کوش KUSCH

د فرنځیالبرابرون یا _ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleichungen

Ketabton.com

ژباړن:

ډاکټر ماخان (میری) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان (په اولني نوم مېرې) د اروابنادي پښتو او اروابناد نورالرحمان زوی، په ۱۵/۹/۱۹۴۶م کال د شینوارو د هسکې مېنې ولسوالۍ کې زېږېدلی. (د زېږېدو نېټه یې د ۱۳۲۴ هـ ل کال څخه یو یا دوه کاله دمخه ده).

د هسکې مېنې د درې کاله کلیوالي ښوونځي وروسته، چې د لومړنیو زده کوونکو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر ۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لېسه، د ۱۹۶۶م کال سپتمبر کې دیوه بورس له لارې اطریش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاکټرۍ بریالی شو.

د ۱۹۸۷ م کال د نومبر تر د ۱۹۸۸ فبروري تر اخره د افغانستان د باندنیو چارو کې مامور وو. دی د ۱۹۸۸م کال د فبرورۍ له ۲۹ تر ۱۹۹۲ م کال د اپریل تر نیمایي وراخوا په بن (المان) کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژدافیر وو او د ۱۹۹۲ یوني څخه راپه دېخوا په المان کې نور هم د پردېسۍ شپې او ورځې تېروي.

ماخان شینواری د مېرمن ښاپېرۍ سره له ۱۹۷۲م کال راپه دې له لرې واده (د واده خبر ورته اطریش ته راغی) دی په نهم ټولګي کې یې کوژده ورته کړې وه. دوی ته لوی څښتن دوه بچیان وبخښل، ځانګه او اباسین، چې د ۱۹۷۹کال د مۍ په شلم په اطریش کې زېږېدلي.

Verein zur Fördrung der Afghanischen Kultur e. V. Köln, Germany

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . دیفرنځیالبرابرون یا دیفرنځیالمساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسځندنت مساواتو نامعلومی لوي تر يوې برخی د توپيري پوتنځونو سره لکه $x , y\ z^2 , a^3$ او داسی نور ، لرودي.
که د مساواتو دا نامعلومی یا ناپیژندلی لویي فنکشنونه او د هغی رابیلدنی یا دفرنځیالویشنه یامشتقونه وي، نو دلته د يوه دیفرنځیالمساوات ځخه غږيدنه ده یا خبرې دي. د دې مساوات اوبی یاحل ستونځې لري، په ډیرو حالتونو کې حتی شمیرنیز ناممکن دی.
د دې وړې برخې په دننه کې کیدی شي ، چې یواځې یوه پیلونه ورکړل شي، د یوځو،په تخنیك کې، دمهمو كاروونو یا استعمال سره.
یادونه: دلته ځه نومونه چی راځي د هغو سره باید لوستونکی بلد وي. او که چیري داسی نه وه، نو دا تر زیاته حده ځما د مخه تیرو کتابونو کی راوړل شوي، که هغه هندسي کلیمي وي اوکه شمیرپوهنيزې.که پوه شوم، چی کومی کلیمي ځما په تیرو کتابونوکی روښانه نه دې تعریف شوي، وبه هڅیږم، چی داکار دلته روښانه کړم.
ګران لوستونکی به په دې پوهیږي، چی کوم شیان د ژباړونکی دي،که په روښانه توګه می ګوته لك نه کړل.

۱ . ۱ بنسټکلیمی

۱ . ۱ . ۱ تعریفونه (پیژندنی)

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپیر شوي دي.
ټاکنمساوات:

(c) ketabton.com: The Digital Library

– الجبري ریشنل مساوات. $y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3$

– الجبري ایریشنل مساوات. $\sqrt{3x^2 - 1} = x^2$

– ترانسځندنت مساوات. $y = \sin x ; y = e^{2x+1} = 2x$

فنکشنمساوات

هر $x \in D(f)$ په یواځنی یو $y \in R$ تنظیمیږي.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \quad \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f = < f \to f(x) >$$

$$y + 2x = y' . x^2 - y'' \quad \Rightarrow f = < x \to f(x) , f'(x), f''(x)>$$

$$\Rightarrow y = f<x,y',y''>$$

دفرنځیالمساوات، په کومو کی، چی د بلواکو اوښتوني y یواځی خپلواکی اوښتونی x اود هغه رابیلیدنی لکه

$$dy / dx = y' ; d^2 y / dx^2 = y'',.... , \qquad |$$

رامنځ ته کیږي، بلد یا عادي دیفرنځیالمساوات بلل کیږي.

د دیفرنځیالمساوات بېلیزه بڼه :

- $y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$
- $y'^2 + x \cdot y^2 = 4$
- $y''' + y'' + y' = e^x$
- $x \cdot y' = y'' \cdot y$
- $x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$

که د دیفرنځیالمساوات ناپیژندونکی د ډیرو اوښتونکو فنکشنونه وي، نو د پارشل – یا ټوټه دیفرنځیال مساواتوڅخه غږیږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = y$$

د دې ټولیزه بڼه یا فورم

$$0 = f(x; y; z; \frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; ....;-)$$

د n,....,1.,2 (یعنی، لمړي، دوم، ... او n–ام) نظم دیفر– نځیالمساواتو ترمنځ توپیر کوو

د ۱ –ام نظم دیفرنځیامساو $4y - dy / dx + y^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲. – ام نظم د.م $3x^2 + y^2 = d^2y / dx^2 = y''$

. د ۳ –ام نظم د.م $y''' - 3y = y'' + y'$

دلته په دیفرنځیالمساوات کې هغه لوړ دیفرنځیالکوځینت یا لوړه رابیلیدنه یا دیفرنځیالویش د دیفرنځیالمساوات نظم ورکوي.

د دفیرنځیالمساوات یو بل د توپیرولویا فرقکولو امکانات په درجه یا ګراد Grad کې ورکړ شوي دي.د دفیرنځیالمساوات ګراد د دیفرنځیالمساوات د زیاتوونو له لارې ټاکل شوی دی، په کوم کې چې د بلواکو اوښتونکو یا واریابلو د ځکیو یا لوړیو یا اکسپوننتونو او د دیفرنځیالویش هغه زیاتون چې د ټولو لوي وي.

۱ . درجه $y''' - 3x^2 + y = 0$

۲. . درجه $x^4 y' . y''^2 y'' + y - x^2 = 0$

۳ . درجه $y . y''^3 + y'' . x^8 = y$

۴ . درجه $y - y^2 y''^4 - y' = 0$

بلد دفرنځیالمساوات

د ۱ . نظم او ۳ . درجې $4x^5y^2 + 2y . y'^3 . \cos x - 5y + 7 = 0$

بلد یا ساده (عادي) دفرنځیالمساوات

۲ . نظم او ۱ . درجه $y . y'' + 4x . y' - y = 0$

۱ . ۱ . ۲ د دیفرنځیالمساواتو اوبیونی یا حلونه

د دفرنځیالمساوات اوبیونه یو فنکشن دی او زیات وخت د دفرنځیالمساوات اینتیګرال هم بلل کیږي، ځکه، چې په بنسټیزه توګه رابیلیدنې د اینتیګرال له لارې لاس ته راځي د دیفرنځیال مساوات د اوبیو یا حلونولاندې په مساواتو کې منځ ته راغلو، د دفیرنځیالونو او دیفرنځیالکوشنتونو د له منځه وړل دي، دا په دې مانا چې د ورکړشوو رابیلیدنو ځخه باید په هغه اړه فنکشن مساوات راپیدا کړی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه: دیفرنخیالمساوات ; $x/2 - y' = x$

$dy / dx = y' = - x / 2$

$dy = -(x / 2).dx$

د رابیلیدنو د له منځورنه په بنستیزه توګه د اینتګرال له لارې پیښیږي یا صورت نیسی. د دیفرنخیالمساواتو اوبی یا حل له امله د هغه اینتګرال او یا هم د هغه بنستمساوات بولو.

$\int dy = - (1 / 2) \int x.dx$

اوبی (حل) $y = -(1 / 4) x^2 + C , C \in R$

د فنکشنمساوات $y = (x)$ څخه د اوبیفنکشن لاس ته راځي

$f = < x \longrightarrow -(1/4) x^2 + c >$

یادونه :داسی پورته مات نوکان >,< دې بیا لږ لوي ولیکل شي، ځه یی په بل ډول امکانات نه لرم.

ازمایښت:

که د اوبیوني فنکشن $y = -(1/4) x^2 + c$ څخه لمړی رابیلیدنه جوړه شي او د $y' = - x/2$ لپاره ترم د ازمایښت لپاره په سر- یا پیل دفرنخیالمساوات کی کینښول شي، نو دا به د فنکشن د دفرنخیالمساوات د ټولو توکو لپاره یو کټمټ یا ایدنتیک مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \;\blacktriangleright\; y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

$$x = x$$

(دا یی په بل ډول لیکندود) دیفرنخیالمساوات اوبی

$y = - (1 / 4)x^2 + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازمايښت لپاره نتيجه بيرته ديفرنځياليږي يا رابيليدنه نيول کيږي. دا نتيجه د دفيرنځيالمساوات سره سرخوري.

$$dy / dx = - x / 2$$

ګورو، چې بيرته په دې توګه ديفرنځيالمساوات لاس ته راغی.

بيلګه: د ديفرنځيالمساوات

$$2x + dy / dx = 0$$

اوبی يا حل سره. لکهٔ څنګه په ټولو اينتيګرالولو کی يوه ثابت C رامنځ ته کيږي.

$$y = - x^2 + C$$

د دفرنځيالمساوات اوبيونی يا حلونه کيدی شي، چې پهٔ درې ډلو وويشل شي.

۱ – ټوليز اوبی

د دفرنځيالمساوات اوبی يا حل کی ، لکه په هر اينتيګريشن کی يوه اينتيګريشن ثابته c رامنځ ته کيږي.

که د ديفرنځيالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کيږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفيرنځيال مساوات ټوليز اوبی او يا د دې ديفرنځيالمساوات ټوليز اينتګرال بلل کيږي.

بيلګه :

دفرنځيالمساوات $y' = 1 / 2$

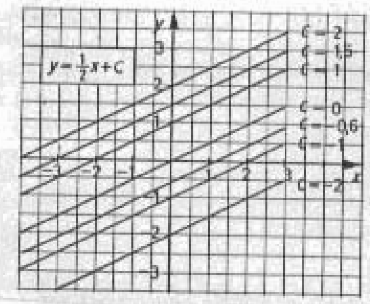
$$\Rightarrow \quad y = (1 / 2) \quad dx$$
$$= (1 / 2) x + c$$

ټوليز دفرنځيالمساوات $f = \langle x \to (½)x + c \mid c \in R \rangle$

د يوه ديفنځيالمساوات ټوليز حل د کړو د کودې(د هغو کړو ډله، چې يو له بل سره غبرګی څغلي) په څير په ګراف کيانخوريدلی شي .

دلته ناپايډيرې اوبيونی ممکن دي، څکه چې ثابته هر په خوښه ارزښت نيولي شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره

۲ – پارتیکیولر–یا ځانګړي اوبیونه partikuläre Lösung

یا برخه ئیز– یا د یوې یوې برخې اوبیونه

که د ورکړشوي دیفرنځیال مساوات لپاره نور ورزیات ټاکلي شرایط ورکړ شوي وي، نو کیدی شي، چې د اینتګریشن ثابته C وشمیرل شي.

بیلګه:

دیفرنځالمساوات $y' = 1/2$

ټولیزمساواتفنکشن $\Rightarrow f = < x \longrightarrow (½)x + c,\ c \in R>$

ټولیز اوبی $y = (1/2)x + c\ ,\ c \in R$

که دc د شمیرلو لپاره نور ورزیات شرطونه $x_1 = 1$ ،$y_1 = 2$ وي

بدلون یا اړونه $y_1 = (1/2)x_1 + C$

ارزښت ځاي په ځاي کړی $C = y - (1/2)x$

$C = 2 - (1/2).1$

$\Rightarrow C = 1,5$

ارښت کیږدی

پارتیکیولار اوبی $y_1 = (1/2)x_1 + 1,5$

$\Rightarrow 2 = (½).1 + c \Rightarrow c = 1,5$

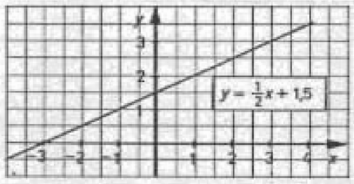
له دې د دیفرنځیالمساواتو پارتیکولاراوبی لاس ته راځي.

د $c = 1,5$ سره له ټولیز اوبیفنکشن f څخه ټوټه اوبي–فنکشن f_1 لاس ته راځي.

ټوټه اوبیفنکشن $f_1 = < x \longrightarrow (\frac{1}{2})x + 1,5 >$

د پارتیکولار اوبي په ګراف کی د کرښو د کودي څخه یوه ټاکلی کرښه بنایي

د $c = 1,5$ حالت لپاره.



په تخنیکي پرابلمونوکی زیات وخت پارتیکولار اوبیونو یا حلونو ته اړتیا پیښیږي.

۳ – زینګولار اوبیونیsinguläre Lösungen

دا لاندي دیفرنځیالمساوات دي ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی ،که ونیول شي

$$y = \sin(x + C)$$

دا اوبیونی د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

بیلګه : د ډیفرنځیال مساوات

$y^2 + y'^2 = 1$ ▶ *Differentialgleichung*

$f = \langle x \mapsto \sin(x + c) | c \in \mathbb{R} \rangle$ ▶ *angenommene allgemeine Lösungsfunktion*

$\Rightarrow y = \sin(x + c)$

منل شوی تولیز اوبیفنکشن

ازمایښت

$$y = \sin(x + c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x + c)$$
$$\Rightarrow y' = \cos(x + c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x + c)$$
$$y^2 + y'^2 = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2(x + c) + \cos^2(x + c) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

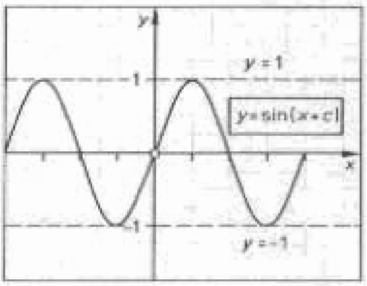
ازمایښت د نیول شوي اوبي رتینښتینوالی تصدیقوي

دا ځنی دفرنځیالمساوت د دې تر ځنګ نورې اوبیونی هم لري، کومی چی په ریښتونی دیفرنځیالمساوات پوره کوي، مګر له دې پیدا ټولیز اوبی یا حل ځځه رابیلیدوړ نه دی.
د ټولیزې اوبیونی $y = \sin(x + c)$ تر ځنګ دفرنځیالمساوات د فنکشنونو
$f_1 = <x \longrightarrow 1>$ او $f_2 = <x \longrightarrow -1>$

سره هم پوره کیږي.
دا اوبیونی یا حلونه زینګولار بلل کیږي. دا د یوه ټولیز حل د کږوکرښو د کودو هندسي پوښ انځوروي.
د دواړو زینګولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کرښو په څیر ښايي، چی د x —محور سره غبرګی ځغلي. کومی چی ټولیز یا عمومي اوبی یا حل $\sin(x + C)$ پوښوي یا پټوي.

$$y^2 + y'^2 = 1$$
$$y_1 = 1;\ y_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + (0)^2 = 1$$
$$y_2 = -1;\ y_2' = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f_1 = \langle x \mapsto 1 \rangle \\ f_2 = \langle x \mapsto -1 \rangle \end{array}\right\} \textit{singuläre Lösungen}$$

زینګولار اوبیونې
یا حلونه



د دیفرنځیالمساواتو زینګولار حلونه د کم اهمیت دی یا د کم غوروالی دي. د دې کتاب په چوکاټ کې به د دې په پیلونو یا کارونو تیریدنه وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوبیونی متودونه

د دیفرنځیالمساوات اوبیونی اصلاً د اینتیګرالشمیرنی له لارې صورت نیسي.
د لاندې بیلګو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي.
بیلګی : د لاندې دیفرنځیالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړی!

1. $y' = 4x$

بڼه بدلون : $dy / dx = 4x$

یواځي د لمړي نظم دیفرنځیالکوځینت یا دیفرنځیالویش مخ ته پروت دی، نو د dy پسی برابریږي یا ترتیبیږي او اینتیګرالیږي.

اینتیګرالونه $dy = 4x\,dx$.

$$\int dy = 4\int x.dx$$

$$y = 2x^2 + c,\ c \in R$$

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow 2x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

2. که ډیر اینتیګرالونه لاس ته راځي، نو د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و یوې ثابتی c ته سره رایوځای کیږي.

$$y' = 8x^3 - 2x^2$$

$$y = 8 \cdot \int x^3\,dx - 2 \cdot \int x^2\,dx$$

$$= 2x^4 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$

$$= 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c;\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۳ . د یوه بلد ۲ . نظم دفرنځیالمساوت لپاره د دوه واره اینتیګرالولو له لارې اوبیونه پیدا کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$

$$y' = \int x^2 \, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + c_1 \, ; \, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{3} \int x^3 \, dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \, ; \, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{12} x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

په ټوټه اینتیګرالونه کی هم دوه اینتیګرالثابتي پیداکیږي، کومی چی د ټوټه اوبی سره د ورکړشوو شرایطو له مخی باید وټاکل شي

۴ . په دفرنځیالمساوات کی $y' = dy / dx$ اینسوول کیږي او له dx سره ځلیږي

بیا دا بدلونښه په دواړو خواوو اینتیګرالیږي.

وریسی دواړه د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و $c = 2(c_2 - c_1)$ ته سره را یوځای کیږي. (دي ته دې په شمیر پوهنیزه برخه کی پاملرنه وشي، ما د تخنیکي ستونځو له امل بل ډول نه شوې لیکلی)

$$y \cdot y' = \cos x$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$

$$\int y \, dy = \int \cos x \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$

$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$

$$y = \pm \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \, ; \, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۵ . اینسول کیږي $y' = dy / dx$ او دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي.

وریسی د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي او بیا ثابتی c_1 , c_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

او c_3 و يوې ثابتې c ته سره راټوليږي يا رايوځاي کيږي.
که دواړو لورو ته وريسی مربع تکميلونه ۱ ور زياته شي نو y شميرل کيدی شي، او لاس ته راغلی f ټوليز اوبی دی.

$$y' \cdot y = y' + x$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y = \frac{dy}{dx} + x$$
$$y \cdot dy = dy + x \cdot dx$$
$$\int y\,dy = \int dy + \int x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3$$
$$y^2 - 2y = x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1)$$
$$\blacktriangleright\ 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c$$
$$y^2 - 2y = x^2 + c$$
$$y^2 - 2y + 1 = x^2 + c + 1$$
$$(y-1)^2 = x^2 + c + 1$$
$$y - 1 = \sqrt{x^2 + c + 1}$$
$$y = \sqrt{x^2 + c + 1} + 1;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

په ياد ولری

۱ – ديفرنشيالمساوات په ټوليزه توګه ټوليز، پارتيکيولار او په ورکړ شوي حالت کي زينګولار اوبيونی يا حلونه لري.

۲ – ديفرنشيالمساوات په مناسب يا ورته شميرنيز کارونی له لارې په زياتون– حالتونو کی د اينتيګرال له لارې اوبي کيږي.

۳ – زيات وخت بايد چي اوبي ونيول شي او دا اوبی بيا د هغه د رينښتينوالی لپاره و ازمايل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندي ساده دفرنځیالمساوت اوبی یا حل کړی

1 . $y'' = x \cdot e^x$ 2 . $y'' - x = 0$ 3 . $2y' - \cos x = 0$
4 . $x \cdot y'' = 3y'$ 5 . $y \cdot \ln x = x \cdot y'$ 6 . $y' \cdot y + y' + x = 0$
7 . $y' - x^2 = 3e^x$ 8 . $\sin x - e^x = y'$ 9 . $y' \cdot y = x + 1$
10 . $y' \cdot y^2 = y' - x^2$ 11 . $dy / dx - 3x = e^x$
12 . $y' - x^2 = x^2 - y'$ 13 . $dy / dx + \cos x = 1$
14 . $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$ 15 . $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$ 16 . $e^x \cdot y' = y$
17 . $y'' = 7x^3$ 18 . $d^2 y / dx^2 = \sin x$
19 . $3x - y'' = a$ 20 . $y'' = y'$ 21 . $y'' = x \cdot \cos x$

۱ . ۲ د لومړي نظم دیفرنځیالمساواتونه

د لمړي نظم دیفرنځیالمساواتونه داسی پیژندل کیږي، چی یواځی لمړی رابیلیدني y' او یا د y' په توانونه لکه y'^2 , y'^3 رامنځ ته کیږي.
د دي ترځنګ کیدی شي x او y همداسی د دوي توان رامنځ ته شي بیلګي :

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$
$$y \cdot y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

تولیز : $y' = f(x,y)$

د y' , y او x موجودیت او لویوالی تنظیمونی پسی د دفیرنځیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. د لته به د دي مهمو باندي لنډي خبرې وشي.

۱ . ۲ . ۱ دیفرنځیالمساوات د بیلوشوو اووښتونو سره

دیفرنځیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نخښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي، په کومکي چې ممکن وي،چې لويي dy , $g(y)$ په همدې توګه $f(x)$, dx هر
يو يې په يوه لور بېل يا ځانلۀ کړو.
د دې اړونې سره کېدی، چې مساوات په دواړو خواوو اينګرال شي.
بېلګه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$

$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \blacktriangleright y^3 = g(y);\ x^2 = f(x)$$

$$\int y^3\,dy = \int x^2\,dx$$

۱ . دفرنځيالمساوات د y^2 او dx سره ځليږي. بيا کېدی شي ، چې د مساوات
دواړه خواوې اينتيګرال شي د y^3 پسې اوبيونی له امله ثابتی $3.(c_2 - c_1)$ و
ثابتی c ته راغونډيږي(دا پورته ټول په لاندې بېلګه کې روښانيږي).
دلته f غوښتونکی اوبيفنکشن يا حلفنکشن دی.
بېلګه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \blacktriangleright x^2 = f(x);\ y^2 = g(y)$$

$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$

$$\int y^2\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$

$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \blacktriangleright 3(c_2 - c_1) = c$$

$$y^3 = x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۲ . د دې لپاره ، چې د $g(x) = y - 4$ د dy سره او x د $f(x) = x^2$ سره
رايوځايونه لاس ته راوړای شو. نو دفرنځيالمساوات د dx سره ځليږي او x^2
سره ويشل کيږي. *

(c) ketabton.com: The Digital Library

وریسی له دې سره dy او g(y) همدا ډول dx او f(x) هر یو په یوه خوا ځانله کیږي. د کوم سره چې dx او dy باید په مات باندې کې پراته یا ځاي وي. **
د مساوات دواړه خواوې ایتیګرال کیږي. د اینتیګرالثابتي c_1 او c_2 و c_3 ته راغونډیږي.
دا راپیداشوی فنکشن د y په لور اوبی کیږي. د e^C لپاره c اینښول کیږي.***
اوf د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی****

یا دونهٔ : لاندې د شمیرنی په برخه کی په * پسی* ... ،او** پسي ***...
په **** پسي **** راځي.

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - y + 4 = 0$$ *

$$x^2 \cdot dy - y \cdot dx + 4 \cdot dx = 0$$

$$dy - \frac{y \cdot dx}{x^2} + \frac{4 \cdot dx}{x^2} = 0$$

$$dy - \frac{dx}{x^2}(y-4) = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} = \frac{dx}{x^2}$$ **

$$\int \frac{dy}{y-4} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4| + c_1 = -\frac{1}{x} + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$ ***

$$y - 4 = e^{c_3 - \frac{1}{x}}$$

$$y = e^{c_3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot - c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 | c \in \mathbb{R} \rangle$$ ****

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیفرنځیالمساوات د جلا یا بیلو شوواووښتونو سره، ځان په دې ګروپونو ټوټه کوي

۱ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرینورکونې وظیفه ورکوي، لکه ځنګه، چې په اینتیګرالشمیرنه کې.

بیلګه :

$$y' = x^2$$

بدلونه $dy / dx = x^2$

اینتیګرالونه $dy = x^2\, dx$

$$y = \int x^2\, dx$$

تولیز اوبې $y = (x^3 / 3) + C$

دلته f ټولیز حل دی. $\Rightarrow f = \langle x \to (x^3/3) + c \mid c \in R \rangle$

۲ – د لاندې فورم مساوات $y' = g(y)$

اووښتونې dy او $g(y) = 3y^2 + 1$ په همدې توګه dx هر د مساوات په یوه خوا ځانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د کوم سره چې د مخامخ بنې $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$ اینتیګرال پخوا اوبې شویدی..

بیلګه (یادونه : دا بیلګه لکه چې ناریښتیا اوبې وې، پام ورته وکړی، ؟ ؟ .)

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2 + 1} = \int dx$$

کیږ لور ته ځانله کیږي په داسې توګه، چې د اینتیګریشنشابته $\ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنې خوا ته راوړل شي او مساوات د $2\sqrt{3}$ سره ځل شي،

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|+c_1=x+c_2$$

$$\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|=2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)$$

د لوګاریتم د اوبیونی سره په بنې لور اکسپونئنشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چې په یوه ځل توپه کیدی شي.

د سادوني لپاره تاکل کیږي

$$c=e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

بیا د $(3y-\sqrt{3})$ سره ځل کیږي او بالاخره مساوات د y سره کیڼ لور ته راوړل کیږي همداسی $\sqrt{3}$ و بنې خوا ته.

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}=c$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=(3y-\sqrt{3})\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

د y نوکوتلو وروسته د دفرنځیالمساوات د تولیز اوبیونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y-3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c=-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}$$

$$3y(1-e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c)=-\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1)$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1}{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-1};\ c\in\mathbb{R}$$

۳ . د $y'=f(x)\cdot g(y)$ بنې مساوات

د فرنځیالمساوات د بیلیدنی وروسته اینتیګرالیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y پسی اوبیونی وروسته ږدو

$$e^{c_2 - c_1} = c$$

وریسی بیا f تولیز یا عمومي اوبی دی

بیلګه :

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3}x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + (c_2 - c_1)}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} | c \in \mathbb{R} \rangle$$

۴ – د $y' = f(x) / g(y)$ بڼي یا فورم مساوات اوونښتونی y , dy او dx , x دوه لوریز خانله کیږي.

$$y' = x / y$$
$$dy / dx = x / y$$
$$\Rightarrow \quad y\,dy = x\,dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې اینتیګرالیږي او د y پسی اوبی کیږي.

$$\int y\,dy = \int x\,dx$$
$$(1/2)\,y^2 + c_1 = (1/2)\,x^2 + c_2$$

ږدو

$$2(c_2 - c_1) = c$$

$$y^2 = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن f د دفرنخیالمساوات تولیز اوبی یا حل دی

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د لاندي فورم مساوات

$$y' = g(y) / f(x)$$

اووبښتونی y , dy او x , dx په دواړو خواوو ځانله کیږي . او په اخر کی دو خواوي اینتیګرالیږي او په y پسی اوبی کیږي.

هغه لاس ته راوړي اینتیکریشنشابتی ږدو: $c_2 - c_1 = \ln|c|$

$$y' = y / x \;;\quad dy / dx = y / x$$

$$\int dy / y = \int dx / x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$
$$\ln|y| = \ln|x| + c_2 - c_1 \quad , c_2 - c_1 = \ln|c|$$
$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$
$$\ln|y| = \ln|x.c|$$
$$y = x.c$$
$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow x.c \mid c \in R \rangle$$

دا لاس ته راغلی f تولیز حل دی

بیلګی

1. $y' - 3x = -4x^2$

$$dy / dx = 4x^2 + 3x$$

$$y = 4. \int x^2\, dx + 3. \int x\, dx$$

$$y = (4/3)\, x^3 + c_1 + (3/2)\, x^2 + c_2$$

ږدو $c_2 + c_1 = c$

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow (4/3)\, x^3 + (3/2)x^2 + c \rangle$$

دا f د مساوات تولیزه ابیونه ده

۲ . $\sin x - y' = \cos x + y'$

$$\sin x - dy / dx = \cos x + dy / dx$$
$$2dy = \sin x \,.\, dx - \cos x \,.\, dx$$

$$y = (1/2) \int \sin x\, dx - (1/2) \int \cos x\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = -(1/2)\cos x + c_1 - (1/29\sin x + c_2$$

پردو: $c_1 + c_2 = c$

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow -(1/2)\cos x - (1/2)\sin x + c >$$

3 . $\quad 2.y' = 2y^2 + 8y - 2$

مساوات د مربعتکمیلولو له لارې په فورم $(z+a)^2 - b^2$ راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1$$
$$= (y-4)^2 - (\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینتیګرال د مخه اوبی شوی دی (پا داوبو نښه)

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2]\, dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}}\right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln\left|\frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}}\right| = 2\sqrt{5}\cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\ln z = a \Longleftrightarrow z = e^a$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5}\cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5}\cdot(c_2 - c_1)}$$

پردو $e^{2\sqrt{5}\cdot(c_2 - c_1)} = c$. بیا د $y + 2 + \sqrt{5}$ سره ضلیږي، وروسی هغه غړی، چی y لري د مساوات یوې لور ته ځانله کیږي او y له نوکانو راوخي، دا د y په لور اوبې – یا حل کیږي، چی په دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

توګه ټولیز اوبی لاس ته راځي .

$$y=\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x,-\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}\right\rangle$$

بیلګه ۴ : $y' = y$

د $x = 0$ لپاره $y = e$ دی

غږی $g(x)$ او dy د مساوات په یوه لور بیلیږي. په اخر کې دواړه خواوې اینتیګرال کیږي.

$$dy / dx = y$$
$$dy / y = dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int (1 / y)\, dy = \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = x + c_2$$
$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1)\ ,\quad c_2 - c_1 = c$$
$$\ln|y| = x + c$$
$$y = e^{x+c}$$

د y په لور اوبیونه ټولیز اوبی f ورکوي

$$\Rightarrow f = \langle x \longrightarrow e^{x+c} \rangle$$

ثابته c د شرایطو $x_1 = 0$ او $y_1 = e$ څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln|y| - x$$
$$= \ln e - 0 = 1$$

دلت $c = 1$ او f_1 ټوټه ئیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = \langle x \longrightarrow e^{x+1} \rangle$$

بیلګه ۵ . $x.\sqrt{y} = x - 1$

ورزیات شرایط : د $x_1 = 0$ لپاره دي $y_1 = 10$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دفرنځیالمساوات د پسې اړول کیږي او مات یا کسر په برخه ماتونو توته کیږي.
د دې برخمساواتو اینتیګرالونی وروسته د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبیونه یا حل لاس ته راځي

پردو $c_1 + c_2 + c_3 = c$

اوبی

$$x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} = x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$\int dy = \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$y = x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3$$

$$y = x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle$$

وروسې د اینتیګرال ثابته C د شرایطو $x = 2 ; y = 10$ ځای په ځاي کولو څخه شمیرل کیږي.

$$c = y_1 - x_1 + 2.\ln|x_1| + 1/x_1$$

پردو $x_1 = 2,\ y_1 = 10$

$$= 10 - 2 + 2.\ \ln 2 + 1/2 = 9,8863$$

بیا د c ارزښت په ټولیز اوبی کی ځاي په ځاي کیږي او په دې توګه پارتیکوالار اوبی لاس ته راځی.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9,8863 \right\rangle$$

بیلګه ۶ : $y'^2 = 1 - x^2$

شرایط: د $x = 1$ لپاره $y = 0$ دی

د دفرنځیالمساواتو رینبه(جذر) وځي یا نیول کیږي او د y په لور اوبی کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(dy / dx)^2 = 1 - x^2$$
$$dy / dx = \sqrt{1 - x^2}$$
$$dy = \sqrt{1 - x^2} . dx$$

په لاندې کی راغلی اینتیګرال $\int \sqrt{1 - x^2}\ dx$ د مخه اوبی شوی دی. دا اینتیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایي.

$$\int dy = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$
$$y = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x + c$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x + c \right\rangle$$

د c ثابته د شرایط $x_1 = 1$ او y_1 د اینیوولو له لارې شمیرل کیږي.
که $c = -\frac{\pi}{4}$ په f کی کیږدو، نو f_1 پارتیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x_1 \blacktriangleright x_1 = 1,\quad y_1 = 0$$
$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$c = -\frac{\pi}{4}$$
$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\,\text{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

بیلګه ۷ : $y' = y.[x / (x^2+1)]$

اوس dy , y او $f(x) = x / (x^2 + 1)$, dx د دفرنخیالمساوات په دواړو خواو کی ځانله کیږي.
د مساوات دواړه خواوی اینتیګرال کیږي او بیا د y پسی اوبي یا حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy / dx = y.[x /(x^2+1)]$$

$$dy / y = [x / [x^2 + 1)] .dx$$

$$\int dy / y = \int [x / (x^2+1)] .dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\ln|y| = (1/ 2) \ln(x^2+1) + C$$

د اینتیگرالثابتو c_1 او c_2 یوځایونه و $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ته هدفمند دي

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2+1} + (c_2 - c_1),\ c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \sqrt{x^2+1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|\sqrt{x^2+1}\ .\ c|$$

$$y = \sqrt{x^2+1}\ .\ c$$

او لاندې f تولیز اوبیفنکشن دی

$$=> \quad f = < x \longrightarrow c\sqrt{x^2+1} >$$

بیلګه ۸: $y' = [(x^2 - 4) / x^2].\quad 1 - y^2$

ور زیات شرطونه: د $x_1 = 1$ لپاره $y_1 = 1$ دی

او $g(x)$, dy او $f(x)$, dx د مساوات په دواړو لورو خانله کیږي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-4)\sqrt{1-y^2}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{(x^2-4)\cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتیکرالیږي، د دواړو اینتیکریشنثابتو c_1

او c_2 , c_4 زیاتون د سره c مساوي لیکل کیږي: $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\text{Arcsin}\, y + c_1 = x + c_2 - 4[- (1 / x) + c_3]$$

$$\text{Arcy} = [(x^2 + 4) / x] + c$$

$$y = \sin [((x^2 + 4) / x) + c]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې په اخر کی ټولیز اوبی f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + c\right)\right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرایطو څخه پیداکیږي، داسی ، چی x_1 او y_1 د فنکشن-مساوات په ټولیز اوبی کی ځای په ځاي شي.

په دې توګه ورپسی ټوټه اوبیونه f_1 لاس ته راځي

$$c = \text{Arcsin } y_1 - \frac{x_1^2+4}{x_1} \blacktriangleright x_1 = 1, \quad y_1 = 1$$

$$= \text{Arcsin } 1 - \frac{1^2+4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5\right)\right\rangle$$

بیلګه ۹ : $x^2.y^2 + y^2 + x.y^3.y' = x.y.y'$

دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي اوپه $x.y^2$ ویشلکیږي.

غړي د x , dx سره په یوه خوا او د y , dy سره په بله خواځانله کیږي. انتیګریشن د اوبی په څیر یو ایمپلیځیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم ، چی ایمپلیځیت نه شی انځوریدلی وروسته پردو $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2\, dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y\, dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x^3}{3} + c_1 + \ln|x| + c_2 = \ln|y| + c_3 - \frac{y^2}{2} + c_4$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c = 0$$

بیلگه ۱۰ : dx - dy = / dy / y) + [(4.dx)/ (4 + x)]

د x , dx او y , dy خانلونی وروسته د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي د اینتیګریشنثابتي، کیدی شی سره رایوځاي شي، اوبی اکسپلیځیت نه شي انخوریدی

$$dx - \frac{4 \cdot dx}{4+x} = \frac{dy}{y} + dy$$

$$\int dx - 4\int \frac{dx}{4+x} = \int \frac{dy}{y} + \int dy$$

$$x + c_1 - 4 \cdot \ln|4+x| + c_2 = \ln|y| + c_3 + y + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$$

$$x - 4\ln|4+x| = \ln|y| + y + c$$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساواتد هوموجینو اووښتونکو یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دیفرنځیالمساوات په هر غړي کی یو دیفرنځیال dx یا dy لري.

د واریابلوx او y د اکسپونتتو یا په جګګیونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.

دیفرنځیالمساوات د هوموجینواووښتونکو سره دSubstitution سبستیچیوشن یا (د) په ځاي اینښوونی یا بدلون له لارې خان اوبیوني یا حل ته پرېږدي، په کوم کي چی y = x.z ځاي په ځاي کیږي، او د کوم سره چی بیا z د x فنکشن دی.

(د) په ځاي اینښوونه مو یوه مساوات ته بیايي، چی اوښتونکی کي بیلی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سبستيچيوشن : په ورکړ شوي مساوات $y = x.z$ او په ورته يا همدې

توګه $y^2 = x^2.z^2$ سبستيچيوشن کو.کله چې ترم $y = x.z$ د خلقاعدې سره

دفرنځياليري، نو د dy لپاره بيا $z.dx + x.dz$ ږدو ،

دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو يا واريابلو سره د د

فرنځيالمساوات په بڼه راوړل کيږي.په کوم کې چې د x^2 سره خانله شي او

د x , dx همداسې z , dz سره غږي د بڼيبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 \quad + y^2 \quad + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{x^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{y^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{x \cdot y \cdot dy}_{n=2} = 0$$

Man setzt $y = x \cdot z \blacktriangleright z = f(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

بيلګه : $x^2.dx + y^2.dx + xydy = 0$

اوبې يا حل : اوبې په څلورو پلونو کې پلي کوو

١ – په مساوات کې بدلون منځ راولو يا سبستيچيوشن کوو

$y = x.z \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2.z^2$

$dy = z.dx + x.dz$

$x^2.dx + x^2.z^2.dx + xxz(z.dx + x.dz) = 0$

$x^2.dx + x^2z^2.dx + x^3z.dz = 0$

$dx(1 + 2z^2) = -x.z.dz$

$dx / x = -(z.dz)/(1+2z^2)$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لوري خانلۀ شوو اووښتونکو د

ديفرنځيالمساوات په بڼه راوړل کيږي.

٣ – د مساوات دواړه خواوې اينتيګرال کيږي.

د اينتيګرال $\int x.dx / (a^2 + x^2) = (½) \ln(a^2 + x^2)$ اوبې راته د مخه روښان دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z}{1+2z^2}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{z}{\frac{1}{2}+z^2}\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+z^2\right) + c_2 \blacktriangleright z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انیتیکرایشنشابتي په یوه لور راوړل کیږي او لویه z^2 بیرته د y^2/x^2 سره بدلیږي. د لوګاریتم د زیاتون څخه بیا د یو خل(ضرب) لوګاریتم جوړیږي او د لوګاریتممساوات د اکسپوننشلمساوات په څیر لیکل کیږي.

بیا x ریښې ته راوړل کیږي او مساوار په ۴ توان کیږي.

د $c = e^{4(c \;-\; c\;)}$ لپاره لیکیل کیږي، اوس د y ساده شمیرل کیدی شي.

هغه f چې وروسته لاس ته راځي د دفرنځیالمساوات تولیز فنکشن اوبې دی

$$\ln|x| + \ln\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt[4]{\frac{0,5\cdot x^2+y^2}{x^2}}\right| = c_2 - c_1$$

$$x\cdot\sqrt[4]{\frac{0,5\cdot x^2+y^2}{x^2}} = e^{c_2-c_1}$$

$$\sqrt[4]{0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2} = e^{c_2-c_1}$$

$$0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = e^{4(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{4(c_2-c_1)} = c$$

$$0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = c$$

$$x^2\cdot y^2 = c - 0,5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2}\left(c - 0,5x^4\right)$$

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{c - 0,5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -\frac{1}{x}\sqrt{c-0,5x^4}\right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

لومړی) $x + y = y'.x$

دلته $y = x.z$ سبستیچیوشن کیږي او د په توانقاعدې له مخی dy / dx جوړوو او ړدو $dy = z.dx + x.dz$.اوس د بنیبدلو له لارې x , dx او dz د مساواتو په دواړولورو خانله کیږي.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \quad \blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{x}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اووبنتونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیکرالیږي.د اینتیکر-یشنشابتي رایوخاي کیږي.

دا لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی.

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \quad \blacktriangleright c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto x(\ln|x| + c) \rangle$$

بیلګه ۲ : $(x^2 + y^2).dx = xy.dx$

سبستیچیوشن یا د اووبنتونکو بدلون $y = x.z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره dy / dx جوړوو او پردو dy = z.dx + x.dz .

د مساوات بڼه بدلون سره x,dx همداسی z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

د اوښتونکو، داوړو لورو ته له بېلولو وروسته مساوات اینتیګرالیږي.

$$(x^2+y^2)\,dx = x\cdot y\cdot dy$$

$$x^2\cdot dx + y^2\cdot dx = x\cdot y\cdot dy$$

$$\blacktriangleright\ y = x\cdot z \Rightarrow y^2 = x^2\cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$$

$$x^2\cdot dx + x^2\cdot z^2\cdot dx = x\cdot x\cdot z(z\cdot dx + x\cdot dz)$$

$$dx + z^2\cdot dx = z^2\cdot dx + z\cdot x\cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z\cdot dz$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int z\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بیاد z^2 په ځاي y^2/x^2 ځاي په ځاي کیږي، د $2(c_2 - c_1)$ لپاره c پردو.

لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوڅ دی.

$$2\cdot\ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \quad \blacktriangleright\ z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2\cdot\ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2\cdot\ln|x| + c)$$

$$y = x\sqrt{2\cdot\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\langle x \mapsto x\sqrt{2\cdot\ln|x| + c}\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ $y' = (y/x) - (y^2 / x^2)$

سبستیچیوشن(د) په ځای ایښول

$y = x \cdot z$ او $y^2 = x^2 \cdot z^2$ د خلقاعدې

سره dy / dx جوړوو او ړدو

$dy = z.dx + x.dz$

د مساوات د ښي بدلون له لارې x,dx

همداسې z, dz په دواړو لوروخانله کوو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$\frac{z \cdot dx + x \cdot dz}{dx} = \frac{x \cdot z}{x} - \frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}$$

$$z + \frac{x \cdot dz}{dx} = z - z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

د اووښتونکو له بیلولو وروسته

مساوات ایتیګرالوو.

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

د z لپاره بیرته y/x ږدو او

ایتیګریشنثابتی رایوځاي کوو.

$$\frac{1}{z} + c_1 = \ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$c_2 - c_1 = c$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

د مساوات د y پسې اوبی مو

ټولیز اوبې f ته بیايي.

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x}{\ln|x| + c} \right\rangle$$

بیلګه ۴ : $y' \cdot (y - x) = y$

(د) په ځاي ږدو $y = x.z$ ،

د خلقانون سره dy / dx جوړوو

مساوات بڼیبدلو سره $x.dx$ همداسی

z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

$$dy(y - x) = y \cdot dx$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)(x \cdot z - x) = x \cdot z \cdot dx$$

$$x \cdot z^2 \cdot dx - x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot z \cdot dz - x^2 \cdot dz - x \cdot z \cdot dx = 0$$

$$z^2 \cdot dx - z \cdot dx + x \cdot z \cdot dz - x \cdot dz - z \cdot dx = 0$$

$$dx(z^2 - 2z) + x \cdot dz(z - 1) = 0$$

د اووښتونو خانلونی وروسته

دواړه خواوباینتیګرالوو.

نو باور لري

$\int [f'(x) / f(x)].dx = \ln[f(x)] + C$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z - 1}{z^2 - 2z} dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z} dz = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2}\ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2 \cdot \ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

(د) په ځایونه y = x. z

$$\blacktriangleright\ y = x \cdot z$$

د z = y / x اینسوونی سره په

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

ځتې راګرځول کیږي.

$$\ln\left|x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)\right| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

وریسی اوبیونه مو فنکش-
برابرون ته بیایي، کوم چی یواځي
ایمپلیلیخیت انځوریدلی شي.

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1+c_2)}$$

$$\blacktriangleright e^{-2(c_1+c_2)} = c$$

$$\underline{y^2 - 2xy = c}$$

۱ . ۲ . ۳ لاینې دیفرنځیال مساوات

د لمړي نظم لاینې دیفرنځیالمساوات
لاندې ، هغه مساوات پوهیږو، چی y
او 'y په ۱ - ام ګراد کی ، دا په دې
مانا چی لاینې وي، ولرې.دا شرطونه
داوبښتونکي x لپاره باور نه لري.
دلته F(x) او f(x) د x فنکشنونه
یا بلواك دي او یا ثابتی.

$$allgemein: \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = F(x)$$

Beispiele:

- $y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$
- $y' \cdot x = x \cdot \sin x - y$
- $y' + x^2 = x^4 \cdot y$

د لاینې دفرنځیالمساوات اوبیونی لپاره کیدی شي، چی بیلابیلی همغه ارزښتیز
متودونه وکارول شي.

د برنولي (Bernoulli) متود له مخی اوبیونه

$$y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

۱ - سبستیچیوشنوو y = u(x).v(x) له
دي ځخه دخلقاعدي له لارې لاس ته راځي

$$\blacktriangleright y = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

د y او ' y لپاره ارزښتونه په دفرنځیا-
لمساوات کې کینول کیږي

$$\Rightarrow u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - u(x) \cdot v(x)\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – لوېي u(x) همداسی v(x) له نوکانو راوځي

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

۳ – د u(x) همداسی v(x) لپاره د ځنګشمیرنی سره یو ترم غوښتل کیږي، کوم چې نوکترم [dv / dx -(2/x)v(x)] او له دې سره د u خلووني یا فاکتور صفر کیدی شي .

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)=0$$

$$\frac{dv}{v(x)}=\frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v(x)}=2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)|+c_1=2\cdot\ln|x|+c_2$$

$$\ln|v(x)|=\ln x^2+c_2-c_1$$

دا د $v(x) = x^2$ لپاره حالت دی، د نیونی $c_2 - c_1 = 0$ لاندې

$$v(x)=x^2\cdot e^{c_2-c_1}\blacktriangleright c_2-c_1=0$$

$$v(x)=x^2$$

د v(x) لپاره راپیدا ارزښت، دا په دې مانا چې x^2 په مساوات کې کېښوول شي.له v(x) سره چې ځل [u(x)[dv/dx- 2v(x) / x په صفر برابر شي یو پاتی غړی راکوي، له کوم سره چې du همداسی x,dx په دواړو خواو ځانله کیدی شي.

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}\blacktriangleright v(x)=x^2$$

$$u(x)\cdot\quad 0\quad +x^2\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x^3}$$

۴ – له پاتی غړي څخه u(x) د اینتیګرال کولو له لارې تاکل کدی شي.

$$\int du=\int\frac{x+1}{x^3}\,dx$$

$$\int du=\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx$$

$$u(x)=-\frac{1}{x}+c_1-\frac{1}{2x^2}+c_2\quad\blacktriangleright c_1+c_2=c$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

۵ – په وتلمساوات y = u(x).v(x) کې راپیدا ارزښتونه کیښوول کیږي :

u(x) = -(1/x)-(½x²)+c;v(x) =x²

$$y=\quad u(x)\quad\cdot v(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c\right)\cdot x^2$$

$$=-x-\frac{1}{2}+cx^2;\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x\mapsto cx^2-x-\frac{1}{2}\,\middle|\,c\in\mathbb{R}\right\rangle$$

لاس ته راوړنه یې د ورکړ شوي اینتیګر المساوات ټولیز اوبیونه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاګرانژ Lagrange متود له لارې اوبیونه

همدا بیلګه به اوس ددوم یعنی لاګرانژ له متود وشمیرل شي.

۱ - خاي په خاي کوو F(x) = 0 او راپاتی پاتی مساوات $y' - y.f(x) = 0$ د ورسره بلدمتود د اوبښتونکو بیلولو له لارې اوبی کوو. د اینتیګریشن ثابطی پهخاي، چی ګټور دي لوګاریتم ټاکو، چی دا لوګاریتم بیا له منځه ځي. $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ثابته C په لنډ شوي هوموجین مساوات $y' - y.f(x)$ کی ثابته نه ده، بلکه د x یو فنکشن دی.

۲ - لاس ته راوړی مساوات د y لپاره د ځل یا ضرب قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

۳ - د y او 'y دواړه ټوټه اوبیونی په سرچینز مساوات کی خاي په خاي کیږي او مساوات و dC(x) / dx پسی اوبی کیږي.

۴ - د اینتیګرالولو لا لارې C(x) لاس ته راوړ لکیږي.

۵ - په مساوات $y = x^2.C(x)$ کې د C(x) لپاره ارزښت کیښول کیږي او مساوات ساده کیږي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y\cdot f(x) = F(x) \blacktriangleright F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\cdot\frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = 2\cdot\ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2\cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx} - x^2\cdot c(x)\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\cdot c(x) - \frac{2}{x}\cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \blacktriangleright k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k;\ k \in \mathbb{R}$$

$$y = x^2\cdot c(x)$$

$$= x^2\cdot\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k\right)$$

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د لاګرانژ اوبیونی متود.

$$y = -x - \frac{1}{2} + k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto -kx^2 - x - \frac{1}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلګه: د ۱ -ام نظم مساوت y' - ay = x د لانګرانژ او برنولي متودو له لارې اوبی کړی!

الف - (د) پۀ ځاي اېښوونی (سبستیچیوشن) y = u.v له لارې او مناسب رابیلیدنی ته dy / dx=u.(dv/dx)+ v(du/dx)

$$y' - ay = x \blacktriangleright y = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - a \cdot u(x) \cdot v(x) = x$$

$$u(x)\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - a \cdot v(x)\right] + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x$$

ب - u(x) له نوکانو راوځي

پ- په نوکانو کی ترم باید صفر شي، چی د u اود نوکانو ځل صفر شي.د اینتیګرالولو سره لویه v(x) ټاکل کیږي.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - a \cdot v(x) = 0$$

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v(x)} = a \cdot \int \mathrm{d}x$$

$$\ln|v(x)| + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln|v(x)| = ax + c_2 - c_1$$

$$v(x) = \mathrm{e}^{ax + c_2 - c_1}$$

$$= \mathrm{e}^{ax} \cdot \mathrm{e}^{c_2 - c_1} \blacktriangleright c_2 - c_1 = 0$$

$$= \mathrm{e}^{ax}$$

ت - د v(x) لپاره دا راپیدا ترم ځاي په ځاي کیږي او د اینتیګرال کیدو له لارې u لاس ته راځي.
د اینتیګرال اوبی د ټوټه اینتیګرال له لارې پیدا کیږي.

$$u(x) \cdot [0] + \mathrm{e}^{ax} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x$$

$$\int \mathrm{d}u = \int \frac{x}{\mathrm{e}^{ax}}\,\mathrm{d}x$$

$$u(x) = -\frac{ax + 1}{a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}} + c$$

ت - لاس ته راوړی ارزښت په مساوات y = u.v کی کیښوول کیږي.
لاس ته راوړنه د برنولي پسي ټولیز اوبی دی

$$y = u(x) \cdot v(x) = \left(-\frac{ax + 1}{a^2 \cdot \mathrm{e}^{ax}} + c\right) \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

$$y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c \cdot \mathrm{e}^{ax}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto c \cdot \mathrm{e}^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف – د لاگرانژ پسی بنی لور
په صفر مساوي گیښول کیږي
او dx همداسی dy, y په دواړو
لورو ځانله کیږي.
راپاتی مساوات dy / y = a.dx
اینتیگرالیږي، د y پسی بڼه–
بدلیږي او $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ږدو.

$$y' - a\cdot y = x \blacktriangleright x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - a\cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = a\cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = a\cdot \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{ax}\cdot e^{\ln|c(x)|}$$

$$= e^{ax}\cdot c(x) = u(x)\cdot v(x)$$

ب – د y لپاره برابرون د ځل–
قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

$$y' = e^{ax}\cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x)\cdot a\cdot e^{ax}$$

پ – د y او 'y لپاره ټوټه اوبیوني
په پیلبرابرون کی کیښول کیږي.
داسی ودیز برابرون د dc(x)
پسی اوبی کیږي له دې سره
a.e^ax . C(x) له منځه ځي

$$y' \qquad -a\cdot y \qquad = x$$

$$e^{ax}\cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x)\cdot a\cdot e^{ax} - a\cdot e^{ax}\cdot c(x) = x$$

$$e^{ax}\cdot \frac{dc(x)}{dx} = x$$

ت ۰ ارزښت C(x) د اینتیگر–
الولو له لارې لاس ته راځي

$$\int dc(x) = \int \frac{x}{e^{ax}}\, dx$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2\cdot e^{ax}} + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2\cdot e^{ax}} + k;\ k\in\mathbb{R}$$

ټ – لاس ته راوړلی ارزښتونه
په مساوت
y = u(x) v(x) e^ax .C(x)
کی ږدو
نتیجه د لاگرانژ پسی تولیز اوبی دی.
دا د برنولي د نتیجی سره سرخوري.

$$y = e^{ax}\cdot c(x)$$

$$= e^{ax}\cdot\left(-\frac{ax+1}{a^2\cdot e^{ax}} + k\right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k\cdot e^{ax};\ k\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto k\cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \middle| k\in\mathbb{R}\right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: مساوات y' + y/x = sinx د برنولي متود سره اوبی کړی.

(د) په ځایکو y = u(x).v(x) اوy او y' په دفرنځیالبرابرون کی ږدو

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$\blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

$$u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{u(x)\cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v(x)}{x}\right) + v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

نوکترم په 0 سره برابر ږدو اوv شمیری.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{v(x)} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی
v(x)(du/dx) = sin x

$$\ln|v(x)| + c_1 = -\ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|v(x)| = \ln|x^{-1}| + \ln|c|$$

د c = 0 له امله لاس ته راځي:
v(x) = 1 / x

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot c^{c} \blacktriangleright c = 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

له پاتبرابرون څخه u(x) د اینتیګرالولوله لارې تاکل کیږي

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sin x$$

$$\int \mathrm{d}u = \int x\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x\cdot\cos x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x\cdot\cos x + k;\ k\in\mathbb{R}$$

په (x). y = u(x) کی لاس ته راوړل شوي ارزښتونه د u اوv لپاره ځاي په ځاي کړی.
لاس ته راوړنه د برنولي پسی د ورکړ شوي مساوات ټولیز اوبیدی.

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x\cdot\cos x + k)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x} \,\middle|\, k\in\mathbb{R} \right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه : مساوات $y' + y = e^{-x}$ د لاګرانژ د متود له لارې اوبې کړې.

ړدو $F(x) = e^{-x} = 0$ او پاتې مساوات د اووښتونو د بېلولو له لارې اوبې کوو.

$$y' + y = e^{-x} \blacktriangleright e^{-x} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

د اینتیګریشنثابتو په څیر کېښوول کیږي $c - c = \ln|c(x)|$ او y تاکو د خلقاعدې سره y' شمیرل کیږي

$$\ln|y| + c_1 = -x + c_2 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$
$$\ln|y| = -x + \ln|c(x)|$$
$$y = e^{-x} \cdot c(x)$$
$$= u(x) \cdot v(x)$$
$$y' = \frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

د y او y' لپاره برخ اوبیونی په پیلمساوات کی کېښوول کیږي او $c(x) . e^{-x}$ او e^{-x} لرې کیږي. د اینتیګریشن له لارې $c(x)$ تاکل کیږي.

$$\begin{matrix} y' & + & y & = e^{-x} \end{matrix}$$
$$\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot c(x) = e^{-x}$$
$$\int dc(x) = \int dx$$
$$c(x) + k_1 = x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$
$$c(x) = x + k;\ k \in \mathbb{R}$$

په مساوات $y = e^{-x} . (x)$ کې $c(x)$ کېښوول کیږي. نتیجه د لاګرانژ پسی تولیز اوبیونه ده

$$y = e^{-x} \cdot c(x) \blacktriangleright c(x) = x + k$$
$$= e^{-x}(x + k);\ k \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \cdot - e^{-x}(x + k) | k \in \mathbb{R} \rangle$$

تمرینونه

۱ . ۲ د لمړینظم دفرنځیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنځیالمساوات د بیلوشوو اوښتونو سره

د لاندې دفرنځیالمساوات لپاره تولیزبن اوبیونیورکړې

1. $y' = \frac{y}{2a}$
2. $y' = axy$
3. $y' - 1 = x^2 + x^4$
4. $y' - x^3 = y - x^3$
5. $\frac{y'}{2x} = y^2$
6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

7. $2xy^2 = y'$

8. $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

10. $x^2 + 2x = y'$

11. $xy' = y \cdot \ln y$

12. $(1 - x^2)\,dy + xy \cdot dx = 0$

13. $y' = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

14. $y' = e^x y$

15. $\sqrt{y'} = y'x$

16. $y' = (yy')^2$

17. $dy = \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

18. $y' = \frac{x^2 \sqrt{x^2 + 4}}{y^2 \sqrt{y^2 + 9}}$

19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-}$

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 y^3$

23. $(x + y)^2 = y'$

24. $y'^2 y = x^2 y' - y'$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

26. $y' \cdot \mathrm{Arcsin}\, y = x^2$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

28. $y \cdot \ln x = y'$

29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$

30. $\frac{\mathrm{Arsinh}\, x}{\mathrm{Arcosh}\, y} = y'$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساوات د هوموجین اووښتونکو یا واریابلو سره

لاندې دفرنځیالمساوات اوبې کړی

1. $y'x = -(x + y)$

2. $y'x = y$

3. $y' = \frac{x + y}{x}$

4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$

5. $y'xy = y^2 - x^2$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

7. $dy \cdot x = (y - x)\,dx$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan \frac{y}{x}$

9. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

10. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$

11. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$

12. $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

14. $y^2 + (x^2 - xy)\,y' = 0$

15. $y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$

18. $y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$

19. $\frac{2y(y - x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$

20. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۲ . ۳ لاینې دیفرنځیالمساوات

لاندې دیفرنځیالمساوات د برنولي او لاګرانژ متودونو سره اوبې کړی.

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$	**2.** $y' = e^x - y$	**3.** $y' - y = x^2 - 1$
4. $y' = e^{3x} - 2y$	**5.** $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$	**6.** $y'x = x \cdot \sin x - y$
7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$	**8.** $y' + ay = b \cdot e^{cx}$	**9.** $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$
10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$	**11.** $y' = a + bx + cy$	**12.** $xy' + 1 = e^x + y$
13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$	**14.** $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$	**15.** $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$
16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$	**17.** $y'x^2 + y = x$	**18.** $y' + \frac{1}{1+x}y + x^2 = 0$
19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$	**20.** $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$	**21.** $y' - 2y = 3 - x$

۱ . ۳ د دویم نظم دیفرنځیالمساوات

د دویم نظم دیفرنځیالمساوات لاندې یو مساوات پوهیږو، چې $y'' = d^2y / dx^2$ د خورا جګ دفیرنځیالکوشنت یا دفیرنځیالویش په څیر ولري، د دې ترځنګ کیدی شي $y' = dy / dx$. x او y رامنځ ته شي.

د دیفرنځیالمساواتو په دې پیلونی په چاپیریال کی کیدی شي ، چی لنډ یو څو د دویم نظم دیفرنځیالمساوات او د هغو کارونه یا استعمال باندې خبرې وشي.

د $y'' = f(x)$ بڼی دیفرنځیالمساوات

بېلګه:

Beispiel:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y''\,dx = \int -\sin x\,dx$$

$$y' = \cos x + c_1\,;\ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y'\,dx = \int \cos x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$\underline{\underline{y = \sin x + c_1 x + c_2\,;\ c_2 \in \mathbb{R}}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto -\sin x + c_1 x + c_2 | c_1\,;\ c_2 \in \mathbb{R} \rangle}}$$

د اوبیونی تلنه: د رابیلیدنی د له منځه وړلو د اوبیوني پرینځیپ ډیرواره اینتیګرالول دي.

الف: د برابرون دواړه لوري اینتیګرالیري

۲ – راپورته شوي دفرنځیالمساوات بیا اینتیګرالیږي.

۳ – په ورکړ شوي حالت کي له شرایطو c_1 او c_2 وټاکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی:

لمړی – $y'' = 1 / (1+x^2)$

د لمړي اینتګریشن سره لاس
ته y' راځي
بیا د y' اینتیګریشن سره y
لاس ته راځی اوله دي سره د f
تولیزه اوبیونه

$$\int y''\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$y' = \operatorname{Arctan} x + c_1$$

$$\int y'\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x + c_1 \cdot \int \mathrm{d}x$$

$$y = x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 = c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

دویم – $y'' = x^2 + x + 1$

لمړی اینتیګرال راکوي
ثابتي c_3 , c_4 , c_5 د اینتیګر-
یشنثابتی c_1 ته یوځاي کیږي
دویم ایتګریشن y راکوي
ثابتی c_6 , c_7 , c_8 , xc_9 ایتیګریشن
ثابتی c_2 ته رائیوځایکیږي

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x$$

$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\int y'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int x^3\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,\mathrm{d}x + c_1 \cdot \int \mathrm{d}x$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$

$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

3. $y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x) \cdot v(x) - {} + \int u'(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int x \cdot e^x\,\mathrm{d}x = x \cdot e^x - \int e^x\,\mathrm{d}x$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,\mathrm{d}x = \int x \cdot e^x\,\mathrm{d}x = \int u(x) \cdot v'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$\int y'\,\mathrm{d}x = \int x \cdot e^x\,\mathrm{d}x - \int e^x\,\mathrm{d}x + c_1 \cdot \int \mathrm{d}x$$

$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$

$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \rangle$$

د جګ نظم دف. مساوات کیدی شي کله کله په ورته توګه اوبی شي

4. $y^{(4)} = x$

$$\int y^{(4)}\,dx = \int x\,dx$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

لمړی اتیګرالونه "' y رااکوي،
دومه − "y دریمه− 'y او
څلورم انتیکریشن y راکوي

$$\int y'''\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$\int y''\,dx = \frac{1}{6}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int x\,dx + (c_2 + c_3)\int dx$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

اړوند انتیګریشنثابتی سره
رایوخاي کيږي

$$\int y'\,dx = \frac{1}{24}\int x^4\,dx + \frac{1}{2}c_1 \cdot \int x^2\,dx +$$

$$+ (c_2 + c_3)\int x\,dx + (c_4 + c_5 + c_6)\int dx$$

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6}c_1 + c_8 + (c_2 + c_3)\frac{x^2}{2} + c_9 +$$

$$+ (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

$k_1 = c_1$

$k_2 = c_2 + c_3$

$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$

$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$

$k_1 ; k_2 ; k_3 ; k_4 \in \mathbb{R}$

د لته f د ټولیز ایفنکشن دی

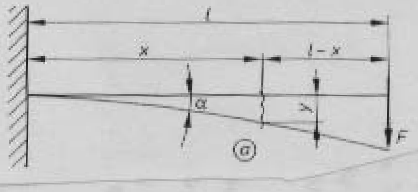
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلګه : یوه یولوریز غزول شوي باوروني کیږون y وشمیری، چی اوږدوالی l او تکیه‌وله پریوتلی زور یې F دي له میخانیك څخه د کیږون شمیرنی برابرون څرګند دی. د یو لنډ برابرون دی، چی په تخنیك د واړه ورسره بلد کیږون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځاي a کی کیږومومنت دی $-F(l-x)$

کیږونمونت = M

د نرموالی− یاالاستیخیتي مودول= E

د هواري وږونمومنت = I



(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینتیګراولو له لارې "y په 'y اوړي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = -F(l-x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

د دويم اینتیګرالونی د مخه ثابته c_1 د باروړوني مخ ته پراته شرايطو څخه شميرل کيږي. د $x = 0$ په ځاي کې جګوالي y' هم صفر دی. د دې سره ثابته $c_1 = 0$ ده.

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

$$\text{für } x = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

دويم اینتیګرولول مود يفرنشلبررابرون ته بيايي.

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} \int x\,dx - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2$$

دومه ثابته c_2 هم صفر دی، دا چی د y راګرځونه د $x = 0$ په ځاي کی د صفر سره برابره ده.

$$\text{für } x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

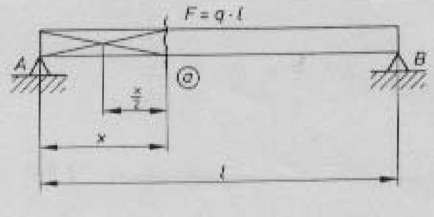
$$y = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

ماکسیمال ګرځونه د $x = l$ سره پرته ده. y_{max} د $x = l$ ځاي په ځاي کولو سره لاس ته راځي.

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \cdot \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\rangle$$

$$\text{für } x = l \Rightarrow y_{max} = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}$$

بیلګه په دوه ستنو ولاړ باروړونکي ماکسیمال ګرون وشميرئ، د ليکي بار q سره. د تير په يوه ځاي a باندې مومنتمساوات ځاي په ځاي کوو.



دا چی بار په برابرډول ويشل شوی دی، نو پرتی هر A او B هر يو يی د ټول بار نيمی دي.

$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2}\,x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Die Momentengleichung د مومنټ برابرون

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په دیفرنځیالمساوات کي کیښول کیږي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

د "y لپاره برابرون د اینتیګریشن سره و 'y ته بیرته بیول کیږي

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x \, dx + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

په x = l / 2 ځاي کی هغه لوي کږون مخ ته پروت دی، دا په دې مانا چی په دې ځاي کی تنجنت د کږونکربنی سره پرته یعنی افقي پرته ده، جګی یا جګوالی y ' = 0 مساوي په صفر دی.

$$x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

د c_1 لپاره راپیداشوی ارزښت په برابرون 'y کی ایښول کیږي. د 'y د بیا یا نوي اینتیګرلوني سره فنکشن y تاکل کیږي.

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{\cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 \, dx - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int dx$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

د x = 0 په ځاي کی راګږون y = 0 دی، د دې سره تابته $c_2 = 0$ ده.

$$x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

د x = 1 / 2 لپاره هغه خورا لوي کږون y_{max} مخ ته لرو دی، چی د ½ اینښوولو سره د خورا لوي کږون فرمول لاس ته راځي

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y''=f(y)$ فورم یا بڼي دیفرنځیال مساوات

ادبیوونتنه *Lösungsgang:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

۲ – مساوات اینتیګرایږي اوz
شمیرل کیږي.

۳ – او بیا وریسی د واریابلی
د خانلونی متود له لاري
شمیرل کیږي.

د اوبیونی په څیر ایمپلیځیت
فنکشنمساوات لاس ته راځي

بېلګې: **Beispiele:**

1. $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} \qquad \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

بېلګه **Beispiel:**

$$y'' = ay \ \blacktriangleright y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \ \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = ay$$

$$z \cdot dz = a \cdot y \cdot dy$$

$$\int z\,dz = a \cdot \int y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \ \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \ \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}} \right| + c_5$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \ \blacktriangleright y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \ \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = \frac{a}{2}$$

$$\int z\,dz = \frac{a}{2} \int dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات اینتیکریشن پسی z شمیرل کیږي

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{a}{2} y + c_2$$

$$z^2 = ay + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

وریسی د اووښتونی د خالونی متود له لاري شمیرل کیږي

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{2}{a} \sqrt{ay + c_3} + c_5 \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$(x + c_6)^2 = \frac{4}{a^2} (ay + c_3)$$

$$\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3 = ay$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{4} (x + c_6)^2 - \frac{c_3}{a}$$

د لته f تولیزه اوبیونه ده

$$\Rightarrow f = \left\langle x, -\frac{1}{a}\left[\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3\right]\right\rangle$$

2. $y'' = -\frac{1}{2} \sin y$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright y' = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\int z\, dz = -\frac{1}{2} \int \sin y\, dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \cos y + c_2$$

$$z^2 = \cos y + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{\cos y + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

د دفرنخیالمساوات اوبیونه مو یوه ناواوبیووني (نامنحل) اینتیګرال ته بیایي.

$$x + c_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y'' = f(y')$ بني دفرنخيلامساوات

Lösungsgang: اوبیونلار

$$y' = \frac{dy}{dx} = z$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} \text{ ein.}$$

۲ – راپورته شوی مساوات اینتیګرال کیږي او په z پسی ترتیبیږي

۳ – دلته z اوبی کیږي، بیا اینتیګرالول یي د دیفرنخیال–مساوات تولیز اوبیونه لاس ته راځي.

Beispiel: بیلګه:

$$y'' = ay' \quad \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$$

$$\ln z + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln z = ax + c_2 - c_1 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = e^{ax + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int e^{ax + c_3} dx$$

$$y = \frac{1}{a} e^{ax + c_3} + c_4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c_5$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle$$

Beispiele: بیلګې:

1. $y'' = y'^2$

$$y'' = y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$c_2 - c_1 = c_3$$

$$-\int \frac{dx}{x + c_3} = \int dy$$

$$-\ln|x + c_3| + c_4 = y + c_5 \quad \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$\Rightarrow y = c_6 - \ln|x + c_3|$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c_6 - \ln|x + c_3| \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. $y'' = 1 - y'^2$

$$y'' = 1 - y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - z^2$$

$$\int \frac{dz}{1 - z^2} = \int dx$$

$$\text{Artanh}\, z + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = \tanh(x + c_3) \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int \tanh(x + c_3)\, dx$$

$$y + c_4 = \ln|\cosh(x + c_3)| + c_5 \quad \blacktriangleright c_5 - c_4 = c_6$$

$$y = \underline{\underline{c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|}}$$

د لته f د تولیز اېیفنکشن دی

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)| \rangle}}$$

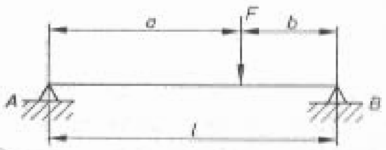
تمرینونه

۳۱ . د دوم نظم دفرنخیالمساوات لاندې دفرنخیالمساوت اوبې کړی

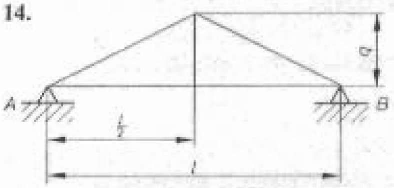
1. $y'' = \frac{1}{x}$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$
3. $y'' - x^3 = 0$
4. $y'' = x + \sin x$
5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$
6. $y'' = \tan x$
7. $y'' = \sinh x$
8. $y'' = e^{x^2}$
9. $y^{(4)} = \cos x$
10. $y'' = e^x$
11. $y^{(4)} = \sinh(2x)$
12. $y^{(5)} = \cosh(ax)$

د کږون لاین او خورا جګ یا ماکسیمال کږوونی مساوات د لاندې بارونحالت یا بار حالت یا دروندونی حالت لپاره پیدا کړی

13.

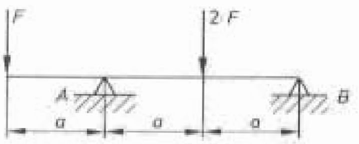


14.

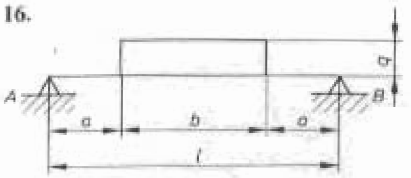


(c) ketabton.com: The Digital Library

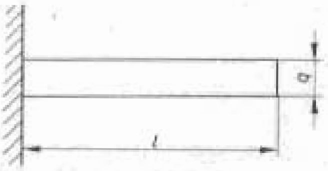
15.



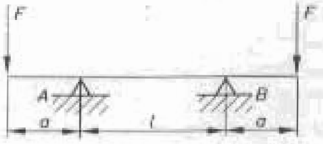
16.



17.



18.



لاندې دفرنځيالمساوات اوبی کړی

19. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

20. $y'' = a \cdot e^{y}$

21. $y^4 - y^3 y'' = 1$

22. $y'' = \frac{1}{y}$

23. $y^2 = k^2 y''$

24. $y'' = y^2$

25. $y^2 \cdot y'' = a$

26. $y'' = 6y - 4$

27. $y'' = 1 + y'^2$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

29. $y'' = e^{y'}$

30. $y'' = y'^3$

31. $y'^2 - 3y''^2 = 0$

32. $y''' + y''^2 = 0$

33. $xy''^2 = y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تمرینونو اوبیونه یا حل

۱ . ۱ بنسټکلیمی تمرینونه

1. $y''=x\cdot e^x$

$$y''=(y')'=x\cdot e^x$$

$$y'=\int x\cdot e^x\,dx$$

$$\int x\cdot e^x\,dx=e^x(x-1)+c_1$$

$$y'=x\cdot e^x-e^x+c_1$$

$$y=\int x\cdot e^x\,dx-\int e^x\,dx+c_1\int dx$$

$$y=e^x(x-1)+c_2-e^x-c_3+c_1x+c_4$$

$$c_2-c_3+c_4=c$$

2. $y''-x=0$

$$y''=(y')'=x$$

$$y'=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$y=\int (y')\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\,dx+c_1\int dx$$

$$y=\frac{1}{2\cdot 3}x^3+c_2+c_1x+c_3$$

$$c_2+c_3=c$$

$$y=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c$$

3. $2y'-\cos x=0$

$$y'=\frac{1}{2}\cos x$$

$$y=\frac{1}{2}\int \cos x\,dx$$

$$y=\frac{1}{2}\sin x+c$$

4. $x\cdot y''=3y'$

$$x\cdot y''=3y' \quad ▶\ y'=z;\quad y''=z'$$

$$x\cdot z'=3z$$

$$z'=\frac{dz}{dx}$$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=3z$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{3dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \quad \blacktriangleright z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + c$$

5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{y}\, dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln y$$

$$y = e^{\frac{1}{2}\ln^2 x} + c$$

6. $y' \cdot y + y' + x = 0$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx}(y+1) = -x$$

$$\int (y+1)\, dy = -\int x\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$c_2 = 2c_1$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$c = 1 + c_2$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{c - x^2}$$

7. $y' - x^2 = 3e^x$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2)\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy = \int (3e^x + x^2)\,dx$$

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$$

8. $\sin x - e^x = y'$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - e^x$$

$$dy = (\sin x - e^x)\,dx$$

$$\int dy = \int (\sin x - e^x)\,dx$$

$$y = -\cos x - e^x + c$$

9. $y \cdot y' = x + 1$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$y \cdot dy = (x+1) \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int (x+1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$c = 2c_1$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2x + c}$$

10. $y' \cdot y^2 = y' - x^2$

اوبیونه د y پسی اوبیور نه دی،
له دي امله ایمپلیځیت اوبیونه

$$y'(y^2 - 1) = -x^2$$

$$dy(y^2 - 1) = (-x^2)\,dx$$

$$\int (y^2 - 1)\,dy = -\int x^2\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + c$$

11. $\frac{dy}{dx} - 3x = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3x$$

$$\int dy = \int (e^x + 3x)\,dx$$

$$y = e^x + \frac{3}{2}x^2 + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. $y' - x^2 = x^2 - y'$

$$2y' = 2x^2 \quad \|:2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2\, dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

13. $\frac{dy}{dx} + \cos x = 1$

$$dy = (1 - \cos x)\, dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x)\, dx$$

$$y = x - \sin x + c$$

14. $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$c = 4c_1$$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1}\, dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$y = \pm \sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}$$

15. $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$

که دفرنځیالمساوات په x^2 ویشل کیږي، باید $x \neq 0$ وګڼل شي.
که د $x \neq 0$ لپاره اوبیونه په پام کې ونیول شي، پیژندل کیږي چې دفرنځیالمساوات د $x = 0$ لپاره هم اوبیونه پوره کوي، په دې توګه د ټول x لپاره اوبیونه پوره ده.

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1)\, dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1)\, dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x + c$$

16. $e^x \cdot y' = y$

Partikuläre Lösung: $\underline{\underline{y=0}}$ پارتیکولار اوبیونه

ساده د $y = 0$ پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.

د نورې کارونی لپاره دې $y \neq 0$ نیول شوی وي

$$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x}\,dx$$

$$\ln |y| = -e^{-x} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-e^{-x} + c_1}$$

$$= e^{-(e^{-x})} \cdot e^{c_1}$$

$$c = e^{c_1}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot e^{-(e^{-x})}}}$$

د $c = 0$ سره پارتیکولار- یا توته اوبیونه خوندي ده.

17. $y'' = 7x^3$

$$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$$

$$\int dy' = 7 \int x^3\,dx$$

$$y' = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{7}{4}x^4 + c_1\right) dx$$

$$\underline{\underline{y = \frac{7}{20}x^5 + c_1 x + c_2}}$$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$$

$$\frac{dy'}{dx} = \sin x$$

$$\int dy' = \int \sin x\,dx$$

$$y' = -\cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy = \int(-\cos x + c_1)\,dx$$

$$y = \underline{\underline{-\sin x + c_1 x + c_2}}$$

19. $3x - y'' = a$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{dy'}{dx} = 3x - a$$

$$\int dy' = \int(3x - a)\,dx$$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\int dy = \int\left(\frac{3}{2}x^2 - ax + c_1\right)dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + c_1 x + c_2}}$$

20. $y'' = y'$

Partikuläre Lösung پارتیکولار اوبیونه

ثابته = $y = a = \text{const.}$

سملاسی y = a = const د پارتیکو-
لار اوبیونی په څیر پیژندل کیږي.
د پسی اوبیونی لپاره ټیك د0 =|y′
سره فنکشن رانیول کیږي، دا په
دې مانا چی ناثابت فنکشنونه

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx$$

$$\ln|y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln|y'|} = e^{x + c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$e^{c_1^*} = c_1$

$$y' = c_1 \cdot e^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=c_1\cdot e^x$$

$$\int dy=\int c_1\cdot e^x\,dx$$

$$y=\underline{\underline{c_1\cdot e^x+c_2}}$$

په روښانه توګه د $C_1=C_2=0$ همداسي د $C_2=0$ سره پورتني پارتيکيولار اوبي په تولیز اوبي کې دننه یا خوندي دي.

21. $y''=x\cdot\cos x$

$$\frac{dy'}{dx}=x\cdot\cos x$$

$$\int dy'=\int \underset{u_1}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\cos x\,dx}_{dv_1}$$

$$y'=x\cdot\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\int dy=\int(x\cdot\sin x+\cos x+c_1)\,dx$$

$$y=\int \underset{u_2}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\sin x\,dx}_{dv_2}+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+\sin x+c_1x+c_2$$

$$=\underline{\underline{2\sin x-x\cdot\cos x+c_1x+c_2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۲ د لمړي نظم ديفرنځيالمساوات ته تمرينونه

۱ . ۲ . ۱ ديفرنځيالمساوات د بېلوشوو اووښتونکو سره

1. $y' = \frac{y}{2a}$

$y = 0$ :: پارتيکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$

$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$

$\ln |y| = \frac{x}{2a} + c_1$

$e^{\ln |y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$

$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$

$c = e^{c_1}$

$y = c \cdot e^{\frac{x}{2a}}$

پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبی هم دننه دي(C = 0)

2. $y' = axy$

$y = 0$: پارتيکولار اوبيونه

نيونه: Voraussetzung: $y \neq 0$

$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$

$\int \frac{dy}{y} = a \int x \, dx$

$\ln |y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$

$e^{\ln |y|} = e^{\frac{a}{2}x^2 + c_1}$

$= e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$y = c \cdot e^{\frac{a}{2}x^2}$

د c = 0 سره پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبيونی کی دننه دی.

3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + x^4$$

$$\int dy = \int (1 + x^2 + x^4)\, dx$$

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + c$$

4. $y' - x^3 = y - x^3$

د دي ديفرنځيالبرابرون اوبې د تيرتمرين ۱
څخه د $a = 1/2$ سره، لاس ته راوړل کيږي

$$y' = y + x^3 - x^3$$

$$y' = y$$

$$y = c \cdot e^x$$

5. $\frac{y'}{2x} = y^2$

زيګولارواوبيونه : $y = 0$

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = 2 \int x\, dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

د ديفرنځيالمساوات اوبيونه يو
زينګولار اوبې لري.

6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

زينګولار اوبيونه: $y = 0$

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

ساده پيژندلکيږي، چې اوبې
$y = 0$ ، زيګولار اوبې دی چې
دا به وروسته وښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$= -\frac{1 - c \cdot x}{x}$$

$$y = \frac{x}{1 - c \cdot x}$$

$$y = 0$$

7. $2xy^2 = y'$

د دي ديفرنځيالمساوات اوبی د تر مخه تير تمرين ۵ څخه رانيول کيدی شي

زيکولارزوبيونه :: $y = 0$

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

8. $y' = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$$

$$a^2 y \cdot dy = b^2 x \cdot dx$$

$$a^2 \int y\, dy = b^2 \int x\, dx$$

$$a^2 \cdot \frac{y^2}{2} = b^2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 + 2c_1$$

$c = -2c_1$

اوبی په ايمپليځيته بڼه (اهرامغوځی)

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = c$$

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\int dy = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$y = 2 \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10. $x^2+2x=y'$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2x$$

$$\int dy=\int (x^2+2x)\,dx$$

$$y=\frac{x^3}{3}+x^2+c$$

11. $x\cdot y'=y\cdot \ln y$

د تمرینورکړي څخه ورکول کیږي (د ln y له امله)، چې y > 0 باید باور ولري. د دیفرنځیالمساوات پسې کاروني لپاره یواځي x |= 0 نیول شوي.

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad f(x)\triangleq \ln y.$$

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y\cdot\ln y$$

نیونه : Voraussetzung: $x\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y\cdot\ln y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y\cdot\ln y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln y|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln y=c\cdot x$$

$$e^{\ln y}=e^{c\cdot x}$$

$$y=e^{c\cdot x}$$

اوبی دیفرنځیالمساوات د x = 0 لپاره هم پوره کوي، چې له دې امله دا ټولیز اوبی دی

پارتیکولار اوبیونه : $y=0$

12. $(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0$

د پارتیکیوالر اوبی په څیر y = 0 سملاسي پیژندل کیږي. ددیفرنځ-یالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی بایدy |= 0 ونیول شي او1 - x |= 0 دا په دې مانا چې y.(1 - x)²≠0

نیونه : Voraussetzung: $y\cdot(1-x^2)\neq 0$

$$(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0 \quad \|:y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} + c_1$

$= (e^{\ln|1-x^2|})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$

$y = c \cdot \sqrt{|1-x^2|}$

$e^{c_1} = c$

د $c = 0$ سره په دې کې پارتیکیو-
لار اوبی دننه یا خوندي دی.
د $1 - x^2 = 0$ لپاره،دا په دې مانا ،
چې $|x| = 1$ اوبی هم دیفرنخیالمسا-
وات پوره کوي، داسې چې دا ټولیز
اوبی انخوروي.

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$

$y = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$

$= -\int \frac{dz}{z}$

$= -\ln|z| + c$

$= -\ln|\sin x + \cos x| + c$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x)\, dx$

14. $y' = e^x \cdot y$

$y = 0$: پارتیکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$

$\int \frac{dy}{y} = \int e^x\, dx$

$\ln|y| = e^x + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$y = c \cdot e^{(e^x)}$

د $c = 0$ سره په دې کې ټوټه
اوبیونه خوندي ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

15. $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

زیکولار اوبیونه: $y' = 0$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0, \quad x \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x$$ ▶ quadrieren مربع کونه

$$1 = y' \cdot x^2$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$$

$$y = -\frac{1}{x} + c$$ ▶ für $x \neq 0$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

16. $y' = (y \cdot y')^2$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ زینکولاراوبی

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = y^2 \cdot y'$$

$$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\int y^2 \, dy = \int dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$$

$c = 3c_1$

$$y = \sqrt[3]{3x + c}$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

$$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \, dx$$

Koeffizientenvergleich: د کوونو انډول

$$\begin{aligned}
\text{I:}\quad & A+B = 0\\
\text{II:}\quad & 2A+B+C=0\\
\text{III:}\quad & A = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I:}\quad & 1+B=0 \Rightarrow B=-1\\
\text{II:}\quad & 2-1+C=0 \Rightarrow C=-1
\end{aligned}$$

18. $y'=\dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتیګرالونه همغه فورم لري او د ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په پرتله ریکورزیونفرمول تاکل کیږي.

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیځیت فورم ممکن ده.

$$\int dy=\int\frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}\,dx$$

$$=\int\frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}\,dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+c$$

$$\underline{\underline{\int dy=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+c}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2\sqrt{y^2+9}\,dy=\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$$

$$\frac{y}{4}\sqrt{(y^2+9)^3}-\frac{9}{4}\int\sqrt{y^2+9}\,dy=$$

$$=\frac{x}{4}\sqrt{(x^2+4)^3}-\frac{4}{4}\int\sqrt{x^2+4}\,dx \quad \|\cdot 4$$

$$y\sqrt{(y^2+9)^3}-9\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+9}+\frac{9}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|\right]=$$

$$=x\sqrt{(x^2+4)^3}-$$

$$-4\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|\right]+c$$

$$y(y^2+9)\sqrt{y^2+9}-\frac{9}{2}y\sqrt{y^2+9}-\frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|=$$

$$=x(x^2+4)\sqrt{x^2+4}-2x\sqrt{x^2+4}-$$

$$-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c$$

$$\frac{y}{2}(2y^2+9)\sqrt{y^2+9}-\frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|=$$

$$=x(x^2+2)\sqrt{x^2+4}-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c$$

$$\underline{\underline{y(2y^2+9)\sqrt{y^2+9}-81\ln|y+\sqrt{y^2+9}|=}}$$

$$\underline{\underline{=x(2x^2+4)\sqrt{x^2+4}-16\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19. $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

پارخیل اینتیګرال

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبی په دې کې خوندي دی.

Partikuläre Lösung: $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$

▶ $x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \underset{\underset{u}{\downarrow}}{x} \cdot \underbrace{\sin 2x\,dx}_{dv}$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\,dx$$

$$\ln|y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x} + c_1$$

$$= e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)}$$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

$$dx = \ln y\,dy$$

$$\int dx = \int \ln y\,dy$$

$$x = y(\ln y - 1) + c$$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$

دا چې دواړه اینتیګرالونه برابر فورم لري بسیا کوي، چې یو وشمیرل شي بدلون (سبستیچیوشن)

$$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \text{Arctan}\, t + c$$

$$= \text{Arctan}\, e^x + c$$

اوبی په ایمپلیځیتفورم

$$\text{Arctan}\, e^y = \text{Arctan}\, e^x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$

$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$

$\underline{\underline{y=0}}$:پارتیکولار اوبیونه

دریمه ریښه یی راوستل کیږي.
یا یی ۳ . جذر نیول کیږي

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$

$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$

$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}} dx$

$\ln |y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$

$e^{\ln |y|} = e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + c_1} = e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2}}}}$

د $c = 0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کی خوندي دی.

23. $(x+y)^2 = y'$

لمړی په سبستیچیوشن پیل کوو.

$z = x + y; \quad y = z - x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - 1$

$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$

$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$

$\frac{dz}{z^2+1} = dx$

$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$

$\text{Arctan } z = x + c$

$z = \tan(x+c)$

$x + y = \tan(x+c)$

$y = \underline{\underline{\tan(x+c) - x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24. $y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ ـ ډیګو لاراو دیوله

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ نیونه

$\Rightarrow$ په y' ویشنه اجازه لري

$y' \cdot y = x^2 - 1$

$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$

$\int y\,dy = \int (x^2 - 1)\,dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad \| \cdot 2$

$c = 2c_1$

$y^2 = \frac{2}{3} x^3 - 2x + c$

$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3} x^3 - 2x + c}$

$y = a = \text{const.}$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

$y'^2 = x^2 + 2x$

$y' = \pm \sqrt{x^2 + 2x}$

$= \pm \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$

$= \pm \sqrt{(x+1)^2 - 1}$

$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{(x+1)^2 - 1}$

سبستیچیوشن :

$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$

$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$

$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$

$\int dy = \pm \int \sqrt{(x+1)^2 - 1}\,dx$

$y = \pm \int \sqrt{z^2 - 1}\,dz$

$= \pm \left[\frac{z}{2} \sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| \right] + c$

$y = \pm \frac{1}{2} [(x+1) \sqrt{x^2 + 2x} -$

$- \ln |x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}|] + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

26. $y' \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$

پارخیل(توټه–) اینتیګرال

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$\frac{dy}{dx} \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$$

$$\int \underbrace{\text{Arcsin}\, y}_{u}\, \underset{dv}{dy} = \int x^2\, dx$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{3} x^3$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c$$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون (سبستیچیوشن)

$x^2 = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$

$$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$$

$$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^z\, dz$$

$$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\ln(e^y) = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

28. $y \cdot \ln x = y'$

$y = 0$: پارتیکولار اوبیونه

نیوونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = x\cdot\ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x(\ln x-1)+c_1} = e^{x(\ln x-1)}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c\cdot e^{x(\ln x-1)}}}$$

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبی په دې کې خوندي دی.

29. $x\cdot\sinh x = y'\cdot\cosh y$

پارځیل اینتیګرال

$$x\cdot\sinh x = \frac{dy}{dx}\cdot\cosh y$$

$$\int\cosh y\cdot dy = \int\underset{u}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underbrace{\sinh x\,dx}_{dv}$$

$$= x\cdot\cosh x - \int\cosh x\,dx$$

$$\sinh y = x\cdot\cosh x - \sinh x + c$$

$$y = \underline{\underline{\operatorname{Arsinh}[x\cdot\cosh x - \sinh x + c]}}$$

30. $\dfrac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$

پارځیل یا پارشل اینتیګرال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y}$$

$$\int\underbrace{\operatorname{Arcosh} y}_{u_1}\,\underbrace{dy}_{dv_1} = \int\underbrace{\operatorname{Arsinh} x}_{u_2}\,\underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y\cdot\operatorname{Arcosh} y - \int\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,dy =$$

$$= x\cdot\operatorname{Arsinh} x - \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$\underline{\underline{y\cdot\operatorname{Arcosh} y - \sqrt{y^2-1} = x\cdot\operatorname{Arsinh} x - \sqrt{x^2+1} + c}}$$

۱ . ۲ . ۳ دیفرنځیالمساوات د هوموجینو اووبنتونکو سره

پام وړ : یو څو د دې اوبیونو دیفرنځیالمساوات د هوموجین واریابلو سره دیفرنځیا- لمساوات نه دي، مګر دا اجازه ورکوي یا ځان دې ته پرېږدي، چې د سبستیچیوشن $y = x.z$ له لارې اوبی شي (تمرین ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰)

1. $y'\cdot x = -(x+y)$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$

$dy\cdot x = -(x+y)\,dx$

$(z\cdot dx + x\cdot dz)x = -x\cdot dx - x\cdot z\cdot dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \neq 0$: پس په x ویشنه اجازګری

$$z \cdot dx + x \cdot dz = -dx - z \cdot dx$$
$$x \cdot dz = dx(-1-2z)$$
$$-\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2}{1+2z}\,dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z| = \ln|x| + c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| = \ln|x| + c_1$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| - \ln|x| = c_1$$
$$\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \frac{2}{2}\ln|x| = -c_1$$
$$\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \ln x^2\right] = -c_1 \quad \| \cdot 2$$
$$\ln x^2 \cdot \left|1+\frac{2y}{x}\right| = -2c_1$$
$$\ln|x^2+2yx| = -2c_1$$
$$e^{\ln|x^2+2yx|} = e^{-2c_1}$$
$$x^2+2yx = c$$

$$e^{-2c_1} = c$$

$$y = \frac{c-x^2}{2x}; \quad x \neq 0$$

$y=0$ :: پارتیکولار اوبیونه

2. $y' \cdot x = y$

دا دیفرنځیلامساوات په ساده توګه د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له لارې اوبی کیدی شي.

نمونه: Voraussetzung: $y \neq 0,\ x \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\ln|y| = \ln|x| + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$y = c \cdot x$

په دي اوبيونوکي پارتيکيولاراوبيونی خوندي دي(د c = 0 سره) اود x = 0 لپاره هم ، دا په دي مانا، چی دا ټولیز اوبی دی.

3. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

د وظيفي ورکوني سره سم لاسی x ≠ 0 ورکوي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z)\, dx$$

$$x \cdot dz = dx$$

$$dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln|x| + c$$

$z = \dfrac{y}{x}$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

4. $y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2)\, dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\, dx$$

نیونه: x ≠ 0 له دي امله په x^2 ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1 + z^2)\, dx$$

$$x \cdot dz = (1 + z^2)\, dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan } z = \ln|x| + c$$

$$\tan(\text{Arctan } z) = \tan(\ln|x| + c)$$

$$z = \tan(\ln|x| + c)$$

$z = \dfrac{y}{x}$

$$y = x \cdot \tan(\ln|x| + c)$$

د $x \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2)\,dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2)\,dx$$

نیونه: x |= 0 له دې امله په x^2 ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)z = (z^2 - 1)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = -dx$$

$$\int z \cdot dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = -2\ln|x| + 2c_1$$

$c = 2c_1$

$$= c - \ln x^2$$

$z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x\sqrt{c - \ln x^2}; \quad x \neq 0$$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

د وظیفي ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس y |= 0 او x |= 0 باور لري.

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \| \cdot xy$$

$$xyy' = x^2 + y^2$$

$$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx \quad \| : x^2$$

$$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = dx$$

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 2\ln|x| + 2c_1$$

$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x\sqrt{\ln x^2 + c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $dy \cdot x = (y - x) \cdot dx$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$z = \frac{y}{x}$

$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$

نیونه: x |= 0 له دي امله په x ويش

$x \cdot dz + z \cdot dx = z\,dx - dx$

$x \cdot dz = -dx$

$\int dz = -\int \frac{dx}{x}$

$z = -\ln|x| + c$

$y = x(c - \ln|x|); \quad x \neq 0$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$\frac{y}{x} = z$

د وظيفي ورکړي څخه روښانه ده، چې همدا اوس x |= 0 لاس ته راځي.

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$z = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$

$dy = (z + \tan z)\,dx$

$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$

$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$

$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|\sin z| = \ln|x| + c_1$

$e^{\ln|\sin z|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$\sin z = c \cdot x$

$z = \text{Arcsin}\,(c \cdot x)$

$y = x \cdot \text{Arcsin}\,(c \cdot x)$

9. $(x + y) \cdot dx - (x - y) \cdot dy = 0$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$(x + x \cdot z) \cdot dx - (x - x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

نیونه: x ≠ 0 له دي امله په x ويش

$(1 + z)\,dx - (1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

$(1 + z)\,dx - x(1 - z)\,dz - (z - z^2)\,dx = 0$

$(1 + z^2)\,dx - x(1 - z)\,dz = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{z}{1+z^2}\right)dz$$

$$=\int\frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz \triangleq \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|x|=\operatorname{Arctan} z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+c$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\ln|x|=\operatorname{Arctan}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}+c$$

اوبیونی یواځي په ایملیخیته بنه یا فورم ورکړ شوی دی.

< $x\neq 0$ لپاره >

10. $x^2+xy+y^2=x^2\cdot y'$

$y=z\cdot x\Rightarrow dy=z\cdot dx+x\cdot dz$

$$(x^2+xy+y^2)\,dx=x^2\cdot dy$$

$$(x^2+x^2z+x^2z^2)\,dx=x^2(z\cdot dx+x\cdot dz)$$

نیونه: $x\neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(1+z+z^2)\,dx=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(1+z^2)\,dx=x\cdot dz$$

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{Arctan} z=\ln|x|+c$$

$$\tan(\operatorname{Arctan} z)=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\tan(\ln|x|+c)$$

$z=\dfrac{y}{x}$

$$y=x\cdot\tan(\ln|x|+c)$$

< $x\neq 0$ لپاره >

11. $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$y'\cdot(3x^2-y^2)=2xy$$

$$dy\cdot(3x^2-y^2)=2xy\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3x^2-x^2z^2)=2x^2z\cdot dx$$

نیونه: $x\neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3-z^2)=2z\cdot dx$$

$$3x\cdot dz+3z\cdot dx-xz^2\cdot dz-z^3\,dx=2z\cdot dx$$

$$(3x-xz^2)\,dz+(z-z^3)\,dx=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x(3-z^2)\,dz=(z^3-z)\,dx$$

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{3-z^2}{z^3-z}=\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}$$

$$=\frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}$$

$$=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-1}$$

$$=\frac{A(z^2-1)+B(z-1)z+C(z+1)z}{z^3-z}$$

$$=\frac{z^2(A+B+C)+z(-B+C)-A}{z^3-z}$$

$$=\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}$$

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int \frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int \frac{dx}{x}$$

$$-3\ln|z|+\ln|z+1|+\ln|z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z|^3+\ln|(z+1)(z-1)|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z^3|+\ln|z^2-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|}=e^{\ln|x|+c_1}$$

$$=e^{\ln|x|}\cdot e^{c_1}$$

$$\frac{z^2-1}{z^3}=c\cdot x$$

$$z^2-1=c\cdot x\cdot z^3$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=c\cdot\frac{y^3}{x^2}\quad\Big\|\cdot x^2$$

$$y^2-x^2=c\cdot y^3;\quad x\neq 0$$

د اینټګرال اینټګرالونکی

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz$$

په ټوټه ماتونو ټوټه کیږي

د ضریبونو پرتله:

I: $A+B+C=-1$

II: $-B+C=0$

III: $-A=3;\ \underline{\underline{A=-3}}$

I: $-3+B+C=-1$

$$\left.\begin{aligned}B+C&=2\\ -B+C&=0\end{aligned}\right\}+ \quad \text{(II)}$$

$2C=2;\ \underline{\underline{C=1}}$

II: $-B+C=0;\ \underline{\underline{B=1}}$

$e^{c_1}=c$

$y=x\cdot z\Rightarrow z=\frac{y}{x}$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. $y'=\frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$\frac{y}{x}=z$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته

راځي دا په دي مانا ، چی z>0 هم

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz\triangleq\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=z\cdot\ln z$$

$$x\cdot dz+z\cdot dx=z\cdot\ln z\cdot dx$$

$$x\cdot dz=z(\ln z-1)\,dx$$

$$\int\frac{dz}{z(\ln z-1)}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot e^{c\cdot x+1};\quad x>0}}$$

13. $x\cdot dy-y\cdot dx=y\cdot dy$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$(x-y)\,dy=y\cdot dx$$

$$(x-x\cdot z)(x\cdot dz+z\cdot dx)=x\cdot z\cdot dx$$

نیونه: x |= 0 له دي امله په x ویش

$$(1-z)(x\cdot dz+z\cdot dx)=z\cdot dx$$

$$x\cdot dz+z\cdot dx-zx\cdot dz-z^2\cdot dx=z\cdot dx$$

$$x(1-z)\,dz-z^2\cdot dx=0$$

ورپسی نیونی :: $z\neq 0$ (d.h. $y\neq 0$)

$$\Rightarrow\frac{1-z}{z^2}\,dz=\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}\right)dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z}-\ln|z|=\ln|x|+c$$

$$-\frac{1}{z}=\ln|x|+\ln|z|+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{z}=\ln|x\cdot z|+c \quad \| \cdot z$$

$$-1=z\cdot\ln|x\cdot z|+c\cdot z$$

$$-1=\frac{y}{x}\cdot\ln|y|+c\cdot\frac{y}{x}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بنه اوبیونه

$$\frac{y}{x}(\ln|y|+c)+1=0;\quad x\neq0;\quad y\neq0$$

---

14. $y^2+(x^2-xy)y'=0$

$$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$y'(x^2-xy)=-y^2$$

$$dy(x^2-xy)=-y^2\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(x^2-x^2z)=-x^2z^2\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(1-z)=-z^2\cdot dx$$

$$x(1-z)\,dz+(z-z^2)dx=-z^2\,dx$$

$$x(1-z)\,dz=-z\cdot dx$$

وریسی نیونی : $z\neq0$ (d.h. $y\neq0$)

په z ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z}dz=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z}-1\right)dz=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|-z=-\ln|x|+c$$

$$\ln|z|+\ln|x|=z+c$$

$$\ln|z\cdot x|=z+c$$

$$z=\frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بنه اوبیونه

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+c;\quad x\neq0;\quad y\neq0$$

---

15. $y^2\cdot dx-3x^2\cdot dx+2xy\cdot dy=0$

$$y=x\cdot z \Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$0=(y^2-3x^2)\,dx+2xy\cdot dy$$

$$=(x^2\cdot z^2-3x^2)\,dx+2x^2\cdot z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x^2 ویش

$$0=(z^2-3)\,dx+2z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$0=(3z^2-3)\,dx+2xz\cdot dz$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-3(z^2-1)\,dx = 2xz\cdot dz$$

$$-3\,\frac{dx}{x} = \frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$-3\int\frac{dx}{x} = \int\frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$\int\frac{2z}{z^2-1}\,dz \triangleq \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-3\ln|x| = \ln|z^2-1| + c_1$$

$$e^{-3\ln|x|} = e^{\ln|z^2-1|+c_1}$$

$$e^{\ln|x^{-3}|} = e^{\ln|z^2-1|}\cdot e^{c_1}$$

$$e^{c_1} = c_2$$

$$x^{-3} = (z^2-1)\cdot c_2$$

$$c = \frac{1}{c_2}; \quad z = \frac{y}{x}$$

$$z^2 - 1 = \frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{c}{x^3} \quad \|\cdot x^2$$

$$y^2 - x^2 = \frac{c}{x}$$

$$\underline{\underline{y = \pm\sqrt{x^2 + \frac{c}{x}}; \quad x \neq 0}}$$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

$$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$$

$$x\cdot dy = (y + \sqrt{y^2 - x^2})\,dx$$

$$x(x\cdot dz + z\cdot dx) = (xz + \sqrt{x^2z^2 - x^2})\,dx$$

$$= (xz + x\sqrt{z^2-1})\,dx$$

نیونه: 0 =| x له دې امله په x ویش

$$x\cdot dz + z\cdot dx = z\cdot dx + \sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$x\cdot dz = \sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\ln|z + \sqrt{z^2-1}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{z^2-1}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z + \sqrt{z^2-1} = c\cdot x$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=c\cdot x \quad \| \cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2;\quad x\neq 0}}$$

په ایملیخیت فورم اوبی

17. $xy'=y(\ln y-\ln x)$

$$y=x\cdot z \Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{x}=z$$

$$x\cdot y'=y\cdot \ln\frac{y}{x}$$

$$x\cdot \mathrm{d}y=y\cdot \ln\frac{y}{x}\cdot \mathrm{d}x$$

$$x(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)=x\cdot z\cdot \ln z\cdot \mathrm{d}x \quad \|:x$$

$$x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x=z\cdot \ln z\cdot \mathrm{d}x$$

$$x\cdot \mathrm{d}z=z(\ln z-1)\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z(\ln z-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

د پوښتنوسملاسی $x>0, y>0$ لاس ته راځي دا په دې مانا ، چې $z>0$ هم

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z \mathrel{\hat=} \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,\mathrm{d}z=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot e^{c\cdot x+1};\quad x>0}}$$

18. $y\cdot \mathrm{d}x+\sqrt{4xy}\cdot \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}y$

$$y=x\cdot z \Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x$$

د پوښتنکونی خخه لاس ته راځي، چې تل $4xy\geq 0$ باید باور ولري دا په دې مانا چې $x.y\geq 0$ هم

$$y\cdot \mathrm{d}x=(x-\sqrt{4xy})\,\mathrm{d}y$$

$$x\cdot z\cdot \mathrm{d}x=(x-\sqrt{4x^2z})(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)$$

$$=(x-2x\sqrt{z})(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)$$

نیونه: $x\neq 0$ له دې امله په x ویش

$$z\cdot \mathrm{d}x=(1-2\sqrt{z})(x\cdot \mathrm{d}z+z\cdot \mathrm{d}x)$$

$$z\cdot \mathrm{d}x=x(1-2\sqrt{z})\,\mathrm{d}z+(z-2z\sqrt{z})\,\mathrm{d}x$$

$$0=x(1-2\sqrt{z})\,\mathrm{d}z-2z\sqrt{z}\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري نيوحي $\because z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,dz=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{1}{2z\sqrt{z}}\,dz-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\ln|z|=\ln|x|+c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}}=\ln|x|+\ln|z|+c$$

$$z=\frac{y}{x}\qquad -\frac{1}{\sqrt{z}}=\ln|x\cdot z|+c$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln|y|+c$$

$$0=\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|+c;\quad x\cdot y>0$$

په ايمپليشيته بنه اوبيونه

19. $\frac{2y(y-x)}{x^2-2xy+y^2}=y'$

$$y'=\frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y}{x-y}$$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$0=(x-y)\,dy+2y\cdot dx$$

$$0=(x-xz)(x\cdot dz+z\cdot dx)+2xz\cdot dx$$

نيونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ويش

$$0=(1-z)(x\cdot dz+z\cdot dx)+2z\cdot dx$$

$$0=x(1-z)\,dz+(z-z^2+2z)\,dx$$

$$0=x(1-z)\,dz+(3z-z^2)\,dx$$

$$-x(1-z)\,dz=(3z-z^2)\,dx$$

$$\int\frac{1-z}{3z-z^2}\,dz=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)}\,\mathrm{d}z = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

یو پارشلماتبیلونه یا تجزیه ساده ورکوي

$$A=\frac{1}{3}; \quad B=\frac{2}{3}.$$

$$\blacktriangleright \int\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-3}\right)\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-3}\right)\mathrm{d}z$$

$$\frac{1}{3}\ln|z|+\frac{2}{3}\ln|z-3|=-\ln|x|+c_1 \quad \|\cdot 3$$

$$\ln|z|+\ln(z-3)^2=-3\ln|x|+3c_1$$

$$\ln|z(z-3)^2|=\ln|x^{-3}|+3c_1$$

$$\mathrm{e}^{\ln|z(z-3)^2|}=\mathrm{e}^{\ln|x^{-3}|+3c_1}$$

$$=\mathrm{e}^{\ln|x^{-3}|}\cdot \mathrm{e}^{3c_1}$$

$$\mathrm{e}^{3c_1}=c$$

$$z(z-3)^2=c\cdot x^{-3}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}-3\right)^2=c\cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3}(y-3x)^2=c\cdot x^{-3} \quad \|\cdot x^3$$

$$\underline{\underline{y(y-3x)^2=c; \quad x\neq 0}}$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

20. $$y'=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\mathrm{d}y=\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$y=x\cdot z \Rightarrow \mathrm{d}y=x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{x}=z$$

$$x\cdot\mathrm{d}z+z\cdot\mathrm{d}x=(z+\sqrt{1+z^2})\,\mathrm{d}x$$

$$=z\cdot\mathrm{d}x+\sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}x$$

$$x\cdot\mathrm{d}z=\sqrt{1+z^2}\,\mathrm{d}x$$

د پوښتنورکوونی ځخه سملاسي $x\neq 0$ ورکوي، چی دا نورباید فرض نه شي

$$\int\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}|=\ln|x|+c_1$$

$$\mathrm{e}^{\ln|z+\sqrt{1+z^2}|}=\mathrm{e}^{\ln|x|+c_1}=\mathrm{e}^{\ln|x|}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^{c_1}}_{c}$$

$$z+\sqrt{1+z^2}=c\cdot x$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}=c\cdot x \quad \|\cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{x^2+y^2}=c\cdot x^2; \quad x\neq 0}}$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

د برنولي متود له مخې

رامنخ ته شوي اینتیګرالثابته c_1 تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له دي امله c_1 داسې ټاکل کیږي، چې وروسته شمیرنه یې ترممکنې اندازي ساده شي.

۱ - د برنولي متود له مخې اوبې

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + 2xuv = x \cdot e^{-x^2}$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx} + 2xv\right)}_{=0} + v \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2\int x\,dx$$

$$\ln|v| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|v|} = e^{-x^2 + c_1} = e^{-x^2} \cdot e^{c_1}$$

Wählen: $c_1 = 0$

$$\Rightarrow v = e^{-x^2}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x^2} \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int x\,dx$$

$$u = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$y = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y' + 2xy = 0$$

$$dy = -2xy \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2 + c_1} = e^{-x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-x^2}}}$$

دا افاده د y' لپاره په دیفرنځیالمساوات اینښول کیږي.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x) + 2x \cdot c(x) \cdot e^{-x^2} = = x \cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x \, dx$$

$$\underline{c(x) = \frac{x^2}{2} + k}$$

$$y = \underline{\underline{e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + k\right)}}$$

2. $y' = e^x - y$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبی

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx} + v\right)}_{=0} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int dx$$

$$\ln|v| = -x + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\underline{v = e^{-x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x} \cdot \frac{du}{dx} = e^x \quad \| \cdot e^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{du}{dx}=e^{2x}$$

$$\int du=\int e^{2x}\,dx$$

$$u=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+c\cdot e^{-x}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساواتکي کیږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)=e^{x}-c(x)\cdot e^{-x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{x}\quad\|\cdot e^{x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^{2x}$$

$$\int dc(x)=\int e^{2x}\,dx$$

$$c(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+k\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+k\cdot e^{-x}$$

3. $y'-y=x^2-1$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبی

$$u\cdot v'+v\cdot u'-u\cdot v=x^2-1$$

$$\underbrace{u(v'-v)}_{=0}+v\cdot u'=x^2-1$$

$$\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$

$$\ln|v|=x+c_1$$

وټاکه $c_1=0$

$$\underline{v=e^x}$$

$$u\cdot 0+e^x\cdot u'=x^2-1 \quad \|:e^x$$

$$\frac{du}{dx}=(x^2-1)\cdot e^{-x}$$

$$\int du=\int x^2\cdot e^{-x}dx-\int e^{-x}dx$$

$$u=\int x^2\cdot e^{-x}dx+e^{-x}$$

$\int x^2\cdot e^{-x}dx$

دا پورته اینتیګرال د پارشل ایتیګرال سره اوبی کیږي

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int(-e^{-x})\cdot 2x\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\left[x(-e^{-x})-\right.$$

$$\left.-\int(-e^{-x})\,dx\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2\int e^{-x} dx$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$= -e^{-x}(x^2+2x+2) + c$$

$$u = -e^{-x}(x^2+2x+2) + e^{-x} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= [-e^{-x}(x^2+2x+2) + e^{-x} + c] \cdot e^x$$

$$= -(x^2+2x+2) + (e^{-x}+c)e^x$$

$$= ce^x - x^2 - 2x - 1$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې :

$$y' - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + c_1$$

$$y = c \cdot e^x \qquad c = e^{c_1}$$

$$y = c(x) \cdot e^x$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$

$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$

$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad \| : e^x$$

$$c'(x) = (x^2-1) \cdot e^{-x}$$

$$c(x) = \int (x^2-1) \cdot e^{-x} dx$$

دا اینټیګریشن همدا په برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = -e^{-x}(x^2+2x+2) + e^{-x} + k$$

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$

$$= ke^x - x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $y'=e^{3x}-2y$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'=e^{3x}-2u\cdot v$$

$$u\underbrace{(v'+2v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{3x}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int dx$$

$$\ln|v|=-2x+c_1$$

وټاکو $c_1=0$

$$\underline{v=e^{-2x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-2x}\cdot u'=e^{3x}\quad \|:e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx}=e^{5x}$$

$$\int du=\int e^{5x}dx$$

$$\underline{u=\frac{1}{5}e^{5x}+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{5}e^{5x}+c\right)e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{5}e^{3x}+c\cdot e^{-2x}}}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+2y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-2x+c_1}=e^{-2x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-2x} \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot e^{-2x}}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x) = e^{3x} - 2c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} = e^{3x} \quad \| \cdot e^{2x}$$

$$c'(x) = e^{5x}$$

$$\underline{c(x) = \frac{1}{5} e^{5x} + k}$$

په دیفرنځیالمساوات کی دې کیښوول شي

$$y = c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{5} e^{3x} + k \cdot e^{-2x}}}$$

5. $y' \cdot x = y + x^2 \cdot \sin x$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = u \cdot v + x^2 \cdot \sin x$$

$$u\underbrace{(xv' - v)}_{=0} + xv \cdot u' = x^2 \cdot \sin x$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = v$$

نیونه: $x \neq c$, په x ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

وټاکی $c_1 = 0$

$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot u' = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\underline{u = -\cos x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{x(c - \cos x)}}$$

دا اوبې دیفرنځیالمساوات د $x = 0$ لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چې دا ټولیز اوبې دی.

۲ د لاګرانج متود له لاري اوبی

$y' \cdot x - y = 0 \quad \| : x$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

دلته هم لمړی x |= 0 غوښتل کیږي، اوبی لکه پورته مګر د x = 0 لپاره به هم باور ولري.

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

$$y = \underline{\underline{x(k - \cos x)}}$$

په دیفرنخیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

۱ – د برنولی متود له لاري اوبی

6. $y'x = x \cdot \sin x - y$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نیونه: x |= 0 , څکه په x ویشنه ،

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

$$\ln |v| = \ln \left|\frac{1}{x}\right|$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v=\frac{1}{x}$$

$$u\cdot 0+u'=x\cdot\sin x$$

$$\int du=\int x\cdot\sin x\,dx$$

پارشل یا ټوټه انیتیګریشن

$$u=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+c);\quad x\neq 0$$

۲ ۰ د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$$y'\cdot x+y=0$$

نیونه: x |= 0 , ځکه په x ویشنه ٬

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|+c_1}=e^{\ln|\frac{1}{x}|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=\frac{c}{x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{x}$$

په دیفرنشیالمساوات کې کیږدی

$$y'=\frac{x\cdot c'(x)-c(x)}{x^2}=\frac{c'(x)}{x}-\frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x)-\frac{c(x)}{x}=x\cdot\sin x-\frac{c(x)}{x}$$

$$c'(x)=x\cdot\sin x$$

دالاندې

$$\int x\cdot\sin x\,dx$$

اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$\int dc(x)=\int x\cdot\sin x\,dx$$

$$c(x)=-x\cdot\cos x+\sin x+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{1}{x}\cdot c(x)$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+k);\quad x\neq 0$$

7. $y'+y+\cos x-e^{2x}=0$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$$u\cdot v'+v\cdot u'+u\cdot v=e^{2x}-\cos x$$

$$u\underbrace{(v'+v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{2x}-\cos x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکي

$$\ln|v|=-x+c_1$$

$$v=e^{-x}$$

$$u\cdot 0+e^{-x}\cdot u'=e^{2x}-\cos x\quad \|\cdot e^{x}$$

$$u'=e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x$$

$$u=\int(e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\int e^{3x}\cdot dx-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

دا اینتګرال

$$\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

د بوټه انتیګرال سره اوبې کیږي

$$F=\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int\sin x\cdot e^{x}\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int e^{x}\cdot\sin x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\left[e^{x}(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot e\right.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \underbrace{\int e^x \cdot \cos x \, dx}_{F}$$

$$2F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x + c_1$$

$$F = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$$

$c = \frac{1}{2} c_1$

$$u = \frac{1}{3} e^{3x} - F$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + c \cdot e^{-x}$$

۲ – د لاګرانژ متود له لارې اوبې :

$$y' + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln |y| = -x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x + c_1} = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-x} \Rightarrow y = c(x) \cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x) + c(x) \cdot e^{-x} + \cos x - e^{2x} = 0$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} = e^{2x} - \cos x \quad \| \cdot e^x$$

$$c'(x) = e^{3x} - e^x \cdot \cos x$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه ۱ کې اوبی شو

$$c(x) = \int (e^{3x} - e^x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=c(x)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{3}e^{2x}-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)+k\cdot e^{-x}$$

8. $y'+ay=b\cdot e^{cx}$

۱ -د برنولي متود له لارې اوبې

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$u\cdot v'+v\cdot u'+auv=b\cdot e^{cx}$$

$$u\underbrace{(v'+av)}_{=0}+v\cdot u'=b\cdot e^{cx}$$

$$\frac{dv}{dx}=-av$$

$$\int\frac{dv}{v}=-a\int dx$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکئ

$$\ln|v|=-ax+c_1$$

$$v=e^{-ax}$$

$$u\cdot 0+e^{-ax}\cdot u'=b\cdot e^{cx}\quad \|\cdot e^{ax}$$

$$u'=b\cdot e^{x(a+c)}$$

$$u=\frac{b}{a+c}e^{x(a+c)}+c_2$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\frac{b}{a+c}e^{cx}+c_2\cdot e^{-ax}$$

۲ - د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$c_2=e^{c_1}$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow y=c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

په دیفرنشیالمساوات کي ځای په ځای کړی

$$y' = c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax} + ac_2(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b\cdot e^{x(a+c)}$$

$$\underline{c_2(x) = \frac{b}{a+c}\, e^{x(a+c)} + k}$$

$$y = c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$= \frac{b}{a+c}\, e^{cx} + k\cdot e^{-ax}$$

9. $y' + ay - b\cdot \sin(cx) = 0$

$y = u\cdot v \Rightarrow y' = u\cdot v' + v\cdot u'$

$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبی

$$u\cdot v' + v\cdot u' + auv - b\sin cx = 0$$

$$\underbrace{u(v' + av)}_{=0} + v\cdot u' - b\sin cx = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a\int dx$$

$$\ln|v| = -ax + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\underline{v = e^{-ax}}$$

$$u\cdot 0 + e^{-ax}\cdot u' - b\sin cx = 0 \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b\cdot e^{ax}\cdot \sin cx$$

دا اینتیګرال د ټوټه یا پارشل اینتیګرال له لاري اوبی کیږي

$$u = b\int e^{ax}\cdot \sin cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot \cos cx + \frac{ab}{c}\int e^{ax}\cdot \cos cx\, dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot \cos cx +$$

$$+\frac{ab}{c}\left[e^{ax}\cdot \frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c}\int e^{ax}\cdot \sin cx\, dx\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u=-\frac{b}{c}\,e^{ax}\cdot\cos cx+\frac{ab}{c^2}\,e^{ax}\cdot\sin cx-$$

$$-\frac{a^2}{c^2}\cdot b\underbrace{\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx}_{u}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)u=\frac{b}{c}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_2$$

$$1+\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2+c^2}{c^2}$$

$$\underline{u=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3}$$

$$c_3=c_2\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\frac{bc}{a^2+c^2}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3\cdot e^{-ax}$$

۲ - د لاګرانژ د متود له لارې اوبی

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow \underline{y=c_2(x)\cdot e^{-ax}}$$

$$c_2=e^{c_1}$$

په دیفرنخیالمساوات کی دې کینبوول شي

$$y'=c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}+ac_2(x)\cdot e^{-ax}-b\cdot\sin cx=0$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}=b\sin cx\quad\|\cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x)=b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c_2(x)=b\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx$$

$$=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+k$$

$$y=c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$=\frac{b}{a^2+c^2}(a\cdot\sin cx-c\cdot\cos cx)+k\cdot e^{-ax}$$

۱ – د برنولي د متود له لاري اوبي

$$u\cdot v'+v\cdot u'=\frac{uv}{x}+\frac{1}{\ln x}$$

$$u\underbrace{\left(v'-\frac{v}{x}\right)}_{=0}+v\cdot u'=\frac{1}{\ln x}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x\cdot u'=\frac{1}{\ln x}\quad\left\|\cdot\frac{1}{x}\right.$$

$$u'=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$u=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$$=\underline{\ln|\ln x|+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$= x(|\ln|\ln x|+c)$$

۲ – د لاگرانژ دمتودي له لاري وبى

$$y'-\frac{y}{x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

10. $y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{\ln x}$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

د سوالورکونی ثخخه سملاسی لاس
ته راځی $x>0$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی:

$$\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

$c = e^{c_1}$

په دیفرنځیالمساوات کی کیږدی

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

$$= \underline{\ln |\ln x| + k}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= \underline{\underline{x(\ln |\ln x| + k)}}$$

۱ - د برنولی متوډله لارپاوبی

11. $y' = a + bx + cy$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cuv$$

$$u\underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

$$\ln |v| = cx + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$

$$\underline{v = e^{cx}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارشل ایتیکریشن یا اینتیکراول

$$u \cdot 0 + e^{cx} \cdot u' = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$u' = (a+bx) \cdot e^{-cx}$$

$$u = \int (a+bx) e^{-cx} \, dx$$

$$= a \int e^{-cx} \, dx + b \int x \cdot e^{-cx} \, dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \int x \cdot e^{-cx} \, dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \left[-\frac{x}{c} e^{-cx} + \frac{1}{c} \int e^{-cx} \, dx \right]$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} - \frac{bx}{c} e^{-cx} - \frac{b}{c^2} e^{-cx} + c_1$$

$$= -\frac{1}{c} e^{-cx} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1$$

$$y = u \cdot v$$

$$= -\frac{1}{c} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1 \cdot e^{cx}$$

۲ - د لاگرانج متود له لارې اوبې

$$y' - cy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

$$\int \frac{dy}{y} = c \int dx$$

$$\ln |y| = cx + c_1$$

$c_2 = e^{c_1}$

$$y = c_2 \cdot e^{cx} \Rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{cx}$$

په دیفرنشیالمساوات کې ځای په ځای کړی یا کیږدی

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx} = a + bx + c \cdot c_2{}^{(x)} \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x) = (a+bx) e^{-cx}$$

$$c_2(x)=\int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$=-\frac{1}{c}e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_2$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبې شو

$$y=k(x)\cdot e^{cx}$$

$$=-\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+k\cdot e^{cx}$$

12. $xy'+1=e^x+y$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$$x(u\cdot v'+v\cdot u')+1=e^x+uv$$

$$u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'+1=e^x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکه

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$v=x$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'+1=e^x$$

$$u'=\frac{e^x-1}{x^2}$$

$$u=\int\frac{e^x}{x^2}dx-\int\frac{dx}{x^2}$$

د دې لاندې اینتیګرال

$$\int\frac{e^x}{x^2}dx$$

اوبې کې د انتیګرایشن لپاره لړی ودیزینه باندې تیریدنه نه شي کیدی

$$=\int\frac{e^x}{x^2}\cdot dx+\frac{1}{x}$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$u = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$y = u \cdot v = c\cdot x + x\cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{3\cdot 4!} + \ldots$$

für $x \neq 0$

۲ – دلاګرانژمتود له لارې اوبی

$xy' - y = 0$

نیونه: $x \neq 0$, څکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$c = e^{c_1}$

$$y = c\cdot x \Rightarrow y = c(x)\cdot x$$

$$y' = c'(x)\cdot x + c(x)$$

په دیفرنځیالمساوات کی کیږدی

$$x^2\cdot c'(x) + c(x)\cdot x + 1 = e^x + c(x)\cdot x$$

$$x^2\cdot c'(x) + 1 = e^x \quad \|:x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

دا اینتیګرال همدا اوس تر ۱ لاندې اوبی شویدی.

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=c(x)\cdot x$$

$$=k\cdot x+x\cdot\ln|x|+\frac{x^2}{1\cdot 2!}+\frac{x^3}{2\cdot 3!}+\frac{x^4}{3\cdot 4!}+\dots$$

$x \neq 0$

13. $y'(1-x^2)+xy=1$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ . د برنولي د متود له لاري دا دلته

$$(uv'+vu')(1-x^2)+xuv=1$$

$$u\underbrace{[v'(1-x^2)+xv]}_{=0}+vu'(1-x^2)=1$$

$$\frac{dv}{dx}(1-x^2)=-xv$$

نیونه: $|x| \neq 1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{-x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی

$$\ln|v|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$

$$=\ln|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$v=\sqrt{|1-x^2|}$$

د وریسی اوبیوني لپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$v=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{für } |x|<1\\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x|>1\end{cases}$$

1. Fall: $v=\sqrt{1-x^2}$; $|x|<1$

$$u\cdot 0+\sqrt{1-x^2}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$

$$u'=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$u=\int\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Substitution: سبستیچیوشن :

$1-x^2=z^2 \Rightarrow dx=-\frac{z\cdot dz}{x}$

$$=\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = -\int \frac{dz}{z^2 \cdot \sqrt{1-z^2}}$$

$x = \sqrt{1-z^2}; \quad dx = -\frac{z \cdot dz}{\sqrt{1-z^2}}$

سبستيچيوشن

$z = \sin t \Rightarrow dz = \cos t \cdot dt$

$\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t; \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$

$$= -\int \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sin^2 t}$$ ► بنسټ اينتيګرال

$$= \cot t + c$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} + c$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

دا اوبى ديفرنځيالمساوات
د 1 = | x | هم پوره کوي

$$y = u \cdot v$$

$$= x + c \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \text{für } |x| \leq 1$$

2. Fall: $v = \sqrt{x^2-1}; \quad |x| > 1$

$$u \cdot 0 + \sqrt{x^2-1} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,(1-x^2)}$$

Substitution: : سبستيچيوشن

$x^2 - 1 = z^2 \Rightarrow dx = \frac{z \cdot dz}{x}$

$x = \sqrt{1+z^2}; \quad dx = \frac{z \cdot dz}{\sqrt{1+z^2}}$

$$u = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u = -\int \frac{dz}{z^2 \cdot \sqrt{1+z^2}}$$

سبستيچيوشن

$z = \sinh t \Rightarrow dz = \cosh t \cdot dt$

$\sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$

$$= -\int \frac{\cosh t \, dt}{\sinh^2 t \cdot \sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sinh^2 t}$$ ► بنسټ اينتيګرال،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u=\coth t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+c$$

$$\coth t=\frac{\cosh t}{\sinh t}$$

$$y=u\cdot v$$

د $|x|\geq 1$ لپاره $=x+c\cdot\sqrt{x^2-1}$

د ټولو x لپاره $y=x+c\cdot\sqrt{|1-x^2|}$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات د $|x|=1$ هم پوره کوي په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت کارونی له لارې و یوه اوبی ته رایوځای شي.

۲ - د لاگرانژ متود له لارې اوبی

$$y'(1-x^2)+xy=0$$

نیونه: $|x|\neq 1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$

$$=\ln\sqrt{|1-x^2|}+c_1$$

$$y=\sqrt{|1-x^2|}\cdot c$$

$$c=e^{c_1}$$

$$y=c(x)\cdot\sqrt{|1-x^2|}$$

د نورو اوبیونولپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$y=\begin{cases}c(x)\cdot\sqrt{1-x^2} & \text{د } |x|<1 \text{ لپاره}\\ c(x)\cdot\sqrt{x^2-1} & \text{د } |x|>1 \text{ لپاره}\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. Fall: $y = c(x) \cdot \sqrt{1-x^2}; \quad |x| < 1$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$y' = c(x) \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + c'(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$\underbrace{c(x) \cdot \frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}_{-c(x) \cdot x\sqrt{1-x^2}} + c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + xc(x) \cdot \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه۱
حالت ۱ کی وشمیرل شو

$$c(x) = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + k$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د $|x| = 1$ هم پوره کوي

$$y = c(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$= x + k \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \text{für } |x| \leq 1$$

2. Fall: $y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}; \quad |x| > 1$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} + c(x) \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2) \cdot c'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} + c(x) \frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}} + x \cdot c(x) \cdot \sqrt{x^2-1} = 1$$

$$(1-x^2) \cdot c'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱
۲ . حالت کی اوبی شو

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د 1 = | x | هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت
کارونی له لارې و یوه اوبی ته
رایوځای شي.

14. $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

دپوښتنی ځخه 0 =| x ورکوي،
دا په دې مانا چی x |= n·π
د ....n = 0 , ±1 , ± 2 سره

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

سبستیچیوشن (بدلون)

$z = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$

$$c(x) = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$= x + k \cdot \sqrt{x^2-1} \quad \text{für } |x| \geq 1$$

$$y = x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{für alle } x$$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - \sin x \cdot y = \sin x(1-\cos x)$$

$$uv' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1-\cos x)$$

$$\underbrace{u(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x(1-\cos x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |v| = -\cos x + c_1$$

$$v = e^{-\cos x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x(1-\cos x) \quad \| \cdot e^{\cos x}$$

$$u' = \sin x(1-\cos x) e^{\cos x}$$

$$u = \int \sin x(1-\cos x) e^{\cos x} dx$$

$$= -\int (1-z) e^z dz$$

$$= -\int e^z dz + \int z \cdot e^z dz$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = -e^z + \int z \cdot e^z \,dz$$

پارشل یا ټوټه اینټیګریشن

$$= -e^z + z \cdot e^z - \int e^z \,dz$$

$$= -e^z + z \cdot e^z - e^z + c$$

$$= e^z (z-2) + c$$

$$= e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \| \cdot \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x \,dx$$

$$\ln |y| = -\cos x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = c(x) \cdot e^{-\cos x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \| \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$c'(x) = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

دا اینټیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبې شو

$$c(x) = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} \cdot dx$$

$$= e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=c(x)\cdot e^{-\cos x}$$
$$=\underline{\underline{\cos x-2+k\cdot e^{-\cos x}}}$$

15. $y'+y\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\underbrace{u(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos x\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکې

$$\ln|v|=-\sin x+c_1$$
$$v=\underline{e^{-\sin x}}$$

$\sin 2x=2\cos x\cdot\sin x$

$$u\cdot 0+e^{-\sin x}\cdot u'=\frac{1}{2}\sin 2x\quad\|\cdot e^{\sin x}$$

$$u'=\frac{1}{2}\sin 2x\,e^{\sin x}$$

Substitution: بدلون

$\sin x=z\Rightarrow dx=\frac{dz}{\cos x}$

پارشل یا ټوټه ایتیګریشن

$$u=\int\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}dx$$
$$=\int z\cdot e^z\cdot dz$$
$$=z\cdot e^z-\int e^z\,dz$$
$$u=z\cdot e^z-e^z+c$$
$$=e^z(z-1)+c$$
$$=\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+c}$$

$$y=u\cdot v$$
$$=\underline{\underline{\sin x-1+c\cdot e^{-\sin x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – د لاګرانج د متود له لارې اوبې

$y'+y\cdot\cos x=0$

$$\frac{dy}{dx}=-y\cdot\cos x$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\cos x\,dx$$

$$\ln|y|=-\sin x+c_1$$

$c=e^{c_1}$

$$y=c\cdot e^{-\sin x}\Rightarrow y=\underline{\underline{c(x)\cdot e^{-\sin x}}}$$

$y'=c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}$

په دیفرنشیالمساوات کې ځاي په ځاي کړی.

$c'(x)\cdot e^{-\sin x}-\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}+$

$$+\cos x\cdot c(x)\cdot e^{-\sin x}=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$c'(x)\cdot e^{-\sin x}=\frac{1}{2}\sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$

$$c'(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\cdot e^{\sin x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبې شو

$$c(x)=\int\cos x\cdot\sin x\cdot e^{\sin x}dx$$

$$=\underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x-1)+k}}$$

$y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$

$=\underline{\underline{\sin x-1+k\cdot e^{-\sin x}}}$

16. $y'-yx=x^2-1$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبې

$y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$

$y'=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$

$$y'-yx=x^2-1$$

$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-u\cdot v\cdot x=x^2-1$

$u\cdot\left[\frac{dv}{dx}-v\cdot x\right]+v\frac{du}{dx}=x^2-1$

$\left[\frac{dv}{dx}-v\cdot x\right]=0$

$\frac{dv}{dx}-v\cdot x=0$

$v=v(x)$

$$\int \frac{dv}{v} = \int x\,dx$$

$$\ln v = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln v} = e^{\frac{x^2}{2}+c_1} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_1};\ c_1 = 0$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2-1}{v}$$

$$du = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx$$

$$\int du = \int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$u = u(x) = \underline{-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2}$$

$$y = \quad u(x) \quad \cdot v(x)$$

$$y = (-x e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = \ -x \quad + c_2 \ \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \cdot - c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle}}$$

۲ – د لاګرانخ د متود له لاري اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} - c_1(x) e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x^2 - 1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

د حل لاره سره $v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0.$$

د راپاتی مساواتو په $u = u(x)$ د اینتیګریشن له لارې وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$= \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot x\,dx - \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx -$$

$$- \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c_2$$

دا لاسته راغلی ارزښتونه $u(x)$ او $v(x)$ به په برابرون $y = u(x).v(x)$ کی کیښنول شي.

دا لاسته راوړنه د ورکړشوي دفرنشیالمساوات تولیزه اوبیونه ده

یعنی د که $F(x) = 0$

$$\Rightarrow y' - y \cdot x = 0;\ x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c_1(x)$$

$$\underline{y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\underline{y' = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathrm{d}c_1(x)=\frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,\mathrm{d}x=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,\mathrm{d}x$$

$$\int c_1(x)\,\mathrm{d}x=\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,\mathrm{d}x$$

$$\underline{c_1(x)=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2}$$

$$y=c_1(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$=(-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y=-x+c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f=\underline{\underline{\langle x,-c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}-x\rangle}}$$

دا د مساوات $y'-yx=0$ د اوبیونی
سره لاس ته راغلی اینتیگریشنثابته
د x فنکشن دی
د y لپاره برخاوبی کی اینبول کیږي $c_1(x)$.
لاس ته راوړنه همغه تولیزه اوبیونه ده،
لکه څنګه چی د برونولی متود له لاري
لاس ته راغلی

17. $y'\cdot x^2+y=x$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

۱ – د برنولي متود له لاري اوبی

$$(uv'+vu')x^2+uv=x$$

$$u\underbrace{(x^2v'+v)}_{=0}+x^2vu'=x$$

$$x^2v'=-v$$

نیونه: $x\,|=0$ د x^2 سره ویشنه

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی

$$\ln|v|=\frac{1}{x}+c_1$$

$$\underline{v=e^{\frac{1}{x}}}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot u'=x\quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$u'=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$u=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$$

دا اینتیګرال کیدی شي یواځي
د لړیودیزي له لاري اوبی شي

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots$$

$$z=-\frac{1}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}-+\dots$$

$$\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2!x^3}-\frac{1}{3!x^4}+\frac{1}{4!x^5}-+\dots$$

$$u=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c\right)$$

د $x\neq 0$ لپاره

۲ - د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'\cdot x^2+y=0$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y|=\frac{1}{x}+c_1$$

$$y=c\cdot e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$c=e^{c_1}$

په دیفرنخیالمساوات کی کېږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{c(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x \quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینتیګرال

همدا اوس برخه ۱کی اوبي شو

$$c(x)=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4!4x^4}+-\ldots+k\right)$$

für $x\neq0$

18. $y'+\frac{1}{1+x}y+x^2=0$

١ - د برنولي متود له لارې اوبيونه

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$uv'+vu'+\frac{uv}{1+x}+x^2=0$$

د پوښتني كولو څخه همدااوس

x |= -1 وركوي

$$u\underbrace{\left(v'+\frac{v}{1+x}\right)}_{=0}+vu'+x^2=0$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{-v}{1+x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{1+x}$$

Wählen: $c_1=0$ وټاكه

$$\ln|v|=-\ln|1+x|+c_1$$

$-\ln|1+x|=\ln|1+x|^{-1}$

$$v=\frac{1}{1+x}$$

$$u\cdot0+\frac{u'}{1+x}+x^2=0\quad\|\cdot(1+x)$$

$$u'=-x^2(1+x)$$

$$u=-\int(x^2+x^3)\,dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+c_2$$

$$y=u\cdot v$$

$c=12c_2$

$$=\frac{c-4x^3-3x^4}{12(1+x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'+\frac{1}{1+x}y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{1+x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y|=-\ln|1+x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|1+x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{1+x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot\frac{1}{1+x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$y'=c'(x)\cdot\frac{1}{1+x}-c(x)\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

په دیفرنخیالمساوات کی کېږدی

$$\frac{c'(x)}{1+x}-\frac{c(x)}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{c(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$c'(x)=-x^2(1+x)$$

$$c(x)=-\int(x^2+x^3)\,dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+c_2$$

$$y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$=\frac{k-4x^3-3x^4}{12(1+x)}$$

$k=12c_2$

19. $y'+y\cdot\cos x=e^{-\sin x}$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=e^{-\sin x}$$

$$\underbrace{u(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=e^{-\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dv}{v} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x \, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$\underline{v = e^{-\sin x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = 1$$

$$\underline{\underline{u = x + c}}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{(x+c)\, e^{-\sin x}}}$$

۲ - د لاگرانژ موتود له لاري اوبیونه

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\sin x + c_1} = e^{-\sin x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

په دیفرنځیالمساوات کی کېږدی

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$

$$+ c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \underline{\underline{x + k}}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$= (x+k)\, e^{-\sin x}$$

20. $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د پوښتني کولو ځخه همدااوس
ورکوي cso x |= 0

$$-\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکئ:

۱ – د برنولي متود له لاري اوبيونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \tan x = \sin(2x)$$

$$u\underbrace{(v' + v \cdot \tan x)}_{=0} + vu' = \sin(2x)$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \tan x\, dx$$

$$= -\int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$\ln|v| = \ln|\cos x| + c_1$$

$$v = \cos x$$

$$u \cdot 0 + \cos x \cdot u' = \sin(2x)$$

$$= 2\sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$$

$$u' = 2\sin x$$

$$u = 2\int \sin x$$

$$= -2\cos x + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \cos x \cdot (c - 2\cos x)$$

– د لاګرانژ موتود له لاري اوبيونه

$$y' + y \cdot \tan x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \tan x \cdot dx$$

$$= -\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\ln|y| = \ln|\cos x| + c_1$

$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot \cos x}$

$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$

$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \underbrace{\cos x \cdot \tan x}_{\sin x} = \sin(2x)$

$c'(x) \cdot \cos x = \sin(2x)$

$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$

$c'(x) = 2 \sin x$

$c(x) = 2 \int \sin x \cdot dz$

$= \underline{\underline{-2 \cos x + k}}$

$y = c(x) \cdot \cos x$

$= \underline{\underline{(k - 2 \cos x) \cdot \cos x}}$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبيونه

$y' - 2 \cdot y = -x + 3$

$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \cdot v = -x + 3$

$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] + u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$

$\frac{du}{dx} - 2u = 0$

$\int \frac{du}{u} = \int 2\,dx$

$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow \underline{u = e^{2x} \cdot e^{c_1}}$

$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$

$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$

$\frac{dv}{dx} = \frac{-x+3}{u} \blacktriangleright u = e^{2x}$

$c = e^{c_1}$

په ديفرنځيالمساوات کی کیښوول

21. $y' - 2y = -x + 3$

$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$

$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

له $\left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] = 0$

$u = u(x)$ لاس ته راځي

د $u = e^{2x}$

$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2u\right] = 0.$ سره حل لرو

د لاندي پاتی برابرون څخه د ایتیګرال له لاري

$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$

v= v(x) تاکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dv = e^{-2x}(3-x)\,dx$$

$$v = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$v = e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

$$\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$= 3\int e^{-2x}\,dx - \int x\cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x} - \left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4}e^{-2x}\right] + c_2$$

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y = e^{2x}\cdot\left[e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2\right]$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{2x}\cdot c_2$$

$$f = \left\langle x\cdot -\frac{1}{2}x + e^{2x}\cdot c_2 - \frac{5}{4}\right\rangle$$

د u(x) او v(x) لاس ته راوړي ارزښتونه د y=u(x).v(x) په مساوات کې کېښنول کیږي.
لاس ته راوړنې د ورکړ شوي دفرنځیالبرابراون تولیز اوبې دي

۲ - د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y' - 2y = -x + 3$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y = c_3(x)\cdot e^{2x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x}$$

$$c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x} - 2\cdot c_3(x)\cdot e^{2x} = -x+3$$

$$\Rightarrow c_3'(x)\cdot e^{2x} = -x+3$$

$$c_3'(x) = (-x+3)\cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x) = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$c_3(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

ږدو $-x+3=0$ نولرو

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\cdot 2$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int 2\,dx$$

$$\ln y = 2x + c_1$$

$$y = e^{2x+c_1} = e^{2x}\cdot e^{c_1}$$

$$= c_3(x)\cdot e^{2x}$$

د اینتیګریشنثابتی $e^{c_1} = c_3(x)$ د x فنکشن دی

د y او 'y لپاره دواړه برخاوبیونی په پیلمساوات y' - 2y = -x + 3 کې کېښنول کیږي

د اینتګریشن له لارې لویه $c_3(x)$ پیداکیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) c_3 په برابرون کی کیښنول کیږی

$y=c_3(x)\cdot e^{2x}$

لاسته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه د برنول د متود له لارې راپیدا شوه

$$y=\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2\right]\cdot e^{2x}$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+e^{2x}\cdot c_2$$

$$f=\left\langle x\cdot -\frac{1}{2}x+e^{2x}\cdot c_2-\frac{5}{4}\right\rangle$$

۱ . ۳ د دوم نظم درفنځیالمساوات

1. $y''=\frac{1}{x}$

د پوښتنیورکړي څخه لاسته $x \neq 0$ راځي

ورپسی اوبیونی ته دي حالتونه $x>0$ او $x<0$ توپیر شي

پارشل یا ټوټه ایتیکریشن

$c_3=c_1-1$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\int dy'=\int\frac{dx}{x}$$

$$y'=\ln|x|+c_1$$

$$=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_1 & \text{für } x<0\end{cases}$$

1. Fall: $y'=\ln x+c_1;\quad x>0$

$$\int dy=\int(\ln x+c_1)\,dx$$

$$y=\int\underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$$

$$=x\cdot\ln x-\int dx+c_1\cdot x$$

$$=x(\ln x+c_1-1)+c_2$$

$$=x(\ln x+c_3)+c_2;\quad x>0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Fall: $y' = \ln(-x) + c_1; \quad x < 0$

$$\int dy = \int [\ln(-x) + c_1]\,dx$$

$$y = \int \underbrace{\ln(-x)}_{u} \cdot \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int x \cdot \frac{-1}{-x}\,dx + c_1 \cdot x$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int dx + c_1 \cdot x$$

$$= x[\ln(-x) - 1 + c_1] + c_2$$

$c_3 = -1 + c_1$

$$= x[\ln(-x) + c_3] + c_2; \quad x < 0$$

پارځیل یا پارشل اینتیګرال

د ارزښتکرښو کارونی له لاري کیدی شي دواړه اوبیونی رایوځای شي. نومبدلون یا ←پرونه: $c_3 \doteq c_1$

$$y = x(\ln|x| + c_1) + c_2$$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$\int dy' = \int f(x)\,dx$$

$$y' = \int f(x)\,dx + c_1$$

$$y = \int \left[\int f(x) \cdot dx + c_1 \right] dx + c_2$$

3. $y'' - x^3 = 0$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x^3$$

$$\int dy' = \int x^3\,dx$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^4}{4} + c_1 \right) dx$$

$$y = \frac{x^5}{20} + c_1 \cdot x + c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $y'' = x + \sin x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x + \sin x$$

$$\int dy' = \int (x + \sin x)\, dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 - \cos x\right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x - \sin x + c_2$$

5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

دلته ارزښتکرښي ضرور نه دي
ځکه چې $x+\sqrt{1+x^2}>0$ د ټولو
x لپاره باور لري

پاشل اینتیګریشن

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int dy' = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1$$

$$\int dy = \int \underbrace{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$y = x \cdot \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}} dx + c_1 x$$

$$= x[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= x[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \sqrt{1+x^2} + c_2$$

6. $y'' = \tan x$

ددې انتیګرالبرابرون اوبیوني
کی په لړبودینه تریدنه ناشونی ده

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \tan x$$

$$\int dy' = \int \tan x\, dx$$

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{2x^6}{6\cdot 15} + \frac{17x^8}{8\cdot 315} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

7. $y'' = \sinh x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x\, dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1)\, dx$$

$$y = \sinh x + c_1\cdot x + c_2$$

8. $y'' = e^{x^2}$

د دې انتيګرالبرابرون اوبيوني يواځې لړيودينى سره شونى ده.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2}\, dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30\cdot 2!} + \frac{x^8}{56\cdot 3!} + \frac{x^{10}}{90\cdot 4!} + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $y^{(4)}=\cos x$	$y^{(4)}=\dfrac{dy'''}{dx}=\cos x$
	$\int dy'''=\int \cos x\,dx$
$y'''=\dfrac{dy''}{dx}$	$y'''=\sin x+c_1^*$
	$\int dy''=\int (\sin x+c_1^*)\,dx$
$y''=\dfrac{dy'}{dx}$	$y''=-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*$
	$\int dy'=\int (-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*)\,dx$
$y'=\dfrac{dy}{dx}$	$y'=-\sin x+c_1^*\cdot\dfrac{x^2}{2}+c_2^*\cdot x+c_3$
	$\int dy=\int\left(-\sin x+\dfrac{c_1^*}{2}\cdot x^2+c_2^*\cdot x+c_3\right)dx$
	$y=\cos x+\dfrac{c_1^*}{6}x^3+\dfrac{c_2^*}{2}x^2+c_3x+c_4$
$c_1=\dfrac{1}{6}c_1^*;\quad c_2=\dfrac{1}{2}c_2^*$	$\underline{\underline{y=\cos x+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4}}$
10. $y'''=e^x$	$y'''=\dfrac{dy''}{dx}=e^x$
	$\int dy''=\int e^x\,dx$
	$y''=e^x+c_1^*$
	$\int dy'=\int (e^x+c_1^*)\,dx$
	$y'=e^x+c_1^*\cdot x+c_2$
	$\int dy=\int (e^x+c_1^*\cdot x+c_2)\,dx$
	$y=e^x+c_1^*\cdot\dfrac{x^2}{2}+c_2x+c_3$
$c_1=\dfrac{1}{2}c_1^*$	$\underline{\underline{=e^x+c_1x^2+c_2x+c_3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11. $y^{(4)}=\sinh(2x) \;\blacktriangleright\; y^{(4)}=\dfrac{dy'''}{dx} \Rightarrow dy'''=y^{(4)}\cdot dx$

$$\int dy'''=\int \sinh(2x)\,dx$$

$$y'''=\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1 \;\blacktriangleright\; y'''=\frac{dy''}{dx} \Rightarrow dy''=y'''\cdot dx$$

$$\int dy''=\int\left(\frac{1}{2}\cosh(2x)+c_1\right)dx$$

$$y''=\frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx+\int c_1\,dx$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_2+c_1x+c_3 \;\blacktriangleright\; c_2+c_3=c_4$$

$$=\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4$$

$$y''=\frac{dy'}{dx} \Rightarrow dy'=y''\cdot dx$$

$$\int dy'=\int\left(\frac{1}{4}\sinh(2x)+c_1x+c_4\right)dx$$

$$y'=\frac{1}{8}\cosh(2x)+c_5+\frac{1}{2}c_1x^2+c_6+c_4x+c_7 \;\blacktriangleright\; c_5+c_6+c_7=c_8$$

$$=\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8$$

$$y'=\frac{dy}{dx} \Rightarrow dy=y'\cdot dx$$

$$\int dy=\int\left[\frac{1}{8}\cosh(2x)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8\right]dx$$

$$y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+c_9+\frac{1}{6}c_1x^3+c_{10}+\frac{1}{2}c_4x^2+c_{11}+c_8x+c_{12}$$

$$\underline{\underline{y=\frac{1}{16}\cosh(2x)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{2}c_4x^2+c_8x+k}}$$

12. $y^{(5)}=\cosh(ax) \;\blacktriangleright\; y^{(5)}=\dfrac{dy^{(4)}}{dx} \Rightarrow dy^{(4)}=y^{(5)}\cdot dx$

$$\int dy^{(4)}=\int \cosh(ax)\,dx=\frac{1}{a}\sinh(ax)+c_1=y^{(4)}=\frac{dy'''}{dx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy''' = \int\left[\frac{1}{a}\sinh(ax)+c_1\right]dx=\frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_2+c_1x+c_3$$

$$y'''=\frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_1x+c_4=\frac{dy''}{dx}$$

$$\int dy''=\int\left[\frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_1x+c_4\right]dx$$

$$y''=\frac{1}{a^3}\sinh(ax)+c_5+\frac{1}{2}c_1x^2+c_6+c_4x+c_7$$

$$y''=\frac{1}{a^3}\sinh(ax)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8=\frac{dy'}{dx}$$

$$\int dy'=\int\left[\frac{1}{a^3}\sinh(ax)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8\right]dx$$

$$y'=\frac{1}{a^4}\cosh(ax)+c_9+\frac{1}{6}c_1x^3+c_{10}+\frac{1}{2}c_4x^2+c_{11}+c_8x+c_{12}$$

$$y'=\frac{1}{a^4}\cosh(ax)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{4}c_4x^2+c_8x+c_{13}=\frac{dy}{dx}$$

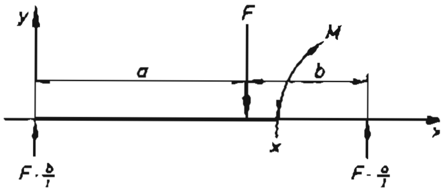
$$\int dy=\int\left[\frac{1}{a^4}\cosh(ax)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{4}c_4x^2+c_8x+c_{13}\right]dx$$

$$y=\frac{1}{a^5}\cosh(ax)+c_{14}+\frac{1}{24}c_1x^4+c_{15}+\frac{1}{12}c_4x^3+c_{16}+\frac{1}{2}c_8x^2+c_{17}+c_{13}x+c_{18}$$

$$y=\frac{1}{a^5}\cosh(ax)+\frac{1}{24}c_1x^4+\frac{1}{12}c_4x^3+\frac{1}{2}c_8x^2+c_{13}x+k$$

د مومنتو تاکلو لپاره باید ورشوګا-
نی یاساحیa≤x≤0 اوl=a+b≤x≤a
تو پیر شي

ورشو 1. Bereich: $0\le x\le a$

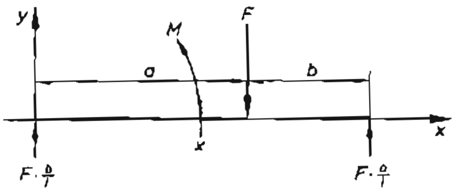


$$M-F\cdot\frac{b}{l}\cdot x=0$$

$$M=F\cdot\frac{b}{l}\cdot x \quad \text{für } 0\le x\le a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b=l$



$$M - F \cdot \frac{a}{l} \cdot (l-x) = 0$$

$$M = F \cdot \frac{a}{l}(l-x) \quad \text{für } a \leq x \leq l$$

د ورشو یا تعریفږیري $0 < x < a$ لپاره د کږونلاین y_1 ټاکنه

د دې دواړود هریوه ورشو یا ساحولپاره دې کږونلاین وټاکل شي، چې د x=a لپاره باید یوځای ولوېږي.

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{b}{l} \cdot x}{E \cdot I}$$

$$\int dy_1' = -\frac{F \cdot b}{l \cdot E \cdot I} \int x \, dx$$

$$y_1' = -\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = \int \left(-\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1 \right) dx$$

$$= -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x + c_2$$

د $x = 0$ لپاره کږون 0 دی.

$$y_1(0) = 0 - c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x$$

د ورشو یا تعریفږیري $0 < x < l$

لپاره د کږونلاین y_2 ټاکنه:

$$y_2'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{a}{l}(l-x)}{E \cdot I}$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{lEI}\int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{lEI}\int z\,dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int\left(\frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3\right)dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

$$= -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

ثابتی c_4 د غاړیارزښت $y_2(l) = 0$ څخه ټاکل کیږي

$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 - c_3(l-x)$$

په فنکشنونو y_1 او y_2 رامنځ ته شوي ثابتي c_1 او c_2 داسی وټاکل شي، چی دواړه فنکشنونه په $x=a$ کی یوځاي پریوځي، دا په دي مانا، چی باور لري

$y_1(a) = y_2(a)$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$y_1(a) = y_2(a)$

$$-\frac{Fba^3}{6lEI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6lEI} - c_3 \cdot b$$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$$-\frac{Fba^2}{2lEI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2lEI} + c_3$$

دا ثابتي c_1 او c_2 په y_1 او y_1 کی ګینول کیږي

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6lEI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6lEI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6lEI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI}(l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6lEI}(l-x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\begin{cases}\dfrac{Fbx}{6lEI}\,[a(a+2b)-x^2] & \text{für } 0\le x\le a\\[2mm] \dfrac{Fa(l-x)}{6lEI}\,[b(b+2a)-(l-x)^2] & \text{für } a\le x\le l\end{cases}$$

رایوخایون :

$$y_1'=\frac{Fb}{6lEI}\,[a(a+2b)-3x^2]$$

$$y_1'=0$$

$$x_m^2=\frac{a}{3}\,(a+2b)$$

$$x_{m(1)}=\pm\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

$$x_m=\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}$$

ماکسیمالکړونه کیدیشي د y_1 یا y_2 ورشو کی داسی پرته وي، چی دفرنځیالیدی شي.

د $b<a$ له امله لاسته راځی

$$\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2a)}=a,$$

$\left(x_m=-\sqrt{\frac{a}{3}\,(a+2b)}<0 \text{ ist hier sinnlos.}\right)$ دلته بې معنی

دا په دې ماناچی $x_m<a$ په x_mکی ماکسیمالکړون د y_1 ورشوکی پروت دی، چی نورو y_2 کی څیړنی ته باید اړ نه دی

ماکسیمال کړون y_{max}

$$y_{max}=y_1(x_m)$$

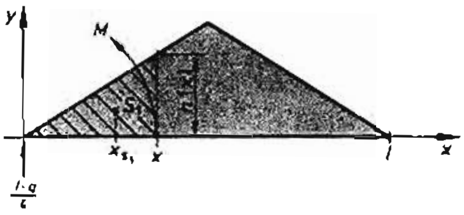
$$=\frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}lEI}\left[a(a+2b)-\frac{a}{3}\,(a+2b)\right]$$

$$=\frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}lEI}$$

1. Bereich: $0\le x\le\frac{l}{2}$ ورشو

۱۴ – ټول بار $F=(½)\,l.q$ دی داسی چی پروتزور په A او B هریو کی $(¼)l.q$ دی

دا کربښی شوې هواره دا بار $(½)h(x).x$ دی.



$$h(x)=\frac{2q}{l}\,x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دروندټکي پروتمحور x_{S1} کيدی شي بنستهندسيز و $x_{S1} = (2/3)x$ ته وشميرل شي.

$$0 = M + (x - x_{s1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3} x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^3 \quad \text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

د کږونلاين y_1 ټاکنه د لاندي ورشو لپاره

$0 \le x \le \frac{l}{2}$:

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right) dx$$

د سيومتري دلائلو له امله c_1 له لاندي څخه لاس ته راځي

$x_m = \frac{l}{2}$ mit $y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{1}{12l} x^4 + c_1\right)$$

$$0 = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^4}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{x^4}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^4}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$y_1 = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^5}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتریکی بارونی یا زور له امله کږونلاین و $x = l/2$ ته سیو- متري دی-د y_2 لپاره په ورشو $l/2 \le x \le l$ کی په y_1 کی فقط x د $l - x$ سره بدل کړي.

$$y_1 = \frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$\text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{qx}{12EI}\left(\dfrac{x^4}{5l} - \dfrac{lx^2}{2} + \dfrac{5l^3}{16}\right) & \text{für } 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{q(l-x)}{12EI}\left[\dfrac{(l-x)^4}{5l} - \dfrac{l(l-x)^2}{2} + \dfrac{5l^3}{16}\right] & \text{für } \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

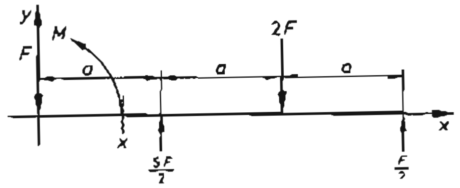
د $x_m = l/2$ لپاره ماکسیمالکږون له y_1 څخه شمیرل کیدی شي.

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{24EI}\left(\frac{l^3}{80} - \frac{l^3}{8} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$y_{max} = \frac{ql^4}{120EI}$$

۱۵ - دې تهونښتنی سره د x لپاره درې ورزوګانی باید توپیر شي

1. Bereich: $0 \le x \le a$ ورشو :



$$0 = M + F \cdot x \Rightarrow M = -F \cdot x$$

د $0 \le x \le a$ لپاره کږونلاین: y_1

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

ژی ارزښت : $y_1(a) = 0 \Rightarrow c_2$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^3 + c_1 x + c_2$$

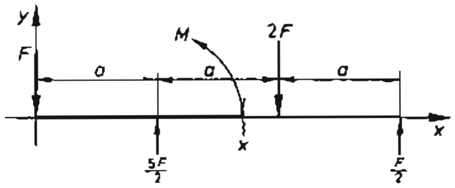
$$0 = \frac{Fa^3}{6EI} + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{Fa^3}{6EI} - c_1 a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x - a)$$

2. Bereich: $a \le x \le 2a$: وردیشو



$$0 = M - \frac{5F}{2}\cdot(x - a) + F\cdot x$$

$$M = \frac{5F}{2}(x - a) - F\cdot x$$

$$= \frac{3F}{2}x - \frac{5aF}{2}$$

$$= \frac{F}{2}(3x - 5a)$$

د $a \le x \le 2a$ لپاره کږونلاین: y_2

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3x - 5a)$$

$$y_2' = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3}{2}x^2 - 5ax + c_3\right)$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3 x + c_4\right)$$

ژی ارزښت : $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{5a^3}{2} + c_3 a + c_4\right)$$

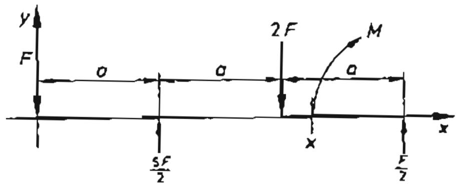
$$c_4 = \frac{5a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - c_3 a$$

$$= \frac{4a^3}{2} - c_3 a$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3(x - a) + 2a^3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. Bereich: $2a \le x \le 3a$ وروستو



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د $2a \le x \le 3a$ لپاره کږونلاین : y_3

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5 x + c_6\right)$$

ژی ارزښت : $y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_3$$

دا په فنکشنونو y_3 , y_2 , y_1 کی لا دننه ثابتی c_5 , c_3 , c_1 بایدد دي دري فنکشنونو رایوځایونی له لارې وټاکل شي

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

د c_3 او c_5 ټاکه:

شرتونه: $y_2(2a) = y_3(2a)$

$y_2'(2a) = y_3'(2a)$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3]$$

$$= -\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_5$$

مساوات یا برابرون I

$$\text{I:} \quad c_3 + c_5 = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 2a^2 + c_5)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_5$$

مساوات یا برابرون II

د مساواتو I او II خخه c_3 او c_3 ساده راپیدا کیږي

$$\text{II:} \quad c_3 - c_5 = 8a^2$$

$$\text{I+II:} \quad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \frac{23}{6}a^2$$

$$\text{I-II:} \quad 2c_5 = -\frac{1}{3}a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_5 = -\frac{25}{6}a$$

د c_1 ټاکنه

ثابته c_1 د $y_1'(a) = y_2'(a)$ اړیکو خخه شمیرل کیږي

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_2'(a) = -\frac{Fa^2}{6EI}$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}$$

په بنده بڼه کې د ټولو درېو ورشوګانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}(x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{-F}{12EI}(3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \le x \le 2a \\ \frac{F}{12EI}(x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \le x \le 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راکږونی ټاکلو لپاره باید y'_1 ، y'_2 او y'_3 جوړ شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI}(3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \pm a\sqrt{\frac{4}{3}}$$

هم x_1 او هم x_2 د ورشو $0 \le x \le a$ څخه دباندې پراته دي، چې له دې امله د ماکسیمالراګرون لپاره په پوښتنه کې نه راځي په ورشو $0 \le x \le a$ کې کیدی شي ماکسیما- لکږون یواځې په ژی ارزښت $x_{m1}=0$ کې رامنځ ته شي.

$$y_1(0) = y_1(x_{m_1}) = y_{max_1}$$

$$y_{max_1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI}(9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1;2}=\frac{5}{3}a\pm\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

دلته پامور نه دی ▶ $x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$

$$x_{m_2}=\frac{a}{3}(5-\sqrt{2})$$

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$$

دا پورته ارزښت نور د y_1 باوروړشو $a\leq x\leq 2a$ کې نه دی پروت، چې له دې امله یواځ د x_2 لپاره ماکسیمال راکړون مو مخ ته پریوتی شي.

$$y_{max_2}=y_2(x_{m_2})$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(5-\sqrt{2})^3-\frac{5a^3}{3}(5-\sqrt{2})^2+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(155-77\sqrt{2})-\frac{5a^3}{3}(27-10\sqrt{2})+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=-\frac{Fa^3}{108EI}[155-77\sqrt{2}-405+150\sqrt{2}+345-69\sqrt{2}-99]$$

$$y_{max_2}=-\frac{Fa^3}{108EI}[-4+4\sqrt{2}]$$

$$=-\frac{Fa^3}{27EI}(\sqrt{2}-1)$$

پام دې وي، چې دا راکړون د y-محور په مثبت- یا زیاتونلور رامنځ ته کیږي(دا په دې مانا، چې تراوسه پاس یا پورته پروت دی)، ځکه چې په دې کواوردیناتسیستم کې زور F کمون(تفریق) نخښه لري.

$$y_3'=\frac{F}{12EI}(3x^2-18ax+25a^2)$$

$$y_3'=0\Rightarrow 3x^2-18ax+25a^2=0$$

$$x^2-6ax+\frac{25}{3}a^2=0$$

$$x_{1;2}=3a\pm\sqrt{9a^2-\frac{25}{3}a^2}$$

$$=3a\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

دلته پامور نه دی ▶ $x_1=3a+a\sqrt{\frac{2}{3}}>3$

د x_1 – ارزښت نور د y_3 باوروړشو کې نه دی پروت، نو ځکه یواځې

د x_2 لپاره ماکسيمال راکړون موجود کيدی شي

$$x_{m_3}=a\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$y_{\max_3}=y_3(x_{m_3})$$

$$=\frac{F}{12EI}\left[a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-9a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\right.$$

$$\left.+25a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-21a^3\right]$$

$$=\frac{Fa^3}{12EI}\left[33-\frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-9\left(\frac{29}{3}-6\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\right.$$

$$\left.+25\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-21\right]$$

$$=\frac{Fa^3}{12EI}\left[33-\frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-87+54\sqrt{\frac{2}{3}}+\right.$$

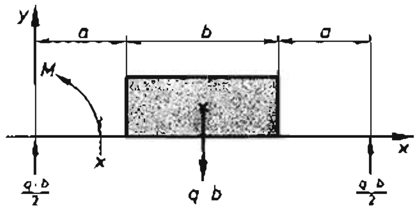
$$\left.+75-25\sqrt{\frac{2}{3}}-21\right]$$

$$=\frac{Fa^3}{12EI}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{Fa^3}{9EI}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۶ . د x لپاره دري ورشوگانی توپير کيدی شي.

1. Bereich: $0\le x\le a$: (ورشو) لعوىعدمړى



$l=2a+b$

$$0=M-\frac{q\cdot b}{2}x\Rightarrow M=\frac{q\cdot b}{2}x$$

د $0\le x\le a$ لپاره کږونلاين y_1:

$$y_1''=-\frac{M}{E\cdot I}$$

$$=-\frac{qb}{2EI}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1' = -\frac{qb}{4EI}x^2 + c_1$$

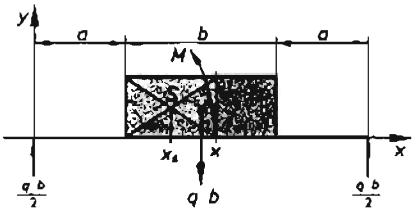
$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x + c_2$$

اژی ارزښت: $y_1(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1 x$$

2. Bereich: $a \le x \le a+b$ وردشو



$$0 = M + q(x-a)\cdot(x-x_s) - \frac{qb}{2}x$$

$x_s = \frac{x+a}{2}$

$$M = \frac{qb}{2}x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2}x - \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2}[bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2}[bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

x_2: د $a \le x \le a+b$ لپاره کږونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI}[x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2' = \frac{q}{2EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(2a+b) + a^2 x + c_3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتري باروېشنې له امله

$y_2'\left(a+\frac{b}{2}\right)=0,$

باور لري، له کوم سره

چې c_3 ټاکله کېږي.

$$0=\frac{q}{2EI}\left[\frac{(2a+b)^3}{24}-\frac{(2a+b)^3}{8}+\frac{a^2}{2}(2a+b)+c_3\right]$$

$$c_3=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+3(2a+b)^2-(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+2(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+8a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-4a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{1}{12}(2a+b)(b^2+4ab-2a^2)$$

$$=\frac{1}{12}(2ab^2+8a^2b-4a^3+b^3+4ab^2-2a^2b)$$

$$=\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)$$

ثابتې c_1 او c_4 باید له فنکشنونو y_1 او y_2 څخه د بوشانیزشرتونو $y_1(a)=y_2(a)$ او $y_1'(a)=y_2'(a)$ له امله وټاکل شي.

$$y_2=\frac{q}{2EI}\left[\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(2a+b)+\frac{a^2x^2}{2}+c_3x+c_4\right]$$

د c_1 ټاکنه

$$y_1'(a)=-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(2a+b)+a^3+c_3\right]$$

$$=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-a^3-\frac{a^2b}{2}+a^3+c_3\right]$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2b}{2}+\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[4a^3-6a^2b+b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3\right]$$

$$=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$y_1'=y_2'(a)$$

$$-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$c_1=\frac{qb}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

د c_4 تاکنه

$$y_1(a)=-\frac{qba^3}{12EI}+\frac{qba}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

$$=\frac{qab}{24EI}(4a^2+6ab+b^2)$$

$$y_2(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^4}{12}-\frac{a^3}{6}(2a+b)+\frac{a^4}{2}+c_3a+c_4\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}[a^4-4a^4-2a^3b+6a^4+12ac_3+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[3a^4-2a^3b+ab^3+6a^2b^2+6a^3b-$$

$$-4a^4+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+12c_4]$$

$$y_1(a)=y_2(a)$$

$$ab(4a^2+6ab+b^2)=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$4a^3b+6a^2b^2+ab^3=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$0=-a^4+12c_4$$

$$c_4=\frac{a^4}{12}$$

وردشو

3. Bereich: $a+b\leq x\leq l$

$$y_1=\frac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2)$$

$x:\blacktriangleright l-x$

$$y_3=\frac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2]$$

د دې ورشو لپاره کیدی شي کږونلاین y_3 له y_1 څخه ساده وشمیرل شي،څکه چې دا د سیومترۍ دروندوالي یا بارونې له امله و$(2a+b)(½)= 1/2 =x$ ته سیومتري دي.

د ټولو دري ورشوګان په رابندفورم کی د ګرونلاین انځورونه

$$y=\begin{cases}\dfrac{qbx}{24EI}\,(6a^2+6ab+b^2-2x^2) & \text{für } 0\leq x\leq a\\[2ex] \dfrac{q}{24EI}\,[x^4-2x^3(2a+b)+6a^2x^2+x(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4] & \text{für } a\leq x\leq a+b\\[2ex] \dfrac{qb(l-x)}{24EI}\,[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2] & \text{für } a+b\leq x\leq l\end{cases}$$

د سیومتریکي باروېشنی له امله مېاکسیمال راکږونه په لاندې کی پرته ده

$$x_m=\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\,(2a+b).$$

$$y_{max}=y_2(x_m)=y_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[\frac{1}{16}\,(2a+b)^4-\frac{1}{4}\,(2a+b)^4+\frac{3}{2}\,a^2(2a+b)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,(2a+b)\,(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4\right]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[(2a+b)^4-4(2a+b)^4+24(2a+b)^2a^2+$$

$$+8(2a+b)\,(b^3+6ab+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[-3(16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4)+24a^2(4a^2+4ab+b^2)+$$

$$+8(2a+b)\,(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[-48a^4-96a^3b-72a^2b^2-24ab^3-3b^4+96a^4+96a^3b+24a^2b^2+$$

$$+16ab^3+96a^2b^2+96a^3b-64a^4+8b^4+48ab^3+48a^2b^2-32a^3b+16a^4]$$

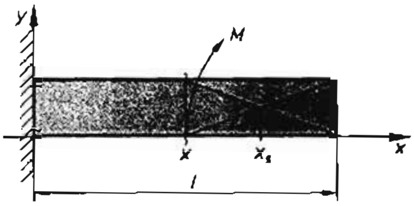
$$=\frac{q}{384EI}\,[64a^3b+96a^2b^2+40ab^3+5b^4]$$

$$=\frac{qb}{384EI}\,(64a^3+96a^2b+40ab^2+5b^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

17.



$x_s = \frac{l+x}{2}$

$$0 = M + q(l-x)\cdot(x_s - x)$$

$$= M + q(l-x)\cdot\frac{l-x}{2}$$

$$= M + \frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$M = -\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$y'' = = \frac{M}{EI}$$

$$= \frac{q}{2EI}(l-x)^2$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$y' = \frac{q}{2EI}\int (l-x)^2\,dx$$

$$= -\frac{q}{2EI}\int z^2\,dz$$

$$= -\frac{q}{6EI}z^3 + c_1$$

$$= -\frac{q}{6EI}(l-x)^3 + c_1$$

ژی ارزبنت : $y'(0) = 0 \Rightarrow c_1$

$$0 = -\frac{q}{6EI}l^3 + c_1;\quad c_1 = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$y' = \frac{q}{6EI}[l^3 - (l-x)^3]$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$y = \frac{q}{6EI}\int [l^3 - (l-x)^3]\,dx$$

$$= -\frac{q}{6EI}\int (l^3 - z^3)\,dz$$

$$= -\frac{q}{6EI}\left(l^3\cdot z - \frac{z^4}{4} + c_2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 + c_2\right]$$

ژې ارزښت

Randwert: $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -\frac{q}{6EI}\left[l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2\right]$$

$$0 = l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2; \quad c_2 = -\frac{3}{4}l^4$$

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 - \frac{3}{4}l^4\right]$$

$$= \frac{q}{24EI}\left[(l-x)^4 - 4l^3(l-x) + 3l^4\right]$$

ماکسیمارا گرون په ژې ارزښت z = l کی رامنځ ته کیږي.

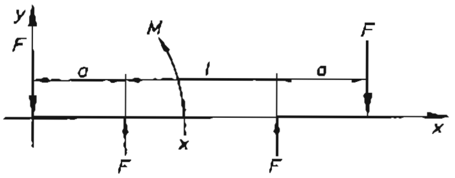
$$y_{max} = y(l)$$

$$= \frac{ql^4}{8EI}$$

۱۸ . د x لپاره دې بیا دري ورشوگانی توپیر شي.

ورشو

1. Bereich: $0 \leq x \leq a$



$$0 = M + x \cdot F \Rightarrow M = -x \cdot F$$

y_1: د $0 \leq x \leq a$ لپاره کرونلاین

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^3 + c_1x + c_2$$

ژې ارزښت

Randwert: $y_1(a) = 0 \Rightarrow c_2$

$$0 = \frac{F}{6EI}a^3 + c_1a + c_2$$

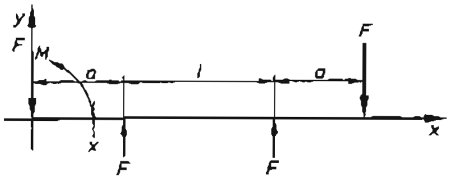
$$c_2 = -\frac{F}{6EI}a^3 - c_1a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورزشو

2. Bereich: $a \le x \le a+l$



$$0 = M + x\cdot F - (x-a)F$$

$$= M + x\cdot F - x\cdot F + a\cdot F$$

$$M = -aF$$

y_2: د $0 \le x \le a+l$ لپاره کږونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}x + c_3$$

د سیومتریکي باروېشنی له امله باور لري:

$$y_2'\left(a+\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right) + c_3$$

$$c_3 = -\frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI}\left[x - \left(a+\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$y_2 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

ترې ارزښت

Randwert: $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$

$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$

$$= \frac{a}{2}(a+l)$$

$$y_2 = \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن y_1 ثابته c_1 د هومو- گينيتي شرتونو $y'_1(a) = y'_2(a)$ له لاري پيدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI}\left[a - \left(a + \frac{l}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{alF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{alF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI}(a+l)$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)]$$

د سيومتريکی باروېشنی له امله کرونلاين y_3 و $x = a + (1/2)$ ته سيومتري دی د کرونلاين y_1 سره. له دې سره y_3 سملاسی له y_1 څخه شميرل کيږي.

3. Bereich: $a + l \leq x \leq 2a + l$ ورشو

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \blacktriangleright 2a + l - x$$

$$y_3 = \frac{F}{6EI}[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)]$$

د ټولو درې ورشوګانو لپاره په يو رابندفورم کی د اوبيونو (حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)] & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{aF}{2EI}[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)] & \text{für } a \leq x \leq a+l \\ \frac{F}{6EI}[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)] & \text{für } a+l \leq x \leq 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسيمال، مختلف راګرونونه رامنځ ته کيږي

$$y_{max_1} = y(0) = y_{max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI}[-a^3 - 3a(a+l)(-a)]$$

$$= \frac{F}{6EI}[-a^3 + 3a^3 - 3a^2 l]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{max_1} = \frac{Fa^2}{6EI}(2a+3l) = y_{max_2}$$

$$y_{max_3} = y\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$= y_2\left(a+\frac{l}{2}\right) = y_2\left(\frac{2a+l}{2}\right)$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[\frac{1}{4}(2a+l)^2 - \frac{1}{2}(2a+l)^2 + a(a+l)\right]$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[-\frac{1}{4}(4a^2+4al+l^2) + a^2 + al\right]$$

$$= \frac{aF}{2EI}\left[-a^2 - al - \frac{l^2}{4} + a^2 + al\right]$$

$$= -\frac{al^2F}{8EI}$$

19. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y > 0.$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\int z\,dz = \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} = 2y^{\frac{1}{2}} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 4\sqrt{y} + 2c_1^*$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z = \sqrt{4\sqrt{y}+c_1}$$

Substitution: بدلون

$t = 4\sqrt{y} + c_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{2}\sqrt{y}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}(t-c_1)\,dt$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}}$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{t-c_1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(\sqrt{t} - \frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t} - 2c_1\sqrt{t}\right) + c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=\frac{\sqrt{t}}{12}(t-3c_1)+c_2$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}\,(4\cdot\sqrt{y}-2c_1)+c_2;\quad y>0$$

20. $y''=a\cdot e^y$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=a\cdot e^y$$

$$\int z\cdot dz=a\int e^y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=a\cdot e^y+c_1^*\quad \|\cdot 2$$

$c_1=2c_1^*$

$$z^2=2ae^y+c_1$$

$$z=\sqrt{2ae^y+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$t^2=2ae^y+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t\,dt=2ae^y\,dy$$

$$dy=\frac{t\cdot dt}{ae^y}$$

$$=\frac{2t}{t^2-c_1}\cdot dt$$

$$\int\frac{dx}{a-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\text{ Artanh }\frac{x}{\sqrt{a}}+c$$

für $a>0$

$$\int\frac{dt}{c_1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+c_1}}$$

$$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-c_1}\,dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-c_1}=-2\int\frac{dt}{c_1-t^2}$$

$$x=-2\frac{1}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\sqrt{\frac{2a}{c_1}e^y+1}+c_2;\quad c_1>0$$

21. $y^4-y^3\cdot y''=1$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$y^4-y^3\cdot\frac{dz}{dy}\cdot z=1$$

نیونه: $y\neq 0$ په y^3 ویشنه

$$y-\frac{dz}{dy}z=y^{-3}$$

$$\int z\cdot dz=\int(y-y^{-3})\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^{-2}}{2}+c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=y^2+y^{-2}+2c_1$$

$$z=\sqrt{y^2+y^{-2}+2c_1}$$

$$=\frac{1}{y}\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}$$

Substitution: بدلون

$$y^2=t \Rightarrow dy=\frac{dt}{2y}$$

$$\int dx=\int\frac{y}{\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2c_1t+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}}$$

Substitution: بدلون

$$u=t+c_1 \Rightarrow du=dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1-c_1^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$a^2 \blacktriangleright 1-c_1^2$$

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t+c_1+\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+c_1+\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}\right|+c_2$$

د $y \neq 0$ لپاره

$\neq$

22. $y''=\frac{1}{y}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:

$y \neq 0.$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{y}$$

$$\int z\,dz=\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2}=\ln|y|+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=2\ln|y|+2c_1^*$$

$$=\ln y^2+c_1$$

$c_1=2c_1^*$

$$z=\sqrt{\ln y^2+c_1}$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{\ln y^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t^2=\ln y^2+c_1 \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow 2t\,dt=\frac{2y}{y^2}\,dy$$

$$dy=yt\cdot dt$$

د دې اینتیګرېشن سره ل
لمړودینی خخه تیریدنه ناشونی ده

$$\int dx=\int\frac{yt\cdot dt}{t}$$

$$=\int y\,dt$$

$$=\int e^{\frac{t^2-c_1}{2}}dt$$

$$=e^{-\frac{c_1}{2}}\int e^{\frac{t^2}{2}}dt$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

$$\blacktriangleright\ x=\frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}}=1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4\cdot 2!}+\frac{t^6}{8\cdot 3!}+\frac{t^8}{16\cdot 4!}+\cdots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}dt=c_2+t+\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{5\cdot 4\cdot 2!}+$$

$$+\frac{t^7}{7\cdot 8\cdot 3!}+\frac{t^9}{9\cdot 16\cdot 4!}+\cdots$$

$$x=e^{-\frac{c_1}{2}}\left[c_2+\sqrt{\ln y^2+c_1}+\frac{(\sqrt{\ln y^2+c_1})^3}{6}+\frac{(\sqrt{\ln y^2+c_1})^5}{5\cdot 4\cdot 2!}+\frac{(\sqrt{\ln y^2+c_1})^7}{7\cdot 8\cdot 3!}+\cdots\right]$$

د $y\neq 0$ ، لپاره

23. $y^2=k^2\cdot y''$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$y^2=k^2\cdot\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\int y^2\,dy=k^2\int z\,dz$$

$$\frac{y^3}{3}=k^2\cdot\frac{z^2}{2}+c_1^* \quad \Big\|\cdot\frac{2}{k^2}$$

$$z^2=\left(\frac{2}{3}y^3-2c_1^*\right)\cdot\frac{1}{k^2}$$

$$=\frac{1}{k^2}\cdot\frac{2}{3}(y^3-3c_1^*)$$

$$c_1=-3c_1^*$$

$$z=\frac{1}{k}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{y^3+c_1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dx = k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{y^3+c_1}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2}}\int\frac{dy}{\sqrt{c_1\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}dy$$

د دې اینتیګرال شمیرنه یواځې د لړی ودیزئینی له لارې شونی ده.

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}x+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3+-$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

د $|x|<1$ لپاره

$$\blacktriangleright \frac{y^3}{c_1}=x$$

$$\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{y^3}{c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^6}{c_1^2}-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^9}{c_1^3}+-\cdots$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

$$x = k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

$$\left|\frac{y^3}{c_1}\right|<1 \Rightarrow |y^3|<|c_1|$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

24. $y''=y^2$

دا دفرنځیالمساوات هغه د مخه تیره پوښتنه ۲۳ کی شمیرلی دفرنځیالمسا-وات خانګړی حالت دی د $k=1$ سره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

25. $y^2 \cdot y'' = a$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نیونه: $y \neq 0$ په y^2 ویشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

Substitution: بدلون

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a} dt$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a} dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2} dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)]^2}$$

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1} + t)^2 \cdot (\sqrt{c_1} - t)^2}$$

ایتیګرال په ټوټه یا پارشلماتو

ماتو ټوټه یا تجزیه کیږي

$$= 4a \int \left[\frac{A}{\sqrt{c_1} + t} + \frac{B}{(\sqrt{c_1} + t)^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1} - t} + \frac{D}{(\sqrt{c_1} - t)^2} \right] dt$$

د ځلوونو یا ضریبونو انډول:

$$1 = A(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)^2 + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(\sqrt{c_1} + t)^2(\sqrt{c_1} - t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} - t) + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} + t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1 t - \sqrt{c_1} t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1} t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1 t - \sqrt{c_1} t^2 - t^3) +$$

$$+ D(c_1 + 2\sqrt{c_1} t + t^2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = t^3(A-C) + t^2(-A\sqrt{c_1} + B - C\sqrt{c_1} + D) + t(-Ac_1 - 2B\sqrt{c_1} + Cc_1 + 2D\sqrt{c_1}) +$$
$$+ Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Cc_1\sqrt{c_1} + Dc_1$$

$$\begin{array}{lll}
\text{I}: & 0 = A - C & \Rightarrow A = C \\
\text{II}: & 0 = -A\sqrt{c_1} + B - C\sqrt{c_1} + D & \\
\text{III}: & 0 = -Ac_1 - 2B\sqrt{c_1} + Cc_1 + 2D\sqrt{c_1} & \\
\text{IV}: & 1 = Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Cc_1\sqrt{c_1} + Dc_1 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{II}: & 0 = -2A\sqrt{c_1} + B + D & \\
\text{III}: & 0 = -2B\sqrt{c_1} + 2D\sqrt{c_1} \quad \| : 2\sqrt{c_1} & \Rightarrow B = D \\
\text{IV}: & 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Dc_1 &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{II}: & 0 = -2A\sqrt{c_1} + 2B \quad \| \cdot c_1 \\
\text{IV}: & 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + 2Bc_1
\end{array}\right\} +$$

$$1 = \qquad 4Bc_1 \qquad \Rightarrow B = \frac{1}{4c_1} = D$$

$$\text{IV}: \quad 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow A = \frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}} = C$$

له دي سره x شميرل يږي.

$$x = 4a\int\left[\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}+t} + \frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}+t)^2} + \frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}-t} + \frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$

$$= \frac{a}{c_1}\int\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}+t} + \frac{1}{(\sqrt{c_1}+t)^2} + \frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}-t} + \frac{1}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$

$$= \frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}+t| - \frac{1}{\sqrt{c_1}+t} - \frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}-t| + \frac{1}{\sqrt{c_1}-t}\right] + c_2$$

$$= \frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+t}{\sqrt{c_1}-t}\right| + \frac{2t}{c_1-t^2}\right] + c_2$$

$$= \frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}\right| + \frac{2\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{c_1-\left(c_1-\frac{2a}{y}\right)}\right] + c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{yc_1}+\sqrt{yc_1-2a}}{\sqrt{yc_1}-\sqrt{yc_1-2a}}\right|+\frac{1}{a}\sqrt{y(yc_1-2a)}\right]+c_2 \quad \text{für } y\neq 0$$

26. $y''=6y-4$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=6y-4$$

$$\int z\,dz=\int(6y-4)\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=3y^2-4y+c_1^* \quad \|\cdot 2$$

$$z^2=6y^2-8y+2c_1^*$$

$$z=\sqrt{6y^2-8y+2c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$c_1=-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*$$

$$z=\sqrt{6}\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}$$

$$\int dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t=y-\frac{2}{3}\Rightarrow dy=dt$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+c_1}}$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|t+\sqrt{t^2+c_1}|+c_2$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|y-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}\right|+c_2$$

27. $y''=1+y'^2$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

$$\int dx=\int\frac{dz}{1+z^2}$$ ◄ بنسټ اینټیګرال

$$x=\text{Arctan } z+c_1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{Arctan } z = x - c_1$$

$$z = \tan(x - c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x - c_1)$$

$$\int dy = \int \tan(x - c_1)\, dx$$

$$\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\, dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

$$y = -\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\, dx$$

$$= -\ln|\cos(x - c_1)| + c_2$$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \text{Arsinh } z$$

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int dx$$

$$\text{Arsinh } z = x + c_1$$

$$z = \sinh(x + c_1)$$

$$y = \int \sinh(x + c_1)\, dx$$

$$= \cosh(x + c_1) + c_2$$

29. $y'' = e^{y'}$

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^{z}$$

$$\int e^{-z}\, dz = \int dx$$

$$-\int e^{-z}\, dz = -\int dx$$

$$e^{-z} = -x + c_1$$

$$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$$

$$-z = \ln(c_1 - x)$$

$$y' = -\ln(c_1 - x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سبستیچیوشن

$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$

پارشل - یا ټوټه اینتیګرال

$$y = -\int \ln(c_1 - x)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{dt}_{dv}$$

$$= t \cdot \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t\,dt$$

$$= t \cdot \ln t - t + c_2$$

$$= t(\ln t - 1) + c_2$$

$$= (c_1 - x)[\ln(c_1 - x) - 1] + c_2$$

30. $y'' = y'^3$

ثابت : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$ زینګولاراوبیونه

Voraussetzung: $y' \neq 0$ ؛ نیونه

$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$c_1 = -c_1^*$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm\sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2\sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm\sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$y = a = \text{const.}$ = ثابته

(c) ketabton.com: The Digital Library

31. $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$y'^2 - 3y''^2 = 0$$

$$y'^2 = 3y''^2$$

$$y' = \pm\sqrt{3}y''$$

پارتیکولار اوبیونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' = z \neq 0$ ؛ نیونه

$$z = \pm\sqrt{3}\,\frac{dz}{dx}$$

$$\pm\sqrt{3}\int\frac{dz}{z} = \int dx$$

$$\ln|z| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*$$

$$e^{\ln|z|} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot\underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$$

$$z = c_1 \cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}$$

$$y = c_1\int e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}\cdot dx$$

$$y = \pm\sqrt{3}c_1 \cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2$$

د $c_1 = 0$ سره په دي کی
پارتیکولاراوبیونه خوندي ده

32. $y''' + y''^2 = 0$

$$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$$

زیگولارزوبیونه : $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$$y = ax + b$$

نیونه : $y'' = z \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -z^2$$

$$-\int\frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{z} = x + c_1$$

$$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1}$$
$$= \ln|x+c_1| + c_2$$

د وریسی ایتیګریشن لپاره دي ارزښتکرښی کیښول شي

1. Fall: $x+c_1>0$

$$y' = \ln(x+c_1)+c_2$$
$$y = (x+c_1)[\ln(x+c_1)-1]+c_2x+c_3$$

2. Fall: $x+c_1<0$

$$y' = \ln(-x-c_1)+c_2$$
$$y = (x+c_1)[\ln(-x-c_1)-1]+c_2x+c_3$$

د ارزښتکرښوکارونی سره د دواړو چالتتوپیرونو لاس ته راوړنی یا نتیجی رایوځای کیږي

$$y = (x+c_1)[\ln|x+c_1|-1]+c_2x+c_3$$
$$y = ax+b$$

33. $xy'^2 = y$

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

د اوښتونو یا واریابلو بیلښت
x, dx und y, dy

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

اینتیګریشن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$2\sqrt{x}+c_1 = 2\sqrt{y}+c_2$$

$$\frac{c_1-c_2}{2} = c$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1-c_2}{2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x}+c$$

$$y = x+2c\sqrt{x}+c^2$$

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library