$

څلورم مثال: $d(x)=x^3-27$ تابع په داسې حال کې $x\to 3$ $\lim_{x\to 3} d(x)=\lim_{x\to 3}(x^3-27)$ بې نهايت کوچنی ده.

$$\lim_{x\to 3}((3)^3-27)=0$$

۵- $f(x)=\frac{2}{5x^2-6x}$ تابع په $x\to\infty$ بې نهايت کوچنی ده، ځکه چې:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{5x^2-6x}=\frac{2}{\infty}=0$$

د مثلثاتي توابعو لمټ

مخکې له دې چې د مثلثاتي توابعو لمټ تشريح کړو، مثلثاتي توابعو ته په لاندې ډول شرح ورکوو، چې مثلثاتي توابع يې عبارت دي له:

y=sinx

y=cosx

y=tanx

y=cotx

y=secx

y=csex

د دغو توابعو لمټ ، په داسې حال کې چې $x\to 0$ وي، په لاندې ډول يې لاس ته راوړو.

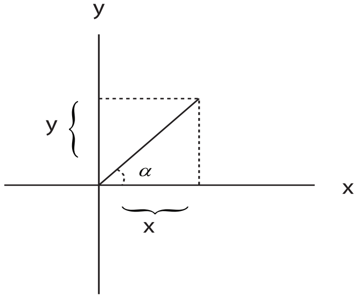
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1)\ \lim_{x\to 0} \sin x = '$$
$$2)\ \lim_{x\to 0} \cos x = 1'$$
$$3)\ \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$
$$4)\ \lim_{x\to 0} \cot x = \infty'$$
$$5)\ \lim_{x\to 0} \sec x = 1'$$
$$6)\ \lim_{x\to 0} csex = \infty$$

د مثلثاتي نسبتونو تعريف

کله چې α زاويه په ستندرد حالت کې د (x,y) اختياري نقطه د دويمې ضلعې د دغې زاويې غير د مبداء څخه وي او وروسته $r=\sqrt{x^2+y^2}$ مساحت د (0,0) او (x,y) نقطو تر مينځ وي، د α زاويې مثلثاتي نسبتونه عبارت دي له:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}' \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\tan x = \frac{y}{x}' \qquad \cot\alpha = \frac{x}{y}$$
$$\sec x = \frac{r}{x}' \qquad \cos s\alpha = \frac{r}{y}$$



(۸) شکل

$$\tan\alpha = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{x}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وویل شي، چې په پورته ځلور ګونو حالاتو کې مخرجونه صفر نه وي، اساسي رابطه د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ په لاندې ډول ده.

$$\sec\alpha = \frac{r}{x} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\cos e\ \alpha = \frac{r}{y} = \frac{\frac{r}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2}$$

دا چې $x^2+y^2=r^2$ دی، په پورته معادله کې یې د هغه په ځای وضع کوو.

$$\sin^2\alpha = \cos^2\alpha = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2}$$

همدا ډول $1+\cot^2\alpha = \cos c^2\alpha$ په لاس راځي.

د مثلثاتي توابعو لمټ

د مثلثاتي توابعو د لمټ په محاسبه کې امکان لري، چې د ابهام حالت منځته راشي، په دا ډول لمټ کې د ابهام له مختلفو شکلونو څخه مهم شکل $\frac{0}{0}$ دی او دا حالت د یوه عمده فکتور د تشخیص په واسطه، چې د $\sin x$ نسبت او د x زاویه ده رفع کړو، موږ په مثلثاتو کې د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ توابع پیژنو، کله چې x صفر ته نږدې کېږي د $\sin x$ تابع صفر ته تقرب کوي، یعنې $\lim_{x\to0}\sin x = 0$، چې دا د $y=\sin x$ ګراف په شکل ښه درک کولای شو. (۱)شکل

په همدې ترتیب کله چې x د (۱) خواته تقرب وکړي، یعنې $\lim_{x\to0}\cos x = 1$، په (۲) شکل کې د cosx ګراف په ښه ډول سره ښیو، معلومېږي چې د y قیمت په صفري نقطه کې له یوه سره مساوي دی. شکل (2)

قضیه:

کله چې د x زاویه د صفر خواته تقرب کوي، د sin او x نسبت د 1 خواته تقرب کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to D}\frac{\sin x}{x}=1$$

ثبوت: د x زاویه لکه څنګه چې $0<x<\frac{\Pi}{2}$ ده، د r له شعاع سره مرکزي زاویه په نظر کې نیسو، لکه د (۴) شکل، د دوو $\overset{\Delta}{OAM},\overset{\Delta}{OAC}$ مثلثونو مساحتونه د OAM قطاع د ذکر شوې دایرې سره مقایسه کوو، لرو چې:

(۴)شکل

د $<OAC$ مثلث مساحت، د $<OAM$ قطاع مساحت، د OAM مثلث مساحت او همدارنګه د مثلثونو او قطاع مساحت په ځانګړې ډول محاسبه کوو، لرو چې:

د مثلث مساحت OAM $=\frac{1}{}\overline{OA}\cdot\overline{BM}=\frac{1}{}r\cdot\overline{BM}$

د قطاع مساحت OAM $=\frac{1}{2}xr^2$

د مثلث مساحت OAC $=\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{AC}=\frac{1}{2}r\cdot\overline{AC}$

بنا پر دې د (4) شکل د مضاعفونو تساوي لاندې شکلونه اختیاروي:

$$=\frac{1}{2}r\overline{BM}<\frac{1}{2}xr^2<\frac{1}{2}r\overline{AC}\text{..............}2$$

د 2 رابطې اطراف په $\frac{2}{r^2}$ کې ضربوو، اخرنې نامساوات لاندې شکل ځانته اختیاروي.

$$\frac{2}{r^2}\cdot\frac{1}{2}r\cdot\overline{BM}<\frac{2}{r^2}\cdot\frac{1}{2}xr^2<\frac{1}{2}r\overline{AC}\frac{2}{r^2}\Rightarrow\frac{\overline{BM}}{r}<x<\frac{\overline{AC}}{r}$$

دا چې $\frac{\overline{BM}}{r}=\sin x$ او $\frac{\overline{AC}}{r}=\tan x$ دی، د دې پر ځای په پورتنۍ رابطه کې وضع کوو.

$$\sin x<x<\tan x$$

$$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$$

ټول پورتني حدونه په sinx تقسیموو، لرو چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ټول حدونه معکوسوو

$$1 > \frac{\sin x}{\cos x} < \cos x$$

$$\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

د ټولو حدونو لمټ اخلو، ګورو چې:

فلهذا په نتیجه کې

لومړی مثال: $\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ وکړي.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x} = (\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x})(\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}) = 1 \cdot 1 = 1$$

دویم مثال: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ وکړي.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}(1+\cos x) = 1+1 = 2$$

دریم مثال: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ وکړي.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a \cdot x)}{x}$ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب وکړي.

حل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(a \cdot x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a \cdot \sin(a \cdot x)}{ax} = a \lim_{x\to 0} \frac{\sin(a \cdot x)}{ax} = a \cdot 1 = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin(a \cdot x)}{ax} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: $\frac{1-\cos x}{x^2}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x \to 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2})(\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)})=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

شپږم مثال: $\lim\frac{\sin 8x}{x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x\to 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot\sin 8x}{8x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}=8\cdot 1=8$$

یا په بل عبارت، $8x=y$ نیسو او په پورتنۍ معادله کې یې وضع کوو.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\cdot\sin 8x}{8x}=8\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8y}{8y}=8\cdot 1=8$$

اووم مثال: $\lim x\cot x$ لمټ پیدا کړئ، که چېرې $x\to 0$ ته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\cot x=\lim_{x\to 0}x\frac{\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=\lim c\cos x\cdot\lim\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=1\cdot 1=1$$

اتم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 6x}{x}=$ پیدا کړئ.

حل: کوښښ کوو چې یو ضربي عامل د $\frac{\sin y}{y}$ په شکل لاسته راوړو، صورت او مخرج په 6 کې ضربوو، $6x=y$ وضع کوو، لرو چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 6x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{6\cdot 5\cdot\sin 6x}{6x}=30\lim\frac{\sin 6x}{6x}=30\lim\frac{\sin 6y}{6y}=$$

$$=30\cdot 1=30\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sin 6x}{6x}=30$$

نهم مثال: $\frac{\sin 2x+tagx}{2\tan 3x+\sin x}$ لمټ محاسبه کړئ، که چېرې $x\to 0$ ته تقرب کړی وي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\tan x}{2\tan 3x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{x\sin x}{x\cos x}}{3x\frac{2\tan 3x}{3x}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{(x\frac{\sin^2 x}{2x}+\frac{\sin x}{x\cos x})}{(x\frac{6\tan 3x}{3x}+\frac{\sin x}{x})}=$$

$$\lim\frac{(2\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x})}{(2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})}=\frac{2+1\frac{1}{1}}{6\cdot 1\frac{1}{1}+1}=\frac{3}{7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي څپرکي پوښتنې

د لاندې توابعو لمټ محاسبه کړئ؟

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=?$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}-x=?$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}=?$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}=?$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-1}=?$

6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=?$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x})=?$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2 3ax+2a^2}{x^2-2ax-3a^2}=?$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-11+5}{x^2+x}=?$

10) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+\frac{4}{x})=?$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=?$

12) $Lim(\sqrt{x\ +a}-\sqrt{x}\ =?$

13) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x}=?$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ +4}{x^2+x}=?$

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x}+4=?$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-h}{h}=?$

د لاندې توابعو لمټ په لاس راوړئ؟

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\tan 8x}{\tan 2x}=?$

2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=?$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 x}=?$

4) $Lim\frac{8\sin 5x}{x}=?$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin a}{x-a}=?$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{a^2}=?$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=?$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(12x)}{\sin(4x)}=?$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 8x}{tna2x}=?$

10) $\lim\limits_{b\to 1}\frac{\sin(b^2-1)}{b^2-1}=?$

11) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})=?$

12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=?$

13) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin 3\pi x}=?$

14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=?$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos y}{y\cdot\sin y}=?$

16) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\tan^2 2x}=?$

17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6-6\cos^2 y}{y^2}=?$

18) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$

19) $\lim\limits_{x\to 0}(8x\cot g4x)=?$

20) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{4x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

مشتق

ټولیزه موخه:
د مشتق او دهغه اصول پیژندل، همدارنګه د مثلثاتي او لوګارتمي توابعو له مشتقاتو سره آشناییږ.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای ته رسولو سره به محصلین په لاندې برخو کې پوره پوهه ترلاسه کړي:

۱- د مشتق تعریف او د هغې د اړوندو پوښتنو حل.
۲- د مشتق قواعد او اصول په صحیح ډول پېژندل او له هغې څخه د ګټې اخیستنې طریقه.
۳- د مثلثاتي توابعو د مشتقاتو تعریف او د هغې د اصولو او قواعدو پېژندل.
٤- د لوګارتمي توابعو مشتقاتو تعریف، قواعد او د مشتق نیولو د اصولو پېژندل.
۵- د دویمو او له هغې څخه د لوړو مشتقاتو پېژندل او د هغې د اړوندو پوښتنو حل کول.

د اوولسمې پېړۍ په لومړیو کې د پیر فرما فرانسوي ریاضي پوه اسحق نیوتن (انګلیسي) ولایپ نیتزد (الماني) په واسطه د مشتق بنسټ کېښودل شو، چې نن ورځ د ډېرو مهمو او اساسي اقتصادي مسایلو، تفاضلي حساب او انتیګرال اړوند معاصرې ریاضي او نور د مشتق د مفهوم په اساس رامنځته شوي دي او دا چې مشتق یو ډېر اوږد بحث دی؛ نو کوښښ کوو، چې په واضح ډول یې وڅېړو کړو.

د مشتق تعریف: د Y تابع په متحول کې د نسبي تغیر پیدا کول د یو وارد شوي تغیر په اساس په یو مستقل متحول کې، یعنې $y = f(x)$. او که د x متحول قیمت تغیر وکړي؛ نو د وارد شوي تغیر پیدا کول په نسبي شکل د Y تابع په متحول کې په $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ شکل سره ښودل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت مشتق عبارت دی د تابع د تزايد لمېټ د مستقل متحول پرتزايد باندې، که چېرې د مستقل متحول تزايد د صفرخواته تقرب کوي.

يعنې $\lim_{x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}$ وکړي. بايد يادونه وشي چې د مشتق د ښودلو لپاره د تابع د پاسه يو زور نوشته کوو، يعنې د $f'(x)$ د $f(x)$ مشتق او $g(x)$ د $g(x)$ مشتق او $d'(x)$ د $d(x)$ او $h'(x)$ د $h(x)$ مشتق وي دا چې په يوه نقطه کې د تابع مشتق په شکل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ يا $\frac{dy}{dx}$ په عمومي صورت د تابع مشتق په $f'(x)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ شکل ليکو.

مثال: $f(x)=x^2$ مشتق پيداکړئ!

$$f'(x)'' \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$

حل:

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=a+a=2a$$

مثال: د $y=3x^2-5$ تابع د ګراف ميل په $(2,0)$ نقطه کې پيداکړئ!

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(3(2+h)^2-5-(3(2)^2-5)}{h}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(3(4+4h+h^2)-5)-(3(4)-5)}{h}=$$

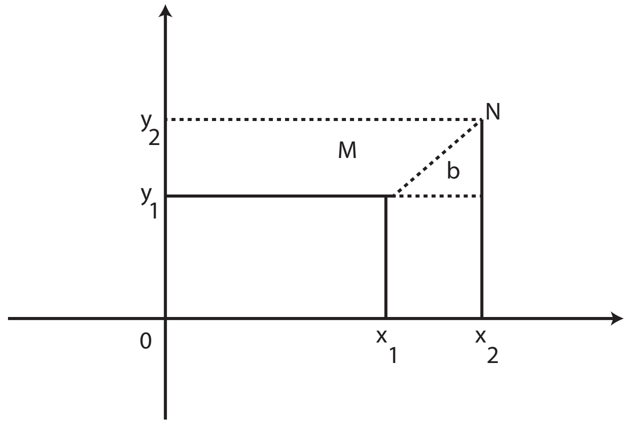
$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(12+12h+3h^2-5)-12+5)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{12h+3h^2}{h}$$

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{(12+3h)}{h}=\lim_{h\to 0}(12+3h)=12$$

د هندسي مشتق تعريف

د تابع د مماس ميل په يوه مشخصه نقطه کې، د تابع له مشتق څخه په هماغه نقطه کې عبارت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



فرض کوو چې د $y = f(x)$ تابع منحني رسم شوی، چې د منحني لومړی نقطه دM وي، دا نقطه د مستقل متحول ارزښت ox_1 او د تابع د متحول ارزښت oy_1 نومېږي، چې د مستقل متحول د تغیر په اثر x_1 او x_2 له M نقطې دویمې نقطې N ته تغیر خوري چې په هغې نقطه کې تابع د y_2 ارزش اختیاروي، په نتیجه کې د تابع مشتق $y = f(x)$ دی او په یوه مشخصه نقطه کې د منحني د مماس میل پیداکول، چې M نقطه وي او که N نقطه M نقطې ته نیږدي کړو او د هغې لمټ په یوه نیږدې فاصله کې M نقطې ته تقرب ورکړو، د هغې د میلان د تغیر درجه په لاندې ډول په لاس راوړو.

$$\cos = \frac{MA}{MN} =, \sin b = \frac{AN}{MN}$$

$$\tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MN} \cdot \frac{MN}{MA} = \frac{AN}{MA}$$

$$\tan b = \frac{AN}{MA} \Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

یا

$$\Rightarrow \tan b = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m'$$

د مشتق اقتصادي تعریف

مشتق له نهایي کمیت څخه عبارت دی، که یو مجموعي کمیت ور کړ شوی وي لکه د مجموعي عاید تابع، مجموعي لګښت، مجموعي تولید، مجموعي سپما، مجموعي سرمایه ګزاري، مجموعي صادرات او واردات او نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لنډه توګه وايو چې د تابع اول مشتق عبارت له نهايي عايد او نهايي لګښت، نهايي سپما، نهايي پانګې اچونې، صادراتو او وارداتو څخه وي، د لاندې مثالونو مشتق له لمټ نه په ګټه اخيستو پيدا کړئ!

لومړی مثال-

$$y = 3x$$
$$y' = ?$$

دواړه خواوې په Δx تقسيموو.

دا چې $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$ دی نو

$$\Delta y + y = 3(x+\Delta) \Rightarrow \Delta y = 3(x+\Delta x) - y$$
$$\Rightarrow \Delta y = 3x + 3\Delta x - 3x = 3\Delta x \Rightarrow \Delta y = 3\Delta x$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3\Delta r}{\Delta r}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \Rightarrow y' = 3$$

دويم مثال- $f(x) = x^3$ وي $f'(x)$ پيداکړئ.

$$f'(x) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} \Rightarrow f'(x) = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^2+ax+a^2)}{x-a}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{x\to a}(x^2+ax+a^2) = (a^2+a\cdot a+a^2)$$
$$f'(x) = (a^2+a^2+a^2) = 3a^2$$
$$f'(x) = 3a^2$$

د مشتق الجبري تعريف

هر کله چې په $y = f(x)$ تابع کې د x متحول د h په اندازه او يا Δx تزايد وکړي، ذکر شوې تابع $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ زياتوالی متحول کېږي او د تابع او متحول د زياتوالي نسبت عبارت دی له:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که چېرې د x لمټ د صفر خواته تقرب وکړي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

که وجود ولري ويلای شو چې ذکر شوې تابع د x په نقطه کې د مشتق لرونکې ده، چې لمټ په پورته رابطه کې نيول شوی دی، د مشتق نيونې عمليه ورته وايي يعنې د $y = f(x)$ تابع مشتق په لاندې ډول ښېږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y' = f'(x)$ یا $\frac{dy}{d(x)} = \frac{df(x)}{dx}$ او یا $DY = Df(x)$

یا په لاندې شکل ښودل کېږي:

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

او یا په بل عبارت:

$$y' = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

او په اخره معادله کې د f(x) تابع مشتق په لاندې ډول هم تعریفوو.

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

او همدارنګه د f(x) مشتق په $x = x_0$ کې عبارت دی له:

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

مثال:- د $f(x) = x^4$ تابع مشتق دارنګه لاسته راوړو:

$$f'(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

حل: فورمول ته په کتو لرو چې:

$$f(x+h) = (x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h}$$

$$= \lim_{x \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3$$

مثال:- د $f(x) = 4x - x^2$ تابع د ګراف میل په $p(2,-2)$ نقطه کې پیداکړئ!

حل: د x قیمت په p نقطه کې عبارت له 2 دی او میل په m ښیو.

$$m \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(2+h) - (2+h^2) - 4 \cdot 2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8 + 4h - (4 + 4h + h^2) - 8 + 4}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{4h - (4 + 4h + h^2)4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h - 4 - 4h - h^2 + 4}{h} = \lim_{h \to 0} (-h) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال:- د $f(x)=4x-x^2$ تابع د ګراف میل په $p(3,-3)$ نقطه کې پیدا کړئ؟

$$m\ \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(-3)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4(3+h)-(3+h^2)-4\cdot 3-3^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{9+4h-(9+6h+h^2)-(4\cdot 3+3^2)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{12+4h-9-6h-h^2-12+9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-6h-h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(4-6-h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}(-2-h)=-2$$

د مشتق د پیداکولو قاعدې

د مشتق د سوالونو او مثالونو د اسانه حل کولو په خاطرکولای شو له فورمول او د مشتق له قواعدو نه ګټه واخلو او د هغې سوالونه په سمه توګه تر بررسۍ لاندې ونیسو.

(۱) قاعده: د ثابتې تابع مشتق صفر دی.

لومړۍ قاعده:

فرضاً $f(x)=C$ یوه ثابته تابع وي؛ نو $f'(x)=0$ دی یعنې $(C\in R)$.

ثبوت: $f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ او C یو ثابت عدد دی(تزاید یا تناقص) نه لري او h مقدار خلاف د صفر $x\to 0$ کړی یعنې:

$$f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{C-C}{h}\Rightarrow f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{0}{h}=0$$

مثال:- د $f(x)=20$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{20-20}{h}=0\Rightarrow f'(x)=0$$

دویمه قاعده:

د عینیت تابع مشتق(۱) یو دی.

هر کله چې $f(x)=x$ تابع وي؛ نو $f'(x)=1$ دی

ثبوت:

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+h)-x}{h}\lim\frac{h}{h}=1\Rightarrow f'(x)=1$$

نوټ: تابع په $x=0$ کې د مشتق نیونې وړ نه وي، په داسې حال کې چې دا تابع په صفر کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

درېیمه قاعده:

د $f'(x)=x^n$ تابع مشتق د $(n\in jn)$ لپاره عبارت له $f'(x)=nx^{n-1}$ ځخه وي.

فلهذا د طاقت لرونکې تابع مشتق مساوي دی، توان ضرب د تابع او له توان نه یو کمېږي.

ثبوت:

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n$$
$$=x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2+.....+h^n-x^n$$
$$f(x+h)-f(x)=nx^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}nx^{n-2}h^2+.....+h^n$$

د رابطې دواړه خواوې په h تقسیموو لرو چې:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n-1nx^{n-2}h^2)}{2}}{h}+........+h^n$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{n(n-1)xn}{21}+........+h^{n-1}$$
$$f'(x)\lim\frac{f(x+h)}{h}=\underset{h\to 0}{Lim}(nx^{n-1}\frac{n(n-1)}{21}xh+........+h^{n-1}$$
$$\Rightarrow f(x+h)=nx^{n-1} \quad \text{یا} \quad (x^n)'=nx^{n-1}$$

مثال:- د $f(x)=4x-x^2$ تابع مشتق پیداکړئ!

$$f(x)=x^{12}$$
$$f'(x)=12\cdot x^n$$
$$2)\,f(x)=x^{20}\Rightarrow f'(x)=20x^{19}$$

مثال:-د $y=\sqrt{x}$ تابع مشتق درېیمې قاعدې ته په کتو لاسته راوړئ!

$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}\Rightarrow(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$$

مثال:- د $y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ تابع مشتق په لاس راوړئ!

$$y=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}y=x^{-\frac{1}{4}}\Rightarrow y'=(x^{-\frac{1}{4}})'=\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}\Rightarrow y'=-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}\Rightarrow y'=-\frac{1}{4\cdot x\sqrt[4]{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورمه قاعده:

د يوې تابع او د يوه ثابت عدد د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د تابع مشتق ضرب له هغه ثابت عدد

سره هر کله چې f يوه تابع او k يو ثابت عدد وي مشتق: $[kf(x)]=kf'(x)$

$$[kf(x)]\lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{k[f(x+h)-kf(x)]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}k\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\cdot f'(x)$$

مثال:- د $3)f(x)=8\cdot x^{12}$ $\quad 2)f(x)=7\cdot x^{6}$ $\quad f(x)=12x^{8}$ توابعو مشتق په لاس راوړی.

$$a)f(x)=8\cdot x^{8}$$

$$f'(x)=8\cdot x^{12-1}=96x^{11}$$

$$\Rightarrow f9x)=96x^{11}$$

$$b)f(x)=7x^{6}\Rightarrow f'(x)=7\cdot(x^{6})'$$

$$f(x)=7(6x^{6-1})=7(6x^{5})'=42x^{5}$$

$$c)f(x)=12x^{8}$$

$$f(x)=12(x^{8})=12(8x^{7})=96x^{7}$$

$$\Rightarrow f(x)=96x^{7}$$

پنځمه قاعده:

د توابعو مجموعي مشتق مساوي دی د توابعو د مشتقونو له مجموعې سره، هر کله چې د $u(x)$ او $v(x)$ توابع ولرو؛ نو $(u+v)'=u'+v'$ ثبوت لرو چې:

$$[u(v)+v(x)]'=\lim_{h\to 0}\frac{\{u(x+h)+v(x+h)\}-\{u(x)+v(x)\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}=u'(x)+v'(x)\Rightarrow(u+v)'=u'+v'$$

مثال د توابعو د مجموعي مشتق $v(x)=10x+89,u(x)=4x^{2}+5x$ پيداکړئ!

حل:

$$[u(x)+v(x)]'=u'(x)+v'(x)$$

$$[u(x)+v(x)]'=(4x^{2}+5x)'+(10x+8)'=8x+5+10=8x+15$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادښت: هر کله چې $y=u+v+w$ تابع وي او هره یوه برخه د تابع د x تابع وي د دا رنګه توابعو مشتق عبارت دی له: $y'=u'+v'+w'$

مثال:هر کله چې $y=15x^6+2x^5+4x^3+4$ تابع د نوموړو توابعو مشتق لاسته راوړئ!

حل:

$$y'=u'+v'+w'$$

$$y=15x^6+2x^5+4x^3+4$$

$$y'=90x^5+10x^4+12x^2$$

شپږمه قاعده:

د دوه توابعو د ضرب د حاصل مشتق مساوي دی د مضرب مشتق ضرب مضروب فیه جمع د جمعي مشتق د مضروب فیه د مضروب سره.

هر کله چې $u(x)$ او $v(x)$ توابع ولرو نو:

$$y'=u'+v'+w'$$

$$(u(x),v(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

ثبوت:

که چېرې $v(x+h)(u(x))$ هم جمع او هم تفریق کړو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)v(x)}{h}+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h-v(x)}{h}y(x)+u(x)\lim_{h\to 0}+u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]$$

$$\Rightarrow u'(x)v(x)++u(x)y'(x)$$

مثال:- که زموږ تابع لاندې شکل ولري:

$$y=(8x^3+3x^2+5)(2x^2+4x)$$

$$y'=u'+v'+w'$$

$$u'=24x^2+6x$$

$$v'=4x+4$$

$$f'(x)=(24x^2+6x)(2x^2+4x)(4x+4)(8x^3+3x^2+5)$$

$$f'(x)=48x^4+96x^3+12x^3+24x^2+32x^4+12x^3+20x+12x^3+32x^3+12x^2+20$$

$$f'(x)=80x^4+152x^3+36x^2+20x+20$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال – هر کله چې د $y=(3x^2+2x)(7x^3+8)$ وي $y'(x)$ مشتق یې پیداکړئ!

حل:

$$y'=(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
$$u'=6x+2$$
$$v'=21x^2$$
$$y'(x)=(6x+2)(7x^3+8)(21x^2)(3x^2+2x)$$
$$y'(x)=42x^4+48x+14x^3+16+63x^4+42x^3$$
$$y'(x)=105x^4+56x^3+48x+16$$

اوومه قاعده:

د کسري تابع مشتق عبارت دی د صورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع

هر کله چې د $u(x)$ او $v(x)$ توابع ورکړل شوي وي؛ نو:

$$(\frac{u}{v})'=\frac{u'v+v'u}{v^2}$$

$$(\frac{u}{v})'=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{h}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{v(x+h)(v(x))-u(x)(v(x+h))}{v(x+h)v(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}=$$

پورته $u(x)$ او $v(x)$ هم جمع او هم منفي شوي، په رابطه کوم تغیر نه دی راغلی او همدارنګه صورت او مخرج په h تقسیموو لاندې شکل نیسي.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)-u(x)\frac{v(x)-v(x)}{h}}{\frac{v(x+h)v(x)h}{h}}=$$

او په نتیجه کې

$$=\frac{v(x)\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{\lim v(x+h)v(x)}=$$

$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر کله چې $u(x)$ او $v(x)$ توابع ورکړل شوې وي نو:

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$(\frac{u}{v})' \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

مثال:- هر کله چې $y = \frac{10x^4 + 5x^2}{2x^6 - 4x}$ تابع وي مشتق يې پيداکړئ؟

حل: دا چې $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$ دی. $v(x) = 2x^6 + 4x,\ \ (x) = 10x^4 + 5x^2$ هغه په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$f'(x)(\frac{u}{v})' = \frac{u'v + v'u}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(40x^3 + 10x)(2x^6 - 4x) - (10x^4 + 5x^2)(12x^5 - 4)}{(2x^6 - 4x)^2} =$$

$$f'(x) = \frac{(80x^9 - 40x^7 - 20x^7 - 40x^2) - 120x^9 + 40x^4 - 40x^4 - 60x^7 + 20x^2)}{(2x^6 - 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2} \Rightarrow y' = \frac{-40x^9 - 40x^7 - 120x^4 - 20x^2}{(2x^6 - 4x)^2}$$

دويم مثال- د $y = \frac{1}{x^4}$ تابع مشتق پيداکړئ؟

حل: که $u(x) = 1$ او $v(x) = x^4$ وضع شي نظر اوومې قاعدې ته لرو چې:

$$y' = (\frac{u(x)}{v(x)})' = \frac{(1)'}{(x^4)} = \frac{0x^2 - 4x^3 \cdot 1}{(x^4)^2} = \frac{-4x^3}{x^8} \Rightarrow y' = -\frac{4}{x^5}$$

اتمه قاعده

هر کله چې v,u او w توابع د مشتق نيونې وړ وي لرو چې:

$$(uvw)'[u(v \cdot w)]' = u'(v \cdot w) + u(vw)'$$

$$= u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'$$

$$\Rightarrow (uvw)' = u'v \cdot w + uv'w + uvw'$$

مثال:- د $y = (2x^2 + 2x)(x^2 - 4)(3x^2 + x)$ توابعو مشتق پيداکړئ؟

حل: اتمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(uvw)' = u'v\cdot w + uv'w + uvw'$$
$$y' = (4x+2)(x^2-4)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(2x)(3x^2+x) + (2x^2+2x)(x^2-4)(6x-1)$$
$$y' = (4x^3-8x+2x^2-8x)(3x^2+x) + (4x^3+4x^2)(3x^2+x) + (2x^4-8x^2+2x^3-8x)(6x-1)$$
$$y' = (12x^5+4x^3-24x^2-8x^2+4x^2+6x^4+2x^3-24x^2+2x^3-8x+12x^5+4x^4$$
$$+12x^4+4x^3+12x^5+2x^4-48x^3-8x^2+12x^4+2x^3-48x^2-8x$$
$$\Rightarrow y' = 36x^5+40x^4-64x^3-88x^2-16x$$

نهمه قاعده:

هر کله چې u تابع د مشتق نیونې وړ وي او c هم ثابت عدد(ثابته تابع) وي نو:

$$(cu)' = c'u + cu' = 0\cdot u + cu' = cu' \Rightarrow (cu)' = cu'$$

لومړی مثال:- د $y = (24)(2x^3+5x)$ توابعو مشتق پیداکړئ؟

حل: داچې $u = 2x^3+5x$ او $c = 24$ دی او مشتق یې $u = 6x^2+5$ او c=0 دی په معادله کې وضع کوو.

$$y' = (cu)' = (c)'(u) + c(u)'$$
$$y' = (cu)' = y' = (24)'(2x^3+5x) + (24)(2x^3+5x) = 0(2x^3+5x) + 24(6x^2+5)$$
$$y' = 0 + 144x^2 + 120 \Rightarrow y' = (cu)' = 144x^2 + 120$$

لسمه قاعده:

د مرکبو توابعو مشتق(تابع تابع) د مرکبې تابع مشتق مساوي دی عمومي مشتق ضرب داخلي مشتق دی.

فرضا $(fog)(x)$ یوه مرکبه تابع ده ثبوتوو چې:

ثبوت:

$$[fog(x)]' = [f(g(x)]'$$
$$= f'(g(x)\cdot g'(x)$$
$$[f(g(x)]' = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+h) - f(g(x)}{h}$$

اوس x+h په x' شیو؛ نو $h = x' - x$ کېږي

$$\lim_{x'\to x}\frac{f(g(x)+h)' - f(g(x)}{x'-x}$$

حل: صورت او مخرج په $g(x') - g(x)$ ضربوو لرو چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x'\to x}\frac{f(g(x))'-f(g(x)}{x'-x}\cdot\frac{g(x')-g(x)}{g(x')-g(x)}=$$
$$\lim_{x'\to x}\frac{f(g(x')\;-f(g(x)}{g(x')-g(x)}\cdot\frac{g(x')-g(x)}{x'-x}=$$
$$\lim_{g(x')\to g(x)}\frac{f(g(x')\;-f(g(x)}{g(x')-g(x)}\cdot\lim_{x'\to x}\frac{g(x')-g(x)}{x'-x}$$
$$\Rightarrow[f(g(x)]'=f'(g(x)\;\cdot g'(x)$$

مثال:- د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$f'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$f'(x)=8(x^5+4)^{8-1}(5x^{5-1})$$
$$f'(x)=8(+4)^7\cdot5x^4=40(x^5+4)^7\cdot x^4$$

دویم مثال:- د $g(x)\dfrac{1}{(x^3-4x^2+2)^4}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$g(x)\frac{1}{(x^3-4x^2+2)^4}=(x^3-4x^2+2)^{-4}$$
$$g'(x)=-4(x^3-4x^2+2)^{-4-1}\cdot(3x^2-8x)$$
$$g'(x)=-4(x^3-4x^2+2)^{-5}\cdot(3x^2-8x)$$
$$g'(x)=\frac{-4(3x^2-8x)}{(x^3-4x^2+2)^5}=\frac{-12x^2+32x}{(x^3-4x^2+2)^5}$$
$$\Rightarrow g'(x)=\frac{-12x^2+32x}{(x^3-4x^2+2)^5}$$

دریيم مثال:- د $f(x)=\sqrt{x^3+2}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$f(x)=\sqrt{x^3+2}=(x^3+2)^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow[f(g(x)\;]'=f'(g(x)\;\cdot g'(x)$$
$$f'(g)=\frac{1}{2}(x^3+2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(3x^2)=\frac{1}{2}(x^3+2)^{\frac{1}{2}}\cdot(3x^2)$$
$$f'(g)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2}{(x^3+2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{x^3+2}}$$
$$\Rightarrow f'(g)=\frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{x^3+2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو مشتق

د مثلثاتي توابعو مشتق عبارت دی له:

$$1)\frac{d}{dx}(\sin x)=(\sin x)'=\cos x$$

$$2)\frac{d}{dx}(\cos x)=(\cos x)'=\sin x$$

$$3)\frac{d}{dx}(\tan x)=(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$4)\frac{d}{dx}(\cot x)=(\cot x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\cos^2 x$$

$$5)\frac{d}{dx}\sec(x)=(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$$

$$6)\frac{d}{dx}(\sec x)=(\sec x)'=-\cos x\cdot\csc x$$

$$1)\frac{d}{dx}(\sin x)=(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{x+h}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}\cdot\lim\cos(x+\frac{h}{2})$$

$$(\sin x)'=1\cdot\cos x\Rightarrow(\sin x)'=\cos x$$

$$2)(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+h}{2}\sin\frac{x+h+x}{2}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h/2}{h/2}\cdot\lim\cos(x+\frac{h}{2})=-1\cdot\sin x=-\sin x$$

$$3)\frac{d}{dx})(\tan x)=(\tan x)'=(\frac{\sin x}{\cos x})'=\frac{(\sin x)'-\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x(\sin x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

$$4)\frac{d}{dx}(\tan x)=(\cot x)'=(\frac{\cos x}{\sin x})=\frac{(\cos x)'\sin x-\cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot=\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=$$

$$=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x\Rightarrow(\cot x)'=-\csc^2 x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$5)\ \frac{d}{dx}\sec x = (\sec x0' = (\frac{1}{\cos x})' = \frac{0\cdot\cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{-(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x\cdot\cos x} = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x\cdot\tan x \Rightarrow (\sec x)' = \sec x\cdot\tan x$$

$$6)\ \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cdot\cot x$$

$$(\csc x)' = \left[\frac{1}{\sin x}\right] = \frac{0\cdot\cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin x\cdot\sin x} =$$

$$= -\csc x\cdot\cot x \Rightarrow (\csc x)' = -\csc x\cdot\cot x$$

لومړی مثال:- د $y = \frac{x^2}{\cos x}$ تابع مشتق پیداکړئ؟

$$y' = \frac{(x^2)'\cos x - (\cos x')x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x - 1(\sin x)x^2}{\cos^2 x} = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{2x\cos x + x^2\sin x}{\cos^2 x}$$

دویم مثال:- د $y = x^4\sin x$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

$$y = (x^4)'\sin x + (x^4)(\sin x)' = 4x^3\sin + x^4\cos x$$

$$\Rightarrow y' = 4x^3\sin + x^4\cos x$$

دریېم مثال:- $y = \sin\frac{\pi x}{180}$ مشتق یې محاسبه کړئ؟

حل: هر کله چې $f(x)\sin x$ او $g(x) = \sin\frac{\pi x}{180}$ وضع کړو او y لاندې قیمت اختیاروي.

$$y = f(g(x) \Rightarrow y' = f'(g(x)\cdot g'(x)$$

$$y' = (\sin x)'(g(x)\cdot(\frac{\pi}{180}x)' = \cos\frac{\pi}{180}x\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}$$

څلورم مثال- د $y = \cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق محاسبه کړئ؟

حل: که f(x)cos او $g(x) = \cos\frac{\pi x}{180}$ وضع کړو.

$$y = f(g(x) \Leftrightarrow y' = f'(g(x)).g'(x)$$

$$y' = (\cos)'(\frac{\pi}{180}x).(\frac{\pi}{180}x) = -\sin(\frac{\pi}{180}x)\ \frac{\pi}{180}$$

$$y' = -\frac{\pi}{180}\sin\frac{\pi x}{180}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال:- د $y=\cos^2 2x$ تابع مشتق پیداکړئ!

حل: لسمې قاعدې ته په کتو لرو چې:

$$(f(g(x)))'=f'(g(x)).g'(x)$$
$$(\cos^2 2x)'=2\cos(2x).\cos(2x)'=2\cos(2x)(-2\sin(2x))2$$
$$(\cos^2 2x)'\Rightarrow=-4\cos 2x.\sin 2x$$

شپږم مثال:- د y=cos(6x-4) تابع مشتق پیداکړئ!

$$y'(\cos(6x-4))'=-\sin(6x-4).(6x-4)$$
$$=-\sin(6x-4)\ 6$$
$$\Rightarrow y'=-6\sin(6x-4)$$

اووم مثال:- د y=sin(4x-1) تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$(\sin(4x-1))'=\cos(4x-1).(4x-1)'=\cos(4x-1)4=4\cos(4x-1)$$
$$\Rightarrow(\sin(4x-1))'=4\cos(4x-1)$$

اتم مثال:- د y=secx.cotx تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$y'=(\sec x.\cot anx)'=(\sec x)\ \cot inx+(\cot x)'\sec$$
$$=(\sec x.\tan x)(\cot x+(-\cos^2 x)\sec x$$
$$=\sec x-\cos^2 x.\sec x$$
$$=\sec x(1-\cos^2 x)$$

د لوګارتمي توابعو مشتق

د لوګارتمي تابع مشتق $y=\log_a^x$ عبارت دی له $y'=\frac{1}{x}\log_a^e$ داچې په پورته فورمول کې a کولای شي هر قیمت غوره کړي او e عبارت ده له $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ او یا $\lim_{x\to0}(1+a)^{\frac{1}{a}}=e$ او e یو غیر ناطق ثابت عدد دی او قیمت یې عبارت دی له

e =2,7182818284599045……

او اوس د $y=Log_a^x$ تابع مشتق پیداکوو چې $(Log_a^x)'=\frac{1}{x}Log_a^e$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت:

$$(Log_a^x)' = \lim_{x\to 0}\frac{Log(x+h)-\log_a^x}{h} = \lim_{x\to 0}[\frac{1}{h}Log_a\frac{x+h}{x}]$$

$$\frac{1}{x}\lim_{x\to 0}[\frac{x}{h}Log_a(1+\frac{h}{x})] = \frac{1}{x}\lim_{x\to 0}Log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{a\to 0}\log_a(1+a)^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{x}Log_a^e$$

$$\Rightarrow (Log_a^x)' = \frac{1}{x}Log_a^e$$

دا چې $\frac{h}{x}=a$ فرض کوو.

یا په بل عبارت زنځیري قاعدې ته په کتو $f'(x)=f'(u).u'(x)$ که چېرې $f(x)=Loab^{u(x)}$ غواړو لرو $f'(x)=\frac{1}{u(x)}\log_a^e.u'(x)$ دی که چېرې $u=x$ وي $f(x)Log_e^x$ مساوي په $f'(x)=\frac{1}{x}$ سره دی.

نتیجه: د پورته فرمول ثبوت دارنګه تشریح کوو چې:

۱- هر کله چې a=e وي که چېرې $\log_a^e=\log_a^e=1$ دی یعنې:

$$(Lnx)'=(Log_a^e)'=\frac{1}{x}Log_a^e=\frac{1}{x}.1=\frac{1}{x}\Rightarrow (Lnx)'=\frac{1}{x}$$

۲-هر کله چې a=10 وي که چېرې $Log_a^x=Log_{10}^x$ لیکلای شو او د هغې مشتق اخیستلای شو داسې چې:

$$Log_a^x)'=(Log_{10}^x)'=\frac{1}{x}Log_{10}^e=\frac{1}{x}.Loge$$

$$\Rightarrow=(Logx)'=\frac{1}{x}Loge$$

لومړی مثال:- د f(x)=Log(4x+2) تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل: په دې ځای کې u(x)=4x+2 او $u'(x)=4$ نو

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}Log_e\frac{4}{4x+2}\Rightarrow\frac{4}{4x+2}Log_e=f'(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توان لرونکو توابعو مشتق:

د $y=a^x$ توابعو مشتق دارنګه محاسبه کوو:

$y=a^x$ دواړو خواوو ته مشتق نیسو $Lny = xLna$

دواړو خواو ته مشتق نیسو $\frac{y'}{y} = Lna$

$\Rightarrow y' = y.Lna = a^x.Lna \Rightarrow y' = a^x.Lna$

دویم مثال- لاندې مشتقات محاسبه کړئ!

$a) f(x) = Log5x$

$b) g(x) = Ln(x^2+1)$

$c) f(x) = Ln(x^3+x^2)$

$d) f(x) = Ln(\cos 3x)$

حل:

$a) f(x) = Log5x$

په دې ځای کې u(x)=5x او $u'(x)$ نظر فورمول ته لرو چې:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.Loge = \frac{5}{5x}Loge = \frac{Loge}{x}$$

$b) g(x) = Ln(x^2+1)$

$c) f(x) = Ln(x^3+x^2)$

حل: $u(x) = x^2+1$ او $u'(x) = 2x$ فورمول ته په کتو لرو چې:

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.Lne = \frac{2x}{x^2+1}Lne = \frac{2x}{x^2+1}$$

داچې $Lne = 1$ دی.

حل:

داچې:

$u'(x)3x^2+2x, u(x) = x^3+x^2$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.Lne = \frac{3x^3+2x}{x^3+x^2}Lne = \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{x(x^2+2x)} = \frac{x+2}{x^2+x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$d) f(x) = Ln(\cos 3x)$$

$$u'(x) = -3\sin 3x, u(x) = \cos 3x$$

$$g'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-3\sin 3x}{\cos 3x} = -3\tan 3x$$

که $y = Lpg_e^{u^x}$ تابع موجوده وي که چېرې u=f(x) وي مشتق يې عبارت دی له:

$$y = Log_e^{u^n} = (Log_e^{u^n})' = \frac{n.u^{n-1}.u'}{v^n} = \frac{nu'}{u}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{nu'}{u}$$

مثال: د لاندې معادلې مشتق پيداکړئ:

$$y = Log(10x^3.5x^2 + 6x)^2$$

$$u = 10x^3.5x^2 + 6x$$

$$u'(x) = 30x^2 + 10x + 6$$

$$y'(x) = \frac{n.u'u^{n-1}.}{v^n} = \frac{nu'}{u} =$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)(10x^3.5x^2 + 6x)}{(10x^3.5x^2 + 6x)^2} = \frac{60x^2 + 20x + 12}{(10x^3.5x^2 + 6x)^2}$$

$$y'(x) = \frac{2(30x^2 + 10x + 6)}{2(5x^3 + 2.5x^2 + 3x)^2} = \frac{30x^2 + 10x + 6}{5x^3 + 2.5x^2 + 3x}$$

د ضمني توابعو مشتق

هر کله چې د x اوy متحولين د y=f(x) را بطې پواسطه له يو بل سره رابطه ولري، په دې صورت کې y صريح تابع د x متحول ده، ولې ممکنه ده چې د y, x تر منځ ارتباط د f(x,y)=0 رابطې پواسطه معين يا ټاکلی وي، په دې حالت کې ويل کېږي، چې y ضمني تابع د x وي لکه $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ معادله چې دوه صريح تابع $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ او $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ افاده کوي او پورته معادله د ذکر شويو توابعو ضمني حالت دی .د ضمني توابعو د مشتق پيداکولو په خاطر y نظر x متحول ته د ټاکلې معادلې دواړو خواوته نظر x ته مشتق نيسو، داسې چې y متحول د x ترلې تابع فرض کېږي او په نهايت کې د y تابع مشتق نظر x متحول ته عبارت دی له:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)}{f'(y)}$$

که y ثابت فرض شي $f'(x)$ د f مشتق نظر x متحول ته دی، که x ثابت فرض شي $f'(y)$ د f مشتق نظر y متحول دی.

مثال: د y مشتق نظر x ته له $x^2+y^2-r^2=0$ ضمني تابع په لاس راوړئ!

حل:

$$(x^2+y^2-r^2)'=2x+2yy'=0$$

$$\Rightarrow 2yy'=-2x \Rightarrow y'=-\frac{2x}{2y} \Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$$

دويم مثال-

$$y^6-y-x^2=0$$

$$(y^6-y-x^2)'=6y^5y'-y'-2x=0$$

$$\Rightarrow 6y^5y'-y'=2x \Rightarrow y'(6y^5-1)=2x \Rightarrow y'=\frac{2x}{6y^5-1}$$

دريم مثال- د $y^4-y-x^2=0$ تابع مشتق پيداکړئ!

$$y^4-y-x^2=0 \Rightarrow (y^4-y'-x^2)=0 \Rightarrow 4y^3y'-y'-2x=0$$

$$\Rightarrow 4y^3y'-y'=2x \Rightarrow y'(-1)=2x \Rightarrow y'=\frac{2x}{4y^3-1}$$

$$\Rightarrow (y^4-y-x^2)'=\frac{2x}{4y^3-1}$$

باید یادونه وشي، چې موږ کولای شو د لوګارتم په وسیله مشتق ګیري وکړو، ځکه په ډېرو مواردو کې د توابعو مشتق له لوګارتم نه په ګټه اخیستو محاسبه کېږي، داسې چې په پیل کې د y=f(x) رابطې دواړو خواوو ته طبیعي لوګارتم نیسو

لرو چې Lny=Lnf(x)

د پورته ذکر شوې رابطې دواړو خواوو ته د ضمني تابع په حیث کولای شو مشتق ونیسو، داسې چې

$$(Lny)'=\frac{1}{y}y' \Rightarrow \frac{y'}{y}=(Lny)' \Rightarrow y'=y(Lny)'$$

$$\Rightarrow y'=f(x).)Lny)'$$

داچې $y=f(x)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه طریقه:

$$(Lnf(x))'\frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f'(x) = f(x).(Lnf(x))'$$

لومړی مثال: د $y = x^{2x}$ مشتق د لوګارتم په مرسته محاسبه کړئ!

حل:

$$y = x^{2x}$$
$$Lny = Lnx^{2x} \Rightarrow Lny = 2x.Lnx$$
$$(Lny)' = (2Lnx)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = 2Lnx + 2x.\frac{1}{x}$$
$$y' = y(2Lnx + 2) \Rightarrow y' = 2(Lnx + 1)\, y$$
$$y' = 2(Lnx + 1)x^{2x}$$

داچې $y = x^{2x}$ په پورته معادله کې وضع کوو.

دویم مثال- د $y = v^{u}$ تابع مشتق لاسته راوړئ.

حل:

$$y = v^{u} \Rightarrow Lny = Lnv^{u} \Rightarrow (Lny)' = (uL.nv)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = u'Lnv + u(Lnv)'$$
$$\Rightarrow (u'Lnv + u\frac{v'}{v'})y$$
$$y' = (u'Lnv + u\frac{v'}{v})v^{u}$$

د نسبتي توابعو مشتق د مشتق متحول

کله چې زموږ تابع یوه نسبتي تابع ورکړل شوې وي او د هغې مشتق پیداکوو، د مشتق د پیداکولو لپاره له لاندې قاعدې څخه ګټه اخلو.

۱- که $y = \frac{1}{x}$ تابع ورکړل شوې وي، مشتق یې عبارت دی له:

ثبوت:

$$y'(x) = -\frac{1}{x^{2}}$$
$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y = x^{-1}$$
$$y'(x) = -1 \cdot x^{-1-1}$$
$$y'(x) = -x^{-2} \Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x^{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲-که تابع $y=\frac{1}{x^n}$ شکل ولري، مشتق يې عبارت دی له:

$$y=\frac{1}{x^n}$$

$$y'=\frac{-n}{x^{n+1}}$$

لومړی مثال: د $y=\frac{1}{x^{10}}$ تابع مشتق پیدا کړئ!

$$y=\frac{1}{x^{10}}=x^{-10} \qquad y'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$$

$$y'(x)=-10x^{-10-1} \Rightarrow y'(x)=-10x^{-11}$$

$$\Rightarrow y'(x)=\frac{-10}{x^{11}}$$

۳-که تابع $y=\frac{1}{(x^3+2x^2+6)}$ وي د دارنګه توابعو مشتق عبارت دی له:

حل:

$$y=\frac{1}{u} \Rightarrow y'=\frac{-u}{x^{n+1}}$$

$$y=\frac{1}{(x^3+2x^3+6)} \Rightarrow y'=\frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^3+6)^2}$$

٤- هر کله چې $y=\frac{1}{x^n}$ تابع وي، د هغو توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y'(x)=\frac{-nu'}{u^{n+1}}$$

مثال: د $y=\frac{1}{(x^3+2x^2+6)}$ تابع مشتق محاسبه کړئ!

حل:

$$y=\frac{1}{(4x^5+6x^2+12)^{12}}$$

$$u=(4x^5+6x^2+12)$$

$$u'(x)=20x^4+12x$$

$$y'(x)=\frac{-nu}{u^{n+1}}$$

$$y'(x)=\frac{-12(20x^4+12x)}{(4x^5+6x^2+12)^{13}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقات او له هغې پورته

په پورته مثالونو کې مونږ يواځې د ورکړل شوو توابعو اول مشتق د مشتق نيونې له روشونو نه په ګټه اخيستو او د هغو د قاعدو په کارونې خپل سوالونه حل کړي او اوس د دويم مشتق دپيداکولو لپاره او له هغې پورته هم له قاعدو څخه چې په پورته ذکر شوو توابعو کې د مشتق نيونې په خاطر ترې ګټه اخيستل شوې وه هم دګټې اخيستو وړ ګرځي، داسې چې مخکې ذکر شوي د تابع اول مشتق ورکړل شوی وي، د مربوطه منحني په ميلان کې له تغير نه ګټه اخيستل شوې او د دويم مشتق څخه د مربوطه منحني په ميلان کې ګټه اخلو او په ورکړل شوې تابع کې دويم مشتق د تغير درجه ښيي.

د مثال په توګه: که يوه توليدي تابع ورکړل شوې وي د دې تابع لومړی مشتق په مجموعي توليد کې نسبي تغير ښيي، چې د نهايي توليد يا مؤلديت په نوم يادېږي او د ذکر شوې تابع دويم مشتق په مؤلديت کې زياتوالی ښيي.

$y = 4x^2 + 12x$

$y' = 8x + 12$

$y' = 8$

د $y = 4x^2 + 12x$ تابع د مشتق غوندې يې محاسبه کړئ!

او همدارنګه بايد وويل شي چې د يوې تابع مشتق د يوې نوې تابع په حيث کېدای شي د مشتق نيونې وړ وي، د تابع د مشتق مشتق دوېمه مرتبه مشتق نومېږي او په همدې ډول تابع کېدای شي څو ځلې او حتی لايتناهي ځلې د مشتق نيونې وړ وي او دارنګه مشتقات په لاندې ډول ښودل کېږي.

تابع	y = f(x)
لومړی مشتق	$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$
دويم مشتق	$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$
دريیم مشتق	$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$
n ام مشتق	$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لاندې توابعو اول، دویم، درېیم او څلورم مشتق لاسته راوړئ!

$$a)\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$y'' = 6ax + 2b$$
$$y''' = 6a$$
$$y^{(4)} = 0$$
$$b)\ y = 2x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 2x + 12$$
$$y' = 8x^3 + 15x^2 + 12 + 2$$
$$y'' = 24x^2 + 30x + 12$$
$$y''' = 8x + 30$$
$$y^{(4)} = 48$$
$$y^{(5)} = 0$$
$$c)\ \begin{cases} y = \sin x, y' = \cos x \\ y'' = -\sin x, y''' = -\cos x \\ y^{(4)} = \sin,... \end{cases}$$
$$c)\ y = 6x^5 + 4x^3 + 5x^2 + 10x + 6$$
$$y' = 30x^4 + 12x^2 + 10x + 10$$
$$y = 120x^3 + 12x^2 + 10$$
$$y'' = 360x^2 + 24x$$
$$y^{(4)} = 36x^2 + 24$$
$$y^{(5)} = 720x$$
$$y^{(6)} = 0$$

د دویمو او له هغې نه د پورته مشتق قواعد هر کله چې د u او v توابع د n ام ځلې مشتقاتو لرونکې وي نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1)(\lambda u(x))^{(n)} = \lambda u^{n}(x)$$
$$2)(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + (v)^{n}$$
$$3)(u.v)' = uv' + v'u$$
$$4)(u.v)'' = u''v + 2u'v' + uv''$$
$$5)(u.v)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$$
$$6)(u.v)^{(4)} = u^{(4)}v + 4u'''v + 6u''v'' + 4u'v''' + uv^{(4)}$$
$$(u.v)^{(n)} = u^{(n)}v + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} u^{n-1}v' + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} u^{n-2}v'' + \begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} u^{n-3}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

مثال: دویم مشتق له $y = e^{\alpha}.x^2$ تابع څخه په لاس راوړئ!

$$y = e^{ax}.x^2$$
$$y' = (e^{ax})'.x^2 + e^{ax}(x^2)^2 = ae^{ax}.x^2 + 2e^{ax}.x$$
$$y'' = (e^{ax})''.x^2 + 2(e^{ax})'.(x^2)' + e^{ax}(x^2)''$$
$$y'' = a^2e^{ax}.x^2 + 4ae^{ax}x + 2e^{ax}$$
$$\Rightarrow y = e^{ax}.x^2 \Rightarrow y'' = a^2e^{ax}.x^2 + 4ae^{ax} + 2e^{ax}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويم څپرکي پوښتنې

له قاعدو نه په ګټه اخيستو سره د لاندې توابعو مشتق پيداکړئ!

1) $f(x) = x^4$
2) $f(x) = 3x + 4$
3) $y = \frac{1}{x^{10}}$
4) $y = \sqrt{x}$
5) $f(x)\frac{1}{8}x^8 + 3x^4 - 8$
6) $f(x) = 2x^5 - 8x^3$

له تعريف نه په ګټه اخيستو د لاندې توابعو مشتق لاسته راوړئ!

7) $y = 2x^3 + 4$
8) $f(x) = x^3 - 9$
9) $h(x) = x^4$ $\quad h'(x) = ?$
10) $f(x) = 4x^2 - 6$
11) $f(x) = \frac{1}{x}$
12) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
13) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

د لاندې الجبري توابعو مشتق په لاس راوړئ!

14) $y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
15) $y = x^4 + 3x^2$
16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
17) $y = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$
18) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
19) $y = \sqrt{6x + 8}$

د مثلثاتي توابعو مشتقات لاسته راوړئ!

20) $\mathrm{y = 2sinx - 3cosx}$
21) $\mathrm{y = 4cos^2x}$
22) $\mathrm{y = 2sin^3x}$
23) $\mathrm{y = tanx + cotx}$
24) $\mathrm{y = 2xtanx}$
25) $\mathrm{y = 2xcotx}$
26) $y = Logx$
27) $y = Log(3x + 1)$
28) $y = Ln(x^3 + x^2)$

د لاندې توابعو مشتق د لوګارتم په مرسته پيداکړئ!

29) $y = x^{x^3}$
30) $y = x^{\sin x}$
31) $y = (1 + x)^3(2x + 1)^2(9x - 9)$
32) $y = L0g(\sin 3x)$
33) $y = Log4x$
34) $y = Ln(x^2 + 2)$
35) $4x^3 + 4x^2$
36) $y = 5x^2 + 6x$
37) $y = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 5x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریيم څپرکی

قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نیونه

ټولیزه موخه
لوستونکي به په سمه توگه قسمي، ترکيبي او کلي مشتق نیونه درک کړي او له اصولو او قواعدو به سمه ګټه واخلي.

د زده کړې موخې: د دې څپرکي په پای کې به لوستونکي:
۱-مشتق تعریف او اړونده سوالونه حل کړای شي.
۲- قسمي مشتقات تعریف او قواعد یې درک کړي.
۳- دویم قسمي مشتقات تعریف او قواعد یې درک کړي.
٤- کلي مشتقات تعریف او د هغې مربوطه سوالونه حل کړي.
٥- له قسمي، دویم قسمي مشتقاتو نه ګټه اخیستل او د مشتقاتو حل به لوستونکي درک کړي او د هغې په کارونه به پوه شي.

قسمي مشتقات

څو متحوله تابع او قسمي مشتقات د اقتصادي رياضي له مهمو او اساسي مسايلوڅخه دي، تر اوسه مو د توابعو مفاهیم، لمټ او مشتق مطالعه کړل، چې یواځې د یو مستقل متحول لرونکي وو، یعنې توابعو په عمومي توګه $y=f(x)$ شکل درلود.
د دارنګه توابعو د مشتق له قیمت نه په ګټه اخیستو یا یو د مشتق له قواعدو څخه ګټه اخلو مشتق یې پیداکوو او اوس هغه توابع تر مطالعې لاندې نیسو، چې امکان لري په ځینو حالاتو کې یو تابع د یوه ترلي متحول د دوه او یا څو مستقلو متحولونو په عوض وي، یعنې $u=f(x,y)$ او$u=f(x,y,z)$ او نور چې دارنګه تابع دوه متحوله، درې متحوله او نور نومېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلاً:

$$1)\ z = 4x + 6y - 10$$

$$2)\ z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$3)\ u = 2x^2 - y^2 + xyz + 3z^2$$

$$4)\ z = f(x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n)$$

د (۱) او (۲) سوالونو په اړه د z تابع دوه متحوله او ۳ د u تابع درې متحوله او ۴ مثال باید وویل شي، چې په دې ځای کې z د تابع متحول $(x_1, x_2, x_3, x_4 \dots x_n)$ مستقل متحولین وي او د څو متحوله تابع مشتق له متحولینو څخه یوه ته په کتو په داسې حال کې ډېر له هغې څخه ثابت عددونه فرض شي نظر هماغه متحول ته په کتو د تابع د قسمي مشتق په نوم یادېږي او څو متحوله توابع کېدای شي د بیلابېلو مرتبو د قسمي مشتقاتو لرونکې نظر هر مربوط متحول ته وي، داچې د دوه متحوله تابع قسمي مشتقات z=f(x,y)په لاندې ډول لیکو

$$\frac{dz}{dx} = fx(x, y)$$

$$\frac{dz}{dy} = fy(x, y)$$

همدارنګه د z قسمي مشتقات نظر x_1 ته نیسو، نظر x_2 او اخر x_3 پیدا کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx_{1 f(x_1)}} = zx_1 \Rightarrow f(x_1)$$

$$\frac{dz}{dx_{2 f(x_2)}} = zx_2 \frac{dz}{dx_3 f(x_3)} = zx_3$$

لومړی مثال- قسمي مشتقات یې پیداکړئ!

$$z = 6x^2 + 8xy + 6y^2$$

$$\frac{dz}{dx} = 12x + 8y$$

$$\frac{dz}{dy} = 8x9 + 12y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: قسمي مشتق يې پيداکړئ!

$$z = 6x^{12}y^8 + 4x^2y + 24xy^2$$

$$\frac{dz}{d(x)} = zx = 72x^{11}y^8 + 4xy + 24y^2$$

$$\frac{dz}{d(y)} = zy = 48x^{12}y^7 + 4x^2 + 48xy$$

درېيم مثال: قسمي مشتقات يې پيداکړئ چې:

$$z = \frac{4x^2}{3y^2}$$

$$zx = \frac{8x(3y^2) - 0(4x^2)}{(4y^2)^2} = \frac{24xy^2}{16y^4}$$

څلورم مثال:

z = 4x3y3 + 12x2y2 + 4y4

$$\frac{dz}{dx} = zx = 12x^2y^3 + 24xy^4$$

$$\frac{dz}{dy} = zy = 12x^3y^2 + 24x^2y + 16x^3$$

پنځم مثال- د درې متحوله تابع قسمي مشتقات په لاندې ډول دي:

$$u = x^2y^2z + 4x - 2y + z + 6$$

$$\frac{du}{dx} = 2xy^2z + 4$$

$$\frac{du}{dy} = 2x^2yz - 2$$

$$\frac{du}{dz} = x^2y^2 + 1$$

شپږم مثال- د $f(x,y)=x^2y-5xy^2+4xy$ تابع قسمي مشتق په لاندې ډول دي:

$$f(x) = \frac{du}{dx} = 2xy - 5y^2 + 4y$$

$$\frac{df}{\partial y} = f(y) = x^2 - 10xy + 4x$$

دويم قسمي مشتقات او ترکيبي مشتقات

۱-دويم قسمي مشتقات :کله چې وغواړو اول قسمي مشتقونه د دويم ځل لپاره نظر هماغه متحول ته مشتق ونيسو د ذکر شوې تابع قسمي دويم مشتقونه نظر هماغه متحول ته په لاس راځي، دويم قسمي مشتقات په تابع کې له تغير څخه عبارت دي نظر په وارد شوي تغير په مستقل متحول کې يې تر بحث لاندې نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲-ترکیبي مشتقات: که موږ قسمي مشتقات نظر x متحول ته یو ځل بیا نظر y متحول مشتق و نیسو، ویلای شو چې د تابع ترکیبي مشتق په لاس راغلی.

او هر کله چې د f(x,y) تابع په (x,y) نقطه کې له تعریف ناحیې څخه د قسمي مشتقاتو لرونکې وي د $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ مشتقات هم توابع د x او y دي او کېدای شي د لاندې قسمي مشتقاتو لرونکې وي.

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

که f_{xy}, f_{yx} توابع متمادي وي په هغه صورت کې $f_{xy} = f_{yx}$ دی.

لومړی مثال: د لاندې تابع اول قسمي مشتقات، دویم او ترکیبي مشتق پیداکړئ!

$$z = 6x^2 + 8xy - 8y^2$$

$$z_x = 12x + 8y$$

$$z_{xx} = 12x$$

$$z_y = 8x - 16y$$

$$z_{yy} = -16$$

$$z_{xy} = 8$$

$$z_{yx} = 8$$

ترکیبي مشتق

دویم مثال- دوه متحوله تابع $z = x^4y^3 + 3x^2y^2 - 2xy + 2$ محاسبه کړئ!

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3y^3 + 3xy^2 - 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2y^3 + 6y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 12x^3y^2 + 12xy - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^4y^2 + 6xy - 2x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2y + 6x^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 12x^3y^2 + 12xy - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته مثال کې ليدل کېږي چې $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ دی

دریيم مثال- د $z = x^2 y + y^3$ تابع اول او دويم ځلي مشتقات دا رنګه پيداکوو.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x$$

څلورم مثال- فرض کړئ چې د يوې تصدۍ د توليد تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$Q = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$ په پورته تابع کې Q د توليد مجموعي مقدار دی.

وسطي توليد دk په ارتباط

$$\Rightarrow Q = A(\frac{L}{K})^{\frac{3}{4}}$$

$$Q = \frac{Q}{L} Ak^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}} / L =$$

$$= Ak^{\frac{1}{4}}.L^{-1}.L^{\frac{3}{4}} = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{-\frac{1}{4}} = A(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}})$$

$$= A \cdot \frac{k^{\frac{1}{4}}}{L^{\frac{1}{4}}} = A(\frac{K}{L})^{\frac{1}{4}}$$

A د تکنالوجۍ ضريب kد توليد عامل لکه د توليد د وسايلو پانګه د توليد بل عامل، لکه کار او طاقت L اوk نه يواځې د توليد د عواملو نماينده ګي کوي، بلکې د عايد په توزيع کې هم ترې ګټه اخيستل کېږي، لاندې مطالب هدف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱- تولید یا د تولید د عواملو وسطي مؤلدیت.

۲- نهایي تولید یا د تولید د عواملو نهایي تولید.

۳- په تولید کې د تغیر درجه یا د عواملو مؤلدیت.

٤- په نهایي مؤلدیت کې د تغیر درجه یو له عواملو ده، که چېرې په یوه وخت تغیر وکړي.

نوټ:

$$Q = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$$

L= کارګر

K=ماشین

Q= تولید

د لومړي جز ځواب:

$$Q = \frac{Q}{K} = A.k^{\frac{1}{4}}.L^{\frac{3}{4}} \Big/ K =$$

$$= A.k^{\frac{1}{4}}.K^{-1}.L^{\frac{3}{4}} = A.k^{\frac{-3}{4}}.L^{\frac{3}{4}} = A\left(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}}\right)$$

د هغې حل په صفحه مخامخ لیکل شوی.

د L په ارتباط وسطي تولید

۲-نهایي تولید: مخکې له دې چې دویم جز حل کړو، نهایي تولید دا رنګه تعریفوو:

نهایي تولید د مجموعي تولید په مقدار کې له هغه تغیر څخه عبارت دی، چې د یو وا حد تغیر په اثر په مربوطه عامل کې منځ ته راځي، خو که چېرې زیات عوامل ثابت پاتې وي.

د ریاضي له مخې د تولید د تابع له قسمي مشتق څخه عبارت نظر د K په څېر عامل ته که چېرې بل عامل په تابع کې پاتې شوی وي.

یعنې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دریيم جز ځواب.

$$\frac{dQ}{dQ} = Q_k = \frac{1}{4} AK^{\frac{1}{4}-1} . L^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} AK^{-\frac{3}{4}} L^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} A(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{3}{4}}}) = \frac{A}{4}(\frac{L}{K})^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{dQ}{dL} = Q_L = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} . L^{-\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{3}{4} A . K^{\frac{1}{4}} / L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} A(\frac{K}{L})^{\frac{1}{4}}$$

$$Q_K = \frac{1}{4} AK^{\frac{-3}{4}} . L^{\frac{3}{4}}$$

$$Q_{KK} = -\frac{3}{4}(\frac{1}{4}) AK^{\frac{-3}{4}-1} . L^{\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}(\frac{1}{4}) AK^{-\frac{7}{4}} . L^{\frac{3}{4}}$$

$$= -\frac{3}{16} AK^{-\frac{7}{4}} . L^{\frac{3}{4}} = \frac{-3}{16} A(K^{-\frac{7}{4}} . L^{\frac{3}{4}}) = -3AL^{\frac{3}{4}} / 16K^{\frac{7}{4}}$$

$$\Rightarrow Q_{KK} = -\frac{3A}{16}(\frac{L^{\frac{3}{4}}}{K^{\frac{7}{4}}})$$

$$Q_L = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}} . L^{\frac{-1}{4}}$$

$$Q_{LL} = -\frac{1}{4}(\frac{3}{4}) AK^{\frac{1}{4}} . L^{-\frac{1}{4}-1} = -\frac{1}{4}(\frac{3}{4}) AK^{\frac{1}{4}} . L^{-\frac{5}{4}}$$

$$= -\frac{3}{16} AK^{\frac{1}{4}} / L^{\frac{5}{4}}$$

د څلورم جز ځواب

د تابع ترکیبي مشتق دا رنګه پیداکوو، دا چې ترکیبي مشتق مثبت وي په دې دلالت کوي، چې په نهایي مؤلدیت کې تغیر او ټول عوامل د متحول مربوط وي، مثبت دي فلهذا مخ په زیاتېدو دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Q_K = \frac{1}{4} AK^{\frac{-3}{4}}.L^{\frac{3}{4}}$$

$$Q_L = \frac{3}{4} AK^{\frac{1}{4}}L^{\frac{-1}{4}}$$

$$Q_{KL} = (\frac{1}{4})(\frac{3}{4}) AK^{\frac{-3}{4}}.L^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}}.L^{-\frac{1}{4}}$$

$$= 3A\!\!\diagup_{16} AK^{\frac{3}{4}}.L^{\frac{1}{4}}$$

$$Q_{KL} = \frac{1}{4}(\frac{3}{4})K^{\frac{1}{4}-1}.L^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{16} AK^{\frac{-3}{4}}.L^{-\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow = \frac{3A}{16K^{\frac{3}{4}}.L^{\frac{1}{4}}}$$

پنځم مثال- هر کله چې د $Q = 4K^{\frac{1}{3}}.L^{\frac{2}{3}}$ تصدۍ د تولید تابع وي.

١- د K او L عامل وسطي تولید محاسبه کړئ!

٢- نهایي تولید یې محاسبه کړئ!

٣- په تولید کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

٤- په نهایي مؤلدیت کې د تغیر درجه محاسبه کړئ!

د k عامل وسطي تولید $\frac{Q}{K} = 4K^{\frac{1}{3}} L^{\frac{2}{3}}\!\!\diagup_{K}$ = L وسطي تولید عامل

$$= 4K^{\frac{1}{3}}.K^{-1}.L^{2\!\!\diagup_3} = 4K^{\frac{-2}{3}} L^{2\!\!\diagup_3} = 4L^{2\!\!\diagup_3}\!\!\diagup_{K^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Rightarrow = 4(\frac{L}{K})^{\frac{3}{4}}$$

$$= Q\!\!\diagup_L = 4K^{\frac{1}{3}}.L^{\frac{2}{3}}\!\!\diagup_L = 4K^{\frac{1}{3}}L^{-1}L^{\frac{2}{3}}$$

$$= 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-1}{3}} = 4K^{\frac{1}{3}}\!\!\diagup_{L^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow QL = 4(\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویم جز څواب تر کیبي مشتق

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$dQ/dK = 4(\frac{1}{3})K^{\frac{1}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}L^{\frac{2}{3}}/K^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}(\frac{L}{K})^{\frac{2}{3}}$$

$$QK = \frac{4}{3}(\frac{L}{K})^{\frac{2}{3}}$$

$$Q = 4K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$dQ/dL = \frac{2}{3}(4)K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}(K^{\frac{1}{3}}/L^{\frac{+1}{3}}) = \frac{8}{3}(\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow QL = \frac{8}{3}(\frac{K}{L})^{\frac{1}{3}}$$

د دریيم جز څواب

$$QK = \frac{4}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{-\frac{2}{3}}$$

$$QKK = \frac{4}{3}(\frac{-2}{3})K^{\frac{-2}{3}-1}L^{\frac{2}{3}} = -\frac{8}{9}K^{\frac{-5}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKK = -8L^{\frac{2}{3}}/9K^{\frac{5}{3}}$$

$$QLL = \frac{8}{3}(-\frac{1}{3})K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-1}{3}-1} = -\frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{-4}{3}} = -8K^{\frac{1}{3}}/9L^{\frac{4}{3}} = QLL = \frac{-8K^{\frac{1}{3}}}{9L^{\frac{4}{3}}}$$

$$QK = \frac{4}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}}$$

$$QKL = \frac{2}{3}(\frac{4}{3})K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{9}K^{\frac{-2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

$$QL = \frac{8}{3}K^{\frac{1}{3}}.L^{-\frac{1}{3}}$$

$$QLK = \frac{1}{3}(\frac{8}{3})K^{\frac{1}{3}-1}.L^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{-\frac{1}{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وویل شي چې د ترکیبي مشتقونو ضریبونه مثبت دي، فلهذا تابع مخ په زیاتېدو ده.

کلي مشتقات

په قسمي مشتق نیونه کې مو د تابع مشتق، نظر یوه متحول ته نیوه او نور متحولونه مو ثابت فرض کړل.

ولې په کلي مشتق نیونه کې ټول متحولونه په یو وخت تغیر کوي، د مشتق نیونې په مبحث کې مو ولیدل چې که y=f(x) تابع وي.

او د هغې تابع مشتق $dy/dx = f(x)$ شکل لري او که د معادلې دواړه خواوې په dx ضرب کړو معادله لاندې شکل غوره کويdy=f(x)dx چې دا افاده د کلي مشتق مفهوم لري ، کلي مشتق نیونه هغه وخت د بحث وړ کېږي، چې تابع د څو مستقلو متحولینو لرونکې وي او مورږ په خپل ځای کې توابع تر مطالعې لاندې نیسو.

چې د دوه ډوله مستقلو متحولینو لرونکې وي او د دې توابعو کلي مشتق عبارت دی د تابع له قسمي مشتقاتو د ضرب د حاصل له مجموعې سره او د هغې په مربوطه متحول کې د وارد شوي تغیر سره.

فرضاً که تابع لاندې شکل ولري y = f(u v w) چې په هغې کې u,v,w د بل متغیر تابع لکه د x ده، چې مرکبه تابع نومېږي او د دارنګه توابعو مشتق عبارت دی له:

$$y' = f'u.ux + f'v.vx + f'w.wx$$

یا په بل عبارت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}.\frac{\partial v}{dx} + \frac{\partial f}{dw}.\frac{\partial w}{dx}$$

یاپه بل عبارت په اقتصادي مسایلو کې هغه وخت بې نهایت ارزښت لري او په t ښودل کېږي، کولای شو له دې فورمول نه ګټه واخلو، یعنې که u=f(x,y,z) په داسې حال کې چې z,y,x توابع له t متحول څخه

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{dz}.\frac{dz}{dt}$$

او که د مرکبو توابعو مشتق د دوه میانجي مستقل متحولونو لرونکی وي . Z=f(u,v) په داسې حال کې چې u=f(x,y) او v=Q(x,y) وي x,y مستقل وي؛ نو د z تابع مشتقات نظر x اوy متحول ته عبارت دي له:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{dy}=\frac{\partial z}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y}$$

لومړی مثال: د لاندې مرکبې تابع مشتق محاسبه کړئ!

دا چې

$$y=2u^2-4uv-5v^2$$
$$u=2x^2-2x$$
$$v=x^3+x$$
$$u'x=4x-2$$
$$v'x=3x^2+1$$
$$y'=4uu'-4u'v-4uv'-10vv'$$
$$y'=4(2x^2-2x)(4x-2)-4(4x-2)(3x^2+1)$$
$$-4(2x^2-2x)(3x^2+1)-10(x^3+x)(3x^2+1)$$

دویم مثال: وښایئ چې $z=\varphi(x^2+y^2)$ تابع لاندې معادله صدق کوي!

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

حل: د φ تابع (فی) د دوه مستقلو متحولو y.او x د میانجي متحول په واسطه $t=x^2+y^2$ وي نو:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x}=\varphi'(x^2+y^2)2x$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial y}=\varphi'(x^2+y^2)2y$$
$$\Rightarrow y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$\Rightarrow \varphi'(x^2+y^2)2xy-\varphi'(x^2+y^2)2xy=0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

باید یادونه وشي چې اقتصادي ریاضي تر ډېره له پخوا راهسې له اقتصادي مسایلو تولید، عرضه، تقاضا، توزیع، متاع، اجناس، وخت، کار او نورو سره سروکار لري، له دې سببه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو د کلي مشتق د پیداکولو لپاره له لاندې فورمول نه ډېره ګټه اخیستل کېږي او فورمول په لاندې شکل تشریح کوو، فرضاًکه تابع د لاندې شکل لرونکې وي.

$$z = f(x, y)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx}.dx + \frac{dz}{dy}.dy...\text{I}$$

$$dz = zx.dx + zy.dy...\text{I}$$

۱-که تابع د تابع تابع شکل ولري، دا چې z د تابع په اوله مرحله کې د (x,y) متحول وي او په دویمه مرحله کې یو له مستقلو متحولو څخه تابع د بل مستقل متحول وي لکه z= f(x,y) داسې، چې y=f(x) وي په دې مرحله کې dz کلي مشتق نظر x ته او $\frac{dz}{dx}$ محاسبه کېږي او د I معادلې دواړه خواوې په dx تقسیموو، معادله لاندې شکل اختیاروي.

$$\frac{dz}{dx} = zx.\frac{dx}{dx} + zy.\frac{dy}{dx}.dx.......1$$

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy\frac{dy}{dx}.........2$$

۲-که z=f(x,y) وروسته د x له له طریقه یواځې د y تابع وي، د z کلي مشتق نظر Y ته دارنګه محاسبه کېږي، یعنې $\frac{d}{dz}$ او په اول قدم کې z = f(x,y) وروسته x=f(y) اوس د I معادلې دواړه خواوې په dy تقسیموو، معادله لاندې شکل اختیاروي.

$$\frac{dz}{dy} = zx\frac{dx}{dy} + zy.\frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dy} = zx\frac{dx}{dy} + zy...3$$

۳-په درېیم حالت کې کولای شي د z تابع اول د y,x تابع او دویم د y,x له طریقه هر یو د بل متحول وي، داچې په اقتصادي مسایلو کې د (t) وخت عامل اساسي رول لري، په دې حالت کې z د y,x تابع او وروسته د y,x له طریقه د t تابع وي لکه:

z=f(x,y) و X=f(t)

Y=f(t)

داچې د z کلي مشتق نظر t ته عبارت له $\frac{dz}{dt}$ محاسبه کېږي د I معادلې دواړه خواوې په dt تقسیموو اول فورمول لاندې شکل غوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz}{dx}.\frac{dx}{dt}+\frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt}=zx.x(t)+zy.y(t)$$

$$\Rightarrow dz/_{dt}\, zx.\frac{dx}{dt}+zy.\frac{dy}{dt}...........4$$

دريیم مثال: د $z=6x^{\frac{2}{3}}.y^{6}$ تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!

حل: اول فورمول ته په کتو لرو چې :

$$z=6x^{\frac{2}{3}}.y^{6}$$

$$dz=zxdx+zy.dy$$

$$dz=(\frac{2}{3})(6)(x^{\frac{2}{3}-1}y^{6})dx+(36(x^{\frac{2}{3}}y^{5})dy$$

$$dz=(\frac{12}{6})(x^{-\frac{1}{3}}y^{6})dx+(36(x^{\frac{2}{3}}y^{5})dy$$

$$dz=(2x^{-\frac{1}{3}}y^{6})dx+(36(x^{\frac{2}{3}}y^{5})dy$$

څلورم مثال: فرض کوو چې د یوه کارګر د عاید تابع عبارت له $z=9x^{2}y^{2}$ څخه وي، په دې تابع کې z خالص عاید x د کارګر د ورځې کار y د فې ساعت کار مزد او لکه څنګه چې فرض کوو، چې د فې ساعت کار مزد د تابع تابع د کارګر د کار د ساعت اندازه وي $y=x^{2}+3x-1$ په دې حالت کې د کارګر د تابع کلي مشتق پیداکړئ(د کار ګر په عاید کې تغیر په y اوx کې د وارد شوي تغیر په اثر یعنې کار په ساعت کې او د فې ساعت کار مزد) څو دی.

حل: فورمول ته په کتو لرو چې:

$$\frac{dz}{dx}=zx+zy\frac{dy}{dx}$$

$$z=9x^{2}y^{2}\,\frac{dz}{dx}=18xy^{2}+18x^{2}y(2x+3)$$

$$y=x^{2}+3x-1=18xy^{2}+36x^{3}y+54x^{2}y$$

$$zx=18xy^{2}$$

$$zy=18x^{2}y\frac{dz}{dx}=18xy(y+2x^{2}+3x)$$

$$\frac{dy}{dx}=y'=2x+3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱- د y قیمت په لاسته راغلي ځواب کې وضع کوو

$$\frac{dz}{dx}=18xy^2+36x^3y+54x^2y$$
$$\frac{dz}{dx}=18(x^2+3x-1)+36x^3(x^2+3x-1)+54x^2(x^2+3x-1)^2$$
$$=18(x^2+3x-1)^2(x^2+3x-1)^2+36x^3+108x^4-36x^3+54x^4+162x^3-54x^2$$
$$=18x(x^4+3x^3-x^2+3x^5+9x^2-3x-x^2-3x+1)+36x^5+162x^4+126x^3-54x^2$$
$$=18x(x^4+6x^3+7x^2-6x+1)+36x^5+162x^4+126x^3-54x^2$$
$$=18x^5+108x^4+126x^3-108x^2+18x+36x^5+162x^4+126x^3-54x^2$$
$$=54x^5+270x^4+252x^3-162x^2+18x$$

۲

۳- کولای شو د پورته سوال ځواب دارنګه په لاس راوړو، چې د y قیمت په اصلي تابع کې وضع کوو او بیا نظر x ته د تابع مشتق نیسو.

$$z=9x^2(x^2+3x-1)^2=9x^2(x^2+3x-1)(x^2+3x-1)$$
$$z=9x^2(x^4+6x^3+6x+1)$$
$$z=9x^6+54x^5+63x^4-54x^3+9x^2$$
$$\frac{dz}{dx}=54x^5+270x^4+252x^3-162x^2+18x$$

پنځم مثال: فرض کوو چې د عرضې تابع د یوې متاع لپاره عبارت ده له $z=(4x+6y-1)^3$ په پورته مثال کې z د عرضې مقدار او تابع ده، x د متاع قیمت او y د تعویض د اشیاؤ قیمت وي، هر کله چې د اشیاؤ قیمت تعویضي او د تابع قیمت متاع $y=2x^2+8x$ وي، د اړونده متاع په عرضه کې کلي تغیرات د هماغې متاع د قیمتونو او اشیاوو په نظر کې نیولو سره عوض او محاسبه کړئ او د z کلي مشتق پیداکړئ!

حل:

$$z=(4x+6y-1)^3$$
$$y=2x^2+8x$$
$$\frac{dz}{dx}=zx\frac{dy}{dx}+zy.\frac{dx}{dx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx}=3(4x+6y-1)^2(6)(4x+8)+3(4x+6y-1)^2(4)$$
$$=18(4x+8)(4x+6y-1)^2+12(4x+6y-1)^2$$
$$=(72x+144)(4x+6y-1)^2+12(4x+6y-1)^2$$
$$=(72x+144)(4x+6y-1)(4x+6y-1)+12(4x+6y-1)12(4x+6y-1)$$
$$=(72x+144)(16x^2+24xy-4x+24xy+36y^2-4x-6y-6y+1)$$
$$+12(16x^2+24xy-4x+24xy+36y^2-6y-4x-6y+1)$$
$$=(72x+144)(16x^2+48xy-8x+36y^2-12y+1)+$$
$$+12(16x^2+48xy-8x+36y^2-12y+1)$$
$$=1152x^3+3454x^2y-576x^2+2592xy^2-864xy+72x$$
$$+2304x^2+6912xy-1152x+5184y-1728y+144$$
$$+192x^2+576y-96x+432y-144y+12$$
$$=1152x^3+3456x^2y+1920x^2+2592xy^2+6048xy-1176x$$
$$+9350y+432y^2+156$$

٦مثال- که فرض کړو د متاع لپاره د عرضې تابع $z=(x^2+2xy+y^2)^2$ وي، څکه د

$y=6x^2+1$

او $x=2$ $y=4$

حل:

$$\frac{dz}{dx}=zx\frac{dy}{dx}+zx.\frac{dx}{dx}$$
$$\frac{dz}{dx}=2(x^2+2xy+y^2)(2x+2y)(12x)+2(x^2+2xy+y^2)(2x+2y)$$
$$\frac{dz}{dx}=2(2^2+2.2.4+4^2)(2.2+2.4)(12.2)+2(2^2+2.2.4+4^2)(2.2+2.4)$$
$$=2(4+16+16)(4+8)(24)+2(4+16+16)(4+8)$$
$$=2(36)(12)(24)+2(36)(12)$$
$$=8640.24+8640=207360+8640=216000$$
$$\frac{dz}{dx}==216000$$

اووم مثال: فرض کوو چې د یوه کارګر د عاید تابع عبارت له $z=9x^2y^2$ څخه وي؛ نو په دې تابع کې z خالص عاید x د کارګر د ورځني کار ساعت y د کار د فې ساعت مزد، همدارنګه فرض کوو چې د فې ساعت کار مزد تابع د تابع د کارګر د کار د ساعتونو اندازه او لاندې شکل لري.

$$y=x^4+3x-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د کارګر د کار د تابع کلي مشتق محاسبه کړئ!
(د وارده تغير په اثر د کارګر په عايد کې تغير په x,y کې يعنې د کار په ساعت کې او د في ساعت کار مزد) څو دی؟

حل:

$$\frac{dz}{dx} = zx + zy\frac{dy}{dx}$$

$$z = 9x^2y^2$$

$$y = x^4 + 3x - 1$$

$$zx = 18xy^2$$

$$zy = 18x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 3$$

$$y'(x) = 4x^3 + 3$$

$$\frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 18x^2y(4x^3 + 3)$$

$$= 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 18xy(y + 4x^3 + 3x)$$

پاسنی سوال کولای شو له دوه جهتو بررسي کړو:

1-د y قيمت په وروستي څواب کې وضع کوو، لرو چې:

$$\frac{dz}{dx} = 18xy^2 + 72x^5y + 54x^2y$$

$$\frac{dz}{dx} = 18x(x^4 + 3x - 1)^2 + 72x^5(x^4 + 3x - 1)^2 + 54x^2(x^4 + 3x - 1)^2$$

$$= 18x(x^4 + 3x - 1)^2(x^4 + 3x - 1)^2 + 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 18x(x^8 + 3x^5 - x^4 + 3x^5 + 9x^2 - 3x - x^4 - 3x + 1) +$$

$$+ 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 18x^9 + 108x^6 - 36x^5 + 162x^3 - 108x^2 + 18x$$

$$+ 72x^9 + 216x^6 - 72x^5 + 54x^6 + 162x^3 - 54x^2$$

$$= 90x^9 + 378x^6 + 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 90x^9 + 378x^6 + 108x^5 + 324x^3 - 162x^2 + 18x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲-کولای شو د ذکر شوي تابع ځواب دارنګه لاسته را وړو، چې y په اصلي تابع کې وضع کوو، وروسته نظر x ته د تابع مشتق پیداکوو.

حل: دا چې $z=9x^2y^2$ دی $y=x^4+3x-1$ وي.

$$z=9x^2(x^4+3x-1)^2$$
$$z=9x^2(x^4+3x-1)(x^4+3x-1)$$
$$z=9x^2(x^8+3x^5-x^4+3x^5+9x^2-3x-x^4-3x+1)$$
$$z=9x^2(x^8+6x^5-2x^4+9x^2-6x+1)$$
$$z=9x^{10}+54x^7-18x^6+81x^4-54x^3+9x^2$$
$$\frac{dz}{dx}=90x^9+378x^6-108x^5+324x^3-162x^2+18x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېيم څپرکي پوښتنې:

۱- د لاندې توابعو قسمي مشتقات محاسبه کړئ!

$1) z = x^2 + y^2 + 5xy$

$2) z = 3x^2y^2 + 12xy^3 + 2y^4$

$3) z = (x^2 + y^2)^5$

$4) z = x^2 + 3x - 9$

۲- د لاندې توابعو اول او دويم قسمي مشتقونه او ترکيبي مشتق پيداکړئ!

$1) z = 8x^2 + 16xy - 24y^2$

$2) z = (4x^2 + 2y^2)$

۳- فرض کړئ چې د يوې تصدۍ د توليد تابع لاندې شکل لري:

$p = 8k^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$

۱-د k د عامل په اړه وسطي توليد

۲- دL د عامل په اړه وسطي توليد

۳-نهايي توليد

٤- په توليد کې د تغير درجه

۵- په مؤلديتونو کې د تغير درجه

پورتني پنځه جزه محاسبه کړئ!

٤- فرض کوو چې د يوه نجار د عايد تابع عبارت له $z = 9x^2y^2$ وي.

۱- z خالص عايد ۲- x د نجار ورځني کاري ساعتونه ۳- y د في ساعت کار مروج مزد سربېره پر دې فرض کوو، چې د في ساعت کار مزد د نجار د کاري ساعت د اندازې تابع وي، يعنې $y = x^4 + 3x - 1$ په دې حالت کې د نجار د تابع کلي مشتق پيداکړئ!

۵- د $z = e^{4x2+3y2}$ تابع کلي مشتق پيداکړئ که چېرې $x=8y^4$ وي.

٦- د $z = 8x^3 + 12xy - 6y^3$ تابع کلي مشتق پيداکړئ، که چېرې $x = 2t^{\frac{1}{2}}, y = 4t^2$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرچينې او اخيستنې:

١- رياضی عمومی موءلف داکتر غوری سال ١٣٨۶
٢- رياضيات عمومی سردار محمد ٢٠٠۶ ميلادی
٣- لکچر نوت های پوهاند اقتصاد سال های ١٣٧٧ و ١٣٧۶
۴- رياضيات عالی موءلف پوهنوال دکتور محمد (نور غوری) و زا کتاب های صنوف ١١ و ١٢ مکاتب نيز استفاده شده است.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونیز نصاب د پراختیا د ریاست پیغام

د پوهنې وزارت د تخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت دښوونیز نصاب د انکشاف ریاست د ټولنې دعیني او ښکاره ضرورت په درک کولو سره چې د محصلینو او شاګردانو د درسي کتابونو په برخه کې یې تخنیکي او مسلکي رشتې درلودې او لري یې، په لومړي سرکې یې تصمیم ونیو، چې په ښوونیزو پلانونو او درسي مفرداتو باندې بیاکتنه وکړي او ورپسې بیا د شاګردانو او محصلینو د درسي کتابونو د تالیف لپاره مبادرت او کوښښ وکړي. د خدای(ج) په فضل او مرحمت سره او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د ښوونکو په میړانې او همت سره د ادارې او حسابدارۍ درسي کتابونه تالیف شول تر څو په وړیا ډول د شاګردانو او محصلینو په واک او اختیار کې ورکړل شي.

د علم او معرفت له ټولو لوستونکو، علاقمندانو، د ادارې او حسابدارۍ د مکاتبو له ښوونکو، ګرانو شاګردانو او د تخنیکي او مسلکي زده کړو د چارو له متخصصینو او همدا شان له ټولو څېړونکو او شنونکو څخه صمیمانه هیله کیږي، چې د دې کتابونو په مطالعې سره چې په لومړي ځل د ښوونکو او د ادارې او حسابدارۍ څانګې د مسلکي غړو له لوري تالیف او تدوین شوي دي. د مسلکي، تخنیکي او علمي مطالبو او مفاهیمو د څرنګوالي په هکله خصوصاً د هغوی املایي او انشایي اشتباهاتو په اړهمونږ ته لارښوونه وکړي، ترڅو په راتلونکي کې وکړای شو، په همدې او نورو برخوکې ګرانو شاګردانو ته له دې څخه ښه، غوره، ګټور او ارزښتناکه موضوعات وړاندې کړو.

همدا شان له ګرانو شاګردانو او محصلینو څخه هیله کوو ترڅو د دې کتابونو د مطالعې او استفادې پر مهال د هیواد اقتصادي ستونزې، فقر او وروسته پاتې والی په نظرکې ونیسي او د کتابونو په ساتنه کې کوښښ او زیار وباسي، ترڅو د ډېرو شاګردانو او محصلینو د ګټې وړ وګرځي.

پته: دپوهنې وزارت – دتخنیکي او مسلکي زده کړو معینیت د تعلیمي نصاب د انکشاف ریاست – دکتابونو د تالیف او د درسي ممدو موادو د برابرولو عمومي مدیریت.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library