

کوشی KUSCH

د فرنیخیا لبر ابرون یا _ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleichungen

ژباړن:

ډاکټر مافان (مېړی) شینواری

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه



ماخان (په اولني نوم مېړی) د ارواښادې پستو او ارواښاد نورالرحمان زوی، په ۱۳۴۶م کال د شینوارو د هسکې مېنې ولسوالۍ کې زېږېدلی. (د زېږېدو نېټه یې د ۱۳۲۴ هـ ل کال څخه یو یا دوه کاله دمخه ده).

د هسکې مېنې د درې کاله کلیوالي

ښوونځي وروسته، چې د لومړنيو زده کوونکو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر ۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لېسه، د ۱۹۶۶م کال سپتمبر کې د یوه برس له لارې اطریش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاکټرۍ بریالی شو. د ۱۹۸۷م کال د نومبر تر ۱۹۸۸ فبروري تر اخره د افغانستان د باندنيو چارو کې مامور وو. دی د ۱۹۸۸م کال د فبروري له ۲۹ تر ۱۹۹۲م کال د اپرېل تر نیمايي وراخوا په بن (المان) کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژدافیر وو او د ۱۹۹۲ یوني څخه راپه دېخوا په المان کې نور هم د پردېسۍ شپې او ورځې تېروي.

ماخان شینواری د مېرمن ښاپېرۍ سره له ۱۹۷۲م کال راپه دې له لري واده (د واده خبر ورته اطریش ته راغی) دی په نهم ټولگي کې یې کوزده ورته کړې وه. دوی ته لوی څښتن دوه بچیان وښخېل، څانگه او اباسین، چې د ۱۹۷۹م کال د می په شلم په اطریش کې زېږېدلي.

**Verein zur Förderung der Afghanischen
Kultur e. V. Köln, Germany**

۱ . ديفرنخيالبرابرون يا ديفرنخيال مساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسخندنت مساواتو نامعلومی لوي تر يوې برخې د توپيري پوتنخونو سره لکه x, y, z^2, a^3 او داسی نور ، لرودي. که د مساواتو دا نامعلومی يا ناپيژندلی لويي فنکشنونه او د هغی رابيلدنی يا دفرنخيالویشنه يامشتقونه وي، نو دلته د يوه ديفرنخيال مساوات څخه غږيدنه ده يا خبرې دي. د دې مساوات اوبی يا حل ستونځې لري، په ډيرو حالتونو کې حتی شميرنيز ناممکن دی.

د دې وړې برخې په دننه کې کيدی شي ، چې يواځې يوه پيلونه ورکړل شي، د يوڅو په تخنيک کې، دمهمو کاروونو يا استعمال سره.

يادونه: دلته څه نومونه چې راځي د هغو سره بايد لوستونکی بلد وي. او که چيري داسی نه وه، نو دا تر زیاته حده ځما د مخه تيرو کتابونو کی راوړل شوي، که هغه هندسي کليمي وي او که شميرپوهنيزې. که پوه شوم، چې کومی کليمي ځما په تيرو کتابونو کی روښانه نه دې تعريف شوي، وبه هڅيرم، چې دا کار دلته روښانه کړم.

گران لوستونکی به په دې پوهيږي، چې کوم شيان د ژباړونکی دي، که په روښانه توگه می گوته لک نه کړل.

۱ . ۱ بنسټکليمی

۱ . ۱ . ۱ تعريفونه (پيژندنی)

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپير شوي دي.
ټاکن مساوات:

$$y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3 \quad \text{— الجبري ريشنل مساوات.}$$

$$\sqrt{3x^2 - 1} = x^2 \quad \text{— الجبري ايريشنل مساوات.}$$

$$y = \sin x ; y = e^{2x+1} = 2x \quad \text{— ترانسخندنت مساوات.}$$

فنكشن مساوات

هر $x \in D(f)$ په يواځني يو $y \in R$ تنظيميري.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \Rightarrow y = f(x) \Rightarrow f = \langle f \Rightarrow f(x) \rangle$$

$$y + 2x = y' \cdot x^2 - y'' \Rightarrow f = \langle x \Rightarrow f(x), f'(x), f''(x) \rangle$$

$$\Rightarrow y = f\langle x, y', y'' \rangle$$

دفرنخيال مساوات، په کومو کې، چې د بلواکو اوبنتوني y يواځي خپلواکي اوبنتوني x اود هغه رابيليدني لکه

$$dy / dx = y' ; d^2 y / dx^2 = y'', \dots, \quad |$$

رامنځ ته کيږي، بلد يا عادي ديفرنخيال مساوات بلل کيږي.

د ديفرنخيال مساوات ټوليزه بڼه :

$$\bullet y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$$

$$\bullet y'^2 + x \cdot y^2 = 4$$

$$\bullet y''' + y'' + y' = e^x$$

$$\bullet x \cdot y' = y'' \cdot y$$

$$\bullet x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$$

که د ديفرنخيال مساوات ناپيژندونکي د ډيرو اوبنتونکو فنکشنونه وي، نو د

پارشل — يا ټوټه ديفرنخيال مساواتو څخه غږيږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y$$

د دې ټوليزه بڼه يا فورم

$$O = f(x; y; z; \frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \dots; \dots)$$

د $1, 2, \dots, n$ (يعني، لمري، دوم، ... او n -ام) نظم ديفر-

نخيال مساواتو ترمنځ توپير کوو

$$d \text{—} 1 \text{—} \text{م نظم ديفرنخيال مساوات} \quad 4y - dy / dx + y^2 = 0$$

$$3x^2 + y^2 = d^2y / dx^2 = y'' \quad \text{۲- ام نظم د. م.}$$

$$y''' - 3y = y'' + y' \quad \text{د. م. ۳- ام نظم د. م.}$$

دلته په ديفرنخيالمساوات کی هغه لورديفرنخيالكووڅښت يا لوره رابيليدنه يا ديفرنخيالویش د ديفرنخيالمساوات نظم ورکوي .

د ديفرنخيالمساوات يو بل د توپيرونو لویا فرق کولو امکانات په درجه يا گراد Grad کی ورکړ شوي دي. د ديفرنخيالمساوات گراد د ديفرنخيالمساوات د زیاتوونو له لارې ټاکل شوی دی، په کوم کی چی د بلواکو اوبستونکو يا واریابلو د جگيو يا لوريو يا اکسپوننتونو او د ديفرنخيالویش هغه زیاتون چی د ټولو لوي وي.

$$y''' - 3x^2 + y = 0 \quad \text{۱. درجه}$$

$$x^4 y' y''^2 y''' + y - x^2 = 0 \quad \text{۲. درجه}$$

$$y y''^3 + y'' \cdot x^8 = y \quad \text{۳. درجه}$$

$$y - y^2 y''^4 - y' = 0 \quad \text{۴. درجه}$$

بلد ديفرنخيالمساوات

$$4x^5 y^2 + 2y y'^3 \cdot \cos x - 5y + 7 = 0 \quad \text{د. م. ۱. نظم او ۳. درجی}$$

بلد يا ساده (عادي) ديفرنخيالمساوات

$$y y'' + 4x y' - y = 0 \quad \text{د. م. ۱. نظم او ۱. درجه}$$

۱ . ۱ . ۲ د ديفرنخيالمساواتو اوبيونی يا حلونه

د ديفرنخيالمساوات اوبيونه يو فنکشن دی او زیات وخت د ديفرنخيالمساوات ايتيگرال هم بلل کيږي، ځکه، چی په بنسټيزه توگه رابيليدنی د ايتيگرال له لارې لاس ته راځي د ديفرنخيالمساوات د اوبيو يا حلونولاندې په مساواتو کی منځ ته راغلو، د ديفرنخيالونو او ديفرنخيالكوشتونو د له منځه وړل دي، دا په دې مانا چی د ورکړشو رابيليدنو څخه بايد په هغه اړه فنکشن مساوات راپيدا کړی شي.

بیلگه: ديفرنخيالمساوات : $x/2 - y' = x$

$$dy/dx = y' = -x/2$$

$$dy = -(x/2).dx$$

د رابيليدنو د له منځورنه په بنسټيزه توگه د اينتگرال له لارې پيښيري يا صورت نيسي. د ديفرنخيالمساواتو اوبی يا حل له امله د هغه اينتگرال او يا هم د هغه بنسټمسوات بولو.

$$\int dy = -(1/2) \int x.dx$$

$$y = -(1/4)x^2 + C, C \in \mathbb{R} \quad (\text{حل})$$

د فنکشنمسوات $y = (x)$ څخه د اوييفنکشن لاس ته راځي

$$f = \langle x \rightarrow -(1/4)x^2 + c \rangle$$

يادونه: داسی پورته مات نوکان <, > دې بيا لږ لوي وليکل شي، زه يی په بل ډول امکانات نه لرم.

ازماينبت:

که د اوييوني فنکشن $y = -(1/4)x^2 + c$ څخه لمړی رابيليدنه جوړه شي او د $y' = -x/2$ لپاره ترم د ازماينبت لپاره په سر- يا پيل ديفرنخيالمساوات کی کيښوول شي، نو دا به د فنکشن د ديفرنخيالمساوات د ټولو توکو لپاره يو کټمټ يا ايدنتيک مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cdot 2x \\ = -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x \\ x = x$$

(دا يی په بل ډول ليکنود) ديفرنخيالمساوات اوبی

$$y = -(1/4)x^2 + C$$

د آزمایشت لپاره نتیجه بیرته دفرنخیالیبری یا رابیلیدنه نیول کیږي. دا نتیجه د دفرنخیالمساوات سره سرخوري.

$$dy / dx = - x / 2$$

گورو، چی بیرته په دې توگه دفرنخیالمساوات لاس ته راغی. بیلگه: د دفرنخیالمساوات

$$2x + dy / dx = 0$$

اوبی یا حل سره، لکه څنگه په ټولو اینتیگرالولو کی یوه ثابت C رامنځ ته کیږي،

$$y = - x^2 + C$$

د دفرنخیالمساوات اوبیونی یا حلونه کیدی شي، چی په درې ډلو وویشل شي.

۱ - ټولیز اوبی

د دفرنخیالمساوات اوبی یا حل کی ، لکه په هر اینتیگریشن کی یوه اینتیگریشن ثابت c رامنځ ته کیږي.

که د دفرنخیالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کیږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفرنخیال مساوات ټولیز اوبی او یا د دې دفرنخیالمساوات ټولیز اینتگرال بلل کیږي.

بیلگه :

$$y' = 1 / 2 \text{ دفرنخیالمساوات}$$

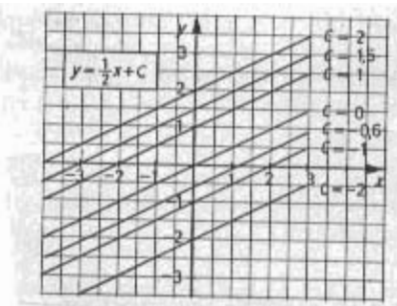
$$\Rightarrow y = (1 / 2) dx$$

$$= (1 / 2) x + c$$

$$f = \langle x \rightarrow (1/2)x + c \mid c \in \mathbb{R} \rangle \text{ ټولیز دفرنخیالمساوات}$$

د یوه دفرنخیالمساوات ټولیز حل د کپرو د کودې (د هغو کپرو ډله، چی یو له بل سره غبرگی ځغلي) په څیر په گراف کیانخوریدلی شي .

دلته ناپایدیری اوبیونی ممکن دي، ځکه چی ثابته هر په خوښه ارزښت نیولي شي.



خیره

۲- پارتيکيولر-يا پوتشيز اوييونه partikuläre Lösung

يا برخه نيز- يا د يوې يوې برخي اوييونه

که د ورکړ شوي ديفرنشيال مساوات لپاره نور ورزيات ټاکلي شرايط ورکړ شوي وي، نو کيدی شي، چي د اينتگریشن ثابت C وشميرل شي. بيلگه:

$$y' = 1/2 \quad \text{ديفرنشالمساوات}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow \rangle (1/2)x + c, c \in \mathbb{R} \quad \text{ټوليز مساواتفکشن}$$

$$y = (1/2)x + c, c \in \mathbb{R} \quad \text{ټوليز اوبی}$$

که د c د شميرلو لپاره نور ورزيات شرطونه $x_1 = 1, y_1 = 2$ وي

$$y_1 = (1/2)x_1 + C \quad \text{بدلون يا اړونه}$$

$$C = y - (1/2)x \quad \text{ارزښت ځاي په ځاي کړی}$$

$$C = 2 - (1/2) \cdot 1$$

$$\Rightarrow C = 1,5$$

ارښت کيږدی

$$y_1 = (1/2)x_1 + 1,5 \quad \text{پارتيکيولر اوبی}$$

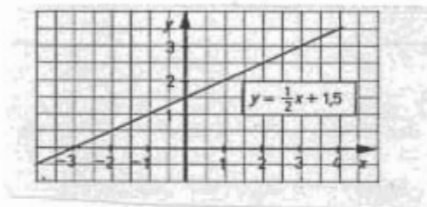
$$\Rightarrow 2 = (1/2) \cdot 1 + c \Rightarrow c = 1,5$$

له دې د ديفرنشيالمساواتو پارتيکولر اوبی لاس ته راځي.

د $c = 1,5$ سره له ټوليز او بيفنکشن f څخه ټوټه او بې فنکشن f_1 لاس ته راځي.

$$f_1 = \langle x \rightarrow (\frac{1}{2})x + 1,5 \rangle$$

د پارتيکولار او بې په گراف کې د کرښو د کوډې څخه يوه ټاکلې کرښه بنايي د $c = 1,5$ حالت لپاره.



په تخنیکي پراېلمونو کې زیات وخت پارتيکولار او بېونو يا حلونو ته اړتيا پېښېږي.

۳ - زینګولار او بېونې *singuläre Lösungen*

دا لاندې ډیفرنځیال مساوات دې ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی، که ونیول شي

$$y = \sin(x + C)$$

دا او بېونې د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

$$y^2 + y'^2 = 1 \text{ ▶ Differentialgleichung}$$

بیلګه: د جبري مساوات

$$f = \langle x \mapsto \sin(x + c) | c \in \mathbb{R} \rangle \text{ ▶ angenommene}$$

$$\Rightarrow y = \sin(x + c) \text{ allgemeine}$$

$$\text{Lösungsfunktion}$$

نیولی
ټولیز
او بې فنکشن

ازماییت

$$y = \sin(x + c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x + c)$$

$$\Rightarrow y' = \cos(x + c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x + c)$$

$$y^2 + y'^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2(x + c) + \cos^2(x + c) = 1$$

ازمايښت د نيول شوي اوبې رتيښتینوالی تصدیقوي

دا ځنی دفرنڅیالمساوت د دې تر څنگ نورې اوبیونی هم لري، کومی چی په زیښتونی دفرنڅیالمساوات پوره کوي، مگر له دې پیدا ټولیز اوبی یا حل څخه رابیلیدور نه دی.

د ټولیزې اوبیونی $y = \sin(x + c)$ تر څنگ دفرنڅیالمساوات د فنکشنونو

$$f_1 = \langle x \rightarrow 1 \rangle \text{ او } f_2 = \langle x \rightarrow -1 \rangle$$

سره هم پوره کیږي.

دا اوبیونی یا حلونه زینګولار بلل کیږي. دا د یوه ټولیز حل د کړوکړښو د کودو هندسي پوښ انځوروي.

د دواړو زینګولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کړښو په څیر ښایي، چی د x -محور سره غبرگی ځغلي، کومی چی ټولیز یا عمومي اوبی یا حل $\sin(x + C)$ پوښوي یا پټوي.

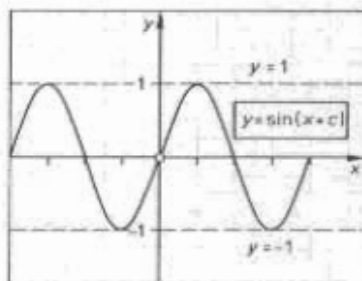
$$y^2 + y'^2 = 1$$

$$y_1 = 1; y'_1 = 0 \Rightarrow 1^2 + (0)^2 = 1$$

$$y_2 = -1; y'_2 = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} f_1 = \langle x \rightarrow 1 \rangle \\ f_2 = \langle x \rightarrow -1 \rangle \end{matrix} \right\} \text{singuläre Lösungen}$$

زینګولار اوبیونې
یا حلونه



د دفرنڅیالمساواتو زینګولار حلونه د کم اهمیت دی یا د کم غوروالی دي. د دې کتاب په چوکاټ کي به د دې په پیلونو یا کارونو تیریدنه وشي.

د اوبیونی متودونه

د ديفرنخيالمساوات اوبیونی اصلاً د اینتېگرالشمیرنی له لارې صورت نیسي. د لاندې بیلگو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي. بیلگی : د لاندې ديفرنخيالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړی!

$$1. \quad y' = 4x$$

$$dy / dx = 4x \quad \text{بڼه بدلون :}$$

یوځي د لمړي نظم ديفرنخيالكووخینت یا ديفرنخيالویش مخ ته پروت دی، نو د dy پسې برابرېري یا ترتیبېري او اینتېگرالېري.

$$\text{اینټېگرالونه} \quad dy = 4x \, dx$$

$$\int dy = 4 \int x \, dx$$

$$y = 2x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow 2x^2 + c \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

2. که ډیر اینتېگرالونه لاس ته راځي، نو د اینتېگرالشابتي c_1 او c_2 و یوې ثابتې c ته سره رابوځاي کيږي.

$$y' = 8x^2 - 2x^2$$

$$y = 8 \cdot \int x^2 \, dx - 2 \cdot \int x^2 \, dx$$

$$= 2x^3 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$

$$= 2x^3 - \frac{2}{3}x^3 + c; \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \rightarrow 2x^3 - \frac{2}{3}x^3 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

3. د یوه بلد ۲. نظم ديفرنخيالمساوات لپاره د دوه واړه اینتېگرالولو له لارې اوبیونه پیدا کيږي

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$

$$y' = \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + c_1; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{3} \int x^3 dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2; c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x^4 - \frac{1}{12} x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

په ټوټه اینتېگرالونه کې هم دوه اینتېگرال ثابتې پیدا کېږي، کومې چې د ټوټه اوبې سره د ورکړشو شرایطو له مخې باید وټاکل شي. ۴. په دفرنخیالمساوات کې $y' = dy/dx$ اینسول کېږي او له dx سره خلیږي

بیا دا بدلونېنه په دواړو خواوو اینتېگرالېږي.

ورپسې دواړه د اینتېگرال ثابتې c_1 او c_2 و $c = 2(c_2 - c_1)$ ته سره را یوځای کېږي. (دې ته دې په شمیر پوهنیزه برخه کې پاملرنه وشي، ما د تخنیکي ستونځو له امل بل ډول نه شوې لیکلی)

$$y \cdot y' = \cos x$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$

$$\int y dy = \int \cos x dx$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$

$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$

$$y = \pm \sqrt{2 \cdot \sin x + c}; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x^4 - \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۵. اینسول کېږي $y' = dy/dx$ او دفرنخیالمساوات د dx سره خلیږي. ورپسې د دفرنخیالمساوات دواړه خواوې اینتېگرالېږي او بیا ثابتې c_1, c_2

او c_3 و یوې ثابتې c ته سره راټولېږي یا رابوخاي کيږي. که دواړو لورو ته ورپسې مربع تکمیلونه ۱ وړ زیاته شي نو y شمیرل کیدی شي، او لاس ته راغلی f ټولیز اوبی دی.

$$\begin{aligned}
 y' \cdot y &= y' + x \\
 \frac{dy}{dx} \cdot y &= \frac{dy}{dx} + x \\
 y \cdot dy &= dy + x \cdot dx \\
 \int y \, dy &= \int dy + \int x \, dx \\
 \frac{y^2}{2} + c_1 &= y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3 \\
 y^2 - 2y &= x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) \\
 &\quad \blacktriangleright 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c \\
 y^2 - 2y &= x^2 + c \\
 y^2 - 2y + 1 &= x^2 + c + 1 \\
 (y - 1)^2 &= x^2 + c + 1 \\
 y - 1 &= \sqrt{x^2 + c + 1} \\
 y &= \sqrt{x^2 + c + 1} + 1; c \in \mathbb{R} \\
 \Rightarrow f &= \langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 \mid c \in \mathbb{R} \rangle
 \end{aligned}$$

په یاد ولری

- ۱ - ديفرنخيالمساوات په ټوليزه توگه ټوليز، پارتيکيولار او په ورکړ شوي حالت کي زينگولار اوبيونی يا حلونه لري.
- ۲ - ديفرنخيالمساوات په مناسب يا ورته شميرنيز کارونی له لارې په زیاتون- حالتونو کی د اینتيگرال له لارې اوبي کيږي.
- ۳ - زیات وخت باید چي اوبي ونیول شي او دا اوبي بیا د هغه د ریښتینوالی لپاره و ازمایل شي.

۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندې ساده دفرنخیالمساوات اوبی یا حل کړی

1. $y'' = x \cdot e^x$
2. $y'' - x = 0$
3. $2y' - \cos x = 0$
4. $x \cdot y'' = 3y'$
5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$
6. $y' \cdot y + y' + x = 0$
7. $y' - x^2 = 3e^x$
8. $\sin x - e^x = y'$
9. $y' \cdot y = x + 1$
10. $y' \cdot y^2 = y' - x^2$
11. $dy/dx - 3x = e^x$
12. $y' - x^2 = x^2 - y'$
13. $dy/dx + \cos x = 1$
14. $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$
15. $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$
16. $e^x \cdot y' = y$
17. $y'' = 7x^3$
18. $d^2y/dx^2 = \sin x$
19. $3x - y'' = a$
20. $y'' = y'$
21. $y'' = x \cdot \cos x$

۲ . ۱ د لومړي نظم دفرنخیالمساواتونه

د لمړي نظم دفرنخیالمساواتونه داسی پیژندل کیږي، چی یواخی لمړی رابیلیدني y' او یا د y' په توانونه لکه y'^2, y'^3 رامنځ ته کیږي. د دې ترڅنگ کیدی شي x او y همداسی د دوي توان رامنځ ته شي بیلګي:

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$

$$y \cdot y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

$$y' = f(x, y)$$

تولیز:

د y' او x موجودیت او لویوالی تنظیموني پسی د دفرنخیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. دلته به د دې مهمو باندې لنډې خبرې وشي.

۱ . ۲ . ۱ دفرنخیالمساوات د بیلوشو اووښتونو سره

دفرنخیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نڅېبه

کیري، په کومو کي چي ممکن وي، چي لويي $dy, g(y)$ په همدې توگه $dx, f(x)$ هر يو يي په يوه لور بيل يا خانله کړو.

د دې اړونى سره کيدى، چي مساوات په دواړو خواوو ايتگرال شي.

بيلگه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$

$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \quad \blacktriangleright \quad y^3 = g(y); \quad x^2 = f(x)$$

$$\int y^3 dy = \int x^2 dx$$

۱. دفرنخيالمساوات د y^2 او dx سره ځليږي. بيا کيدى شي، چي د مساوات

دواړه خواوې ايتيگرال شي د y^3 پسى او بيونى له امله ثابتى $3 \cdot (c_2 - c_1)$ و

ثابتى c ته راغونډيږي (دا پورته ټول په لاندي بيلگه کي روښانيږي).

دلته f غوښتونکى او بيفنکشن يا حلفنکشن دى.

بيلگه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \quad \blacktriangleright \quad x^2 = f(x); \quad y^2 = g(y)$$

$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$

$$\int y^2 dy = \int x^2 dx$$

$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$

$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright \quad 3(c_2 - c_1) = c$$

$$y^3 = x^3 + c$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$

$$\Rightarrow f = \langle x; \sqrt[3]{x^3 + c} | c \in \mathbb{R} \rangle$$

۲. د دې لپاره، چي د dy د $g(x) = y - 4$ سره او x د $f(x) = x^2$ سره

رايوخايونه لاس ته راوړاى شو. نو دفرنخيالمساوات د dx سره ځليږي او x^2

سره ويشل کيږي.*

ورپسی له دې سره dy او $g(y)$ همدا ډول dx او $f(x)$ هر یو په یوه خوا خانله کېږي. د کوم سره چې dx او dy باید په مات باندې کې پراته یا خای وي. **
د مساوات دواړه خواوې ایتیکرال کېږي. د اینتیګرال ثابتې c_1 او c_2 و c_3 ته راغونډېږي.

دا راپیداشوی فنکشن د y په لور اوبی کېږي. د e^c لپاره c اینسول کېږي. ***
او f د دفرنخیالمساوات ټولیز اوبی دی. ****

یا دونه: لاندې د شمیرنی په برخه کې په * پسی * ...، او *** پسی *** ...
په **** پسی **** راځي.

$$x^2 \cdot \frac{dy}{dx} - y + 4 = 0$$

*

$$x^2 \cdot dy - y \cdot dx + 4 \cdot dx = 0$$

$$dy - \frac{y \cdot dx}{x^2} + \frac{4 \cdot dx}{x^2} = 0$$

$$dy - \frac{dx}{x^2} (y - 4) = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} - \frac{dx}{x^2} = 0$$

$$\frac{dy}{y-4} = \frac{dx}{x^2} \quad **$$

$$\int \frac{dy}{y-4} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4| + c_1 = -\frac{1}{x} + c_2 \quad \triangleright c_2 - c_1 = c_3 \quad ***$$

$$y - 4 = e^{c_3 - \frac{1}{x}}$$

$$y = e^{c_3} \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 \quad \triangleright e^{c_3} = c$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot c \cdot e^{-\frac{1}{x}} + 4 | c \in \mathbb{R} \rangle \quad ****$$

دیفرنشیال مساوات د جلا یا بیلو شوو اووښتونو سره، ځان په دې گروپونو ټوټه کوو:

۱- د لاندې فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرینوز کونی وظیفه ورکوي، لکه

څنگه، چی په اینتیگرالشمیرنه کی.

بیلگه:

$$y' = x^2$$

$$dy / dx = x^2 \quad \text{بدلونه}$$

$$dy = x^2 dx \quad \text{اینتیگرالونه}$$

$$y = \int x^2 dx$$

$$y = (x^3 / 3) + C \quad \text{تولیز اوبی}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow (x^3 / 3) + c \mid c \in \mathbb{R} \rangle \quad \text{دلته } f \text{ تولیز حل دی}$$

۲- د لاندې فورم مساوات $y' = g(y)$

اووښتونی dy او $g(y) = 3y^2 + 1$ په همدې توگه dx هر د مساوات په یوه خوا

خانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیگرالیري، د کوم سره چی د مخامخ بنې $\int \frac{dz}{z^2 + 1}$

اینتیگرال پخوا اوبی شویدی.

بیلگه (یادونه : دا بیلگه لکه چی نارینتیا اوبی وې، پام ورته وکړی، ؟.؟)

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2 + 1} = \int dx$$

کین لور ته خانله کیږي په داسی توگه، چی د اینتیگریشن شاپته $\ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right|$

بني خوا ته راوړل شي او مساوات د $2\sqrt{3}$ سره ځل شي.

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln \left| \frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} \right| = 2\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3}(c_2 - c_1)$$

د لوگاریتم د اویونی سره په بني لور اکسپوننشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چی په یوه ځل پوټه کیدی شي.

د سادوني لپاره ټاکل کيږي

$$c = e^{2\sqrt{3}(c_2 - c_1)}$$

بیا د $(3y - \sqrt{3})$ سره ځل کيږي او بالاخره مساوات د y سره کین لور ته راوړل کيږي همداسی $\sqrt{3}$ و ښي خوا ته.

$$\frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} = e^{2\sqrt{3} \cdot x + 2\sqrt{3}(c_2 - c_1)}$$

$$\frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} = e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot e^{2\sqrt{3}(c_2 - c_1)} \rightarrow e^{2\sqrt{3}(c_2 - c_1)} = c$$

$$\frac{3y + \sqrt{3}}{3y - \sqrt{3}} = e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c$$

$$3y + \sqrt{3} = (3y - \sqrt{3}) \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c$$

$$3y + \sqrt{3} = 3y \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c - \sqrt{3} \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c$$

د y نوکوتلو وروسته د دفترنځیالمساوات د ټولیز اویونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y - 3y \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c = -\sqrt{3} \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c - \sqrt{3}$$

$$3y(1 - e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c) = -\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c + 1)$$

$$y = \frac{\sqrt{3} \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c + 1}{3 \cdot e^{2\sqrt{3} \cdot x} \cdot c - 1}; c \in \mathbb{R}$$

۳. د $y' = f(x) \cdot g(y)$ بني مساوات

د دفترنځیالمساوات د بیلیدنی وروسته اینتیگرالیري.

د y پسی اویونی وروسته ږدو

$$e^c \cdot e^{-c} = c$$

ورپسی بیا f ټولیز یا عمومي اوی دی

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3} x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + c_2 - c_1}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \Rightarrow e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۴- د $y' = f(x) / g(y)$ یا فورم مساوات اووښتونی dy, y او dx, x

دوه لوریز خانله کيږي.

$$y' = x / y$$

$$dy / dx = x / y$$

$$\Rightarrow y dy = x dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې ایتیکراليري او د y پسی اوی کيږي.

$$\int y dy = \int x dx$$

$$(1/2) y^2 + c_1 = (1/2) x^2 + c_2$$

$$2(c_2 - c_1) = c$$

$$y^2 = x^2 + c \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن f د دفرنخیالمساوات ټولیز اوی یا حل دی

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۵ - د لاندې فورم مساوات

$$y' = g(y) / f(x)$$

اووښتونى y , dy , او x , dx په دواړو خواوو ځانله کيږي. او په اخر کې دو خواوې ايتيگراليري او په y پسې اوبى کيږي.

هغه لاس ته راوړې ايتيگریشن ثابتى ږدو: $c_2 - c_1 = \ln |c|$

$$y' = y/x ; \quad dy/dx = y/x$$

$$\int dy/y = \int dx/x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_2 - c_1, \quad c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x \cdot c|$$

$$y = x \cdot c$$

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow x \cdot c \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

دا لاس ته راغلى f ټوليز حل دى

بيلگى

$$1. \quad \begin{aligned} y' - 3x &= -4x^2 \\ dy/dx &= 4x^2 + 3x \end{aligned}$$

$$y = 4 \cdot \int x^2 dx + 3 \cdot \int x dx$$

$$y = (4/3)x^3 + c_1 + (3/2)x^2 + c_2$$

$$c_2 + c_1 = c$$

ږدو

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow (4/3)x^3 + (3/2)x^2 + c \rangle$$

دا f د مساوات ټوليزه ابيونه ده

$$2. \quad \sin x - y' = \cos x + y'$$

$$\sin x - dy/dx = \cos x + dy/dx$$

$$2dy = \sin x \cdot dx - \cos x \cdot dx$$

$$y = (1/2) \int \sin x dx - (1/2) \int \cos x dx$$

$$y = -(1/2) \cos x + c_1 - (1/2) \sin x + c_2$$

بږدو: $c_1 + c_2 = c$

$\Rightarrow f = \langle x \rangle - (1/2) \cos x - (1/2) \sin x + c$

3. $2y' = 2y^2 + 8y - 2$

مساوات د مربع تکمیلولو له لارې په فورم $(z+a)^2 - b^2$ راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1 = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینټیګرال د مخه اوبی شوی دی (پاډاډو، شرا)

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2)] dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| = 2\sqrt{5} \cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\ln z = a \Leftrightarrow z = e^a$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5} \cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5} \cdot (c_2 - c_1)}$$

بږدو $c = c_2 - c_1$. بیا د $y+2+\sqrt{5}$ سره ځلیري، ورپسې هغه غږی،

چې y لري د مساوات یوې لور ته ځانله کیږي او y له نوکانو راوځي، دا د y

په لور اوبی - یا حل کیږي، چې په دې

توگه ټوليز اوبی لاس ته راځي .

$$y = \frac{(2 + \sqrt{5}) \cdot e^{-2\sqrt{5} \cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - e^{-2\sqrt{5} \cdot x}}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x, \frac{(2 + \sqrt{5}) \cdot e^{-2\sqrt{5} \cdot x} + \sqrt{5} - 2}{1 - e^{-2\sqrt{5} \cdot x}} \right\rangle$$

بیلگه ۴ : $y' = y$

د $x = 0$ لپاره $y = e$ دی

غړی $g(x)$ او dy د مساوات په یوه لور بیلیري. په اخر کې دواړه خواوې آینتیکرال کیري.

$$dy / dx = y$$

$$dy / y = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (1/y) dy = \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1) , c_2 - c_1 = c$$

$$\ln|y| = x + c$$

$$y = e^{x+c}$$

د y په لور اوبیونه ټوليز اوبی f ورکوي

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow e^{x+c} \rangle$$

ثابته c د شرایطو $x_1 = 0$ او $y_1 = e$ څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln|y| - x$$

$$= \ln e - 0 = 1$$

دلت $c = 1$ او f_1 ټوته نیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = \langle x \rightarrow e^{x+1} \rangle$$

بیلگه ۵ : $\sqrt{y} = x - 1$

ورزیات شرایط : د $x_1 = 0$ لپاره دې $y_1 = 10$ وي.

دفرنځيالمساوات د پسي اړول كيږي او مات يا كسر په برخه ماتونو ټوټه كيږي. د دې برخمسواواتو اينتيگرالونى وروسته د دفرنځيالمساوات ټوليز اوپيونه يا حل لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
 c_1 + c_2 + c_3 &= c && \text{ږدو} \\
 x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} &= x - 1 && \text{اوبى} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{(x-1)^2}{x^2} \\
 dy &= \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx \\
 \int dy &= \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx \\
 y &= x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3 \\
 y &= x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \\
 \Rightarrow f &= \left\langle x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle
 \end{aligned}$$

ورپسى د اينتيگرال ثابت C د شرايطو $x = 2; y = 10$ ځاى په ځاى كولو څخه شميرل كيږي.

$$\begin{aligned}
 c &= y_1 - x_1 + 2 \cdot \ln|x_1| + 1/x_1 \\
 x_1 &= 2, y_1 = 10 && \text{ږدو} \\
 &= 10 - 2 + 2 \cdot \ln 2 + 1/2 = 9,8863
 \end{aligned}$$

بيا د c ارزښت په ټوليز اوبى كى ځاى په ځاى كيږي او په دې توگه پارتيكوالار اوبى لاس ته راځي.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9,8863 \right\rangle$$

بيلگه ۶ : $y'^2 = 1 - x^2$

شرايط: د $x = 1$ لپاره $y = 0$ دى

د دفرنځيالمساواتو ريښه (جذر) وځي يا نيول كيږي او د y په لور اوبى كيږي

$$\begin{aligned} (dy / dx)^2 &= 1 - x^2 \\ dy / dx &= \sqrt{1 - x^2} \\ dy &= \sqrt{1 - x^2} \cdot dx \end{aligned}$$

په لاندې کې راغلی اینتیګرال $\int \sqrt{1 - x^2} dx$ د مخه اوبی شوی دی. دا اینتیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایي.

$$\begin{aligned} \int dy &= \int \sqrt{1 - x^2} dx \\ y &= \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + c \\ \Rightarrow f &= \left\langle x, \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } x + c \right\rangle \end{aligned}$$

د c ثابت د شرایط $x_1 = 1$ او $y_1 = 0$ د اینسولولو له لارې شمیرل کیږي. که $c = -\frac{\pi}{4}$ په f کې کیږدو، نو f_1 پارټیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2} \sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2} \text{Arcsin } x_1 \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 0 \end{matrix}$$

$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x, \frac{x}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \text{Arcsin } x - \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

بیلګه ۷ : $y' = y \cdot [x / (x^2 + 1)]$

اوس y, dy او $f(x) = x / (x^2 + 1)$ د دفرنخیالمساوات په دواړو خواو کې خانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال کیږي او بیا د y پسې اوبی یا حل کیږي.

$$dy / dx = y \cdot [x / (x^2 + 1)]$$

$$dy / y = [x / (x^2 + 1)] \cdot dx$$

$$\int dy / y = \int [x / (x^2 + 1)] \cdot dx = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\ln|y| = (1/2) \ln(x^2 + 1) + C$$

د اینتگرال ثابتو c_1 او c_2 یوځایونه و $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ته هدفمند دی

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2 + 1} + (c_2 - c_1), \quad c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \sqrt{x^2 + 1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|\sqrt{x^2 + 1} \cdot c|$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot c$$

او لاندې f ټولیز اوبیفنکشن دی

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow c\sqrt{x^2 + 1} \rangle$$

بیلگه ۸: $y' = [(x^2 - 4) / x^2] \cdot (1 - y^2)$

ورزیات شرطونه: د $x_1 = 1$ لپاره $y_1 = 1$ دی

او $g(x)$, dy او $f(x)$, dx د مساوات په دواړو لورو ځانله کیري

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 - 4)(1 - y^2)}{x^2}$$

$$\frac{dy}{1 - y^2} = \frac{(x^2 - 4) \cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{1 - y^2} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتگرالیري، د دواړو اینتگریشن ثابتو c_1

او c_2 , c_4 زیاتون د سره c مساوي لیکل کیري: $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\text{Arcsin } y + c_1 = x + c_2 - 4 \left[- \left(\frac{1}{x} \right) + c_3 \right]$$

$$\text{Arcy} = [(x^2 + 4) / x] + c$$

$$y = \sin [(x^2 + 4) / x + c]$$

د دې په اخر کی ټولیز اوبی f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \sin \left(\frac{x^2 + 4}{x} + c \right) \right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرایطو څخه پیدا کيږي، داسی، چی x_1 او y_1 د فنکشن- مساوات په ټولیز اوبی کی ځای په ځای شي. په دې توگه ورپسی ټوټه اوبیونه f_1 لاس ته راځي

$$c = \text{Arcsin } y_1 - \frac{x_1^2 + 4}{x_1} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{matrix}$$

$$= \text{Arcsin } 1 - \frac{1^2 + 4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \sin \left(\frac{x^2 + 4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5 \right) \right\rangle$$

بیلگه ۹ : $x^2 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot y' = x \cdot y \cdot y'$

دفرنخیالمساوات د dx سره ځلیري اوبه $x \cdot y^2$ ویشلکيږي.

غیري د dx، x سره په یوه خوا او د dy، y سره په بله خواځانله کيږي. انتیگریشن د اوبی په څیر یو ایمپلیسیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم، چی ایمپلیسیت

نه شی انځوریدلی وروسته ږدو $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y dy$$

$$\frac{x^3}{3} + c_1 + \ln|x| + c_2 = \ln|y| + c_3 - \frac{y^2}{2} + c_4$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c = 0$$

بیلگه ۱۰ : $dx - dy = \frac{4 \cdot dx}{4+x} + \frac{dy}{y}$

د x ، dx او y ، dy خانلونی وروسته د دفرنخیالمساوات دواړه خواوې اینتیگرالیری د اینتیگریشنثابتی، کیدی شی سره رایوځای شی، اوبی اکسپلیشیت نه شی انځوریدی

$$dx - \frac{4 \cdot dx}{4+x} = \frac{dy}{y} + dy$$

$$\int dx - 4 \int \frac{dx}{4+x} = \int \frac{dy}{y} + \int dy$$

$$x + c_1 - 4 \cdot \ln|4+x| + c_2 = \ln|y| + c_3 + y + c_4$$

$$\blacktriangleright c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$$

$$\underline{x - 4 \ln|4+x| = \ln|y| + y + c}$$

۱ . ۲ . ۲ دفرنخیالمساواتد هوموجینو اووښتونکو

یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دفرنخیالمساوات په هر غړي کی یو دفرنخیال dx یا dy لري.

د واریابلو x او y د اکسپوننتو یا په جگگنونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.

دفرنخیالمساوات د هوموجینو اووښتونکو سره د Substitution سبستیچیوشن یا (د) په ځای ایښوونی یا بدلون له لارې ځان اوبیوني یا حل ته پریردی، په کوم کی چی $y = x \cdot z$ ځای په ځای کیږی، او د کوم سره چی بیا z د x فنکشن دی. (د) په ځای ایښوونه مو یوه مساوات ته بیایی، چی اوبتونکی کی بیلی وی.

سبستیچیوشن : په ورکړ شوي مساوات $y = x \cdot z$ او په ورته یا همدې توگه $y^2 = x^2 \cdot z^2$ سبستیچیوشن کو. کله چی ترم $y = x \cdot z$ د خلقاعدې سره دفرنخیالیږي، نو د dy لپاره بیا $z \cdot dx + x \cdot dz$ ږدو ، دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو یا واریابلو سره د د فرنخیالمساوات په بڼه راوړل کیږي. په کوم کی چی د x^2 سره خانله شي او د dx ، همداسی z ، dz سره غږي د بنیبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 + y^2 + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{n=2} + \frac{y^2 \cdot dx}{n=2} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{n=2} = 0$$

$$\text{Man setzt } y = x \cdot z \rightarrow z = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$\text{بیلگه : } x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + xydy = 0$$

اوبی یا حل : اوبی په څلورو پلونو کی پلې کوو

۱- په مساوات کی بدلون منځ راوړو یا سبستیچیوشن کوو

$$y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 \cdot z^2 \cdot dx + xxz (z \cdot dx + x \cdot dz) = 0$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 z^2 \cdot dx + x^3 z \cdot dz = 0$$

$$dx(1 + 2z^2) = -x \cdot z \cdot dz$$

$$dx / x = -(z \cdot dz) / (1 + 2z^2)$$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لورې خانله شوو اووښتونکو د

دفرنخیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.

۳- د مساوات دواړه خواوې اینتیگرال کیږي.

د اینتیگرال $\int x \cdot dx / (a^2 + x^2) = (1/2) \ln(a^2 + x^2)$ اوبی راته د مخه روښان دی

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{z}{1+2z^2} dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{z}{\frac{1}{2} + z^2} dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{2} + z^2\right) + c_2 \Rightarrow z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انیتیکرایشتابتي په یوه لور راوړل کيږي او لویه z^2 بیرته y^2/x^2 سره بدليږي. د لوگاریتم د زیاتون څخه بیا د یو ځل (ضرب) لوگاریتم جوړيږي او د لوگاریتم مساوات د اکسپوننشل مساوات په څیر لیکل کيږي.

بیا x رېښي ته راوړل کيږي او مساوار په ۴ توان کيږي.

د $e^{4(c_2 - c_1)} = c$ لپاره لیکل کيږي، اوس د y ساده شمیرل کیدی شي.

هغه f چې وروسته لاس ته راځي د دفرنشیالمساوات ټولیز فنکشن اوبی دی

$$\ln|x| + \ln \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln \left| x \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot x^2 + y^2}{x^2}} \right| = c_2 - c_1$$

$$x \cdot \sqrt{\frac{0.5 \cdot x^2 + y^2}{x^2}} = e^{c_2 - c_1}$$

$$\sqrt{0.5 \cdot x^4 + x^2 \cdot y^2} = e^{c_2 - c_1}$$

$$0.5 \cdot x^4 + x^2 \cdot y^2 = e^{4(c_2 - c_1)} \Rightarrow e^{4(c_2 - c_1)} = c$$

$$0.5 \cdot x^4 + x^2 \cdot y^2 = c$$

$$x^2 \cdot y^2 = c - 0.5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2} (c - 0.5x^4)$$

$$y = \frac{1}{x} \sqrt{c - 0.5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{1}{x} \sqrt{c - 0.5x^4} \right\rangle$$

بیلگی :

$$x + y = y' \cdot x \quad (\text{لومړۍ})$$

دلته $y = x \cdot z$ سبستیچیون کیري او د په توانقاعدي له مخی dy / dx جوړوو او ږدو $dy = z \cdot dx + x \cdot dz$. اوس د بنیډلو له لاری dx , x او dz د مساواتو په دواړو لورو خانله کیري.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \quad \rightarrow y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{dy}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اووښتونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیگرالیري. د اینتیگر-یشنثابتی رایوځای کیري.

د لاس ته راغلی f د دفرنخیالمساوات ټولیز اوبی دی

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \quad \rightarrow c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \quad \rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \langle x \rightarrow x(\ln|x| + c) \rangle$$

بیلگه ۲ : $(x^2 + y^2) \cdot dx = xy \cdot dx$

سبستیچیون یا د اووښتونکو بدلون $y = x \cdot z$ او $y^2 = x^2 \cdot z^2$ د خلقاعدي

سره $dy/dx = z \cdot dx + x \cdot dz$ جوړوو او پر دو $dy = z \cdot dx + x \cdot dz$.
 د مساوات بڼه بدلون سره x, dx همداسی z, dz په دواړو لورو ځانله کوو.
 د اوبتونکو، دواړو لورو ته له بیلولو وروسته مساوات اینتیگرالیری.

$$(x^2 + y^2) dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$x^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx = x \cdot y \cdot dy$$

$$\Rightarrow y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x^2 \cdot dx + x^2 \cdot z^2 \cdot dx = x \cdot x \cdot z (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$dx + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx + z \cdot x \cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int z \cdot dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بیاد z^2 په ځای y^2/x^2 ځای په ځای کیری، د $2(c_2 - c_1)$ لپاره c پر دو.
 لاس ته راغلی f د دفرنثیالمساوات ټولیز اوجی دی.

$$2 \cdot \ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \Rightarrow z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2 \cdot \ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2 \cdot \ln|x| + c)$$

$$y = x\sqrt{2 \cdot \ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{(x \cdot \sqrt{2 \cdot \ln|x| + c})}}$$

$$y' = (y/x) - (y^2/x^2) \quad \text{بیلگه ۳}$$

سیستیچیشن (د) په ځای اینیول

$y = x \cdot z$ او $y^2 = x^2 \cdot z^2$ د خلقاعدي

سره dy/dx جوړوو او زیږو

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

د مساوات د بڼې بدلون له لارې x, dx

همداسې z, dz په دواړو لوروځانله کوو

د اووښتونکو له بیلولو وروسته

مساوات ایتیگرالوو.

د z لپاره بیرته y/x ږدو او

ایتیگریشنثابتی رایوځای کوو.

د مساوات د y پسې اوبی مو

ټولیز اوبی f ته بیایی.

$$y' \cdot (y - x) = y \quad \text{بیلگه ۴}$$

(د) په ځای ږدو $y = x \cdot z$

د خلقانون سره dy/dx جوړوو

مساوات بڼیدلو لاسره x, dx همداسې

z, dz په دواړو لورو ځانله کوو.

د اووښتونو ځانلونې وروسته

دواړه خواو پاینتیگرالوو.

نو باور لري

$$\int [f'(x)/f(x)] \cdot dx = \ln[f(x)] + C$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright y = x \cdot z &\Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2 \\ \Rightarrow dy &= z \cdot dx + x \cdot dz \end{aligned}$$

$$\frac{z \cdot dx + x \cdot dz}{dx} = \frac{x \cdot z}{x} - \frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}$$

$$z + \frac{x \cdot dz}{dx} = z - z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} + c_1 = \ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$c_2 - c_1 = c$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{x}{\ln|x| + c} \right\rangle$$

$$dy(y - x) = y \cdot dx$$

$$\blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)(x \cdot z - x) = x \cdot z \cdot dx$$

$$x \cdot z^2 \cdot dx - x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot z \cdot dz - x^2 \cdot dz - x \cdot z \cdot dx = 0$$

$$z^2 \cdot dx - z \cdot dx + x \cdot z \cdot dz - x \cdot dz - z \cdot dx = 0$$

$$dx(z^2 - 2z) + x \cdot dz(z - 1) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z-1}{z^2-2z} dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2z-2}{z^2-2z} dz = 0$$

(د) په ځایونه $z = y/x$ اېښوونې سره په
څټ راگرځول کيږي.

ورپسې اوبیونه مو فنکش-
برابرون ته بیایي، کوم چی یواځي
ایمپلیسیټ انځوریدلی شي.

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2} \ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2 \cdot \ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\triangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\ln \left| x^2 \left(\frac{y^2}{x^2} - 2 \frac{y}{x} \right) \right| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1 + c_2)}$$

$$\triangleright e^{-2(c_1 + c_2)} = c$$

$$\underline{y^2 - 2xy = c}$$

۱ . ۲ . ۳ لاینی دفرنخیال مساوات

د لمړي نظم لاینی دفرنخیالمساوات
لاندې ، هغه مساوات پوهیږو، چی y
او y' په ۱-ام گراد کی ، دا په دې
مانا چی لاینی وي. ولري. دا شرطونه
داووبنتونکی x لپاره باور نه لري.
دلته $F(x)$ او $f(x)$ د x فنکشونه
یا بلواک دي او یا ثابتی.

$$\text{allgemein: } \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = F(x)$$

$$\text{Beispiele: } \bullet y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\bullet y' \cdot x = x \cdot \sin x - y$$

$$\bullet y' + x^2 = x^4 \cdot y$$

د لاینی دفرنخیالمساوات اوبیونی لپاره کیدی شي، چی بیلابیلی همغه ارزښتیز
متودونه وکارول شي.

د برنولي (Bernoulli) متود له مخی اوبیونه

۱- سبستیچیوشنو $y = u(x) \cdot v(x)$ له
دې څخه دخلقاعدي له لارې لاس ته راځي

د y او y' لپاره ارزښتونه په دفرنخیال-

لمساوات کي کینسول کيږي

$$y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\triangleright y = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx} - u(x) \cdot v(x) \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

۲ - لويي $u(x)$ همداسی $v(x)$ له نوکانو راوځي

۳ - د $u(x)$ همداسی $v(x)$ لپاره د څنگشميرنی سره يو ترم غوښتل کيږي، کوم چی نوکتريم $[dv/dx - (2/x)v(x)]$ او له دې سره د u څلورني يا فاکتور صفر کيدی شي .

دا د $v(x) = x^2$ لپاره حالت دی، د نيونی $c_2 - c_1 = 0$ لاندې

د $v(x)$ لپاره راپيدا ارزښت، دا په دې مانا چی x^2 په مساوات کي کينبول شي. له $u(x)[dv/dx - 2v(x)/x]$ سره چی ځل $u(x)$ په صفر برابر شي يو پاتی غړی راكوي، له کوم سره چي du همداسی x, dx په دواړو خواو خانله کيدی شي.

۴ - له پاتی غړي څخه $u(x)$ د اينتيگرال کولو له لارې ټاکل کدی شي.

۵ - په وتلمساوات $y = u(x) \cdot v(x)$ کي

راپيدا ارزښتونه کينبول کيږي :

$$u(x) = -(1/x) - (1/2x^2) + c; v(x) = x^2$$

لاس ته راوړنه يي د ورکړ شوي اينتيگر

المساوات ټوليز اوبيونه ده .

$$u(x) \left[\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v(x) \right] + v(x) \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v(x) = 0$$

$$\frac{dv}{v(x)} = \frac{2 dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = 2 \cdot \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v(x)| + c_1 = 2 \cdot \ln |x| + c_2$$

$$\ln |v(x)| = \ln x^2 + c_2 - c_1$$

$$v(x) = x^2 \cdot e^{c_2 - c_1} \triangleright c_2 - c_1 = 0$$

$$v(x) = x^2$$

$$u(x) \left[\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x} v(x) \right] + v(x) \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x} \triangleright v(x) = x^2$$

$$u(x) \cdot 0 + x^2 \frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x+1}{x^3}$$

$$\int du = \int \frac{x+1}{x^3} dx$$

$$\int du = \int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x^3} dx$$

$$u(x) = -\frac{1}{x} + c_1 - \frac{1}{2x^2} + c_2 \triangleright c_1 + c_2 = c$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c$$

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$= \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + c \right) \cdot x^2$$

$$= -x - \frac{1}{2} + cx^2; c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x^2 - cx^2 - x - \frac{1}{2} \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

د لاکرانژ Lagrange متود له لارې اویونه

همدا بیلگه به اوس ددوم یعنی

لاکرانژ له متود وشمیرل شي.

۱ - خای په خای کوو $F(x) = 0$ او راپاتی

پاتی مساوات $y' - y \cdot f(x) = 0$ د ورسره

بلدمتود د اووونتونکو بیلولو له لارې

اوبی کوو. د اینتیگریشن ثابطی پهخای،

چی گتور دی لوگاریتم ټاکو، چی دا لو-

گاریم بیا له منځه ځی. $c_2 - c_1 = \ln |c|$

ثابته C په لنډ شوي هوموجین مساوات

$y' - y \cdot f(x)$ کی ثابته نه ده، بلکه د x

یو فنکشن دی.

۲ - لاس ته راوړی مساوات د y

لپاره د ځل یا ضرب قاعدې له

لارې دینفرنخیالیری.

۳ - د y او y' دواړه ټوټه

اویونی په سرچینز مساوات کی

خای په خای کیری او مساوات

د $dC(x)/dx$ پسې اوبی کیری.

۴ - د اینتیگرالولو لارې

$C(x)$ لاس ته راوړ لکیری.

۵ - په مساوات $y = x^2 \cdot C(x)$ کې

د $C(x)$ لپاره ارزښت کینول

کیری او مساوات ساده کیری

$$y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y \cdot f(x) = F(x) \Rightarrow F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y \cdot \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2 dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \cdot \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| + c_1 = 2 \cdot \ln |x| + c_2$$

$$\ln |y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \Rightarrow c_2 - c_1 = \ln |c|$$

$$\ln |y| = \ln x^2 + \ln |c|$$

$$\ln |y| = \ln |x^2 \cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x \cdot c(x) + x^2 \frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x \cdot c(x) + x^2 \frac{dc(x)}{dx} - x^2 \cdot c(x) \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x} \cdot c(x) - \frac{2}{x} \cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \Rightarrow k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k; k \in \mathbb{R}$$

$$y = x^2 \cdot c(x)$$

$$= x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k \right)$$

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه
اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د
لاگرانژ اوبیونی متود.

$$y = -x - \frac{1}{2} + k \cdot x^2; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -kx^2 - x - \frac{1}{2} \mid k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلگه: د ۱-م نظم مساوت $y' - ay = x$ د لانگرانژ او برنولي
متودو له لارې اوبی کړی!

الف - (د) په ځای اینسوونی

(سبستیچیوشن) $y = u \cdot v$ له

لارې او مناسب رابیلیدنی ته

$$dy / dx = u \cdot (dv/dx) + v(du/dx)$$

ب- $u(x)$ له نوکانو راوځي

پ- په نوکانو کی ترم باید صفر

شي، چی د u اود نوکانو ځل

صفر شي. د اینتیگرالولو سره

لویه $v(x)$ ټاکل کیږي.

$$y' - ay = x \Rightarrow y = u(x) \cdot v(x)$$

$$u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx} - a \cdot u(x) \cdot v(x) = x$$

$$u(x) \left[\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) \right] + v(x) \frac{du}{dx} = x$$

$$\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) = 0$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = a \cdot \int dx$$

$$\ln |v(x)| + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln |v(x)| = ax + c_2 - c_1$$

$$v(x) = e^{ax+c_2-c_1}$$

$$= e^{ax} \cdot e^{c_2-c_1} \Rightarrow c_2 - c_1 = 0$$

$$= e^{ax}$$

$$u(x) \cdot [0] + e^{ax} \cdot \frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$u(x) = -\frac{ax+1}{a^2} \cdot e^{ax} + c$$

$$y = u(x) \cdot v(x) = \left(-\frac{ax+1}{a^2} \cdot e^{ax} + c \right) \cdot e^{ax}$$

$$y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c \cdot e^{ax}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -c \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\rangle$$

ت- د $v(x)$ لپاره دا راپیدا ترم

ځای په ځای کیږي او د اینتیگرال

کیدو له لارې u لاس ته راځي.

د اینتیگرال اوبی د ټوټه اینتیگرال

له لارې پیدا کیږي.

ت- لاس ته راوړی ارزښت په

مساوات $y = u \cdot v$ کی کینوول کیږي.

لاس ته راوړنه د برنولي پسي

ټولیز اوبی دی

الف - د لاگرانژ پسی بنی لور
په صفر مساوي گینبول کیري
او dx همداسی dy, y په دواړو
لورو خانله کیري.

راپاتی مساوات $dy / y = a \cdot dx$
اینتیگرالیري، د y پسی بنه -
بدلیري او $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ږدو.

ب - د y لپاره برابرې د ځل -
قاعدې له لارې دیفرنخیالیري.

پ - د y او y' لپاره ټوټه اویبوني
په پیلبرابرون کی کینبول کیري.

داسی ودیز برابرې د $dc(x)$

پسی اویب کیري له دې سره

$a \cdot e^{ax} \cdot C(x)$ له منځه ځي

ت - ارزښت $C(x)$ د اینتیگر -

الولو له لارې لاس ته راځي

ټ - لاس ته راوړلی ارزښتونه
په مساوت

$$y = u(x) \cdot v(x) \cdot e^{ax} \cdot C(x)$$

کی ږدو

نتیجه د لاگرانژ پسی ټولیز اویب دی.

دا د برنولي د نتیجی سره سرخوري.

$$y' - a \cdot y = x \quad x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - a \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{ax} \cdot e^{\ln|c(x)|}$$

$$= e^{ax} \cdot c(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax}$$

$$y' - a \cdot y = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax} - a \cdot e^{ax} \cdot c(x) = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k_2 \quad \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k; k \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{ax} \cdot c(x)$$

$$= e^{ax} \cdot \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k \right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k \cdot e^{ax}; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -k \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \mid k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلگه: مساوات $y' + y/x = \sin x$ د برنولي متود سره اوبی کړی.

(د) په خایکو $y = u(x) \cdot v(x)$ او y' په دفرنخیالبرون کی ږدو

نوکتوم په 0 سره برابر ږدو او v شمیری

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی

$$v(x)(du/dx) = \sin x$$

د $c = 0$ له امله لاس ته راځي:

$$v(x) = 1/x$$

له پاتبرابرون څخه $u(x)$ د اینتیگرالولوله لارې تاکل کیری

په $y = u(x) \cdot (x)$ کی لاس ته

راوړل شوي ارزښتونه د u او v

لپاره خای په خای کړی.

لاس ته راوړنه د برنولي پسی

د ورکړ شوي مساوات ټولیز

اوبیدی.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

$$\rightarrow y = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx}$$

$$u(x) \frac{dv}{dx} + v(x) \frac{du}{dx} + \frac{u(x) \cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x) \cdot \left(\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x} \right) + v(x) \frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x) \frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v(x)| + c_1 = -\ln |x| + c_2 \rightarrow c_2 - c_1 = \ln |c|$$

$$\ln |v(x)| = \ln |x^{-1}| + \ln |c|$$

$$v(x) = \frac{1}{x} \cdot c^e \rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x) \frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\frac{1}{x} \frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int du = \int x \cdot \sin x dx$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x \cdot \cos x + k_2 \rightarrow k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x \cdot \cos x + k; k \in \mathbb{R}$$

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x \cdot \cos x + k) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x, -\frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x} \mid k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

بیلگه : مساوات $y' + y = e^{-x}$ د لاگرانژ د متود له لارې اوبی کړی.

ردو $F(x) = e^{-x} = 0$ او پاتي-

مساوات د اوونبتونو د بیلولو له لارې اوبی کوو.

د اینتیگریشن شتابتو په څیر کینسول کیري $c - c = \ln |c(x)|$ او y ټاکو د ځلقاعدې سره y' شمیرل کیري

د y او y' لپاره برخ اویونی په پیلمساوات کی کینسول کیري او $e^{-x} \cdot c(x)$ او e^{-x} لري کیري.

د اینتیگریشن له لارې $c(x)$ ټاکل کیري.

په مساوات $y = e^{-x} \cdot c(x)$ کی

$c(x)$ کینسول کیري. نتیجه د

لاگرانژ پسی ټولیز اویونه ده

$$y' + y = e^{-x} \quad \blacktriangleright \quad e^{-x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx$$

$$\ln |y| + c_1 = -x + c_2 \quad \blacktriangleright \quad c_2 - c_1 = \ln |c(x)|$$

$$\ln |y| = -x + \ln |c(x)|$$

$$y = e^{-x} \cdot c(x)$$

$$= u(x) \cdot v(x)$$

$$y' = \frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

$$y' + y = e^{-x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} + e^{-x} \cdot c(x) = e^{-x}$$

$$\int dc(x) = \int dx$$

$$c(x) + k_1 = x + k_2 \quad \blacktriangleright \quad k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = x + k; \quad k \in \mathbb{R}$$

$$y = e^{-x} \cdot c(x) \quad \blacktriangleright \quad c(x) = x + k$$

$$= e^{-x}(x + k); \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot e^{-x} - e^{-x}(x + k) | k \in \mathbb{R} \rangle$$

تمرینونه

۱ . ۲ د لمړینظم دفرنخیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنخیالمساوات د بیلوشوو اوونبتونو سره

د لاندې دفرنخیالمساوات لپاره ټولیزین اویونیورکړی

1. $y' = \frac{y}{2a}$

2. $y' = axy$

3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

4. $y' - x^3 = y - x^3$

5. $\frac{y'}{2x} = y^2$

6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

- | | | |
|--|--|--|
| 7. $2xy^2 = y'$ | 8. $y' = \frac{b^2x}{a^2y}$ | 9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ |
| 10. $x^2 + 2x = y'$ | 11. $xy' = y \cdot \ln y$ | 12. $(1 - x^2)dy + xy \cdot dx = 0$ |
| 13. $y' = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ | 14. $y' = e^xy$ | 15. $\sqrt{y'} = y'x$ |
| 16. $y' = (yy')^2$ | 17. $dy = \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$ | 18. $y' = \frac{x^2\sqrt{x^2 + 4}}{y^2\sqrt{y^2 + 9}}$ |
| 19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$ | 20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$ | 21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$ |
| 22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2y^3$ | 23. $(x + y)^2 = y'$ | 24. $y'^2y = x^2y' - y'$ |
| 25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$ | 26. $y' \cdot \text{Arcsin } y = x^2$ | 27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^x$ |
| 28. $y \cdot \ln x = y'$ | 29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$ | 30. $\frac{\text{Arsinh } x}{\text{Arcosh } y} = y'$ |

۲ . ۲ . ۱ ديفرنشيالمساوات د هوموجين اووېنتونكو يا واريابلو سره
لاندي دفرنشيالمساوات اوبي كړي

- | | |
|---|--|
| 1. $y'x = -(x + y)$ | 2. $y'x = y$ |
| 3. $y' = \frac{x + y}{x}$ | 4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$ |
| 5. $y'xy = y^2 - x^2$ | 6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$ |
| 7. $dy \cdot x = (y - x) dx$ | 8. $y' - \frac{y}{x} = \tan \frac{y}{x}$ |
| 9. $(x + y) dx - (x - y) dy = 0$ | 10. $x^2 + xy + y^2 = x^2y'$ |
| 11. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$ | 12. $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ |
| 13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$ | 14. $y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$ |
| 15. $y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$ | 16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ |
| 17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$ | 18. $y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$ |
| 19. $\frac{2y(y - x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$ | 20. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ |

۱ . ۲ . ۳ لاینی ديفرنخيالمساوات

لاندي ديفرنخيالمساوات د برنولي او لاگرانژ متودونو سره اوبی کړی.

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$ | 2. $y' = e^x - y$ | 3. $y' - y = x^2 - 1$ |
| 4. $y' = e^{3x} - 2y$ | 5. $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$ | 6. $y'x = x \cdot \sin x - y$ |
| 7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$ | 8. $y' + ay = b \cdot e^{cx}$ | 9. $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$ |
| 10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$ | 11. $y' = a + bx + cy$ | 12. $xy' + 1 = e^x + y$ |
| 13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$ | 14. $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$ | 15. $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$ |
| 16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$ | 17. $y'x^2 + y = x$ | 18. $y' + \frac{1}{1+x}y + x^2 = 0$ |
| 19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$ | 20. $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$ | 21. $y' - 2y = 3 - x$ |

۱ . ۳ د دویم نظم ديفرنخيالمساوات

د دویم نظم ديفرنخيالمساوات لاندي یو مساوات پوهیږو، چی $y'' = d^2y / dx^2$ د خورا جگ ديفرنخيالكوشنت یا ديفرنخيالویش په څیر ولري، د دې ترڅنگ کیدی شي $y' = dy / dx \cdot x$ او y رامنځ ته شي.

د ديفرنخيالمساواتو په دې پیلونی په چاپیریال کی کیدی شي، چی لنډ یو څو د دویم نظم ديفرنخيالمساوات او د هغو کارونه یا استعمال باندي خبرې وشي.

د $y'' = f(x)$ بنی ديفرنخيالمساوات

Beispiel:

بېلگه:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y'' dx = \int -\sin x dx$$

$$y' = \cos x + c_1; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y' dx = \int \cos x dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \sin x + c_1 x + c_2; c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sin x + c_1 x + c_2 | c_1; c_2 \in \mathbb{R} \rangle$$

د اوبیونی تلنه: د راییلیدنی د له منځه

وړلو د اوبیونی پرینځیپ ډیرواره

اینٹیگرالول دي.

الف: د برابرین دواړه لوري اینٹیگرالیري

۲- راپورته شوي دفرنخيالمساوات بیا

اینٹیگرالیري.

۳- په ورکړ شوي حالت کي له شرایطو

c_1 او c_2 وټاکي

بیلگی:

$$y'' = 1 / (1+x^2) \text{ - لمړی}$$

د لمړي اینتگریشن سره لاس ته y' راځي

بیا د y' اینتگریشن سره y

لاس ته راځي اوله دې سره د f ټولیزه اوبیونه

$$y'' = x^2 + x + 1 \text{ - دویم}$$

لمړی اینتگرال راځي

ثابتي c_3, c_4, c_5 د اینتگریشن

یشنابتي c_1 ته یوځای کيږي

دویم اینتگریشن y راځي

ثابتي c_6, c_7, c_8, c_9 د اینتگریشن

ثابتي c_2 ته راښوځایکيږي

دلته f ټولیز اوبیونکشن دی

$$3. y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته f ټولیز اوبیونکشن دی

$$\int y'' dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$y' = \text{Arctan } x + c_1$$

$$\int y' dx = \int \text{Arctan } x dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot \text{Arctan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 = c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \text{Arctan } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

$$\int y'' dx = \int x^2 dx + \int x dx + \int dx$$

$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\int y' dx = \frac{1}{3} \int x^3 dx + \frac{1}{2} \int x^2 dx + \int x dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$

$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

$$\int y'' dx = \int x \cdot e^x dx = \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$\int y' dx = \int x \cdot e^x dx - \int e^x dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$

$$\blacktriangleright c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$

$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot e^x - e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

د جگ نظم دف. مساوات کیدی شي کله په ورته توگه اوبی شي

$$4. y^{(4)} = x$$

لمړی انټیگرالونه y''' رااکوي،
دومه - y'' دریمه - y' او
خلورم انټیگریشن y راکوي

اړوند انټیگریشن ثابتی سره
رایوځاي کيږي

$$k_1 = c_1$$

$$k_2 = c_2 + c_3$$

$$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$$

$$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$$

$$k_1; k_2; k_3; k_4 \in \mathbb{R}$$

دلته f د ټولیز اېیفنکشن دی

$$\int y^{(4)} dx = \int x dx$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\int y''' dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$\int y'' dx = \frac{1}{6} \int x^3 dx + c_1 \cdot \int x dx + (c_2 + c_3) \int dx$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

$$\int y' dx = \frac{1}{24} \int x^4 dx + \frac{1}{2} c_1 \cdot \int x^2 dx +$$

$$+ (c_2 + c_3) \int x dx + (c_4 + c_5 + c_6) \int dx$$

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6} c_1 + c_8 + (c_2 + c_3) \frac{x^2}{2} + c_9 +$$

$$+ (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1 \frac{x^3}{6} + k_2 \frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

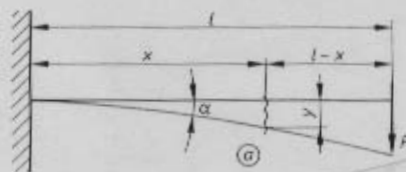
$$\Rightarrow f = \left\langle x^5 - \frac{x^5}{120} + k_1 \frac{x^3}{6} + k_2 \frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلگه: یوه یونوریز غزول شوي باورونی کړون y وشمیري، چې اوږدوالی l او ټکيدوله پریوتلی زور یی F وي له میخانیک څخه د کړون شمیرنی برابرېون څرگند دی. د یو لنډه برابرېون دی، چې په تخنیک د واړه ورسره بلد کړون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځای a کی کړومونت دی $F(1-x)$.

کړومونت $M =$

د نرموالی-یاالاستیخیتی مودول $E =$

د هواری ورونمونت $l =$



د اینتیگرالولو له لارې "y" په "y" اوږي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright \quad M = -F(l-x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l-x) dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + c_1$$

$$\text{für } x=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow c_1=0$$

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} \int x dx - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + c_2$$

$$\text{für } x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow c_2=0$$

$$y = \frac{F}{E \cdot I} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x + \frac{F}{E \cdot I} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \right\rangle$$

$$\text{für } x=l \Rightarrow y_{\max} = \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I \cdot 3}$$

د دویم اینتیگرالونې د مخه ثابته c_1
د باروړونې مخ ته پراته شرایطو څخه
شمیرل کیږي. د $x=0$ په ځای کې
جگوالی y' هم صفر دی. د دې سره
ثابته $c_1=0$ ده.

دویم اینتیگرالول مود یفرنشلبرابرون ته بیایي.

دومه ثابته c_2 هم صفر دی، دا چی
د y راځپرونه د $x=0$ په ځای کې
د صفر سره برابره ده.

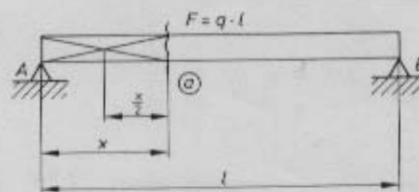
ماکسیمال ځپرونه د $x=1$ سره پرته
ده. y_{\max} د $x=1$ ځای په ځای کولو
سره لاس ته راځي.

بیلگه په دوه ستونو ولاړ باروړونکي ماکسیمال ځپرونه وشمیری، د لیکي بار q سره.
د تیر په یوه ځای a باندې مومتمساوات ځای په ځای کوو.

دا چی بار په برابرډول ویشل شوی
دی، نو پرتی هر A او B هر یو
بی د ټول بار نیمې دي.

$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$



Die Momentengleichung **د هغه مومنتون**

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په ديفرنشيالمساوات كي كينبول
كيري.

د "y لپاره برابرون د اينتيگرشن
سره و' y ته بيرته بيول كييري

په $x = l/2$ خاي كي هغه لوي كبرون
مخ ته پروت دي، دا په دې مانا چي
په دې خاي كي تنجنت د كبرونكربني
سره پرته يعني افقي پرته ده، جكي يا
جگوالي $y' = 0$ مساوي په صفر دي.

د c_1 لپاره راپيداشوي ارزښت په
برابرون 'y كي اينبول كييري. د 'y
د بيا يا نوي اينتيگرلوني سره
فنكشن y ټاكل كييري.
د $x = 0$ په خاي كي راگرون $y = 0$
دي. د دې سره تابه $c_2 = 0$ ده.

د $x = l/2$ لپاره هغه خورا لوي
كبرون y_{\max} مخ ته لرو دي، چي د $l/2$
اينبولو سره د خورا لوي كبرون
فرمول لاس ته راخي

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \triangleright \quad M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x dx + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 dx$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$\text{in } x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 dx - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 dx + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int dx$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

$$\text{in } x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{\max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

د $y'' = f(y)$ فورم يا بني ديفرنخيال مساوات

Lösungsgang:

اوبيووننتنه

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

۲ - مساوات اينتيگرايري اوز شميرل كييري.

۳ - او بيا ورپسي د واريابلي د خانلوني متود له لاري شميرل كييري.

د اوبيوني په خير ايمپليخيت فنكشن مساوات لاس ته راخي

Beispiele:

1. $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

بيليکي:

Beispiel:

بيليک

$$y'' = ay \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = ay$$

$$z \cdot dz = a \cdot y \cdot dy$$

$$\int z dz = a \cdot \int y dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \Rightarrow 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \Rightarrow z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}} \right| + c_5$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \Rightarrow y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\frac{dz}{dy} z = \frac{a}{2}$$

$$\int z dz = \frac{a}{2} \int dy$$

د مساوات اینتیکریشن پسی Z
شمیرل کیری

ورپسی د اووښتونی د خانلونی
متود له لاری شمیرل کیری

د لته f ټولیزه اویونه ده

$$2. y'' = -\frac{1}{2} \sin y$$

د دفرنخیالمساوات اویونه
مو یوه نااویوونی (نامنحل)
اینٹیگرال ته بیایی.

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{a}{2} y + c_2$$

$$z^2 = ay + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright \quad 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay + c_3} \quad \blacktriangleright \quad z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{2}{a} \sqrt{ay + c_3} + c_5 \quad \blacktriangleright \quad c_4 - c_5 = c_6$$

$$(x + c_6)^2 = \frac{4}{a^2} (ay + c_3)$$

$$\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3 = ay$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{4} (x + c_6)^2 - \frac{c_3}{a}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x, -\frac{1}{a} \left[\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3 \right] \right\rangle$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright \quad y' = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\int z dz = -\frac{1}{2} \int \sin y dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \cos y + c_2$$

$$z^2 = \cos y + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright \quad 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{\cos y + c_3} \quad \blacktriangleright \quad z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

$$x + c_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

د بني دفرنخيلا مساوات $y'' = f(y')$

Lösungsgang:

اوبیونلا

$$y' = \frac{dy}{dx} = z$$

$$y'' = \frac{dz}{dx} \text{ ein.}$$

۲- راپورته شوی مساوات

اینتیگرال کیری او په z پی

ترتیبیری

۳- دلته z اوبی کیری، بیا

اینتیگرال یی د دفرنخیال-

مساوات ټولیز اویونه لاس ته راځي.

Beispiele:

1. $y'' = y'^2$

بیلگه:

Beispiel:

بیلگه:

$$y'' = ay' \rightarrow y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$$

$$\ln z + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln z = ax + c_2 - c_1 \rightarrow c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = e^{ax+c_3} \rightarrow z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int e^{ax+c_3} dx$$

$$y = \frac{1}{a} e^{ax+c_3} + c_4 \rightarrow c_3 = c_5$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle$$

$$y'' = y'^2 \rightarrow y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \rightarrow z = \frac{dy}{dx} \quad c_2 - c_1 = c_3$$

$$-\int \frac{dx}{x+c_3} = \int dy$$

$$-\ln|x+c_3| + c_4 = y + c_5 \rightarrow c_4 - c_5 = c_6$$

$$\Rightarrow y = \underline{c_6 - \ln|x+c_3|}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \cdot c_6 - \ln|x+c_3| \rangle$$

2. $y'' = 1 - y'^2$

$y'' = 1 - y'^2 \Rightarrow y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

$\frac{dz}{dx} = 1 - z^2$

$\int \frac{dz}{1 - z^2} = \int dx$

$\text{Arctanh } z + c_1 = x + c_2 \Rightarrow c_2 - c_1 = c_3$

$z = \tanh(x + c_3) \Rightarrow z = \frac{dy}{dx}$

$\int dy = \int \tanh(x + c_3) dx$

$y + c_4 = \ln |\cosh(x + c_3)| + c_5 \Rightarrow c_5 - c_4 = c_6$

$y = c_6 + \ln |\cosh(x + c_3)|$

د لته f د ټوليز ايفنکشن دی

$\Rightarrow f = \langle x, -c_6 + \ln |\cosh(x + c_3)| \rangle$

تمرینونه

۳۱. د دوم نظم دفرنخیالمساوات

لاندي دفرنخیالمساوات اوبی کړی

1. $y'' = \frac{1}{x}$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

3. $y'' - x^3 = 0$

4. $y'' = x + \sin x$

5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

6. $y'' = \tan x$

7. $y'' = \sinh x$

8. $y'' = e^{x^2}$

9. $y^{(4)} = \cos x$

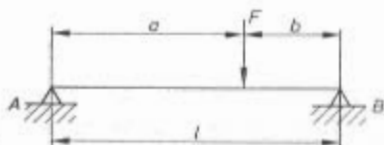
10. $y''' = e^x$

11. $y^{(4)} = \sinh(2x)$

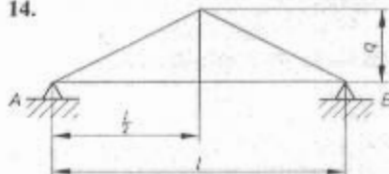
12. $y^{(5)} = \cosh(ax)$

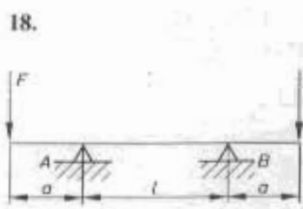
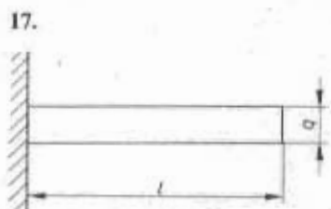
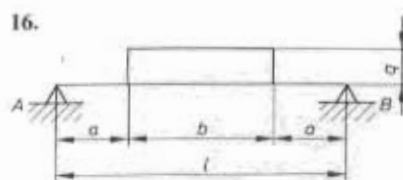
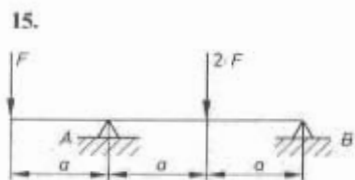
د کپرون لاین او خورا جگ یا ماکسیمال کپرونی مساوات د لاندي بارونحالت یا بار حالت یا دروندونی حالت لپاره پیدا کړی

13.



14.





لاندې دفرنيخيالمساوات اوبي كړي

19. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$

22. $y'' = \frac{1}{y}$

25. $y^2 \cdot y'' = a$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

31. $y'^2 - 3y''^2 = 0$

20. $y'' = a \cdot e^y$

23. $y'' = k^2 y''$

26. $y'' = 6y - 4$

29. $y'' = e^y$

32. $y''' + y'' = 0$

21. $y^4 - y^3 y'' = 1$

24. $y'' = y^2$

27. $y'' = 1 + y'^2$

30. $y'' = y'^3$

33. $xy''^2 = y$

د تمرینونو اویونه یا حل
۱. ۱ بنسټکلیمی تمرینونه

1. $y'' = x \cdot e^x$

$$\int x \cdot e^x dx = e^x(x-1) + c_1$$

$$c_2 - c_3 + c_4 = c$$

2. $y'' - x = 0$

$$c_2 + c_3 = c$$

3. $2y' - \cos x = 0$

4. $x \cdot y'' = 3y'$

$$z' = \frac{dz}{dx}$$

$$y'' = (y')' = x \cdot e^x$$

$$y' = \int x \cdot e^x dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$y = \int x \cdot e^x dx - \int e^x dx + c_1 \int dx$$

$$y = \underline{e^x(x-1) + c_2 - e^x - c_3 + c_1 x + c_4}$$

$$y'' = (y')' = x$$

$$y' = \int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y = \int (y') dx = \frac{1}{2} \int x^2 dx + c_1 \int dx$$

$$y = \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{6} x^3 + c_1 x + c}}$$

$$y' = \frac{1}{2} \cos x$$

$$y = \frac{1}{2} \int \cos x dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin x + c}}$$

$$x \cdot y'' = 3y' \rightarrow y' = z; y'' = z'$$

$$x \cdot z' = 3z$$

$$x \cdot \frac{dz}{dx} = 3z$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{3dx}{x}$$

5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

6. $y' \cdot y + y' + x = 0$

$$c_2 = 2c_1$$

$$c = 1 + c_2$$

7. $y' - x^2 = 3e^x$

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \rightarrow z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3 dx = \underline{\underline{\frac{x^4}{4} + c}}$$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{y} dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{y} dy$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln y$$

$$y = \underline{\underline{e^{\frac{1}{2} \ln^2 x + c}}}$$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx} (y+1) = -x$$

$$\int (y+1) dy = - \int x dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= \underline{\underline{-1 \pm \sqrt{c - x^2}}}$$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2) dx$$

8. $\sin x - e^x = y'$

9. $y \cdot y' = x + 1$

$c = 2c_1$

10. $y' \cdot y^2 = y' - x^2$

اویبونه د y پسی اویبوز نه دی،
له دې امله ایمپلیسیت اویبونه

11. $\frac{dy}{dx} - 3x = e^x$

$$\int dy = \int (3e^x + x^2) dx$$

$$y = \underline{3e^x + \frac{1}{3}x^3 + c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - e^x$$

$$dy = (\sin x - e^x) dx$$

$$\int dy = \int (\sin x - e^x) dx$$

$$y = \underline{-\cos x - e^x + c}$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$y \cdot dy = (x + 1) \cdot dx$$

$$\int y dy = \int (x + 1) dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$y = \underline{\pm \sqrt{x^2 + 2x + c}}$$

$$y'(y^2 - 1) = -x^2$$

$$dy(y^2 - 1) = (-x^2) dx$$

$$\int (y^2 - 1) dy = - \int x^2 dx$$

$$\underline{\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + c}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3x$$

$$\int dy = \int (e^x + 3x) dx$$

$$y = \underline{e^x + \frac{3}{2}x^2 + c}$$

$$12. y' - x^2 = x^2 - y'$$

$$13. \frac{dy}{dx} + \cos x = 1$$

$$14. y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \\ &\quad - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| \end{aligned}$$

$$c = 4c_1$$

$$15. x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$$

که دفرنخیالمساوات په x^2 ویشل کیږي، باید $x \neq 0$ وغوښتل شي. که $x = 0$ لپاره اویبونه په پام کې ونیول شي، بیژندل کیږي چی دفرنخیالمساوات $x = 0$ لپاره هم اویبونه پوره کوي، په دې توګه د ټول x لپاره اویبونه پوره ده.

$$2y' = 2x^2 \quad || :2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2 dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

$$dy = (1 - \cos x) dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x) dx$$

$$y = \underline{x - \sin x + c}$$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$y = \pm \sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1) dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1) dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x + c$$

16. $e^x \cdot y' = y$

ساده د $y = 0$ پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.

د نورې کارونې لپاره دې $y \neq 0$ نیول شوی وي

$c = e^{c_1}$

د $c = 0$ سره پارتیکولار-یا ټوټه اوبیونه خوندي ده.

17. $y'' = 7x^3$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

پارتیکولار اوبیونه $y=0$ Partikuläre Lösung:

$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$

$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x} dx$

$\ln |y| = -e^{-x} + c_1$

$e^{\ln |y|} = e^{-e^{-x} + c_1}$
 $= e^{-e^{-x}} \cdot e^{c_1}$

$y = c \cdot e^{-e^{-x}}$

$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$

$\int dy' = 7 \int x^3 dx$

$y' = \frac{7}{4} x^4 + c_1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4} x^4 + c_1$

$\int dy = \int \left(\frac{7}{4} x^4 + c_1 \right) dx$

$y = \frac{7}{20} x^5 + c_1 x + c_2$

$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$

$\frac{dy'}{dx} = \sin x$

$\int dy' = \int \sin x dx$

$y' = -\cos x + c_1$

$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$

19. $3x - y'' = a$

$$\int dy = \int (-\cos x + c_1) dx$$
$$y = \underline{-\sin x + c_1 x + c_2}$$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{dy'}{dx} = 3x - a$$

$$\int dy' = \int (3x - a) dx$$

$$y' = \frac{3}{2} x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^2 - ax + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{3}{2} x^2 - ax + c_1 \right) dx$$

$$y = \underline{\frac{1}{2} x^3 - \frac{a}{2} x^2 + c_1 x + c_2}$$

20. $y'' = y'$

سملاسی $y = a = \text{const}$ د پارتیکو-

لار اویونی په خیر پیژندل کیږي.

د پسی اویونی لپاره $|y'| = 0$ د

سره فنکشن رانیول کیږي، دا په

دې مانا چې نا ثابت فنکشنونه

پارتیکولار اویونه Partikuläre Lösung:

$y = a = \text{const.}$ = ثابتہ

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{y'} = dx$$

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx$$

$$\ln |y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln |y'|} = e^{x+c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$$y' = c_1 \cdot e^x$$

$$e^{c_1^*} = c_1$$

په روښانه توگه د $C_4 = C_5 = 0$
 همداسې د $C_3 = 0$ سره پورتنی
 پارټیکولار اوبی په ټولیز اوبی
 کی دننه یا خوندي دی.

21. $y'' = x \cdot \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \cdot e^x$$

$$\int dy = \int c_1 \cdot e^x dx$$

$$y = \underline{c_1 \cdot e^x + c_2}$$

$$\frac{dy'}{dx} = x \cdot \cos x$$

$$\int dy' = \int \underbrace{x}_{u_1} \cdot \underbrace{\cos x dx}_{dv_1}$$

$$y' = x \cdot \sin x - \int \sin x dx$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \sin x + \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int (x \cdot \sin x + \cos x + c_1) dx$$

$$y = \int \underbrace{x}_{u_2} \cdot \underbrace{\sin x dx}_{dv_2} + \sin x + c_1 x$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x dx + \sin x + c_1 x$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + \sin x + c_1 x + c_2$$

$$= \underline{2 \sin x - x \cdot \cos x + c_1 x + c_2}$$

۲. ۱ د لمړي نظم ديفرنخيالمساوات ته تمرينونه
۱. ۲. ۱ ديفرنخيالمساوات د بيلوشو او وېنټونکو سره

1. $y' = \frac{y}{2a}$

پارتيکولار اوبيونه: $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$; نيونه

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$$

$$\ln |y| = \frac{x}{2a} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$$

$$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{x}{2a}}}}$$

$c = e^{c_1}$

پارتيکولار اوبيونه په ټوليز
اوبی هم دننه دي ($C = 0$)

2. $y' = axy$

پارتيکولار اوبيونه: $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$; نيونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x dx$$

$$\ln |y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{a}{2}x^2 + c_1}$$

$$= e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{a}{2}x^2}}}$$

د $c = 0$ سره پارتيکولار اوبيونه
په ټوليز اوبيونی کی دننه دی.

3. $y' - 1 = x^2 + x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + x^4$$

$$\int dy = \int (1 + x^2 + x^4) dx$$

$$y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + c$$

4. $y' - x^3 = y - x^3$

$$y' = y + x^3 - x^3$$

$$y' = y$$

$$y = c \cdot e^x$$

د دې ديفرنخيالبراون اوبى د تيرتيرين ١
خڅه د $a = 1/2$ سره، لاس ته راوړل كيږي

5. $\frac{y'}{2x} = y^2$

زینګولار اوبیونه : $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = 2 \int x dx$$

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c$$

د ديفرنخيالمساوات اوبیونه يو
زینګولار اوبى لري.

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}$$

$$y = 0$$

6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

زینګولار اوبیونه : $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

ساده پیژندلکيږي، چى اوبى
 $y = 0$ ، زینګولار اوبى دى چى
دا به وروسته وښوول شي.

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2}$$

7. $2xy^2 = y'$

د دې ديفرنشيال مساوات اوبى د
تر مخه تير تمرين ۵ څخه رانيول
كيدى شي

8. $y' = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$c = -2c_1$

اوبى په ايمپليسيته بڼه
(اهرامغوخى)

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$

$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$
 $-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$
 $= -\frac{1 - c \cdot x}{x}$
 $y = \frac{x}{1 - c \cdot x}$
 $y = 0$

زيكولارزوييونه: $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$; نيونه

$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2 + c}$

$y = -\frac{1}{x^2 + c}$

$y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$a^2 y \cdot dy = b^2 x \cdot dx$

$a^2 \int y dy = b^2 \int x dx$

$a^2 \cdot \frac{y^2}{2} = b^2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \quad || \cdot 2$

$a^2 y^2 = b^2 x^2 + 2c_1$

$b^2 x^2 - a^2 y^2 = c$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$\int dy = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

$y = 2 \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}| + c$

10. $x^2 + 2x = y'$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x$$

$$\int dy = \int (x^2 + 2x) dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + x^2 + c$$

11. $x \cdot y' = y \cdot \ln y$

د تمرینور کړي څخه ورکول کيږي

(د $\ln y$ له امله)، چې $y > 0$ باید

باور ولري. د ديفرنخيالمساوات پسي

کارونی لپاره یواځي $x \neq 0$ نیول شوی.

$$\int \frac{y'}{y} dy = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \quad f(x) = \ln y$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = f(x) = \ln y$$

اوبی ديفرنخيالمساوات د $x = 0$

لپاره هم پوره کوي، چې له دې

امله دا ټوليز اوبی دی

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot \ln y$$

Voraussetzung: $x \neq 0$ نیونه:

$$\Rightarrow \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{\ln y} \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |\ln y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$\ln y = c \cdot x$$

$$e^{\ln y} = e^{c \cdot x}$$

$$y = e^{c \cdot x}$$

پارتيکولار اوبيونه: $y=0$

12. $(1-x^2)dy + xy \cdot dx = 0$

د پارتيکولار اوبی په څير $y = 0$

سملاسي پيژندل کيږي. د ديفرنخ

یالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی

باید $y \neq 0$ ونيول شي او $1-x \neq 0$

دا په دې مانا چې $y \cdot (1-x)^2 \neq 0$

Voraussetzung: $y \cdot (1-x^2) \neq 0$ نیونه:

$$(1-x^2) dy + xy \cdot dx = 0 \quad || : y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{x}{1-x^2} dx = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{x}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$e^{c_1} = c$$

د $c = 0$ سره په دې کې پارتيکیو-

لار اوبی دننه یا خوندي دی.

د $1 - x^2 = 0$ لپاره، دا په دې مانا ،

چی $|x| = 1$ اوبی هم ديفرنخيالمسا-

وات پوره کوي، داسی چی دا ټولیز

اوبی انځوروي.

بدلون (سبستیچیوشن)

$$z = \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x) dx$$

$$14. y' = e^x \cdot y$$

د $c = 0$ سره په دې کې ټوته

اوبیونه خوندي ده .

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + c_1}$$

$$= (e^{\ln |1 - x^2|})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = \underline{c \cdot \sqrt{|1 - x^2|}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$y = - \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= - \int \frac{dz}{z}$$

$$= - \ln |z| + c$$

$$= \underline{- \ln |\sin x + \cos x| + c}$$

$y = 0$: پارتيکولار اوبیونه

نیونه : $y \neq 0$ Voraussetzung:

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x dx$$

$$\ln |y| = e^x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \underline{c \cdot e^{(e^x)}}$$

15. $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

16. $y' = (y \cdot y')^2$

$c = 3c_1$

17. $dy = \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

زیگولار اویبونه $y' = 0$

$y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0, x \neq 0$: نیونه

$\Rightarrow 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x \rightarrow$ مربع کونده quadrieren

$1 = y' \cdot x^2$

$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$

$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$

$y = -\frac{1}{x} + c \rightarrow$ für $x \neq 0$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

Singuläre Lösung: $y' = 0$ زیگولار اویبونه

$y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$: نیونه

$\Rightarrow 1 = y^2 \cdot y'$

$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$

$\int y^2 dy = \int dx$

$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$

$y = \sqrt[3]{3x + c}$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$

$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} dx$

Koeffizientenvergleich: د کوفونوا تپوول

I: $A+B=0$

II: $2A+B+C=0$

III: $A=1$

I: $1+B=0 \Rightarrow B=-1$

II: $2-1+C=0 \Rightarrow C=-1$

18. $y' = \frac{x^2 \sqrt{x^2+4}}{y^2 \sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتېگرالونه همغه فورم لري
او د ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په
پرتله ریکورزیون فرمول ټاکل کیږي.

$$\int \sqrt{x^2+a^2} dx =$$

$$\frac{x}{2} \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x+\sqrt{x^2+a^2}| + c$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیخیت فورم
ممکن ده.

$$\int dy = \int \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \ln |x| - \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$\int dy = \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sqrt{x^2+4}}{y^2 \sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2 \sqrt{y^2+9} dy = \int x^2 \sqrt{x^2+4} dx$$

$$\frac{y}{4} \sqrt{(y^2+9)^3} - \frac{9}{4} \int \sqrt{y^2+9} dy =$$

$$= \frac{x}{4} \sqrt{(x^2+4)^3} - \frac{4}{4} \int \sqrt{x^2+4} dx \quad || \cdot 4$$

$$y \sqrt{(y^2+9)^3} - 9 \left[\frac{y}{2} \sqrt{y^2+9} + \frac{9}{2} \ln |y+\sqrt{y^2+9}| \right] =$$

$$= x \sqrt{(x^2+4)^3} -$$

$$- 4 \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2+4} + 2 \ln |x+\sqrt{x^2+4}| \right] + c$$

$$y(y^2+9) \sqrt{y^2+9} - \frac{9}{2} y \sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2} \ln |y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+4) \sqrt{x^2+4} - 2x \sqrt{x^2+4} -$$

$$- 8 \ln |x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

$$\frac{y}{2} (2y^2+9) \sqrt{y^2+9} - \frac{81}{2} \ln |y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(x^2+2) \sqrt{x^2+4} - 8 \ln |x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

$$y(2y^2+9) \sqrt{y^2+9} - 81 \ln |y+\sqrt{y^2+9}| =$$

$$= x(2x^2+4) \sqrt{x^2+4} - 16 \ln |x+\sqrt{x^2+4}| + c$$

19. $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

پارخیل اینتیگرال

د $c = 0$ سره پارتيکیوالر اوبی
په دې کی خوندي دی.

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$
دا چی دواړه اینتیگرالونه برابر فورم
لري بسیا کوي، چی یو وشمیرل شي
بدلون (سبستیچیوشن)

$$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

اوبی په ایمپلیخیتفورم

Partikuläre Lösung: $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\blacktriangleright x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sin 2x}_{dv} dx$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx$$

$$\ln |y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{1}{4} \sin 2x - \frac{x}{2} \cos 2x} + c_1$$

$$= e^{\frac{1}{4} (\sin 2x - 2x \cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{1}{4} (\sin 2x - 2x \cos 2x)}$$

$$dx = \ln y dy$$

$$\int dx = \int \ln y dy$$

$$x = y (\ln y - 1) + c$$

$$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$$

$$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \text{Arctan } t + c$$

$$= \text{Arctan } e^x + c$$

$$\text{Arctan } e^y = \text{Arctan } e^x + c$$

$$22. \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$$

دریمه ریننه یی راوستل کیری.
یا یی ۳. جذر نیول کیری

د $c = 0$ سره پارتیکولر اوبی
په دې کی خوندي دی.

$$23. (x+y)^2 = y'$$

لمری په سبستیچیشن پیل کوو.

$$z = x + y; \quad y = z - x$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx} \\ &= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx} \\ &= \frac{dz}{dx} - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$$

پارتیکولر اوبیونه: $y=0$

نیونه: $y \neq 0$; Voraussetzung: $y \neq 0$

$$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$$

$$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}} dx$$

$$\ln |y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1} = e^{\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}}}}$$

$$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$$

$$\frac{dz}{z^2 + 1} = dx$$

$$\int \frac{dz}{z^2 + 1} = \int dx$$

$$\text{Arctan } z = x + c$$

$$z = \tan(x + c)$$

$$x + y = \tan(x + c)$$

$$y = \underline{\underline{\tan(x + c) - x}}$$

24. $y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$

Singuläre Lösung: $y' = 0$

بِنکولار اوبیونہ

$y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$

نپونہ

\Rightarrow په y' ویشنه اجازه لري

$y' \cdot y = x^2 - 1$

$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$

$\int y dy = \int (x^2 - 1) dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad || \cdot 2$

$y^2 = \frac{2}{3} x^3 - 2x + c$

$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3} x^3 - 2x + c}$

$y = a = \text{const.}$

$c = 2c_1$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

$y'^2 = x^2 + 2x$

$y' = \pm \sqrt{x^2 + 2x}$

$= \pm \sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$

$= \pm \sqrt{(x+1)^2 - 1}$

$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{(x+1)^2 - 1}$

$\int dy = \pm \int \sqrt{(x+1)^2 - 1} dx$

$y = \pm \int \sqrt{z^2 - 1} dz$

$= \pm \left[\frac{z}{2} \sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| \right] + c$

$y = \pm \frac{1}{2} [(x+1) \sqrt{x^2 + 2x} -$

$-\ln |x+1 + \sqrt{x^2 + 2x}|] + c$

سیستیچیوشن :

$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$

$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx =$

$\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$

26. $y' \cdot \text{Arcsin } y = x^2$

پارخیل (توتیه -) اینتیگرال

په ایمپلیشیته بنه اویونه

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون (سبستیچیوشن)

$x^2 = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$

28. $y \cdot \ln x = y'$

$\frac{dy}{dx} \cdot \text{Arcsin } y = x^2$

$\int \underbrace{\text{Arcsin } y}_{u} \underbrace{dy}_{dv} = \int x^2 dx$

$y \cdot \text{Arcsin } y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{3} x^3$

$y \cdot \text{Arcsin } y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c$

$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$

$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2} dx$

$= \frac{1}{2} \int e^z dz$

$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$

$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

$\ln(e^y) = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$

$y = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$

پارتیکولار اویونه : $y=0$

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$

$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x dx$

د $c = 0$ سره پارتيکيوالر اوبی
په دې کی خوندي دی.

$$29. x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$$

پارخیل اینتیگرال

$$30. \frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$$

پارخیل یا پارشل اینتیگرال

$$\ln |y| = x \cdot \ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{x(\ln x - 1) + c_1} = e^{x(\ln x - 1)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{x(\ln x - 1)}$$

$$x \cdot \sinh x = \frac{dy}{dx} \cdot \cosh y$$

$$\int \cosh y \cdot dy = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\sinh x}_{dv} dx$$

$$= x \cdot \cosh x - \int \cosh x dx$$

$$\sinh y = x \cdot \cosh x - \sinh x + c$$

$$y = \operatorname{Arsinh} [x \cdot \cosh x - \sinh x + c]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y}$$

$$\int \underbrace{\operatorname{Arcosh} y}_{u_1} \underbrace{dy}_{dv_1} = \int \underbrace{\operatorname{Arsinh} x}_{u_2} \underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y \cdot \operatorname{Arcosh} y - \int \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} dy =$$

$$= x \cdot \operatorname{Arsinh} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$y \cdot \operatorname{Arcosh} y - \sqrt{y^2 - 1} = x \cdot \operatorname{Arsinh} x - \sqrt{x^2 + 1} + c$$

۱ . ۲ . ۳ ديفرنخيالمساوات د هوموجينو اوونستونكو سره

پام وړ : يو خو د دې اوبيونو ديفرنخيالمساوات د هوموجين واريابلو سره ديفرنخيا-
لمساوات نه دي. مگر دا اجازه ورکوي يا خان دې ته پرېږدي، چې د سبستيچيوشن
 $y = x \cdot z$ له لارې اوبی شي (تمرين ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰)

$$1. y' \cdot x = -(x+y)$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$dy \cdot x = -(x+y) dx$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz) x = -x \cdot dx - x \cdot z \cdot dx$$

$$\int \frac{2}{1+2z} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$e^{-2c_1} = c$$

$$2. y' \cdot x = y$$

دا دیفرنشیال مساوات په ساده توګه
د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له
لارې اوبی کیدی شي.

$|x| = 0$: پس په x ویشنه اجازت لری

$$z \cdot dx + x \cdot dz = -dx - z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = dx(-1 - 2z)$$

$$\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{2}{1+2z} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{2} \ln |1+2z| = \ln |x| + c_1$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| = \ln |x| + c_1$$

$$-\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| - \ln |x| = c_1$$

$$\frac{1}{2} \ln \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| + \frac{2}{2} \ln |x| = -c_1$$

$$\frac{1}{2} \left[\ln \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| + \ln x^2 \right] = -c_1 \quad \parallel \cdot 2$$

$$\ln x^2 \cdot \left| 1 + \frac{2y}{x} \right| = -2c_1$$

$$\ln |x^2 + 2yx| = -2c_1$$

$$e^{\ln |x^2 + 2yx|} = e^{-2c_1}$$

$$x^2 + 2yx = c$$

$$y = \frac{c - x^2}{2x}; \quad x \neq 0$$

$y=0$: پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung: $y \neq 0, x \neq 0$: **نیونه**

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

په دې اوبيونوكي پارتيكيولار اوبيوني
خوندي دي (د $c=0$ سره) اود $x=0$
لپاره هم، دا په دې مانا، چې دا ټوليز
اوبي دي.

$$3. y' = \frac{x+y}{x}$$

د وظيفي ورکوني سره سم لاسی
د $x=0$ ورکوي

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$4. y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \underline{c \cdot x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z) dx$$

$$x \cdot dz = dx$$

$$dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln |x| + c$$

$$y = \underline{x(\ln |x| + c)}$$

$$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2) dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2) dx$$

نيونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ويش

$$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1+z^2) dx$$

$$x \cdot dz = (1+z^2) dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan } z = \ln |x| + c$$

$$\tan(\text{Arctan } z) = \tan(\ln |x| + c)$$

$$z = \tan(\ln |x| + c)$$

$$y = \underline{x \cdot \tan(\ln |x| + c)}$$

د $x \neq 0$ لپاره

$$5. y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$c = 2c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$6. \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$$

د وظیفې ورکړی څخه روښانه ده، چې

همدا اوس $|y| = 0$ او $|x| = 0$ باور لري.

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$$

$$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2) dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2) dx$$

نیونه: $|x| = 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)z = (z^2 - 1) dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = -dx$$

$$\int z \cdot dz = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = -\ln |x| + c_1 \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = -2 \ln |x| + 2c_1$$

$$= c - \ln x^2$$

$$y = \underline{\underline{\pm x \sqrt{c - \ln x^2}}}; \quad x \neq 0$$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad || \cdot xy$$

$$xyy' = x^2 + y^2$$

$$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2) dx \quad || : x^2$$

$$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2) dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = dx$$

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln |x| + c_1 \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = 2 \ln |x| + 2c_1$$

$$y = \underline{\underline{\pm x \sqrt{\ln x^2 + c}}}$$

$$7. dy \cdot x = (y-x) \cdot dx$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$8. y' - \frac{y}{x} = \tan \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د وظیفې ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس $x \neq 0$ لاس ته راځي.

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\int \frac{\cos z}{\sin z} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$9. (x+y) \cdot dx - (x-y) \cdot dy = 0$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx - dx$$

$$x \cdot dz = -dx$$

$$\int dz = - \int \frac{dx}{x}$$

$$z = -\ln |x| + c$$

$$y = x(c - \ln |x|); \quad x \neq 0$$

$$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$$

$$dy = (z + \tan z) dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\cos z}{\sin z} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\sin z| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |\sin z|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$\sin z = c \cdot x$$

$$z = \text{Arcsin}(c \cdot x)$$

$$y = x \cdot \text{Arcsin}(c \cdot x)$$

$$(x+x \cdot z) \cdot dx - (x-x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$(1+z) dx - (1-z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$$

$$(1+z) dx - x(1-z) dz - (z-z^2) dx = 0$$

$$(1+z^2) dx - x(1-z) dz = 0$$

$$\int \frac{2z}{1+z^2} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

اوبیونی یواخی په ایملیخته
بڼه یا فورم ورکړ شوی دی.

$$10. x^2 + xy + y^2 = x^2 \cdot y'$$

$$y = z \cdot x \Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$11. y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{1-z}{1+z^2} dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \left(\frac{1}{1+z^2} - \frac{z}{1+z^2} \right) dz$$

$$= \int \frac{dz}{1+z^2} - \frac{1}{2} \int \frac{2z}{1+z^2} dz$$

$$\ln |x| = \text{Arctan } z - \frac{1}{2} \ln |1+z^2| + c$$

$$\ln |x| = \text{Arctan } \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2} + c$$

$x \neq 0$ لپاره

$$(x^2 + xy + y^2) dx = x^2 \cdot dy$$

$$(x^2 + x^2z + x^2z^2) dx = x^2 (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(1 + z + z^2) dx = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(1 + z^2) dx = x \cdot dz$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan } z = \ln |x| + c$$

$$\tan (\text{Arctan } z) = \tan (\ln |x| + c)$$

$$z = \tan (\ln |x| + c)$$

$$y = x \cdot \tan (\ln |x| + c)$$

$x \neq 0$ لپاره

$$y' \cdot (3x^2 - y^2) = 2xy$$

$$dy \cdot (3x^2 - y^2) = 2xy \cdot dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)(3x^2 - x^2z^2) = 2x^2z \cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)(3 - z^2) = 2z \cdot dx$$

$$3x \cdot dz + 3z \cdot dx - xz^2 \cdot dz - z^3 dx = 2z \cdot dx$$

$$(3x - xz^2) dz + (z - z^3) dx = 0$$

داينتگرال اينتكروالونكى

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z} dz$$

په ټوټه ماتونو ټوټه كيري

د ضريبونو پرته:

I: $A+B+C = -1$

II: $-B+C = 0$

III: $-A = 3; \underline{A = -3}$

I: $-3+B+C = -1$

$B+C = 2$

II: $-B+C = 0$

$2C = 2; \underline{C = 1}$

II: $-B+C = 0; \underline{B = 1}$

$e^{c_1} = c$

$y = x \cdot z \Rightarrow z = \frac{y}{x}$

په ايمپليخيته بڼه اوبيونه

۷۳

$x(3-z^2) dz = (z^3-z) dx$

$\int \frac{3-z^2}{z^3-z} dz = \int \frac{dx}{x}$

$\frac{3-z^2}{z^3-z} = \frac{3-z^2}{z(z^2-1)}$

$= \frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}$

$= \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-1}$

$= \frac{A(z^2-1) + B(z-1)z + C(z+1)z}{z^3-z}$

$= \frac{z^2(A+B+C) + z(-B+C) - A}{z^3-z}$

$= \frac{-3}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}$

$\int \frac{3-z^2}{z^3-z} dz = \int \frac{dx}{x}$

$\int \left(\frac{-3}{z} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1} \right) dz = \int \frac{dx}{x}$

$-3 \ln |z| + \ln |z+1| + \ln |z-1| = \ln |x| + c_1$

$-\ln |z|^3 + \ln |(z+1)(z-1)| = \ln |x| + c_1$

$-\ln |z^3| + \ln |z^2-1| = \ln |x| + c_1$

$\ln \left| \frac{z^2-1}{z^3} \right| = \ln |x| + c_1$

$e^{\ln \left| \frac{z^2-1}{z^3} \right|} = e^{\ln |x| + c_1}$

$= e^{\ln |x|} \cdot e^{c_1}$

$\frac{z^2-1}{z^3} = c \cdot x$

$z^2-1 = c \cdot x \cdot z^3$

$\frac{y^2}{x^2} - 1 = c \cdot \frac{y^3}{x^2} \quad || \cdot x^2$

$\underline{y^2 - x^2 = c \cdot y^3; \quad x \neq 0}$

$$12. y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنوسملاسی $x > 0, y > 0$ لاس ته

راځي دا په دې مانا، چې $z > 0$ هم

$$\int \frac{1}{\ln z - 1} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$13. x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{dy}{dx} = z \cdot \ln z$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot \ln z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = z(\ln z - 1) dx$$

$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{\ln z - 1} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln z - 1| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |\ln z - 1|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$\ln z - 1 = c \cdot x$$

$$\ln z = c \cdot x + 1$$

$$e^{\ln z} = e^{c \cdot x + 1}$$

$$z = e^{c \cdot x + 1}$$

$$y = x \cdot e^{c \cdot x + 1}; \quad x > 0$$

$$(x - y) dy = y \cdot dx$$

$$(x - x \cdot z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = x \cdot z \cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$(1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = z \cdot dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx - zx \cdot dz - z^2 \cdot dx = z \cdot dx$$

$$x(1 - z) dz - z^2 \cdot dx = 0$$

ورپسی نیونی $\therefore z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{1 - z}{z^2} dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} \right) dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln |z| = \ln |x| + c$$

$$-\frac{1}{z} = \ln |x| + \ln |z| + c$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بڼه اویونه

$$14. y^2 + (x^2 - xy)y' = 0$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بڼه اویونه

$$15. y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$-\frac{1}{z} = \ln |x \cdot z| + c \quad \| \cdot z$$

$$-1 = z \cdot \ln |x \cdot z| + c \cdot z$$

$$-1 = \frac{y}{x} \cdot \ln |y| + c \cdot \frac{y}{x}$$

$$\frac{y}{x} (\ln |y| + c) + 1 = 0; \quad x \neq 0; \quad y \neq 0$$

$$y'(x^2 - xy) = -y^2$$

$$dy(x^2 - xy) = -y^2 \cdot dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)(x^2 - x^2z) = -x^2z^2 \cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په X^2 ویش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)(1 - z) = -z^2 \cdot dx$$

$$x(1 - z) dz + (z - z^2) dx = -z^2 dx$$

$$x(1 - z) dz = -z \cdot dx$$

ورپسی نیونی: $z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

په Z ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z} dz = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{z} - 1 \right) dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |z| - z = -\ln |x| + c$$

$$\ln |z| + \ln |x| = z + c$$

$$\ln |z \cdot x| = z + c$$

$$\ln |y| = \frac{y}{x} + c; \quad x \neq 0; \quad y \neq 0$$

$$0 = (y^2 - 3x^2) dx + 2xy \cdot dy$$

$$= (x^2 \cdot z^2 - 3x^2) dx + 2x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په X^2 ویش

$$0 = (z^2 - 3) dx + 2z(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

$$0 = (3z^2 - 3) dx + 2xz \cdot dz$$

$$\int \frac{2z}{z^2-1} dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$e^{c_1} = c_2$$

$$c = \frac{1}{c_2}; \quad z = \frac{y}{x}$$

$$16. \quad xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-3(z^2 - 1) dx = 2xz \cdot dz$$

$$-3 \frac{dx}{x} = \frac{2z}{z^2 - 1} dz$$

$$-3 \int \frac{dx}{x} = \int \frac{2z}{z^2 - 1} dz$$

$$-3 \ln |x| = \ln |z^2 - 1| + c_1$$

$$e^{-3 \ln |x|} = e^{\ln |z^2 - 1| + c_1}$$

$$e^{\ln |x^{-3}|} = e^{\ln |z^2 - 1|} \cdot e^{c_1}$$

$$x^{-3} = (z^2 - 1) \cdot c_2$$

$$z^2 - 1 = \frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{c}{x^3} \quad || \cdot x^2$$

$$y^2 - x^2 = \frac{c}{x}$$

$$y = \pm \sqrt{x^2 + \frac{c}{x}}; \quad x \neq 0$$

$$x \cdot dy = (y + \sqrt{y^2 - x^2}) dx$$

$$x(x \cdot dz + z \cdot dx) = (xz + \sqrt{x^2 z^2 - x^2}) dx$$

$$= (xz + x\sqrt{z^2 - 1}) dx$$

نیونہ: $x = 0$ لہ دے املہ پہ x ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \sqrt{z^2 - 1} dx$$

$$x \cdot dz = \sqrt{z^2 - 1} dx$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |z + \sqrt{z^2 - 1}|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$z + \sqrt{z^2 - 1} = c \cdot x$$

په ایملیثیت فورم اویبی

$$17. xy' = y(\ln y - \ln x)$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنوسملاسی $x > 0, y > 0$ لاس ته

راځي دا په دې مانا، چې $z > 0$ هم

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1} dz \cong \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$18. y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

د پوښتنکونی څخه لاس ته راځي،

چې تل $4xy \geq 0$ باید باور ولري

دا په دې مانا چې $x \cdot y \geq 0$ هم

$$\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} = c \cdot x \quad || \cdot x$$

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = cx^2; \quad x \neq 0$$

$$x \cdot y' = y \cdot \ln \frac{y}{x}$$

$$x \cdot dy = y \cdot \ln \frac{y}{x} \cdot dx$$

$$x(x \cdot dz + z \cdot dx) = x \cdot z \cdot \ln z \cdot dx \quad || : x$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot \ln z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = z(\ln z - 1) dx$$

$$\frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1} dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln z - 1| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |\ln z - 1|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$\ln z - 1 = c \cdot x$$

$$\ln z = c \cdot x + 1$$

$$e^{\ln z} = e^{c \cdot x + 1}$$

$$z = e^{c \cdot x + 1}$$

$$y = x \cdot e^{c \cdot x + 1}; \quad x > 0$$

$$y \cdot dx = (x - \sqrt{4xy}) dy$$

$$x \cdot z \cdot dx = (x - \sqrt{4x^2z})(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

$$= (x - 2x\sqrt{z})(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$z \cdot dx = (1 - 2\sqrt{z})(x \cdot dz + z \cdot dx)$$

$$z \cdot dx = x(1 - 2\sqrt{z}) dz + (z - 2z\sqrt{z}) dx$$

$$0 = x(1 - 2\sqrt{z}) dz - 2z\sqrt{z} dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیسایته بڼه اویښونه

$$19. \frac{2y(y-x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

نورې نیوډي $\therefore z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}} dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{2z\sqrt{z}} dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \int z^{-\frac{3}{2}} dz - \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - \ln |z| = \ln |x| + c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}} = \ln |x| + \ln |z| + c$$

$$-\frac{1}{\sqrt{z}} = \ln |x \cdot z| + c$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}} = \ln |y| + c$$

$$0 = \sqrt{\frac{x}{y}} + \ln |y| + c; \quad x \cdot y > 0$$

$$y' = \frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$= \frac{-2y}{x-y}$$

$$0 = (x-y) dy + 2y \cdot dx$$

$$0 = (x-xz)(x \cdot dz + z \cdot dx) + 2xz \cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$0 = (1-z)(x \cdot dz + z \cdot dx) + 2z \cdot dx$$

$$0 = x(1-z) dz + (z - z^2 + 2z) dx$$

$$0 = x(1-z) dz + (3z - z^2) dx$$

$$-x(1-z) dz = (3z - z^2) dx$$

$$\int \frac{1-z}{3z-z^2} dz = - \int \frac{dx}{x}$$

یو پارشل ماتریلونه یا تجزیه ساده

ورکوي $A = \frac{1}{3}; B = \frac{2}{3}$.

$$e^{3c_1} = c$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیسیت فورم اوبی

$$20. y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنورکونې څخه سملاسي $x \neq 0$

ورکوي، چی دا نور باید فرض نه شي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$$

$$z = \frac{y}{x}$$

په ایمپلیسیت فورم اوبی

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)} dz = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-3} \right) dz = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z-3} \right) dz$$

$$\frac{1}{3} \ln |z| + \frac{2}{3} \ln |z-3| = -\ln |x| + c_1 \quad || \cdot 3$$

$$\ln |z| + \ln (z-3)^2 = -3 \ln |x| + 3c_1$$

$$\ln |z(z-3)^2| = \ln |x^{-3}| + 3c_1$$

$$e^{\ln |z(z-3)^2|} = e^{\ln |x^{-3}| + 3c_1}$$

$$= e^{\ln |x^{-3}|} \cdot e^{3c_1}$$

$$z(z-3)^2 = c \cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x} \left(\frac{y}{x} - 3 \right)^2 = c \cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3} (y-3x)^2 = c \cdot x^{-3} \quad || \cdot x^3$$

$$\underline{y(y-3x)^2 = c; \quad x \neq 0}$$

$$dy = \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right) dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (z + \sqrt{1+z^2}) dx$$

$$= z \cdot dx + \sqrt{1+z^2} dx$$

$$x \cdot dz = \sqrt{1+z^2} dx$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |z + \sqrt{1+z^2}| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |z + \sqrt{1+z^2}|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$z + \sqrt{1+z^2} = c \cdot x$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = c \cdot x \quad || \cdot x$$

$$\underline{y + \sqrt{x^2 + y^2} = c \cdot x^2; \quad x \neq 0}$$

۱، ۲، ۳ لاینی دیفرنشیال مساوات

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

دېرولې متود له مخې

رامنځ ته شوي اینتیګرال شایته c_1

تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له

دې امله c_1 داسې ټاکل کیږي، چې

وروسته شمیرنه یې ترممکنی

اندازې ساده شي.

۱ - د برنولي متود له مخې اوبی

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + 2xuv = x \cdot e^{-x^2}$$

$$u \left(\underbrace{\frac{dv}{dx} + 2xv}_{=0} \right) + v \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int x dx$$

$$\ln |v| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln |v|} = e^{-x^2 + c_1} = e^{-x^2} \cdot e^{c_1}$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

$$\Rightarrow v = e^{-x^2}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x^2} \cdot \frac{du}{dx} = x \cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = x$$

$$\int du = \int x dx$$

$$u = \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right)$$

۲ - د لاګرانج د متود له مخې اوبی

$$y' + 2xy = 0$$

$$dy = -2xy \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int x dx$$

دا افاده د y' لپاره په
دیفرنشیا ل مساوت اینبول کیری.

$$\ln |y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x^2 + c_1} = e^{-x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot e^{-x^2}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x) + 2x \cdot c(x) \cdot e^{-x^2} =$$

$$= x \cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2} \quad || : e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x dx$$

$$c(x) = \frac{x^2}{2} + k$$

$$y = \underline{e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + k \right)}$$

۱ - د برنولي متود له مخی اوی

$$2. y' = e^x - y$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x - u \cdot v$$

$$u \left(\frac{dv}{dx} + v \right) + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x$$

$$= 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int dx$$

$$\ln |v| = -x + c_1$$

$$\underline{v = e^{-x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x} \cdot \frac{du}{dx} = e^x \quad || \cdot e^x$$

Wählen: $c_1 = 0$ و تکی

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

په ديفرنخيال مساوات کي کيږدی

$$\frac{du}{dx} = e^{2x}$$

$$\int du = \int e^{2x} dx$$

$$u = \frac{1}{2} e^{2x} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{2x} + c \right) \cdot e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2} e^x + c \cdot e^{-x}$$

۲ - د لاکرانج د متود له مخي اوبی

$$y' + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx$$

$$\ln |y| = -x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x+c_1} = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-x} \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot e^{-x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x) = e^x - c(x) \cdot e^{-x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} = e^x \quad || \cdot e^x$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = e^{2x}$$

$$\int dc(x) = \int e^{2x} dx$$

$$c(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + k$$

3. $y' - y = x^2 - 1$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$c_1 = 0$ و تا که

$\int x^2 \cdot e^{-x} dx$

دا پورته اینتیگرال د پارشل
ایتیگرال سره اوبی کیری

$y = \left(\frac{1}{2} e^{2x} + k\right) \cdot e^{-x}$

$= \frac{1}{2} e^x + k \cdot e^{-x}$

۱ - د برنولی متود له مخی اوبی

$u \cdot v' + v \cdot u' - u \cdot v = x^2 - 1$

$u(v' - v) + v \cdot u' = x^2 - 1$
 $= 0$

$\frac{dv}{dx} = v$

$\int \frac{dv}{v} = \int dx$

$\ln |v| = x + c_1$

$v = e^x$

$u \cdot 0 + e^x \cdot u' = x^2 - 1 \quad || : e^x$

$\frac{du}{dx} = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$

$\int du = \int x^2 \cdot e^{-x} dx - \int e^{-x} dx$

$u = \int x^2 \cdot e^{-x} dx + e^{-x}$

$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = x^2 \cdot (-e^{-x}) - \int (-e^{-x}) \cdot 2x dx$

$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} dx$

$= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \left[x(-e^{-x}) - \right.$

$\left. - \int (-e^{-x}) dx \right]$

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} dx$$

$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + c$$

$$u = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= [-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + c] \cdot e^x$$

$$= -(x^2 + 2x + 2) + (e^{-x} + c)e^x$$

$$= \underline{\underline{ce^x - x^2 - 2x - 1}}$$

۲ - دلاگرانج د متود له مخی اوبی :

$$y' - y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln |y| = x + c_1$$

$$y = c \cdot e^x$$

$$y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$

$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$

$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad || : e^x$$

$$c'(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$$

$$c(x) = \int (x^2 - 1) \cdot e^{-x} dx$$

$$c(x) = \underline{\underline{-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + e^{-x} + k}}$$

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$

$$= \underline{\underline{ke^x - x^2 - 2x - 1}}$$

$$c = e^{c_1}$$

په دیفرنخیالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

دا ایتیکریشن همدا په برخه ۱
کی اوبی شو

$$4. y' = e^{3x} - 2y$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

وتناکی $c_1 = 0$

۱- د برنولي متود له مخی اوبی

$$u \cdot v' + v \cdot u' = e^{3x} - 2u \cdot v$$

$$u(v' + 2v) + v \cdot u' = e^{3x}$$

$= 0$

$$\frac{dv}{dx} = -2v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -2 \int dx$$

$$\ln |v| = -2x + c_1$$

$$v = e^{-2x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-2x} \cdot u' = e^{3x} \quad || : e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx} = e^{5x}$$

$$\int du = \int e^{5x} dx$$

$$u = \frac{1}{5} e^{5x} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \left(\frac{1}{5} e^{5x} + c \right) e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{5} e^{3x} + c \cdot e^{-2x}$$

۲- د لاگرانج د متود له مخی اوبی

$$y' + 2y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx$$

$$\ln |y| = -2x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-2x + c_1} = e^{-2x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

په ديفرنخيالمساوات کی دې کيبنوول شي

5. $y' \cdot x = y + x^2 \cdot \sin x$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

وتاکي $c_1 = 0$

دا اوبي ديفرنخيالمساوات د $x = 0$ لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چي دا ټوليز اوبي دی.

$$y = c \cdot e^{-2x} \Rightarrow \underline{y = c(x) \cdot e^{-2x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} - 2e^{-2x} \cdot c(x) = e^{3x} - 2c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-2x} = e^{3x} \parallel \cdot e^{2x}$$

$$c'(x) = e^{5x}$$

$$\underline{c(x) = \frac{1}{5} e^{5x} + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-2x}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{5} e^{3x} + k \cdot e^{-2x}}}}$$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبي

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = u \cdot v + x^2 \cdot \sin x$$

$$u(xv' - v) + xv \cdot u' = x^2 \cdot \sin x$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{=0}$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = v$$

نيونه: $|x| = c$, په x ويشنه

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot u' = x^2 \cdot \sin x \parallel : x^2$$

$$\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\underline{u = -\cos x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{x(c - \cos x)}}$$

دلته هم لمړی $x \neq 0$ غوښتل
کيږي، اوبی لکه پورته مگرد
 $x = 0$ لپاره به هم باور ولري.

په ديفرنخيالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$6. y'x = x \cdot \sin x - y$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u' \cdot v + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

وتگی

۲ د لاکرانچ متود له لاري اوبی

$$y' \cdot x - y = 0 \quad || : x$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{y = c(x) \cdot x}$$

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad || : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

$$y = \underline{x(k - \cos x)}$$

۱ - د برنولی متود له لاري اوبی

$$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$$

$$u \underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نېونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

$$\ln |v| = \ln \left| \frac{1}{x} \right|$$

پارشل یا توتہ انیتیکریشن

پہ دیفرنخیالمساوات کی کیپدی

دالاندی

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

اینٹیگرال همدا اوس برخه ۱

کی اوبی شو

$$v = \frac{1}{x}$$

$$u \cdot 0 + u' = x \cdot \sin x$$

$$\int du = \int x \cdot \sin x \, dx$$

$$u = x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cdot \cos x + \sin x + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= -\cos x + \frac{1}{x}(\sin x + c); \quad x \neq 0$$

۲. د لاکرانژ متود له لارې اوبی

$$y' \cdot x + y = 0$$

نیونه: $x \neq 0$, خکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = -\ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = \frac{c}{x} \Rightarrow y = \frac{c(x)}{x}$$

$$y' = \frac{x \cdot c'(x) - c(x)}{x^2} = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x) - \frac{c(x)}{x} = x \cdot \sin x - \frac{c(x)}{x}$$

$$c'(x) = x \cdot \sin x$$

$$\int dc(x) = \int x \cdot \sin x \, dx$$

$$c(x) = -x \cdot \cos x + \sin x + k$$

7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

Wählen: $c_1 = 0$: **وټاکئ**

د انتگرال
 $\int e^x \cdot \cos x \, dx$

د ټوټه انتیگرال سره اوبی کیږي

$y = \frac{1}{x} \cdot c(x)$
 $= -\cos x + \frac{1}{x} (\sin x + k); \quad x \neq 0$

۱- د برنولی متود له لارې اوبی

$u \cdot v' + v \cdot u' + u \cdot v = e^{2x} - \cos x$

$u(v' + v) + v \cdot u' = e^{2x} - \cos x$
 $= 0$

$\frac{dv}{dx} = -v$

$\int \frac{dv}{v} = - \int dx$

$\ln |v| = -x + c_1$

$v = e^{-x}$

$u \cdot 0 + e^{-x} \cdot u' = e^{2x} - \cos x \quad || \cdot e^x$

$u' = e^{3x} - e^x \cdot \cos x$

$u = \int (e^{3x} - e^x \cdot \cos x) \, dx$

$= \int e^{3x} \cdot dx - \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$= \frac{1}{3} e^{3x} - \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$F = \int e^x \cdot \cos x \, dx$

$= e^x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot e^x \, dx$

$= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \sin x \, dx$

$= e^x \cdot \sin x - [e^x(-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot e$

$$c = \frac{1}{2} c_1$$

په ديفرنخيالمساوات كي خاي
په خاي كيرى.

دا اينتيگرال همدا اوس په برخه ۱
كي اوبى شو

$$F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \underbrace{\int e^x \cdot \cos x \, dx}_F$$

$$2F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x + c_1$$

$$F = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$$

$$u = \frac{1}{3} e^{3x} - F$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + c \cdot e^{-x}$$

۲ - د اگرائز متود له لارې اوبى :

$$y' + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int dx$$

$$\ln |y| = -x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x+c_1} = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-x} \Rightarrow \underline{y = c(x) \cdot e^{-x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x) + c(x) \cdot e^{-x} + \cos x - e^{2x} = 0$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} = e^{2x} - \cos x \quad \| \cdot e^x$$

$$c'(x) = e^{3x} - e^x \cdot \cos x$$

$$c(x) = \int (e^{3x} - e^x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + k$$

8. $y' + ay = b \cdot e^{cx}$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Wählen: $c_1 = 0$: *وتاکه*

$$c_2 = e^{c_1}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-x}$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + k \cdot e^{-x}$$

۱- د برنولي متود له لارې اوبی

$$u \cdot v' + v \cdot u' + auv = b \cdot e^{cx}$$

$$u \underbrace{(v' + av)}_{=0} + v \cdot u' = b \cdot e^{cx}$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a \int dx$$

$$\ln |v| = -ax + c_1$$

$$v = e^{-ax}$$

$$u \cdot 0 + e^{-ax} \cdot u' = b \cdot e^{cx} \quad || \cdot e^{ax}$$

$$u' = b \cdot e^{x(a+c)}$$

$$u = \frac{b}{a+c} e^{x(a+c)} + c_2$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{b}{a+c} e^{cx} + c_2 \cdot e^{-ax}$$

۲- د لاکرانژ متود له لارې اوبی

$$y' + ay = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int dx$$

$$\ln |y| = -ax + c_1$$

$$y = c_2 \cdot e^{-ax} \Rightarrow \underline{y = c_2(x) \cdot e^{-ax}}$$

په ديفرنخيال مساوات كي خاي
په خاي كيري

$$9. y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

وتاکي

دا اينتيگرال د توتيه يا پارشل
اينتيگرال له لاري اوبي كيږي

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax} + ac_2(x) \cdot e^{-ax} = b \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} = b \cdot e^{cx} \quad || \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b \cdot e^{x(a+c)}$$

$$c_2(x) = \frac{b}{a+c} e^{x(a+c)} + k$$

$$y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$= \frac{b}{a+c} e^{cx} + k \cdot e^{-ax}$$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبي

$$u \cdot v' + v \cdot u' + auv - b \sin cx = 0$$

$$u(v' + av) + v \cdot u' - b \sin cx = 0$$

$$= 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a \int dx$$

$$\ln |v| = -ax + c_1$$

$$v = e^{-ax}$$

$$u \cdot 0 + e^{-ax} \cdot u' - b \sin cx = 0 \quad || \cdot e^{ax}$$

$$u' = b \cdot e^{ax} \cdot \sin cx$$

$$u = b \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx$$

$$= -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx + \frac{ab}{c} \int e^{ax} \cdot \cos cx \, dx$$

$$= -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx +$$

$$+ \frac{ab}{c} \left[e^{ax} \cdot \frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c} \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx \right]$$

$$1 + \frac{a^2}{c^2} = \frac{a^2 + c^2}{c^2}$$

$$c_3 = c_2 \cdot \frac{c^2}{a^2 + c^2}$$

$$c_2 = e^{c_1}$$

په دیفرنشیا مساوات کی دې
کیبنوول شی

دا اینٹیگرال همدا اوس برخه ۱
کی اوبی شو

۹۳

$$u = -\frac{b}{c} e^{ax} \cdot \cos cx + \frac{ab}{c^2} e^{ax} \cdot \sin cx -$$

$$-\frac{a^2}{c^2} \cdot b \underbrace{\int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx}_u$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{c^2}\right) u = \frac{b}{c} e^{ax} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + c_2$$

$$u = \frac{bc}{a^2 + c^2} e^{ax} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + c_3$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{bc}{a^2 + c^2} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + c_3 \cdot e^{-ax}$$

۲ - د لاکرانژ د متود له لارې اوبی

$$y' + ay = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -ay$$

$$\int \frac{dy}{y} = -a \int dx$$

$$\ln |y| = -ax + c_1$$

$$y = c_2 \cdot e^{-ax} \Rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} - ac_2(x) \cdot e^{-ax} + ac_2(x) \cdot e^{-ax} - b \cdot \sin cx = 0$$

$$c_2'(x) \cdot e^{-ax} = b \sin cx \quad \parallel \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b \cdot e^{ax} \cdot \sin cx$$

$$c_2(x) = b \int e^{ax} \cdot \sin cx \, dx$$

$$= \frac{bc}{a^2 + c^2} e^{ax} \left(\frac{a}{c} \sin cx - \cos cx\right) + k$$

$$10. y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د سوالورکونی څخه سملاسی لاس
ته راځی $x > 0$

وټاکي: $c_1 = 0$

$$\int \frac{1}{\ln x} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$$

$$= \frac{b}{a^2 + c^2} (a \cdot \sin cx - c \cdot \cos cx) + k \cdot e^{-ax}$$

۱- د برنولي د متود له لاري اوبي

$$u \cdot v' + v \cdot u' = \frac{uv}{x} + \frac{1}{\ln x}$$

$$u \left(v' - \frac{v}{x} \right) + v \cdot u' = \frac{1}{\ln x}$$

$$= 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$

$$v = x$$

$$u \cdot 0 + x \cdot u' = \frac{1}{\ln x} \quad \parallel \cdot \frac{1}{x}$$

$$u' = \frac{1}{x \ln x}$$

$$u = \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$= \ln |\ln x| + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= x (|\ln |\ln x| + c)$$

۲- د لاگرانژ د متود له لاري وبي

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$c = e^{c_1}$$

پہ دیفرنخیاالمساوات کی کیردی

11. $y' = a + bx + cy$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Wählen: $c_1 = 0$

وتاکہ

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{y = c(x) \cdot x}$$

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \parallel \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$
$$= \underline{\ln |\ln x| + k}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= \underline{x(\ln |\ln x| + k)}$$

۱ - د برنولی متورله لارہاوبی

$$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cw$$

$$u \underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

$$\ln |v| = cx + c_1$$

$$\underline{v = e^{cx}}$$

پارشل ایتیکریشن یا اینتیگرال

$$u \cdot 0 + e^{cx} \cdot u' = a + bx \quad \parallel \cdot e^{-cx}$$

$$u' = (a + bx) \cdot e^{-cx}$$

$$u = \int (a + bx) e^{-cx} dx$$

$$= a \int e^{-cx} dx + b \int x \cdot e^{-cx} dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \int x \cdot e^{-cx} dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \left[-\frac{x}{c} e^{-cx} + \frac{1}{c} \int e^{-cx} dx \right]$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} - \frac{bx}{c} e^{-cx} - \frac{b}{c^2} e^{-cx} + c_1$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{c} e^{-cx} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1}}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{c} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1 \cdot e^{cx}}}$$

۲ - د لاگرانج متود له لارې اوبی

$$y' - cy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

$$\int \frac{dy}{y} = c \int dx$$

$$\ln |y| = cx + c_1$$

$$y = c_2 \cdot e^{cx} \Rightarrow \underline{\underline{y = c_2(x) \cdot e^{cx}}}$$

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx} = a + bx + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} = a + bx \quad \parallel \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x) = (a + bx) e^{-cx}$$

$$c_2 = e^{c_1}$$

په دیفرنشیا مساوات کې ځای

په ځای کېری یا کېردی

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱
کی اوبی شو

12. $xy' + 1 = e^x + y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

Wählen: $c_1 = 0$: **د تاگه**

د دې لاندې اینتیگرال

$$\int \frac{e^x}{x^2} dx$$

اوبی کی د انتیگریشن لپاره لری
ودیزینه باندي تیریدنه نه شي کیدی

$$c_2(x) = \int (a+bx)e^{-cx} dx$$
$$= -\frac{1}{c} e^{-cx} \left(a+bx + \frac{b}{c} \right) + c_2$$

$$y = k(x) \cdot e^{cx}$$

$$= -\frac{1}{c} \left(a+bx + \frac{b}{c} \right) + k \cdot e^{cx}$$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبی

$$x(u \cdot v' + v \cdot u') + 1 = e^x + uv$$

$$u \underbrace{(xv' - v)}_{=0} + xv \cdot u' + 1 = e^x$$

$$x \cdot \frac{dv}{dx} = v$$

نیونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = \ln |x| + c_1$$
$$\underline{v = x}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot u' + 1 = e^x$$

$$u' = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

$$u = \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{dx}{x^2}$$

$$= \int \frac{e^x}{x^2} \cdot dx + \frac{1}{x}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots$$

$$\int \frac{e^x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + \ln |x| + \frac{x}{1 \cdot 2!} + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} +$$

$$+ \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \dots + c$$

$$u = \ln |x| + \frac{x}{1 \cdot 2!} + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \dots + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= c \cdot x + x \cdot \ln |x| + \frac{x^2}{1 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} + \frac{x^4}{3 \cdot 4!} + \dots$$

für $x \neq 0$

۲ - دلاگرانژ متود له لاري اوبی

$$xy' - y = 0$$

نیونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot x}$$

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$x^2 \cdot c'(x) + c(x) \cdot x + 1 = e^x + c(x) \cdot x$$

$$x^2 \cdot c'(x) + 1 = e^x \quad || : x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \ln |x| + \frac{x}{1 \cdot 2!} + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} +$$

$$+ \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \dots + k$$

۹۸

$$c = e^x$$

په دیفرنخیال مساوات کی کیږدی

دا اینتیگرال همدا اوس تر ۱
لاندي اوبی شویدی.

$$13. y'(1-x^2) + xy = 1$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

وټاکئ

د ورپسې اوبيوني لپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

Substitution: سبستیچيوشن:

$$1-x^2 = z^2 \Rightarrow dx = -\frac{z \cdot dz}{x}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= k \cdot x + x \cdot \ln |x| + \frac{x^2}{1 \cdot 2!} + \frac{x^3}{2 \cdot 3!} + \frac{x^4}{3 \cdot 4!} + \dots$$

$x \neq 0$

۱. د برنولي د متود له لارې دا دلته

$$(uv' + vu')(1-x^2) + xuv = 1$$

$$u \underbrace{[v'(1-x^2) + xv]}_{=0} + vu'(1-x^2) = 1$$

$$\frac{dv}{dx} (1-x^2) = -xv$$

نیونه: $|x| = 1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{-x}{1-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1-x^2} dx$$

$$\ln |v| = \frac{1}{2} \ln |1-x^2| + c_1$$

$$= \ln |1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \sqrt{|1-x^2|}$$

$$v = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{für } |x| < 1 \\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$$

$$1. \text{ Fall: } v = \sqrt{1-x^2}; |x| < 1$$

$$u \cdot 0 + \sqrt{1-x^2} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$u = \int \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$= \int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{-z dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$x = \sqrt{1-z^2}; \quad dx = -\frac{z \cdot dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z = \sin t \Rightarrow dz = \cos t \cdot dt$$

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t; \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

دا اوی دیفرنخیالمساوات
د $|x| = 1$ هم پوره کوي

سبستیچیوشن : Substitution:

$$x^2 - 1 = z^2 \Rightarrow dx = \frac{z \cdot dz}{x}$$

$$x = \sqrt{1+z^2}; \quad dx = \frac{z \cdot dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

سبستیچیوشن

$$z = \sinh t \Rightarrow dz = \cosh t \cdot dt$$

$$\sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t$$

$$u = -\int \frac{dz}{z^2 \cdot \sqrt{1-z^2}}$$

$$= -\int \frac{\cos t \, dt}{\sin^2 t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sin^2 t} \quad \blacktriangleright \text{ بنسټ ایتیکرال}$$

$$= \cot t + c$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} + c$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{x + c \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \text{für } |x| \leq 1}}$$

$$2. \text{ Fall: } v = \sqrt{x^2-1}; \quad |x| > 1$$

$$u \cdot 0 + \sqrt{x^2-1} \cdot u' \cdot (1-x^2) = 1$$

$$u' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1} (1-x^2)}$$

$$u = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\int \frac{1}{z^3} \cdot \frac{z \, dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u = -\int \frac{dz}{z^2 \cdot \sqrt{1+z^2}}$$

$$= -\int \frac{\cosh t \, dt}{\sinh^2 t \cdot \sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sinh^2 t} \quad \blacktriangleright \text{ بنسټ ایتیکرال}$$

$$\coth t = \frac{\cosh t}{\sinh t}$$

دا اوبی ديفرنخيالمساوات
د $|x|=1$ هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کې د ارزښت
کارونی له لارې و يوه اوبی ته
رايوخاي شي.

$$\int \frac{-2x}{1-x^2} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

$$c = e^{c_1}$$

د نورو اوبيونولپاره بايد د $|x|$
لپاره دوه حالتونه توپير شي

۱۰۱

$$u = \coth t + c$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \sinh^2 t}}{\sinh t} + c$$

$$= \frac{\sqrt{1 + z^2}}{z} + c$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= x + c \cdot \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{په } |x| \geq 1$$

$$y = x + c \cdot \sqrt{|1 - x^2|} \quad \text{په } |x| < 1$$

۲ - د لاگرانژ متود له لارې اوبی

$$y'(1 - x^2) + xy = 0$$

نېونه: $|x| = 1$; ویشنه په $1 - x^2$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xy}{1 - x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{1 - x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{1 - x^2} dx$$

$$\ln |y| = \frac{1}{2} \ln |1 - x^2| + c_1$$

$$= \ln \sqrt{|1 - x^2|} + c_1$$

$$y = \sqrt{|1 - x^2|} \cdot c$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{|1 - x^2|}$$

$$y = \begin{cases} c(x) \cdot \sqrt{1 - x^2} & \text{په } |x| < 1 \\ c(x) \cdot \sqrt{x^2 - 1} & \text{په } |x| > 1 \end{cases}$$

په ديفرنخيالمساوات كي ځاي
په ځاي كړی.

دا ايتيگرال همدا اوس په برخه ۱
حالت ۱ کی وشميرل شو

دا اوبی ديفرنخيالمساوات
د $|x|=1$ هم پوره کوي

په ديفرنخيالمساوات كي ځاي
په ځاي كړی.

$$1. \text{ Fall: } y = c(x) \cdot \sqrt{1-x^2}; \quad |x| < 1$$

$$y' = c(x) \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + c'(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$c(x) \cdot \frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} +$$

$$-c(x) \cdot x\sqrt{1-x^2} \quad + xc(x) \cdot \sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$c(x) = \int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + k$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$$

$$= x + k \cdot \sqrt{1-x^2} \quad \text{für } |x| \leq 1$$

$$2. \text{ Fall: } y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}; \quad |x| > 1$$

$$y' = c'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} + c(x) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2) \cdot c'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} + c(x) \cdot \frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}} +$$

$$+ x \cdot c(x) \cdot \sqrt{x^2-1} = 1$$

$$(1-x^2) \cdot c'(x) \cdot \sqrt{x^2-1} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}}$$

$$= -\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

دا ايتيگراڻ همدا اوس برخه ۱
۲ . حالت کي اوبي شو

دا اوبي ديفرنخيالمساوات

د $|x| = 1$ هم پوره کوي

په ۱ او ۲ حالت کي د ارزښت

کاروني له لاري و يوه اوبي ته

رايوخاي شي.

$$14. \frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د پوښتنی څخه $|x| = 0$ ورکوي،

دا په دې مانا چې $x = n \cdot \pi$

د $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ سره

Wählen: $c_1 = 0$

وټاکي

سبستيچيوشن (بدلون)

$$z = \cos x \Rightarrow dx = \frac{dz}{-\sin x}$$

$$c(x) = - \int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$= x + k \cdot \sqrt{x^2-1} \quad \text{für } |x| \geq 1$$

$$y = x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{für alle } x$$

۱ - د برنولي متود له لاري اوبي

$$y' - \sin x \cdot y = \sin x (1 - \cos x)$$

$$uw' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1 - \cos x)$$

$$u \underbrace{(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x (1 - \cos x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |v| = -\cos x + c_1$$

$$v = e^{-\cos x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x (1 - \cos x) \parallel \cdot e^{\cos x}$$

$$u' = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

$$u = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} dx$$

$$= - \int (1-z) e^z dz$$

$$= - \int e^z dz + \int z \cdot e^z dz$$

پارشل یا توتہ ایتیگریشن

$$\begin{aligned}
 u &= -e^z + \int z \cdot e^z dz \\
 &= -e^z + z \cdot e^z - \int e^z dz \\
 &= -e^z + z \cdot e^z - e^z + c \\
 &= e^z(z-2) + c \\
 &= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= u \cdot v \\
 &= \underline{\underline{\cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}}}
 \end{aligned}$$

۲- د لاگرانج متود له لاری اوبی

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \parallel \cdot \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x dx$$

$$\ln |y| = -\cos x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\cos x}}}$$

په دیفرنخیا مساوات کی خای
په خای کبری.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \parallel \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$c'(x) = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

$$\begin{aligned}
 c(x) &= \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} \cdot dx \\
 &= \underline{\underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k}}
 \end{aligned}$$

دا اینتیگرال همدا اوس برخه ۱
کی اوبی شو

$$15. y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$\text{Wählen: } c_1 = 0$$

وفاقی

$$\sin 2x = 2 \cos x \cdot \sin x$$

Substitution: بدلون

$$\sin x = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{\cos x}$$

پارشل یا توہہ ایتیگریشن

۱۰۵

$$y = c(x) \cdot e^{-\cos x}$$

$$= \underline{\underline{\cos x - 2 + k \cdot e^{-\cos x}}}$$

۱ - د برنولی متود له لارې اویونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$u \underbrace{(v' + v \cdot \cos x)}_{=0} + vu' = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \cos x \, dx$$

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$v = \underline{e^{-\sin x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = \frac{1}{2} \sin 2x e^{\sin x}$$

$$u = \int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} \, dx$$

$$= \int z \cdot e^z \cdot dz$$

$$= z \cdot e^z - \int e^z \, dz$$

$$u = z \cdot e^z - e^z + c$$

$$= e^z(z-1) + c$$

$$= \underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x - 1) + c}}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\sin x - 1 + c \cdot e^{-\sin x}}}$$

۲ - د لاکرانخ د متود له لارې اوبی

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} + \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\sin x}$$

$$c(x) = \int \cos x \cdot \sin x \cdot e^{\sin x} \, dx \\ = \underline{e^{\sin x}(\sin x - 1) + k}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x} \\ = \underline{\sin x - 1 + k \cdot e^{-\sin x}}$$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - u \cdot v \cdot x = x^2 - 1$$

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x \right] + v \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dv}{dx} - v \cdot x = 0$$

۱۰۶

$$c = e^{c_1}$$

په دیفرنخیال مساوات کې ځای
په ځای کېږي.

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱
کې اوبی شو

$$16. y' - yx = x^2 - 1$$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x \right] = 0$$

$$v = v(x)$$

$$v(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{د}$$

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x \right] = 0. \quad \text{حل اولی}$$

د راپاتی مساواتو به $u = u(x)$ اینتیگریشن له لارې وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) dx$$

$$= \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot x dx - \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx -$$

$$- \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c_2$$

دا لاسته راغلی ارزښتونه $u(x)$ او

$$y = u(x) \cdot v(x) \quad \text{د } v(x) \text{ په برابرېدونې کي کینبول شي.}$$

دا لاسته راوړنه د ورکړشوي دفر-

نخیال مساوات ټولیزه اوبیونه ده

$$F(x) = 0 \quad \text{کین د ځمکې}$$

$$\Rightarrow y' - y \cdot x = 0; \quad x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c_1(x)$$

$$y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y' = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int x dx$$

$$\ln v = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln v} = e^{\frac{x^2}{2} + c_1} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_1}; \quad c_1 = 0$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2 - 1}{v}$$

$$du = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}} dx$$

$$\int du = \int e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) dx$$

$$u = u(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2$$

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$y = (-x e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = -x + c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \langle x, -c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle$$

۲- د لاکرانخ د متود له لارې اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} - c_1(x) e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x^2 - 1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

دا د مساوات $y' - yx = 0$ د اوبیونی

سره لاس ته راغلی اینتیگریشن ثابت

د x فنکشن دی

$c_1(x)$ د y لپاره برخاوی کی اینبول کیری.

لاس ته راورنه همغه پولیزه اوبیونه ده،

لکه څنگه چی د برونولی متود له لارې

لاس ته راغلی

$$dc_1(x) = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}} dx = e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) dx$$

$$\int c_1(x) dx = \int e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 - 1) dx$$

$$c_1(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2$$

$$y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$= (-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = -x + c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \langle x, -c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle$$

17. $y' \cdot x^2 + y = x$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

۱ - د برونولی متود له لارې اوبی

$$(uv' + vu')x^2 + uv = x$$

$$u(x^2v' + v) + x^2vu' = x$$

$$= 0$$

$$x^2v' = -v$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln |v| = \frac{1}{x} + c_1$$

$$v = e^{\frac{1}{x}}$$

$$u \cdot 0 + x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot u' = x \quad || : x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$u' = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$u = \int \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$z = -\frac{1}{x}$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکئ

دا ایتیگرال کیدی شی یواځی
د لریودیزی له لارې اوبی شی

$$e^{-\frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{2!x^2} - \frac{1}{3!x^3} + \frac{1}{4!x^4} - + \dots$$

$$\frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2!x^3} - \frac{1}{3!x^4} + \frac{1}{4!x^5} - + \dots$$

$$u = \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \frac{1}{4!4x^4} + - \dots + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left(\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \frac{1}{4!4x^4} + - \dots + c \right)$$

د $x \neq 0$ لپاره

۲- د لاکرانژ متود له لارې اویونه

$$y' \cdot x^2 + y = 0$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{x} + c_1$$

$$y = c \cdot e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} - \frac{c(x)}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2 \cdot c'(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} - c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} + c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} = x$$

$$x^2 \cdot c'(x) \cdot e^{\frac{1}{x}} = x \quad || : x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$c(x) = \int \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} dx$$

$$= \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} -$$

$$\frac{1}{4!4x^4} + - \dots + k$$

$$c = e^{c_1}$$

په ديفرنخيالمساوات کی کېږدی

دا اینتیګرال

همدا اوس برخه اکی اوبی شو

$$18. y' + \frac{1}{1+x} y + x^2 = 0$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د پوښتني کولو څخه همداوس
ورکوي $x = -1$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکئ

$$-\ln |1+x| = \ln |1+x|^{-1}$$

$$c = 12c_2$$

$$y = c(x) \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$= e^{\frac{1}{x}} \left(\ln |x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2!2x^2} + \frac{1}{3!3x^3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4!4x^4} + \dots + k \right)$$

für $x \neq 0$

۱- د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv' + vu' + \frac{uv}{1+x} + x^2 = 0$$

$$u \left(v' + \frac{v}{1+x} \right) + vu' + x^2 = 0$$

$= 0$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-v}{1+x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\ln |v| = -\ln |1+x| + c_1$$

$$v = \frac{1}{1+x}$$

$$u \cdot 0 + \frac{u'}{1+x} + x^2 = 0 \quad \| \cdot (1+x)$$

$$u' = -x^2(1+x)$$

$$u = - \int (x^2 + x^3) dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{c - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

۲- د لاگرانژ موتود له لارې اویونه

$$y' + \frac{1}{1+x} y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{1+x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{1+x}$$

$$\ln |y| = -\ln |1+x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\ln |1+x| + c_1} = e^{\ln |1+x|^{-1}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot \frac{1}{1+x} \Rightarrow y = \frac{c(x)}{1+x}$$

$$y' = c'(x) \cdot \frac{1}{1+x} - c(x) \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\frac{c'(x)}{1+x} - \frac{c(x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{c(x)}{1+x} + x^2 = 0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x} + x^2 = 0$$

$$c'(x) = -x^2(1+x)$$

$$c(x) = - \int (x^2 + x^3) dx$$

$$= - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + c_2$$

$$y = \frac{c(x)}{1+x}$$

$$= \frac{k - 4x^3 - 3x^4}{12(1+x)}$$

په ديفرنشيامساوات کې کېږدی

$$k = 12c_2$$

$$19. y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

۱- د برنولي متود له لارې اویونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$u(v' + v \cdot \cos x) + vu' = e^{-\sin x}$$

$$= 0$$

Wählen: $c_1 = 0$ و ناکمی

$$\frac{dv}{v} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \cos x \, dx$$

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$v = e^{-\sin x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = e^{-\sin x} \quad || \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = 1$$

$$u = x + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{(x+c)e^{-\sin x}}}$$

۲- د لاگرانژ موتود له لارې اویونه

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\sin x + c_1} = e^{-\sin x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_c$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$

$$+ c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad || \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \underline{\underline{x+k}}$$

په دیفرنشیا مساوات کی کړدی

$$20. y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$$

$$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$$

$$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

د پوښتني کولو څخه همداوس
ورکوي $\cos x \neq 0$

$$-\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکي

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$= (x+k) e^{-\sin x}$$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv' + vu' + uv \cdot \tan x = \sin(2x)$$

$$u \underbrace{(v' + v \cdot \tan x)}_{=0} + vu' = \sin(2x)$$

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \tan x dx$$

$$= - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$\ln |v| = \ln |\cos x| + c_1$$

$$v = \underline{\cos x}$$

$$u \cdot 0 + \cos x \cdot u' = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$$

$$u' = 2 \sin x$$

$$u = 2 \int \sin x$$

$$= \underline{-2 \cos x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\cos x \cdot (c - 2 \cos x)}$$

د لاگرانژ متود له لارې اوبیونه

$$y' + y \cdot \tan x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \tan x$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \tan x \cdot dx$$

$$= - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$$

$$c = e^{c_1}$$

په دیفرنشیا مساوات کی کینبول

21. $y' - 2y = -x + 3$

$$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$$

$$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u \right] = 0 \quad \text{له}$$

لاس ته راخي

$$u = e^{2x} \quad \text{د}$$

$$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2u \right] = 0 \quad \text{سره حل لرو}$$

د لاندې پاتی برابرین خخه د

ایتیگرال له لاری

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$v = v(x) \quad \text{تاکل کیری}$$

$$\ln |y| = \ln |\cos x| + c_1$$

$$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot \cos x}$$

$$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$$

$$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \underbrace{\frac{\cos x \cdot \tan x}{\sin x}} = \sin(2x)$$

$$c'(x) \cdot \cos x = \sin(2x)$$

$$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \parallel : \cos x$$

$$c'(x) = 2 \sin x$$

$$c(x) = 2 \int \sin x \cdot dx$$

$$= \underline{-2 \cos x + k}$$

$$y = c(x) \cdot \cos x$$

$$= \underline{(k - 2 \cos x) \cdot \cos x}$$

۱ - د برنولی متود له لاری اویونه

$$y' - 2 \cdot y = -x + 3$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \cdot v = -x + 3$$

$$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u \right] + u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{du}{dx} - 2u = 0$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2 dx$$

$$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow u = e^{2x} \cdot e^{c_1}$$

$$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-x + 3}{u} \Rightarrow u = e^{2x}$$

$$\int e^{-2x} \cdot (3-x) dx$$

$$= 3 \int e^{-2x} dx - \int x \cdot e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{3}{2} e^{-2x} - \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{4} e^{-2x} \right] + c_2$$

د $u(x)$ او $v(x)$ لاس ته راوړي
 ارزښتونه د $y = u(x) \cdot v(x)$
 په مساوات کې کینبول کيږي.
 لاس ته راوړنی د ورکړ شوي
 دفرنخیالبرابراون ټولیز اوبی دي

$$y' - 2y = -x + 3 \quad \text{ردو نولو}$$

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2 dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2 dx$$

$$\ln y = 2x + c_1$$

$$y = e^{2x+c_1} = e^{2x} \cdot e^{c_1}$$

$$= c_3(x) \cdot e^{2x}$$

د اینتگریشن ثابتی $c_3(x) = c_4$

د x فنکشن دی

د y او y' لپاره دواړه برخاواییونی

په پیلمساوات $y' - 2y = -x + 3$

کې کینبول کيږي

د اینتگریشن له لارې لویه $c_3(x)$

پیدا کيږي

$$dv = e^{-2x}(3-x) dx$$

$$v = \int e^{-2x} \cdot (3-x) dx$$

$$v = e^{-2x} \cdot \left(\frac{1}{2} x - \frac{5}{4} \right) + c_2$$

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$y = e^{2x} \cdot \left[e^{-2x} \cdot \left(\frac{1}{2} x - \frac{5}{4} \right) + c_2 \right]$$

$$y = \frac{1}{2} x - \frac{5}{4} + e^{2x} \cdot c_2$$

$$f = \left\langle x, -\frac{1}{2} x + e^{2x} \cdot c_2 - \frac{5}{4} \right\rangle$$

۲- د لاگرانژ مود له لارې اویونه

$$y' - 2y = -x + 3$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y = c_3(x) \cdot e^{2x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_3(x) \cdot e^{2x} \cdot 2 + c_3'(x) \cdot e^{2x}$$

$$c_3(x) \cdot e^{2x} \cdot 2 + c_3'(x) \cdot e^{2x} - 2 \cdot c_3(x) \cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$\Rightarrow c_3'(x) \cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$c_3'(x) = (-x + 3) \cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x) = \int e^{-2x} \cdot (3-x) dx$$

$$c_3(x) = e^{-2x} \left(\frac{1}{2} x - \frac{5}{4} \right) + c_2$$

$$\begin{array}{l}
 \text{په برابرون کی کینبول کیږي} \\
 y = c_3(x) \cdot e^{2x} \\
 \text{لاسته راوړنه همغه ټوليزه اوبیونه} \\
 \text{ده، لکه د مخه د برنول د متود} \\
 \text{له لارې راپیدا شوه}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 y = \left[e^{-2x} \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \right) + c_2 \right] \cdot e^{2x} \\
 y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{2x} \cdot c_2 \\
 f = \left\langle x \cdot -\frac{1}{2}x + e^{2x} \cdot c_2 - \frac{5}{4} \right\rangle
 \end{array}
 \right.$$

۱. ۳ د دوم نظم درفنخيالمساوات

$$\begin{array}{l}
 1. y'' = \frac{1}{x} \\
 \text{د پوښتنیورکړې څخه لاسته 0=|x} \\
 \text{راځي} \\
 \text{ورپسی اوبیونی ته دې حالتونه } x > 0 \\
 \text{او } x < 0 \text{ توپیر شي} \\
 \\
 \text{پارشل یا ټوټه ایتیگریشن} \\
 \\
 c_3 = c_1 - 1
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{x} \\
 \int dy' = \int \frac{dx}{x} \\
 y' = \ln |x| + c_1 \\
 = \begin{cases} \ln x + c_1 & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + c_1 & \text{für } x < 0 \end{cases} \\
 \text{1. Fall: } y' = \ln x + c_1; \quad x > 0 \\
 \int dy = \int (\ln x + c_1) dx \\
 y = \int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx \\
 = x \cdot \ln x - \int dx + c_1 \cdot x \\
 = x(\ln x + c_1 - 1) + c_2 \\
 = \underline{\underline{x(\ln x + c_3) + c_2; \quad x > 0}}
 \end{array}
 \right.$$

پارخیل یا پارشل اینتیگرال

$$c_3 = -1 + c_1$$

د ارزښتکړینو کارونې له لارې
کیدې شي دواړه اویونی رایوځاي
شي. نومبدلون یا -پرونه: $c_3 = c_1$

$$2. \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

$$3. y'' - x^3 = 0$$

$$2. \text{ Fall: } y' = \ln(-x) + c_1; \quad x < 0$$

$$\int dy = \int [\ln(-x) + c_1] dx$$

$$y = \int \underbrace{\ln(-x)}_u \cdot \underbrace{dx + c_1}_{dv} dx$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int x \cdot \frac{-1}{-x} dx + c_1 \cdot x$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int dx + c_1 \cdot x$$

$$= x[\ln(-x) - 1 + c_1] + c_2$$

$$= \underline{\underline{x[\ln(-x) + c_3] + c_2; \quad x < 0}}$$

$$y = \underline{\underline{x(\ln|x| + c_1) + c_2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$\int dy' = \int f(x) dx$$

$$y' = \int f(x) dx + c_1$$

$$y = \underline{\underline{\int \left[\int f(x) \cdot dx + c_1 \right] dx + c_2}}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x^3$$

$$\int dy' = \int x^3 dx$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^4}{4} + c_1 \right) dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{x^5}{20} + c_1 \cdot x + c_2}}$$

4. $y'' = x + \sin x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x + \sin x$$

$$\int dy' = \int (x + \sin x) dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 - \cos x \right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x - \sin x + c_2$$

5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

$$\int dy' = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

دلته ارزښتکړنې ضرور نه دي

$$y' = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c_1$$

ځکه چې $x + \sqrt{1+x^2} > 0$ د ټولو

$$\int dy = \int \underbrace{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

x لپاره باور لري

$$y = x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}} dx + c_1 x$$

پاشل اینتیګریشن

$$= x [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= x [\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \sqrt{1+x^2} + c_2$$

5. $y'' = \tan x$

$$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots$$

ددې انټیګرالبرابرون اویونې
کی په لړپوډینه تردنه ناشونی ده

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \tan x$$

$$\int dy' = \int \tan x dx$$

7. $y'' = \sinh x$

8. $y'' = e^{x^2}$

د دې انتيگرالبرابرون اوبيوني
يواخى لړبودينى سره شونى ده.

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} + \frac{2x^6}{6 \cdot 15} + \frac{17x^8}{8 \cdot 315} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1 \cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \dots$$

لپاره $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x \, dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1) \, dx$$

$$y = \sinh x + c_1 \cdot x + c_2$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2} \, dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1 \cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30 \cdot 2!} + \frac{x^8}{56 \cdot 3!} +$$

$$\frac{x^{10}}{90 \cdot 4!} + \dots$$

9. $y^{(4)} = \cos x$

$$y''' = \frac{dy''}{dx}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$c_1 = \frac{1}{6} c_1^* ; \quad c_2 = \frac{1}{2} c_2^*$$

10. $y''' = e^x$

$$c_1 = \frac{1}{2} c_1^*$$

$$y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx} = \cos x$$

$$\int dy''' = \int \cos x \, dx$$

$$y''' = \sin x + c_1^*$$

$$\int dy'' = \int (\sin x + c_1^*) \, dx$$

$$y'' = -\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*$$

$$\int dy' = \int (-\cos x + c_1^* \cdot x + c_2^*) \, dx$$

$$y' = -\sin x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2^* \cdot x + c_3$$

$$\int dy = \int \left(-\sin x + \frac{c_1^*}{2} \cdot x^2 + c_2^* \cdot x + c_3 \right) \, dx$$

$$y = \cos x + \frac{c_1^*}{6} x^3 + \frac{c_2^*}{2} x^2 + c_3 x + c_4$$

$$y = \underline{\underline{\cos x + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4}}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = e^x$$

$$\int dy'' = \int e^x \, dx$$

$$y'' = e^x + c_1^*$$

$$\int dy' = \int (e^x + c_1^*) \, dx$$

$$y' = e^x + c_1^* \cdot x + c_2$$

$$\int dy = \int (e^x + c_1^* \cdot x + c_2) \, dx$$

$$y = e^x + c_1^* \cdot \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$= \underline{\underline{e^x + c_1 x^2 + c_2 x + c_3}}$$

$$11. \quad y^{(4)} = \sinh(2x) \quad \blacktriangleright \quad y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx} \Rightarrow dy''' = y^{(4)} \cdot dx$$

$$\int dy''' = \int \sinh(2x) dx$$

$$y''' = \frac{1}{2} \cosh(2x) + c_1 \quad \blacktriangleright \quad y''' = \frac{dy''}{dx} \Rightarrow dy'' = y''' \cdot dx$$

$$\int dy'' = \int \left(\frac{1}{2} \cosh(2x) + c_1 \right) dx$$

$$y'' = \frac{1}{2} \int \cosh(2x) dx + \int c_1 dx$$

$$= \frac{1}{4} \sinh(2x) + c_2 + c_1 x + c_3 \quad \blacktriangleright \quad c_2 + c_3 = c_4$$

$$= \frac{1}{4} \sinh(2x) + c_1 x + c_4$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow dy' = y'' \cdot dx$$

$$\int dy' = \int \left(\frac{1}{4} \sinh(2x) + c_1 x + c_4 \right) dx$$

$$y' = \frac{1}{8} \cosh(2x) + c_5 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_6 + c_4 x + c_7 \quad \blacktriangleright \quad c_5 + c_6 + c_7 = c_8$$

$$= \frac{1}{8} \cosh(2x) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' \cdot dx$$

$$\int dy = \int \left[\frac{1}{8} \cosh(2x) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8 \right] dx$$

$$y = \frac{1}{16} \cosh(2x) + c_9 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + c_{10} + \frac{1}{2} c_4 x^2 + c_{11} + c_8 x + c_{12}$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{16} \cosh(2x) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{2} c_4 x^2 + c_8 x + k}}$$

$$12. \quad y^{(5)} = \cosh(ax) \quad \blacktriangleright \quad y^{(5)} = \frac{dy^{(4)}}{dx} \Rightarrow dy^{(4)} = y^{(5)} \cdot dx$$

$$\int dy^{(4)} = \int \cosh(ax) dx = \frac{1}{a} \sinh(ax) + c_1 = y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx}$$

$$\int dy''' = \int \left[\frac{1}{a} \sinh(ax) + c_1 \right] dx = \frac{1}{a^2} \cosh(ax) + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$y''' = \frac{1}{a^2} \cosh(ax) + c_1 x + c_4 = \frac{dy''}{dx}$$

$$\int dy'' = \int \left[\frac{1}{a^2} \cosh(ax) + c_1 x + c_4 \right] dx$$

$$y'' = \frac{1}{a^3} \sinh(ax) + c_5 + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_6 + c_4 x + c_7$$

$$y'' = \frac{1}{a^3} \sinh(ax) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8 = \frac{dy'}{dx}$$

$$\int dy' = \int \left[\frac{1}{a^3} \sinh(ax) + \frac{1}{2} c_1 x^2 + c_4 x + c_8 \right] dx$$

$$y' = \frac{1}{a^4} \cosh(ax) + c_9 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + c_{10} + \frac{1}{2} c_4 x^2 + c_{11} + c_8 x + c_{12}$$

$$y' = \frac{1}{a^4} \cosh(ax) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_4 x^2 + c_9 x + c_{13} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int \left[\frac{1}{a^4} \cosh(ax) + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{4} c_4 x^2 + c_9 x + c_{13} \right] dx$$

$$y = \frac{1}{a^5} \sinh(ax) + c_{14} + \frac{1}{24} c_1 x^4 + c_{15} + \frac{1}{12} c_4 x^3 + c_{16} + \frac{1}{2} c_9 x^2 + c_{17} + c_{13} x + c_{18}$$

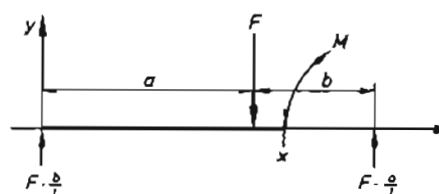
$$y = \frac{1}{a^5} \cosh(ax) + \frac{1}{24} c_1 x^4 + \frac{1}{12} c_4 x^3 + \frac{1}{2} c_9 x^2 + c_{13} x + k$$

د مومنتو ټاڪلو لپاره بايد ورشوگا-

نی یا ساحی $0 \leq x \leq a$ او $a \leq x \leq a+b=1$

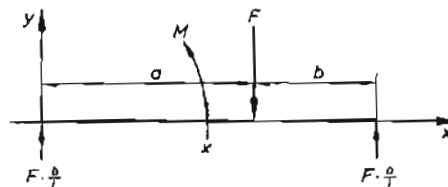
توپیر شي

1. Bereich: $0 \leq x \leq a$ ورشو



$$M - F \cdot \frac{b}{l} \cdot x = 0$$

$$M = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x \quad \text{für } 0 \leq x \leq a$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b=l$ 

$$M - F \cdot \frac{a}{l} \cdot (l-x) = 0$$

$$M = F \cdot \frac{a}{l} (l-x) \quad \text{für } a \leq x \leq l$$

د دې دواړو هریوه ورشو یا
ساحولپاره دې کرونلاین وټاکل
شي، چی د $x=a$ لپاره باید
بوځاي ولویري.

د ورشو یا تعریفیږي $0 < x < a$ لپاره د کرونلاین y_1 ټاکنه

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{b}{l} \cdot x}{E \cdot I}$$

$$\int dy_1' = -\frac{F \cdot b}{l \cdot E \cdot I} \int x \, dx$$

$$y_1' = -\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = \int \left(-\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1 \right) dx$$

$$= -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x + c_2$$

د $x=0$ لپاره کرون 0 دی

$$y_1(0) = 0 - c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x$$

د ورشو یا تعریفیږي $0 < x < a$ لپاره د کرونلاین y_2 ټاکنه:

$$y_2'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

Substitution: بدھونا

$$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$$

ثابتی c_4 د غاړه بارزېښت $y_2(l) = 0$

څخه ټاکل کيږي

په فنکشنونو y_1 او y_2 رامنځ ته شوي

ثابتي c_1 او c_2 داسی وټاکل شي، چې

دواړه فنکشنونه په $x=a$ کی یوځای

پریوځي، دا په دې

صافا، چې باور لري

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

دا ثابتي c_1 او c_2 په y_1 او y_2

کی گینول کيږي

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot a}{EI} (l-x)$$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{EI} \int (l-x) dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{EI} \int z dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2EI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int \left(\frac{F \cdot a}{2EI} z^2 + c_3 \right) dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6EI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

$$= -\frac{F \cdot a}{6EI} (l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

$$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6EI} (l-x)^3 - c_3(l-x)$$

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$-\frac{Fba^3}{6EI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6EI} - c_3 \cdot b$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$-\frac{Fba^2}{2EI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2EI} + c_3$$

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6EI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6EI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6EI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6EI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6EI} (l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6EI} (l-x)$$

رایوخایون :

ماکسیمالکبرونه کیدیشی د y_1 یا y_2 ورشو کی داسی پرته وی، چی دفرنخیالییدی شی.

د $b < a$ له امله لاسته راخی

$$\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)} < \sqrt{\frac{a}{3}(a+2a)} = a.$$

دا په دې ماناچی $x_m < a$ په x_m کی ماکسیمالکبرون د y_1 ورشوکی پروت دی، چی نور y_2 کی څیرنی ته باید اړ نه دی

$$y = \begin{cases} \frac{Fbx}{6lEI} [a(a+2b) - x^2] & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{Fa(l-x)}{6lEI} [b(b+2a) - (l-x)^2] & \text{für } a \leq x \leq l \end{cases}$$

$$y'_1 = \frac{Fb}{6lEI} [a(a+2b) - 3x^2]$$

$$y'_1 = 0$$

$$x_m^2 = \frac{a}{3}(a+2b)$$

$$x_{m1,2} = \pm \sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}$$

$$x_m = \sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}$$

$(x_m = -\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)} < 0$ ist hier sinnlos.) ^{معموماً} دلته چی

ماکسیمالکبرون y_{max}

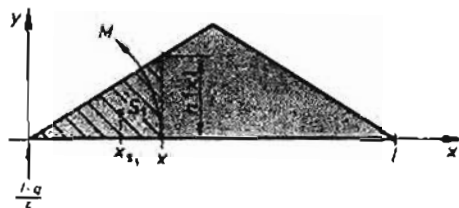
$$y_{max} = y_1(x_m)$$

$$= \frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}lEI} \left[a(a+2b) - \frac{a}{3}(a+2b) \right]$$

$$= \frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}lEI}$$

1. Bereich: $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$

ورشو



$$h(x) = \frac{2q}{l} x$$

۱۴ - ټول بار $F = (\frac{1}{2}) l \cdot q$ دی داسی چی پروتوزر په A او B هریو کی $(\frac{1}{4}) l \cdot q$ دی دا کرنی شوی هواره دا بار $(\frac{1}{2}) h(x) \cdot x$ دی.

د دروندېټکې پروتمحور x_{S1} کیدی
شي بنسټهندسیز و $x_{S1} = (2/3)x$
ته وشمیرل شي.

$$0 = M + (x - x_{S1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3}x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^2 \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

د کړونلاین y_1 ټاکنه د لاندې

ورشو لپاره $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$:

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{4}x - \frac{1}{3l}x^2\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4}x - \frac{1}{3l}x^2\right) dx$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8}x^2 - \frac{1}{12l}x^3 + c_1\right)$$

$$0 = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^3}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI} \left(\frac{l}{8}x^2 - \frac{x^3}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^3}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$$y_1 = \frac{q}{EI} \left(\frac{x^4}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

د سیومتری دلائلو له امله c_1
له لاندې څخه لاس ته راځي

$$x_m = \frac{l}{2} \text{ mit } y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$$

د سیومتریکی بارونی یا زور له
امله کبرونلاین و $x = 1/2$ ته سیو-
متری دی. د y_2 لپاره په ورشو
د $1/2 \leq x \leq 1$ کی په y_1 کی فقط x
د $1-x$ سره بدل کړی.

د $x_m = 1/2$ لپاره ماکسیمال کبرون
له y_1 څخه شمیرل کیدی شي.

۱۵ - دې ټوینټی سره د x لپاره
درې ورزوگانی باید توپیر شي

د $0 \leq x \leq a$ لپاره کبرونلاین: y_1

ژی ارزښت: $y_1(a) = 0 = c_2$

$$y_1 = \frac{qx}{12EI} \left(\frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16} \right)$$

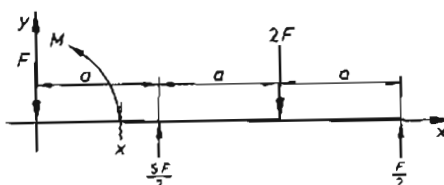
$$\text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$y = \begin{cases} \frac{qx}{12EI} \left(\frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16} \right) & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{q(l-x)}{12EI} \left[\frac{(l-x)^4}{5l} - \frac{l(l-x)^2}{2} + \frac{5l^3}{16} \right] & \text{für } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{24EI} \left(\frac{l^3}{80} - \frac{l^3}{8} + \frac{5l^3}{16} \right)$$

$$y_{\max} = \frac{ql^4}{120EI}$$

۱. Bereich: $0 \leq x \leq a$ ورشو:



$$0 = M + F \cdot x \Rightarrow M = -F \cdot x$$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI} x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI} x^2 + c_1$$

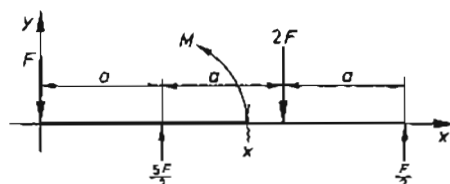
$$y_1 = \frac{F}{6EI} x^3 + c_1 x + c_2$$

$$0 = \frac{Fa^3}{6EI} + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{Fa^3}{6EI} - c_1 a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI} (x^3 - a^3) + c_1(x - a)$$

2. Bereich: $a \leq x \leq 2a$: **وردشتو**



$$0 = M - \frac{5F}{2} \cdot (x - a) + F \cdot x$$

$$M = \frac{5F}{2} (x - a) - F \cdot x$$

$$= \frac{3F}{2} x - \frac{5aF}{2}$$

$$= \frac{F}{2} (3x - 5a)$$

y_2 د $a \leq x \leq 2a$ لپاره کېرونلایڼ:

$$y_2' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI} (3x - 5a)$$

$$y_2' = -\frac{F}{2EI} \left(\frac{3}{2} x^2 - 5ax + c_3 \right)$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2} x^2 + c_3 x + c_4 \right)$$

ژی ارزښت : $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = -\frac{F}{2EI} \left(\frac{a^3}{2} - \frac{5a^3}{2} + c_3 a + c_4 \right)$$

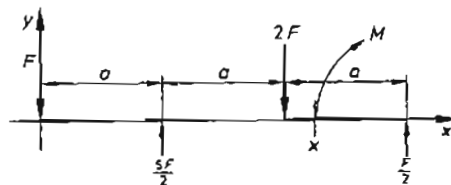
$$c_4 = \frac{5a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - c_3 a$$

$$= \frac{4a^3}{2} - c_3 a$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI} \left[\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2} x^2 + c_3(x - a) + 2a^3 \right]$$

3. Bereich: $2a \leq x \leq 3a$

ورستو



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د $2a \leq x \leq 3a$ لپاره کپرونلاين y_3 :

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5x + c_6\right)$$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_5$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

د c_5 او c_3 ټاکه:

$$\text{شرطونه: } y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3]$$

$$= -\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

$$\text{ژي ارزښت: } y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$$

دا په فنکشنونو y_3, y_2, y_1 کې لا
دنده ثابتې c_5, c_3, c_1 باید دې
دري فنکشنونو رابوځایونې له
لارې وټاکل شي

مساوات یا برابرین I

مساوات یا برابرین II
د مساواتو I او II څخه c_3 او c_3
ساده را پیدا کيږي

ثابته c_1 د $y_1'(a) = y_2'(a)$ اړیکو
څخه شمیرل کيږي

$$= -\frac{F}{2EI} \left[-\frac{13a^3}{3} - ac_3 \right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI} [ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI} \left[-\frac{13a^3}{3} - ac_3 \right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_3$$

$$I: \quad c_3 + c_3 = -\frac{1}{3} a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI} (6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI} (c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI} (6a^2 - 2a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI} (4a^2 + c_3)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI} (c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI} (4a^2 + c_3)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_3$$

$$II: \quad c_3 - c_3 = 8a^2$$

$$I + II: \quad 2c_3 = -\frac{1}{3} a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \frac{23}{6} a^2$$

$$I - II: \quad 2c_3 = -\frac{1}{3} a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_3 = -\frac{25}{6} a^2$$

د c_4 ټاکنه

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI} \left(\frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6} \right)$$

$$\begin{aligned}
 y_2'(a) &= -\frac{Fa^2}{6EI} \\
 y_1'(a) &= y_2'(a) \\
 \frac{Fa^2}{2EI} + c_1 &= -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}
 \end{aligned}$$

په بنده بڼه کې د ټولو درې ورشوگانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI} (x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{-F}{12EI} (3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \leq x \leq 2a \\ \frac{F}{12EI} (x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \leq x \leq 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راډیونې ټاکلو لپاره باید y_1' , y_2' او y_3' جوړ شي.

هم x_1 او هم x_2 د ورشو $0 \leq x \leq a$ څخه د باندې پراته دي، چې له دې امله د ماکسیمال راډیون لپاره په پوښتنه کې نه راځي په ورشو $0 \leq x \leq a$ کې کیدی شي ماکسیمال لږیون یواځې په ژی ارزښت $x_{m1} = 0$ کې رامنځ ته شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI} (3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm a \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$y_1(0) = y_1(x_{m1}) = y_{\max 1}$$

$$y_{\max 1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI} (9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

$$x_1 = \frac{5}{3}a + \frac{\sqrt{2}}{3}a > 2a$$

دا پورته ارزښت نور د y_1 باورور شو
 چې له $a \leq x \leq 2a$ کې نه دی پروت، چې له
 دې امله یواځ د x_2 لپاره ماکسیمال
 راکړون مو مخ ته پریوتی شي.

پام دې وي، چې دا راکړون د
 $-y$ محور په مثبت- یا زیاتونلور
 رامنځ ته کیږي (دا په دې مانا، چې
 تراوسه پاس یا پورته پروت دی)،
 ځکه چې په دې کوارډینات سیستم
 کې زور F کمون (تفریق) نڅښه لري.

د x_1 - ارزښت نور د y_3 باورور شو
 چې نه دی پروت، نو ځکه یواځي

$$x_{1,2} = \frac{5}{3}a \pm \frac{\sqrt{2}}{3}a$$

دلته پامور نه دی. $x_1 = \frac{5}{3}a + \frac{\sqrt{2}}{3}a > 2a$

$$x_{m_2} = \frac{a}{3}(5 - \sqrt{2})$$

$$y_{\max_2} = y_2(x_{m_2})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-F}{12EI} \left[\frac{a^3}{9} (5 - \sqrt{2})^3 - \frac{5a^3}{3} (5 - \sqrt{2})^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{23a^3}{3} (5 - \sqrt{2}) - 11a^3 \right] \\ &= \frac{-F}{12EI} \left[\frac{a^3}{9} (155 - 77\sqrt{2}) - \frac{5a^3}{3} (27 - 10\sqrt{2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{23a^3}{3} (5 - \sqrt{2}) - 11a^3 \right] \\ &= -\frac{Fa^3}{108EI} [155 - 77\sqrt{2} - 405 + 150\sqrt{2} + \\ &\quad + 345 - 69\sqrt{2} - 99] \end{aligned}$$

$$y_{\max_2} = -\frac{Fa^3}{108EI} [-4 + 4\sqrt{2}]$$

$$= -\frac{Fa^3}{27EI} (\sqrt{2} - 1)$$

$$y_3' = \frac{F}{12EI} (3x^2 - 18ax + 25a^2)$$

$$y_3' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 18ax + 25a^2 = 0$$

$$x^2 - 6ax + \frac{25}{3}a^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 3a \pm \sqrt{9a^2 - \frac{25}{3}a^2}$$

$$= 3a \pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

دلته پامور نه دی $x_1 = 3a + a\sqrt{\frac{2}{3}} > 3a$

د x_2 لپاره ماکسیمال راکړون
موجود کیدی شي

$$x_{m_3} = a \left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

$$y_{\max_3} = y_3(x_{m_3})$$

$$= \frac{F}{12EI} \left[a^3 \left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^3 - 9a^3 \left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^2 + 25a^3 \left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 21a^3 \right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI} \left[33 - \frac{83}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} - 9 \left(\frac{29}{3} - 6 \sqrt{\frac{2}{3}} \right) + 25 \left(3 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) - 21 \right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI} \left[33 - \frac{83}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} - 87 + 54 \sqrt{\frac{2}{3}} + 75 - 25 \sqrt{\frac{2}{3}} - 21 \right]$$

$$= \frac{Fa^3}{12EI} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

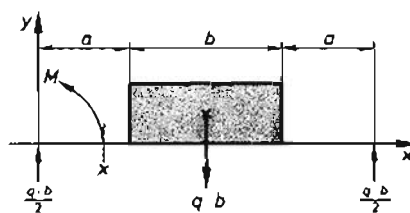
$$= \frac{Fa^3}{9EI} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۶. د x لپاره درې ورشوګانې
توییر کیدی شي.

$$l = 2a + b$$

د $0 \leq x \leq a$ لپاره کیرولاین: y_1

نعمې نغږ (ورشو): 1. Bereich: $0 \leq x \leq a$



$$0 = M - \frac{q \cdot b}{2} x \Rightarrow M = \frac{q \cdot b}{2} x$$

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$= -\frac{qb}{2EI} x$$

اثری ارزینت : $y_1(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$x_s = \frac{x+a}{2}$$

x_2 : د $a \leq x \leq a+b$ لپاره کپرونلاین

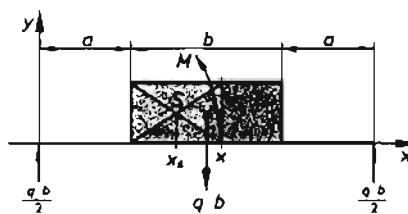
$$y_1' = -\frac{qb}{4EI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI} x^3 + c_1 x + c_2$$

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI} x^3 + c_1 x$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b$ ورشو



$$0 = M + q(x-a) \cdot (x-x_s) - \frac{qb}{2} x$$

$$M = \frac{qb}{2} x - q(x-a) \cdot \frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2} x - \frac{q}{2} (x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2} [bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2} [bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2} [-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$y_2' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI} [-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI} [x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2 = \frac{q}{2EI} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} (2a+b) + a^2 x + c_3 \right]$$

د سیومتری بارویشنی له امله

$$y_2' \left(a + \frac{b}{2} \right) = 0,$$

باور لري، له كوم سره

چی c_3 ټاکله کیږي.

$$0 = \frac{q}{2EI} \left[\frac{(2a+b)^3}{24} - \frac{(2a+b)^3}{8} + \frac{a^2}{2} (2a+b) + c_3 \right]$$

$$c_3 = \frac{2a+b}{24} [-12a^2 + 3(2a+b)^2 - (2a+b)^2]$$

$$= \frac{2a+b}{24} [-12a^2 + 2(2a+b)^2]$$

$$= \frac{2a+b}{24} [-12a^2 + 8a^2 + 8ab + 2b^2]$$

$$= \frac{2a+b}{24} [-4a^2 + 8ab + 2b^2]$$

$$= \frac{1}{12} (2a+b)(b^2 + 4ab - 2a^2)$$

$$= \frac{1}{12} (2ab^2 + 8a^2b - 4a^3 + b^3 + 4ab^2 - 2a^2b)$$

$$= \frac{1}{12} (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3)$$

ثابتي c_1 او c_4 باید له فنکشنونو

y_1 او y_2 څخه د یوشانیزشرتونو

$y_1'(a) = y_2'(a)$ او $y_1(a) = y_2(a)$

له امله وگټل شي.

$$y_2 = \frac{q}{2EI} \left[\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} (2a+b) + \frac{a^2 x^2}{2} + c_3 x + c_4 \right]$$

د c_1 ټاکنه

$$y_1'(a) = -\frac{qb}{4EI} a^2 + c_1$$

$$y_2'(a) = \frac{q}{2EI} \left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} (2a+b) + a^3 + c_3 \right]$$

$$= \frac{q}{2EI} \left[\frac{a^3}{3} - a^3 - \frac{a^2 b}{2} + a^3 + c_3 \right]$$

$$y_2'(a) = \frac{q}{2EI} \left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^2 b}{2} + \frac{1}{12} (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) \right]$$

$$= \frac{q}{24EI} [4a^3 - 6a^2b + b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3]$$

$$= \frac{qb^2}{24EI} (b + 6a)$$

$$y_1' = y_2'(a)$$

$$-\frac{qb}{4EI} a^2 + c_1 = \frac{qb^2}{24EI} (b+6a)$$

$$c_1 = \frac{qb}{24EI} (6a^2 + 6ab + b^2)$$

د c_4 ټاکنه !

$$y_1(a) = -\frac{qba^3}{12EI} + \frac{qba}{24EI} (6a^2 + 6ab + b^2)$$

$$= \frac{qab}{24EI} (4a^2 + 6ab + b^2)$$

$$y_2(a) = \frac{q}{2EI} \left[\frac{a^4}{12} - \frac{a^3}{6} (2a+b) + \frac{a^4}{2} + c_3 a + c_4 \right]$$

$$= \frac{q}{24EI} [a^4 - 4a^4 - 2a^3b + 6a^4 + 12ac_3 + 12c_4]$$

$$= \frac{q}{24EI} [3a^4 - 2a^3b + ab^3 + 6a^2b^2 + 6a^3b - 4a^4 + 12c_4]$$

$$= \frac{q}{24EI} [-a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 + 12c_4]$$

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$ab(4a^2 + 6ab + b^2) = -a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 +$$

$$4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 = -a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 +$$

$$0 = -a^4 + 12c_4$$

$$c_4 = \frac{a^4}{12}$$

(=)

د دې ورشو لپاره کیدی شي کیرونلایڼ y_3 له y_1 څخه ساده وشمیرل شي، ځکه چی دا د سیومتري دروندوالي یا بارونی له امله و $x = l/2 = (1/2)(2a+b)$ ته سیومتري دي.

3. Bereich: $a+b \leq x \leq l$ ودرستو

$$y_1 = \frac{qbx}{24EI} (6a^2 + 6ab + b^2 - 2x^2)$$

$$x: \triangleright l-x$$

$$y_3 = \frac{qb(l-x)}{24EI} [6a^2 + 6ab + b^2 - 2(l-x)^2]$$

د ټولو درې ورشوگان په رابندفورم کې د گېرونلاين انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{qbx}{24EI} (6a^2 + 6ab + b^2 - 2x^2) & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{q}{24EI} [x^4 - 2x^3(2a+b) + 6a^2x^2 + x(b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) + a^4] & \text{für } a \leq x \leq a+b \\ \frac{qb(l-x)}{24EI} [6a^2 + 6ab + b^2 - 2(l-x)^2] & \text{für } a+b \leq x \leq l \end{cases}$$

د سيومتريکي بارویشني له امله ماکسیمال راکړونه په لاندې کې پرته ده

$$x_m = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}(2a+b).$$

$$\begin{aligned} y_{\text{max}} &= y_2(x_m) = y_2\left(\frac{l}{2}\right) \\ &= \frac{q}{24EI} \left[\frac{1}{16} (2a+b)^4 - \frac{1}{4} (2a+b)^4 + \frac{3}{2} a^2 (2a+b)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (2a+b) (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) + a^4 \right] \\ &= \frac{q}{384EI} [(2a+b)^4 - 4(2a+b)^4 + 24(2a+b)^2 a^2 + \\ &\quad + 8(2a+b) (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) + 16a^4] \\ &= \frac{q}{384EI} [-3(16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4) + 24a^2(4a^2 + 4ab + b^2) + \\ &\quad + 8(2a+b) (b^3 + 6ab^2 + 6a^2b - 4a^3) + 16a^4] \\ &= \frac{q}{384EI} [-48a^4 - 96a^3b - 72a^2b^2 - 24ab^3 - 3b^4 + 96a^4 + 96a^3b + 24a^2b^2 + \\ &\quad + 16ab^3 + 96a^2b^2 + 96a^3b - 64a^4 + 8b^4 + 48ab^3 + 48a^2b^2 - 32a^3b + 16a^4] \\ &= \frac{q}{384EI} [64a^3b + 96a^2b^2 + 40ab^3 + 5b^4] \\ &= \frac{qb}{384EI} (64a^3 + 96a^2b + 40ab^2 + 5b^3) \end{aligned}$$

17.

$$x_s = \frac{l+x}{2}$$

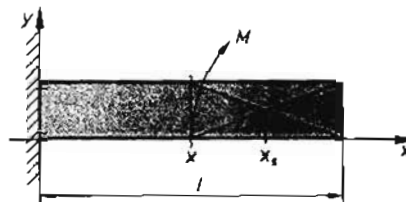
Substitution: بدلون

$$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$$

رئی ارزښت: $y'(0) = 0 \Rightarrow c_1$

بدلون (سبستیچیشن)

$$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$$



$$0 = M + q(l-x) \cdot (x_1 - x)$$

$$= M + q(l-x) \cdot \frac{l-x}{2}$$

$$= M + \frac{q}{2} (l-x)^2$$

$$M = -\frac{q}{2} (l-x)^2$$

$$y'' = \frac{M}{EI}$$

$$= \frac{q}{2EI} (l-x)^2$$

$$y' = \frac{q}{2EI} \int (l-x)^2 dx$$

$$= -\frac{q}{2EI} \int z^2 dz$$

$$= -\frac{q}{6EI} z^3 + c_1$$

$$= -\frac{q}{6EI} (l-x)^3 + c_1$$

$$0 = -\frac{q}{6EI} l^3 + c_1; \quad c_1 = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$y' = \frac{q}{6EI} [l^3 - (l-x)^3]$$

$$y = \frac{q}{6EI} \int [l^3 - (l-x)^3] dx$$

$$= -\frac{q}{6EI} \int (l^3 - z^3) dz$$

$$= -\frac{q}{6EI} \left(l^3 \cdot z - \frac{z^4}{4} + c_2 \right)$$

زى ارزښت

Randwert: $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

ماکسیماراگرون په زى ارزښت

$z = 1$ کى رامنځ ته کيږي.

۱۸. د x لپاره دې بيا درې

ورشوگانى توپير شي.

y_1 : د $0 \leq x \leq a$ لپاره کرونلاين

زى ارزښت

Randwert: $y_1(a)=0 \Rightarrow c_2$

$$y = -\frac{q}{6EI} \left[(l-x)^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 + c_2 \right]$$

$$0 = -\frac{q}{6EI} \left[l^3 - \frac{1}{4}l^4 + c_2 \right]$$

$$0 = l^3 - \frac{1}{4}l^4 + c_2; \quad c_2 = -\frac{3}{4}l^4$$

$$y = -\frac{q}{6EI} \left[(l-x)^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 - \frac{3}{4}l^4 \right]$$

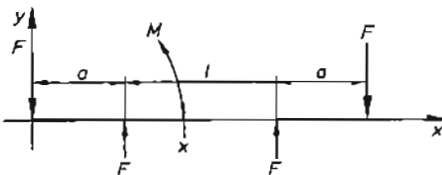
$$= \frac{q}{24EI} \left[(l-x)^4 - 4l^3(l-x) + 3l^4 \right]$$

$$y_{\max} = y(l)$$

$$= \frac{ql^4}{8EI}$$

1. Bereich: $0 \leq x \leq a$

ورشو



$$0 = M + x \cdot F \Rightarrow M = -x \cdot F$$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI} x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI} x^3 + c_1 x + c_2$$

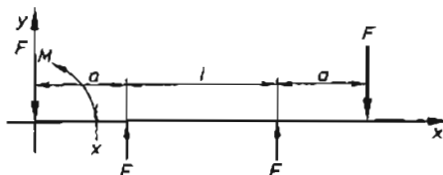
$$0 = \frac{F}{6EI} a^3 + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{F}{6EI} a^3 - c_1 a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI} (x^3 - a^3) + c_1 (x - a)$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+l$

وردشو



$$0 = M + x \cdot F - (x-a)F$$

$$= M + x \cdot F - x \cdot F + a \cdot F$$

$$M = -aF$$

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI} x + c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI} \left(a + \frac{l}{2} \right) + c_3$$

$$c_3 = -\frac{aF}{EI} \left(a + \frac{l}{2} \right)$$

$$y_2' = \frac{aF}{EI} \left[x - \left(a + \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$y_2 = \frac{aF}{EI} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} (2a+l) + c_4 \right]$$

$$0 = \frac{aF}{EI} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} (2a+l) + c_4 \right]$$

$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$

$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$

$$= \frac{a}{2} (a+l)$$

$$y_2 = \frac{aF}{2EI} [x^2 - x(2a+l) + a(a+l)]$$

y_2 د $0 \leq x \leq a+l$ لپاره کړونلاين

د سيومتريکي بارویشنی له
امله باور لري:

$$y_2' \left(a + \frac{l}{2} \right) = 0 \Rightarrow c_3$$

زما ارزښت

$$\text{Randwert: } y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$$

د فنکشن y_1 ثابت c_1 د هومو-
گینیتی شرتونو $y'_1(a) = y'_2(a)$
له لارې پیدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI} \left[a - \left(a + \frac{l}{2} \right) \right]$$

$$= -\frac{aF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{aF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI} (a+l)$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI} [x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)]$$

د سیومتريکی بارویشنی له امله
کرونلین y_3 و $x = a + (1/2)$ ته
سیومتري دی د کرونلین y_1 سره.
له دې سره y_3 سملاسی له y_1 څخه
شمیرل کيږي.

3. Bereich: $a+l \leq x \leq 2a+l$ **وروستو**

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \triangleright 2a+l-x$$

$$y_3 = \frac{F}{6EI} [(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)]$$

د ټولو درې ورشوگانو لپاره په یو رابند فورم کې د اوبیونو (حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI} [x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)] & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{aF}{2EI} [x^2 - x(2a+l) + a(a+l)] & \text{für } a \leq x \leq a+l \\ \frac{F}{6EI} [(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)] & \text{für } a+l \leq x \leq 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسیمال، مختلف
راگرونونه رامنځ ته کيږي

$$y_{\max_1} = y(0) = y_{\max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{\max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI} [-a^3 - 3a(a+l)(-a)]$$

$$= \frac{F}{6EI} [-a^3 + 3a^2 - 3a^2l]$$

$$19. y'' = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:
 $y > 0.$

$$c_1 = 2c_1^*$$

Substitution:

$$t = 4\sqrt{y} + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = \frac{1}{2} \sqrt{y} dt$$

$$= \frac{1}{8} (t - c_1) dt$$

بدلون

$$y_{\max_1} = \frac{Fa^2}{6EI} (2a + 3l) = y_{\max_2}$$

$$y_{\max_3} = y \left(a + \frac{l}{2} \right)$$

$$= y_2 \left(a + \frac{l}{2} \right) = y_2 \left(\frac{2a+l}{2} \right)$$

$$= \frac{aF}{2EI} \left[\frac{1}{4} (2a+l)^2 - \frac{1}{2} (2a+l)^2 + a(a+l) \right]$$

$$= \frac{aF}{2EI} \left[-\frac{1}{4} (4a^2 + 4al + l^2) + a^2 + al \right]$$

$$= \frac{aF}{2EI} \left[-a^2 - al - \frac{l^2}{4} + a^2 + al \right]$$

$$= \underline{\underline{-\frac{al^2 F}{8EI}}}$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot z = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\int z dz = \int y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$\frac{z^2}{2} = 2y^{\frac{1}{2}} + c_1^* \quad \parallel \cdot 2$$

$$z^2 = 4\sqrt{y} + 2c_1^*$$

$$z = \sqrt{4\sqrt{y} + c_1}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y} + c_1}}$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{t - c_1}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{1}{8} \int \left(\sqrt{t} - \frac{c_1}{\sqrt{t}} \right) dt$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3} t \sqrt{t} - 2c_1 \sqrt{t} \right) + c_2$$

20. $y'' = a \cdot e^y$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$c_1 = 2c_1^*$$

Substitution: بدلون

$$t^2 = 2ae^y + c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t dt = 2ae^y dy$$

$$dy = \frac{t \cdot dt}{ae^y}$$

$$= \frac{2t}{t^2 - c_1} \cdot dt$$

$$\int \frac{dx}{a - x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{Artanh} \frac{x}{\sqrt{a}} + c$$

für $a > 0$

$$\int \frac{dt}{c_1 - t^2} = \frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{Artanh} \frac{t}{\sqrt{c_1}} + c_2$$

21. $y^4 - y^3 \cdot y'' = 1$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$x = \frac{\sqrt{t}}{12} (t - 3c_1) + c_2$$

$$= \frac{1}{12} \sqrt{4\sqrt{y} + c_1 (4\sqrt{y} - 2c_1) + c_2}; y > 0$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot z = a \cdot e^y$$

$$\int z \cdot dz = a \int e^y dy$$

$$\frac{z^2}{2} = a \cdot e^y + c_1^* \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = 2ae^y + c_1$$

$$z = \sqrt{2ae^y + c_1}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{2ae^y + c_1}}$$

$$= \int \frac{1}{t} \cdot \frac{2t}{t^2 - c_1} dt$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 - c_1} = -2 \int \frac{dt}{c_1 - t^2}$$

$$x = -2 \frac{1}{\sqrt{c_1}} \operatorname{Artanh} \frac{t}{\sqrt{c_1}} + c_2$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{c_1}} \operatorname{Artanh} \sqrt{\frac{2a}{c_1}} e^y + 1 + c_2; c_1 > 0$$

$$y^4 - y^3 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = 1$$

نیونه: $y \neq 0$ په y^3 ویشنه

$$y - \frac{dz}{dy} z = y^{-3}$$

$$\int z \cdot dz = \int (y - y^{-3}) dy$$

Substitution: بدلون

$$y^2 = t \Rightarrow dy = \frac{dt}{2y}$$

Substitution: بدلون

$$u = t + c_1 \Rightarrow du = dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c_1$$

$a^2 > 1 - c_1^2$

≠

$$22. y'' = \frac{1}{y}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

د پوښتنکونی څخه لاسته راځي:
 $y \neq 0$.

$$c_1 = 2c_1^*$$

Substitution: بدلون

$$t^2 = \ln y^2 + c_1 \Rightarrow$$

$$\frac{z^2}{2} = \frac{y^2}{2} + \frac{y^{-2}}{2} + c_1 \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = y^2 + y^{-2} + 2c_1$$

$$z = \sqrt{y^2 + y^{-2} + 2c_1}$$
$$= \frac{1}{y} \sqrt{y^4 + 2c_1 y^2 + 1}$$

$$\int dx = \int \frac{y}{\sqrt{y^4 + 2c_1 y^2 + 1}} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2c_1 t + 1}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2 + 1 - c_1^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 1 - c_1^2}}$$

$$x = \frac{1}{2} \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 1 - c_1^2} \right| + c_2$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| t + c_1 + \sqrt{(t+c_1)^2 + 1 - c_1^2} \right| + c_2$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| y^2 + c_1 + \sqrt{y^4 + 2c_1 y^2 + 1} \right| + c_2$$

د $y \neq 0$ پاره

$$\frac{dz}{dy} \cdot z = \frac{1}{y}$$

$$\int z dz = \int \frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2} = \ln |y| + c_1^* \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = 2 \ln |y| + 2c_1^*$$

$$= \ln y^2 + c_1$$

$$z = \sqrt{\ln y^2 + c_1}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{\ln y^2 + c_1}}$$

$$\Rightarrow 2t \, dt = \frac{2y}{y^2} \, dy$$

$$dy = y t \cdot dt$$

د دې اینتیگریشن سره ل
لمرودینی څخه تیریدنه ناشونی ده

$$\int dx = \int \frac{y t \cdot dt}{t}$$

$$= \int y \, dt$$

$$= \int e^{\frac{t^2 - c_1}{2}} \, dt$$

$$= e^{-\frac{c_1}{2}} \int e^{\frac{t^2}{2}} \, dt$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\blacktriangleright x = \frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} + \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} + \dots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}} \, dt = c_2 + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} +$$

$$+ \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} + \dots$$

$$x = e^{-\frac{c_1}{2}} \left[c_2 + \sqrt{\ln y^2 + c_1} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^3}{6} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \dots \right]$$

پاره $y \neq 0$

$$23. y'' = k^2 \cdot y''$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$c_1 = -3c_1^*$$

$$y'' = k^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\int y'' \, dy = k^2 \int z \, dz$$

$$\frac{y^3}{3} = k^2 \cdot \frac{z^2}{2} + c_1^* \quad \parallel \cdot \frac{2}{k^2}$$

$$z^2 = \left(\frac{2}{3} y^3 - 2c_1^* \right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{3} (y^3 - 3c_1^*)$$

$$z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{3} \sqrt{y^3 + c_1}}$$

$$\int dx = k \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{y^3 + c_1}}$$

$$= k \sqrt{\frac{3}{2}} \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 \left(1 + \frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k \sqrt{\frac{3}{2c_1}} \int \left(1 + \frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}x + \binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

د دې اینٹیگرال شمیرنه یواځې
د لړۍ ودیزینې له لارې شونې ده.

د $|x| < 1$ لپاره

$$\frac{y^3}{c_1} = x$$

$$\left(1 + \frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{y^3}{c_1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^6}{c_1^2} -$$

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^9}{c_1^3} + \dots$$

د $|c_1| < |y^3|$ لپاره

$$x = k \sqrt{\frac{3}{2c_1}} \int \left(1 + \frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= k \sqrt{\frac{3}{2c_1}} \left[c_2 + y - \frac{1}{2} \frac{y^4}{4c_1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^7}{7c_1^2} - \right.$$

$$\left. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^{10}}{10c_1^3} + \dots \right]$$

د $|c_1| < |y^3|$ لپاره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}} \left[c_2 + y - \frac{1}{2} \frac{y^4}{4c_1} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{y^7}{7c_1^2} - \right.$$

$$\left. \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{y^{10}}{10c_1^3} + \dots \right]$$

د $|c_1| < |y^3|$ لپاره

$$\left| \frac{y^3}{c_1} \right| < 1 \Rightarrow |y^3| < |c_1|$$

=

۲۴. $y'' = y$

دا دفرنخیالمسارت هغه د مخه تیره
پوښتنه ۲۳ کی شمیرلی دفرنخیالمسا-
وات خانگړی حالت دی د $k = 1$ سره

$$25. y^2 \cdot y'' = a$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$c_1 = 2c_1^*$$

Substitution: **بدلون**

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a} dt$$

ایتیگرال په ټوټه یا پارشل ماتو
ماتو ټوټه یا تجزیه کیری

د ځلوونو یا ضربونو انځول:

$$\begin{aligned} 1 &= A(\sqrt{c_1+t})(\sqrt{c_1-t})^2 + B(\sqrt{c_1-t})^2 + C(\sqrt{c_1+t})^2(\sqrt{c_1-t}) + D(\sqrt{c_1+t})^2 \\ &= A(c_1-t^2)(\sqrt{c_1-t}) + B(\sqrt{c_1-t})^2 + C(c_1-t^2)(\sqrt{c_1+t}) + D(\sqrt{c_1+t})^2 \\ &= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1t - \sqrt{c_1}t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1}t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1t - \sqrt{c_1}t^2 - t^3) + \\ &\quad + D(c_1 + 2\sqrt{c_1}t + t^2) \end{aligned}$$

۱۴۷

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نیونه: $y \neq 0$ په y^2 ویشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad || \cdot 2$$

$$z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a} dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2} dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1+t})(\sqrt{c_1-t})]^2}$$

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1+t})^2 \cdot (\sqrt{c_1-t})^2}$$

$$= 4a \int \left[\frac{A}{\sqrt{c_1+t}} + \frac{B}{(\sqrt{c_1+t})^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1-t}} + \frac{D}{(\sqrt{c_1-t})^2} \right] dt$$

$$1 = t^3(A-C) + t^2(-A\sqrt{c_1} + B - C\sqrt{c_1} + D) + t(-Ac_1 - 2B\sqrt{c_1} + Cc_1 + 2D\sqrt{c_1}) + Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Cc_1\sqrt{c_1} + Dc_1$$

$$\text{I: } 0 = A - C \quad \Rightarrow A = C$$

$$\text{II: } 0 = -A\sqrt{c_1} + B - C\sqrt{c_1} + D$$

$$\text{III: } 0 = -Ac_1 - 2B\sqrt{c_1} + Cc_1 + 2D\sqrt{c_1}$$

$$\text{IV: } 1 = Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Cc_1\sqrt{c_1} + Dc_1$$

$$\text{II: } 0 = -2A\sqrt{c_1} + B + D$$

$$\text{III: } 0 = -2B\sqrt{c_1} + 2D\sqrt{c_1} \quad \parallel : 2\sqrt{c_1} \quad \Rightarrow B = D$$

$$\text{IV: } 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + Bc_1 + Dc_1$$

$$\text{II: } 0 = -2A\sqrt{c_1} + 2B \quad \parallel \cdot c_1 \quad \left. \vphantom{\text{II: } 0 = -2A\sqrt{c_1} + 2B} \right\} +$$

$$\text{IV: } \frac{1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + 2Bc_1}{1 = 4Bc_1} \Rightarrow B = \frac{1}{4c_1} = D$$

$$\text{IV: } 1 = 2Ac_1\sqrt{c_1} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow A = \frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}} = C$$

له دې سره x شميرل يوي.

$$\begin{aligned} x &= 4a \int \left[\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1+t}} + \frac{1}{4c_1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{c_1+t})^2} + \frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1-t}} + \frac{1}{4c_1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{c_1-t})^2} \right] dt \\ &= \frac{a}{c_1} \int \left[\frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1+t}} + \frac{1}{(\sqrt{c_1+t})^2} + \frac{1}{\sqrt{c_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1-t}} + \frac{1}{(\sqrt{c_1-t})^2} \right] dt \\ &= \frac{a}{c_1} \left[\frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln |\sqrt{c_1+t}| - \frac{1}{\sqrt{c_1+t}} - \frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln |\sqrt{c_1-t}| + \frac{1}{\sqrt{c_1-t}} \right] + c_2 \\ &= \frac{a}{c_1} \left[\frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{c_1+t}}{\sqrt{c_1-t}} \right| + \frac{2t}{c_1-t^2} \right] + c_2 \\ &= \frac{a}{c_1} \left[\frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{c_1} + \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1} - \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}} \right| + \frac{2\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}{c_1 - \left(c_1 - \frac{2a}{y}\right)} \right] + c_2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{a}{c_1} \left[\frac{1}{\sqrt{c_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{yc_1 + \sqrt{yc_1 - 2a}}}{\sqrt{yc_1 - \sqrt{yc_1 - 2a}}} \right| + \frac{1}{a} \sqrt{y(yc_1 - 2a)} \right] + c_2 \quad \text{für } y \neq 0$$

$$26. y'' = 6y - 4$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$c_1 = -\frac{4}{9} + \frac{1}{3} c_1^*$$

Substitution: بدلون

$$t = y - \frac{2}{3} \Rightarrow dy = dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}|$$

$$27. y'' = 1 + y'^2$$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot z = 6y - 4$$

$$\int z dz = \int (6y - 4) dy$$

$$\frac{z^2}{2} = 3y^2 - 4y + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 6y^2 - 8y + 2c_1^*$$

$$z = \sqrt{6y^2 - 8y + 2c_1^*}$$

$$= \sqrt{6} \sqrt{y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}c_1^*}$$

$$= \sqrt{6} \sqrt{y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + \frac{1}{3}c_1^*}$$

$$z = \sqrt{6} \sqrt{\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + c_1}$$

$$\int dx = \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{dy}{\sqrt{\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + c_1}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + c_1}}$$

$$x = \frac{\sqrt{6}}{6} \ln |t + \sqrt{t^2 + c_1}| + c_2$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} \ln \left| y - \frac{2}{3} + \sqrt{\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + c_1} \right| + c_2$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 + z^2$$

$$\int dx = \int \frac{dz}{1 + z^2} \quad \text{بنسب ایتیکرال}$$

$$x = \text{Arctan } z + c_1$$

$$\int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \text{Arsinh } z$$

29. $y'' = e^y$

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

Arctan $z = x - c_1$

$$z = \tan(x - c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x - c_1)$$

$$\int dy = \int \tan(x - c_1) dx$$

$$y = - \int \frac{-\sin(x-c_1)}{\cos(x-c_1)} dx$$

$$= \underline{\underline{-\ln |\cos(x-c_1)| + c_2}}$$

$$y'' = \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int dx$$

Arsinh $z = x + c_1$

$$z = \sinh(x + c_1)$$

$$y = \int \sinh(x + c_1) dx$$

$$= \underline{\underline{\cosh(x + c_1) + c_2}}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^z$$

$$\int e^{-z} dz = \int dx$$

$$- \int e^{-z} dz = - \int dx$$

$$e^{-z} = -x + c_1$$

$$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$$

$$-z = \ln(c_1 - x)$$

$$y' = -\ln(c_1 - x)$$

سبستیچیوشن

$$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$$

پارشل - یا توتنه اینتیگرال

30. $y'' = y'^3$

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$c_1 = -c_1^*$$

$$\begin{aligned}
 y &= - \int \ln(c_1 - x) dx \\
 &= \int \underbrace{\ln t}_{u} \underbrace{dt}_{dv} \\
 &= t \cdot \ln t - \int \frac{1}{t} \cdot t dt \\
 &= t \cdot \ln t - t + c_2 \\
 &= t (\ln t - 1) + c_2 \\
 &= \underline{(c_1 - x) [\ln(c_1 - x) - 1] + c_2}
 \end{aligned}$$

نهایت زینگولار اویونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ نیوند

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm \sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2 \sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm \sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$$y = a = \text{const.} = \text{تابته}$$

31. $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$

د $c_1 = 0$ سره په دې کې
پارتيکولار او بیونه خوندي ده

32. $y''' + y''^2 = 0$

$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$

$y'^2 - 3y''^2 = 0$

$y'^2 = 3y''^2$

$y' = \pm\sqrt{3}y''$

پارتيکولار او بیونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

نیونه : $y' = z \neq 0$; Voraussetzung:

$z = \pm\sqrt{3} \frac{dz}{dx}$

$\pm\sqrt{3} \int \frac{dz}{z} = \int dx$

$\ln |z| = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} x + c_1^*$

$e^{\ln|z|} = e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x + c_1^*} = e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x} \cdot \underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$

$z = c_1 \cdot e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x}$

$y = c_1 \int e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x} \cdot dx$

$y = \underline{\underline{\pm\sqrt{3}c_1 \cdot e^{\pm \frac{1}{\sqrt{3}} x} + c_2}}$

زیگولار زو بیونه : $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$y = ax + b$

نیونه : $y'' = z \neq 0$

$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$

$\frac{dz}{dx} = -z^2$

$-\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$

$\frac{1}{z} = x + c_1$

$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$

د وړېسى ايتيگريشن لپاره
دې ارزښتکړنې کيښول شي

د ارزښتکړنېوکارونې سره د دواړو
چالنتويرونو لاس ته راوړنې يا
نتيجې رايوځاي کيږي

33. $xy'^2 = y$

د اوبستونو يا واريابلو بيلښت
 x, dx und y, dy

اينتيگريشن

$$\frac{c_1 - c_2}{2} = c$$

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1} \\ = \ln |x+c_1| + c_2$$

1. Fall: $x+c_1 > 0$

$$y' = \ln(x+c_1) + c_2 \\ y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(x+c_1)-1] + c_2x + c_3}}$$

2. Fall: $x+c_1 < 0$

$$y' = \ln(-x-c_1) + c_2 \\ y = \underline{\underline{(x+c_1)[\ln(-x-c_1)-1] + c_2x + c_3}}$$

$$y = (x+c_1)[\ln|x+c_1|-1] + c_2x + c_3 \\ y = ax + b$$

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$2\sqrt{x+c_1} = 2\sqrt{y+c_2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1 - c_2}{2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + c$$

$$y = \underline{\underline{x + 2c\sqrt{x} + c^2}}$$

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**