کوش KUSCH

د فرنځیالبرابرون یا _ مساوات

$$y - y' + y^2 y''^4 = 0$$

Differentialgleichungen

Ketabton.com

ژباړن:
ډاکټر ماخان (میږی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان (په اولني نوم مېرې) د اروابنادي پښتو او اروابناد نورالرحمان زوی، په ۱۵/۹/۱۹۴۶م کال د شینوارو د هسکې مېنې ولسوالۍ کې زېږېدلی. (د زېږېدو نېټه یې د ۱۳۲۴ هـ ل کال څخه یو یا دوه کاله دمخه ده).

د هسکې مېنې د درې کاله کلیوالي ښوونځي وروسته، چې د لومړنیو زده کوونکو څخه وو. له ۱۹۵۴ څخه تر ۱۹۶۵ پورې رحمان بابا لیسه، د ۱۹۶۶م کال سپتمبر کې د یوه بورس له لارې اطریش ته لاړ او هلته په پوره ستونزو د شمېر پوهنې په ډاکټرۍ بریالی شو.

د ۱۹۸۷ م کال د نومبر تر د ۱۹۸۸ فبروري تر اخره د افغانستان د باندنیو چارو کې مامور وو. دی د ۱۹۸۸م کال د فبرورۍ له ۲۹ تر ۱۹۹۲ م کال د اپریل تر نیمایي وراخوا په بن (المان) کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژدافیر وو او د ۱۹۹۲ یوني څخه راپه دېخوا په المان کې نور هم د پردېسۍ شپې او ورځې تېروي.

ماخان شینواری د مېرمن ښاپېرۍ سره له ۱۹۷۲م کال راپه دې له لرې واده (د واده خبر ورته اطریش ته راغی) دی په نهم ټولګي کې یې کوزده ورته کړې وه. دوی ته لوی څښتن دوه بچیان وبخښل، ځانګه او اباسین، چې د ۱۹۷۹کال د مۍ په شلم په اطریش کې زېږېدلي.

Verein zur Fördrung der Afghanischen Kultur e. V. Köln, Germany

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . دیفرنځیالبرابرون یا دیفرنځیالمساوات

تراوسه مو معلوم الجبري او ترانسځندنت مساواتو نامعلومی لوي تر یوې برخی د توپیري پوتنځونو سره لکه $x, y\ z^2, a^3$ او داسی نور ، لرودي.
که د مساواتو دا نامعلومی یا ناپیژندلی لویي فنکشنونه او د هغی رابیلدنی یا دفرنځیالویشنه یامشتقونه وي، نو دلته د یوه دیفرنځیالمساوات څخه غږیدنه ده یا خبرې دي. د دې مساوات اوبی یاحل ستونځې لري، په ډیرو حالتونو کې حتی شمیرنیز ناممکن دی.
د دې وړې برخې په دننه کې کیدی شي ، چې یواځې یوه پیلونه ورکړل شي، د یوځو په تخنیك کې، دمهمو کاروونو یا استعمال سره.
یادونه: دلته څه نومونه چی راځي د هغو سره باید لوستونکی بلد وي. او که چیري داسی نه وه، نو دا تر زیاته حده څما د مخه تیرو کتابونو کی راوړل شوي، که هغه هندسي کلیمي وي اوکه شمیرپوهنیزې.که پوه شوم، چی کومی کلیمي څما په تیرو کتابونوکی روښانه نه دې تعریف شوي، وبه هڅیږم، چی داکار دلته روښانه کړم.
ګران لوستونکی به په دې پوهیږي، چی کوم شیان د ژباړونکی دي،که په روښانه توګه می ګوته لك نه کړل.

۱ . ۱ بنسټکلیمی

۱ . ۱ . ۱ تعریفونه (پیژندنی)

تراوسه پورې : لاندې مساوات توپیر شوي دي.
ټاکنمساوات:

(c) ketabton.com: The Digital Library

– الجبري ريشنل مساوات. $y = 2x^2 + 2x + 5x - 7 = x^2 - 3$

– الجبري ايريشنل مساوات. $\sqrt{3x^2 - 1} = x^2$

– ترانسڅندنت مساوات. $y = \sin x \; ; \; y = e^{2x+1} = 2x$

فنکشنمساوات

هر $x \in D(f)$ په يواځنی يو $y \in R$ تنظيميږي.

$$y = 2x^2 + 5x - 7 \quad \Rightarrow \quad y = f(x) \quad \Rightarrow f = \langle f \rightarrow f(x) \rangle$$

$$y + 2x = y' \cdot x^2 - y'' \quad \Rightarrow f = \langle x \rightarrow f(x),\, f'(x),\, f''(x) \rangle$$

$$\Rightarrow y = f\langle x, y', y'' \rangle$$

دفرنځيالمساوات، په کومو کی، چی د بلواکو اوښتوني y يواځی خپلواکی اوښتونی x اود هغه رابيليدنی لکه

$$dy / dx = y' \; ; \; d^2 y / dx^2 = y'', \ldots ,$$

رامنځ ته کيږي، بلد يا عادي ديفرنځيالمساوات بلل کيږي.

د ديفرنځيالمساوات ټوليزه بڼه :

- $y = 3y' + 2x \cdot y'' + 4$
- $y'^2 + x \cdot y^2 = 4$
- $y''' + y'' + y' = e^x$
- $x \cdot y' = y'' \cdot y$
- $x \cdot y + x \cdot y' + x \cdot y'' + x \cdot y''' = 0$

که د ديفرنځيالمساوات ناپيژندونکی د ډيرو اوښتونکو فنکشنونه وي، نو د پارشل – يا ټوټه ديفرنځيال مساواتوځخه غږيږو.

$$x^2 - \frac{\partial y}{\partial x} - 3 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = y$$

د دي ټوليزه بڼه يا فورم

$$0 = f\left(x; y; z; \frac{\partial y}{\partial x}; \frac{\partial y}{\partial z}; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \cdots ; \cdot\right)$$

د n,.....,1.,2 (يعنی، لمړي، دوم، ... او n–ام) نظم ديفر-نځيالمساواتو ترمنځ توپير کوو

د ۱ –ام نظم ديفرنځيامساو $4y - dy / dx + y^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

.۲ – ام نظم د.م $3x^2+y^2 = d^2y / dx^2 = y''$

. د ۳ –ام نظم د.م $y''' - 3y = y'' + y'$

دلته په دیفرنخیالمساوات کی هغه لوړدیفرنخیالکوخینت یا لوړه رابیلیدنه یا دیفرنخیالویش د دیفرنخیالمساوات نظم ورکوي .

د دفیرنخیالمساوات یو بل د توپیرولویا فرقکولو امکانات په درجه یا گراد Grad کی ورکړ شوي دي.د دفیرنخیالمساوات گراد د دیفرنخیالمساوات د زیاتوونو له لاري ټاکل شوی دی، په کوم کی چی د بلواکو اوښتونکو یا واریابلو د ځګیو یا لوړیو یا اکسپوننتونو او د دیفرنخیالویش هغه زیاتون چی د ټولو لوي وي.

۱ . درجه $y''' - 3x^2 + y = 0$

۲ . . درجه $x^4 y' . y''^2 y'' + y - x^2 = 0$

۳ . درجه $y.y''^3 + y''. x^8 = y$

۴ . درجه $y - y^2 y''^4 - y' = 0$

بلد دفرنخیالمساوات

د ۱ . نظم او ۳ . درجي $4x^5y^2 + 2y.y'^3 . \cos x - 5y + 7 = 0$

بلد یا ساده (عادي) دفرنخیالمساوات

۲ . نظم او ۱ . درجه $y.y'' + 4x.y' - y = 0$

۱ . ۱ . ۲ د دیفرنخیالمساواتو اوبیونی یا حلونه

د دفرنخیالمساوات اوبیونه یو فنکشن دی او زیات وخت د دفرنخیالمساوات اینتیگرال هم بلل کیږي، خکه، چی په بنسټیزه توګه رابیلیدنی د اینتیگرال له لاري لاس ته راځي د دیفرنخیال مساوات د اوبیو یا حلونولاندي په مساواتو کی منځ ته راغلو، د دفیرنخیالونو او دیفرنخیالکوشنتونو د له منځه وړل دي، دا په دي مانا چی د ورکړشوو رابیلیدنو څخه باید په هغه اړه فنکشن مساوات راپیدا کړی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: دیفرنځیالمساوات ; $x/2 - y' = x$

$dy/dx = y' = -x/2$

$dy = -(x/2).dx$

د رابیلیدنو د له منځوړنه په بنستیزه توګه د اینتګرال له لارې پیښیږي یا صورت نیسی. د دیفرنځیالمساواتو اوبی یا حل له امله د هغه اینتګرال او یا هم د هغه بنستمساوات بولو.

$\int dy = -(1/2)\int x.dx$

اوبی (حل) $y = -(1/4)x^2 + C, C \in R$

د فنکشنمساوات $y = (x)$ څخه د اوبیفنکشن لاس ته راځي

$f = < x \longrightarrow -(\frac{1}{4})x^2 + c >$

یادونه :داسی پورته مات نوکان >,< دې بیا لړ لوی ولیکل شي، زه یی په بل ډول امکانات نه لرم.

ازمایښت:

که د اوبیوني فنکشن $y = -(\frac{1}{4})x^2 + c$ څخه لمړی رابیلیدنه جوړه شي او د $y' = -x/2$ لپاره ترم د ازمایښت لپاره په سر- یا پیل دفرنځیالمساوات کی کیښوول شي، نو دا به د فنکشن د دفرنځیالمساوات د ټولو توکو لپاره یو کتمټ یا ایدنتیك مساوات شي

$$\frac{x}{2} - y' = x \blacktriangleright y = -\frac{1}{4}x^2 + c$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x$$

$$x = x$$

(دا یی په بل ډول لیکندود) دیفرنځیالمساوات اوبی

$y = -(1/4)x^2 + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ازمایښت لپاره نتیجه بیرته دیفرنځیالیږي یا رابیلیدنه نیول کیږي. دا نتیجه د دفیرنځیالمساوات سره سرخوري.

$$dy / dx = - x / 2$$

ګورو، چی بیرته په دې توګه دیفرنځیالمساوات لاس ته راغی.

بیلګه: د دیفرنځیالمساوات

$$2x + dy / dx = 0$$

اوبی یا حل سره. لکۀ څنګه په ټولو اینتیګرالولو کی یوه ثابت C رامنځ ته کیږي،

$$y = - x^2 + C$$

د دفرنځیالمساوات اوبیونی یا حلونه کیدی شي، چی پۀ درې ډلو وویشل شي.

۱ – ټولیز اوبی

د دفرنځیالمساوات اوبی یا حل کی ، لکه په هر اینتیګریشن کی یوه اینتیګریشن ثابته c رامنځ ته کیږي.

که د دیفرنځیالمساوات په اوبی کی ثابته نزدې نه ټاکل کیږي، نو لاس ته راوړی حل د دې دفیرنځیال مساوات ټولیز اوبی او یا د دې دیفرنځیالمساوات ټولیز اینتګرال بلل کیږي.

بیلګه :

دفرنځیالمساوات $y' = 1 / 2$

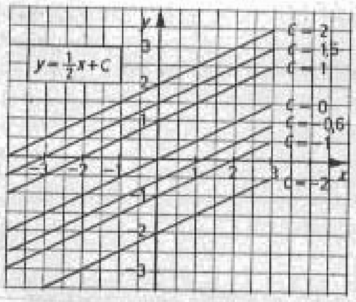
$$\Rightarrow \quad y = (1/2) \quad dx$$
$$= (1/2)\,x + c$$

ټولیز دفرنځیالمساوات $f = \langle x \to (½)x + c \mid c \in R \rangle$

د یوه دیفنځیالمساوات ټولیز حل د کږو د کودې(د هغو کږو ډله، چی یو له بل سره غبرګی څغلي) په څیر په ګراف کیانځوریدلی شي .

دلته ناپایډیرې اوبیونی ممکن دي، څکه چی ثابته هر په خوښه ارزښت نیولي شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره

۲ - پارتیکیولر-یا ځانګړې اوبیونه partikuläre Lösung

یا برخه ئیز- یا د یوې یوې برخې اوبیونه

که د ورکړشوي دیفرنځیال مساوات لپاره نور ورزیات ټاکلي شرایط ورکړ شوي وي، نو کیدی شي، چې د اینتګریشن ثابته C وشمیرل شي.

بیلګه:

دیفرنځالمساوات $y' = 1/2$

ټولیزمساواتفنکشن $\Rightarrow f = <x \longrightarrow (½)x + c, c \in R>$

ټولیز اوبی $y = (1/2)x + c \;, c \in R$

که دc د شمیرلو لپاره نور ورزیات شرطونه $y_1 = 2$، $x_1 = 1$ وي

بدلون یا اړونه $y_1 = (1/2)x_1 + C$

ارزښت ځاي په ځاي کړی $C = y - (1/2)x$

$C = 2 - (1/2).1$

$\Rightarrow C = 1,5$

ارښت کیږدی

پارتیکیولار اوبی $y_1 = (1/2)x_1 + 1,5$

$\Rightarrow 2 = (½).1 + c \Rightarrow c = 1,5$

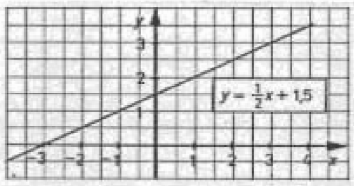
له دې د دیفرنځیالمساواتو پارتیکولاراوبی لاس ته راځي.

د c = 1 , 5 سره له ټولیز اوبیفنکشن f څخه ټوټه اوبي–فنکشن f_1 لاس ته راځي.

ټوټه اوبیفنکشن $f_1 = \langle x \longrightarrow (½)x + 1{,}5 \rangle$

د پارتیکولار اوبي په ګراف کی د کرښو د کودي څخه یوه ټاکلی کرښه بنایي

د c = 1,5 حالت لپاره.



په تخنیکي پرابلمونوکی زیات وخت پارتیکولار اوبیونو یا حلونو ته اړتیا پیښیږي.

۳ – زینګولار اوبیونی singuläre Lösungen

دا لاندي دیفرنځیالمساوات دي ورکړ شوي وي

$$y^2 + y'^2 = 1$$

دا هلته پوره کیدونکی دی ،که ونیول شي

$$y = \sin(x+C)$$

دا اوبیونی د الجبري شمیرنی له لاري لاس ته نه شي راتللی

بیلګه : د دیفرنځیالمساوات

$y^2 + y'^2 = 1$ ▶ *Differentialgleichung*

$f = \langle x \mapsto \sin(x + c) | c \in \mathbb{R} \rangle$ ▶ *angenommene allgemeine Lösungsfunktion*

$\Rightarrow y = \sin(x + c)$

نیول شوی ټولیز اوبیفنکشن

ازمایښت

$$y = \sin(x + c) \Rightarrow y^2 = \sin^2(x + c)$$
$$\Rightarrow y' = \cos(x + c) \Rightarrow y'^2 = \cos^2(x + c)$$
$$y^2 + y'^2 = 1$$
$$\Rightarrow \sin^2(x + c) + \cos^2(x + c) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازمایښت د نیول شوي اوبي رتینبتینوالی تصدیقوي

دا ځنی دفرنځیالمساوت د دې تر څنګ نورې اوبیونی هم لري، کومې چې په ریښتونی دیفرنځیالمساوات پوره کوي، مګر له دې پیدا ټولیز اوبی یا حل څخه رابیلیدوړ نه دی.
د ټولیزې اوبیونی $y = \sin(x + c)$ تر څنګ دفرنځیالمساوات د فنکشنونو

$f_1 = \langle x \longrightarrow 1 \rangle$ او $f_2 = \langle x \longrightarrow -1 \rangle$

سره هم پوره کیږي.
دا اوبیونی یا حلونه زینګولار بلل کیږي. دا د یوه ټولیز حل د کږوکرښو د کودو هندسي پوښ انځوروي.
د دواړو زینګولار حلونو دا لاندې هندسي انځورونه د دوه کرښو په څیر ښایي، چې د x –محور سره غبرګی ځغلي. کومې چې ټولیز یا عمومي اوبی یا حل $\sin(x + C)$ پوښوي یا پټوي.

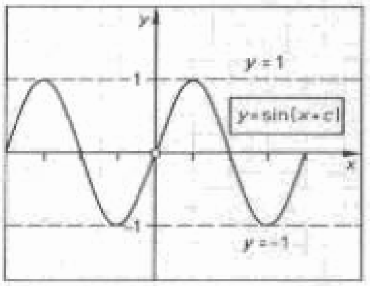
$$y^2 + y'^2 = 1$$

$$y_1 = 1;\ y_1' = 0 \quad \Rightarrow \quad 1^2 + (0)^2 = 1$$

$$y_2 = -1;\ y_2' = 0 \Rightarrow (-1)^2 + (0)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} f_1 &= \langle x \mapsto 1 \rangle \\ f_2 &= \langle x \mapsto -1 \rangle \end{aligned}\right\} \textit{singuläre Lösungen}$$

زینګولار اوبیونې یا حلونه



د دیفرنځیالمساواتو زینګولار حلونه د کم اهمیت دی یا د کم غورولی دي. د دې کتاب په چوکاټ کې به د دې په پیلونو یا کارونو تیریدنه وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اوبیونی متودونه

د دیفرنخیالمساوات اوبیونی اصلاً د اینتیګرالشمیرنی له لارې صورت نیسي.
د لاندې بیلګو سره دې د ممکنه حلونو لمړی تصور یا خیال رامنځ ته شي.
بیلګی : د لاندې دیفرنخیالمساواتو ټولیز اوبیونی (حلونه) پیدا کړی!

1. $y' = 4x$

بڼه بدلون : $dy / dx = 4x$

یواځې د لمړې نظم دیفرنخیالکوخینت یا دیفرنخیالویش مخ ته پروت دی، نو د dy پسی برابرېږي یا ترتیبیږي او اینتیګرالیږي.

اینتیګرالونه $dy = 4x\,dx$.

$$\int dy = 4\int x.dx$$
$$y = 2x^2 + c,\ c \in R$$
$$\Rightarrow\ f = \langle x \longrightarrow 2x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

2. که ډیر اینتیګرالونه لاس ته راځي، نو د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و یوې ثابتی c ته سره رایوځای کیږي.

$$y' = 8x^3 - 2x^2$$
$$y = 8\cdot\int x^3\,dx - 2\cdot\int x^2\,dx$$
$$= 2x^4 + c_1 - \frac{2}{3}x^3 + c_2$$
$$= 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto 2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + c \mid c \in \mathbb{R} \right\rangle$$

۳ . د یوه بلد ۲ . نظم دفرنخیالمساوت لپاره د دوه واره اینتیګرالولو له لارې اوبیونه پیدا کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = x^2 \Rightarrow (y')' = x^2$$

$$y' = \int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + c_1;\ c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$= \frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2;\ c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{12}x^4 + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

په ټوټه اینتیګرالونه کی هم دوه اینتیګرالثابتي پیداکیږي، کومی چی د ټوټه اوبی سره د ورکړشوو شرایطو له مخی باید وټاکل شي

۴ . په دفرنځیالمساوات کی $y' = dy / dx$ اینسوول کیږي او

له dx سره خلیږي

بیا دا بدلونښه په دواړو خواوو اینتیګرالیږي.

وریسی دواړه د اینتیګرالثابتی c_1 او c_2 و $c = 2(c_2 - c_1)$ ته سره را یوځای کیږي. (دې ته دې په شمیر پوهنیزه برخه کی پاملرنه وشي، ما د تخنیکي ستونځو له امله بل ډول نه شوې لیکلی)

$$y \cdot y' = \cos x$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$y \cdot dy = \cos x \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int \cos x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} + c_1 = \sin x + c_2$$

$$y^2 = 2 \cdot \sin x + 2(c_2 - c_1) \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c$$

$$y = \pm\sqrt{2 \cdot \sin x + c};\ c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{2 \cdot \sin x + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۵ . اینسول کیږي $y' = dy / dx$ او دفرنځیالمساوات د dx سره خلیږي.

وریسی د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي او بیا ثابتی c_1 , c_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

او c_3 و یوې ثابتې c ته سره راټولیږي یا رایوځاي کیږي.
که دواړو لورو ته وریسې مربع تکمیلونه ۱ ور زیاته شي نو y شمیرل کیدی شي، او لاس ته راغلی f ټولیز اوبی دی.

$$y' \cdot y = y' + x$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y = \frac{dy}{dx} + x$$
$$y \cdot dy = dy + x \cdot dx$$
$$\int y\,dy = \int dy + \int x\,dx$$
$$\frac{y^2}{2} + c_1 = y + c_2 + \frac{x^2}{2} + c_3$$
$$y^2 - 2y = x^2 + 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1)$$
$$\blacktriangleright\ 2 \cdot (c_2 + c_3 - c_1) = c$$
$$y^2 - 2y = x^2 + c$$
$$y^2 - 2y + 1 = x^2 + c + 1$$
$$(y - 1)^2 = x^2 + c + 1$$
$$y - 1 = \sqrt{x^2 + c + 1}$$
$$y = \sqrt{x^2 + c + 1} + 1;\ c \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt{x^2 + c + 1} + 1 \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

په یاد ولری

۱ – دیفرنځیالمساوات په ټولیزه توګه ټولیز، پارټیکیولار او په ورکړ شوي حالت کي زینګولار اوبیونی یا حلونه لري.

۲ – دیفرنځیالمساوات په مناسب یا ورته شمیرنیز کارونی له لارې په زیاتون– حالتونو کی د اینټیګرال له لارې اوبي کیږي.

۳ – زیات وخت باید چې اوبي ونیول شي او دا اوبی بیا د هغه د ریښتینوالی لپاره و ازمایل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۱ ته تمرینونه

لاندې ساده دفرنځیالمساوت اوبې یا حل کړی

1 . $y'' = x \cdot e^x$ 2 . $y'' - x = 0$ 3 . $2y' - \cos x = 0$
4 . $x \cdot y'' = 3y'$ 5 . $y \cdot \ln x = x \cdot y'$ 6 . $y' \cdot y + y' + x = 0$
7 . $y' - x^2 = 3e^x$ 8 . $\sin x - e^x = y'$ 9 . $y' \cdot y = x + 1$
10 . $y' \cdot y^2 = y' - x^2$ 11 . $dy / dx - 3x = e^x$
12 . $y' - x^2 = x^2 - y'$ 13 . $dy / dx + \cos x = 1$
14 . $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$ 15 . $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$ 16 . $e^x \cdot y' = y$
17 . $y'' = 7x^3$ 18 . $d^2 y / dx^2 = \sin x$
19 . $3x - y'' = a$ 20 . $y'' = y'$ 21 . $y'' = x \cdot \cos x$

۱ . ۲ د لومړي نظم دیفرنځیالمساواتونه

د لمړي نظم دیفرنځیالمساواتونه داسی پیژندل کیږي، چی یواځی لمړی رابیلیدني y' او یا د y' په توانونه لکه y'^2 , y'^3 رامنځ ته کیږي.
د دې ترځنګ کیدی شي x او y همداسی د دوي توان رامنځ ته شي بیلګي :

$$y' + x^2 = 3y^2 + 3y$$
$$y \cdot y' = y'^2 - x^2 + x - 1$$

تولیز : $y' = f(x,y)$

د y' , y او x موجودیت او لویوالی تنظیمونې پسی د دفیرنځیالمساواتو مختلف ډولونه توپیریدلی شي. د لته به د دې مهمو باندې لنډې خبرې وشي.

۱ . ۲ . ۱ دیفرنځیالمساوات د بیلوشوو اووښتونو سره

دیفرنځیالمساواتو د بیلو یا جودا اووښتونو یا واریابلو سره، هغه مساوات په نخښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي، په کومکي چې ممکن وي،چې لویې dy , $g(y)$ په همدې توګه $f(x)$, dx هر یو يې په یوه لور بیل یا ځانلۀ کړو.

د دې اړونې سره کیدی، چې مساوات په دواړو خواوو ایتګرال شي.

بیلګه؛

$$y' \cdot y^4 = x^2 \cdot y$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot y^4 \cdot \frac{1}{y} = x^2$$
$$dy \cdot y^3 = x^2 \cdot dx \blacktriangleright y^3 = g(y);\ x^2 = f(x)$$
$$\int y^3\,dy = \int x^2\,dx$$

۱ . دفرنځیالمساوات د y^2 او dx سره ځلیږي. بیا کیدی شي ، چې د مساوات دواړه خواوي اینتیګرال شي د y^3 پسی اوبیونی له امله ثابتی $3.(c_2 - c_1)$ و ثابتی c ته راغونډیږي(دا پورته ټول په لاندي بیلګه کی روښانیږي).

دلته f غوښتونکی اوبیفنکشن یا حلفنکشن دی.

بیلګه:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2} \blacktriangleright x^2 = f(x);\ y^2 = g(y)$$
$$y^2 \cdot dy = x^2 \cdot dx$$
$$\int y^2\,dy = \int x^2\,dx$$
$$\frac{y^3}{3} + c_1 = \frac{x^3}{3} + c_2$$
$$y^3 = x^3 + 3(c_2 - c_1) \blacktriangleright 3(c_2 - c_1) = c$$
$$y^3 = x^3 + c$$
$$y = \sqrt[3]{x^3 + c}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto \sqrt[3]{x^3 + c} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

۲ . د دې لپاره ، چې د dy د $g(x) = y - 4$ سره او د x د $f(x) = x^2$ سره رایوځایونه لاس ته راوړای شو. نو دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي او x^2 سره ویشل کیږي. *

وریسی له دې سره dy او g(y) همدا ډول dx او f(x) هر یو په یوه خوا ځانلهٔ کیږي. د کوم سره چې dx او dy باید په مات باندې کی پراته یا ځاي وي. **
د مساوات دواړه خواوې ایتیګرال کیږي. د اینتیګرالثابتې c_1 او c_2 و c_3 ته راغونډیږي.
دا راپیداشوی فنکشن د y په لور اوبی کیږي. د e^c لپاره c اینښوول کیږي.***
اوf د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی****

یا دونهٔ : لاندې د شمیرنی په برخه کی په * پسی* ... ،او** پسي ***...
په **** پسي **** راځي.

$$x^2\cdot\frac{dy}{dx}- \quad y \quad + \quad 4 \quad =0$$ *

$$x^2\cdot dy-y\cdot dx+4\cdot dx=0$$

$$dy-\frac{y\cdot dx}{x^2}+\frac{4\cdot dx}{x^2}=0$$

$$dy-\quad\frac{dx}{x^2}(y-4)\quad=0$$

$$\frac{dy}{y-4}-\qquad\frac{dx}{x^2}\qquad=0$$

$$\frac{dy}{y-4}=\frac{dx}{x^2}$$ **

$$\int\frac{dy}{y-4}=\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow \ln|y-4|+c_1=-\frac{1}{x}+c_2 \quad \blacktriangleright c_2-c_1=c_3$$ ***

$$y-4=e^{c_3-\frac{1}{x}}$$

$$y=e^{c_3}\cdot e^{-\frac{1}{x}}+4 \quad \blacktriangleright e^{c_3}=c$$

$$y=c\cdot e^{-\frac{1}{x}}+4$$

$$\Rightarrow f=\underline{\underline{\langle x\cdot - c\cdot e^{-\frac{1}{x}}+4|c\in\mathbb{R}\rangle}}$$ ****

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیفرنځیالمساوات د جلا یا بیلو شوواووښتونو سره، ځان په دې ګروپونو ټوټه کوي

۱ – د لاندې فورم مساوات

$$y' = f(x)$$

دا فورم همغه ورسره بلد د تمرینورکونی وظیفه ورکوي، لکه ځنګه، چی په اینتیګرالشمیرنه کی.

بیلګه :

$$y' = x^2$$

بدلونه $dy / dx = x^2$

اینتیګرالونه $dy = x^2\, dx$

$$y = \int x^2\, dx$$

تولیز اوبی $y = (x^3 / 3) + C$

دلته f ټولیز حل دی $\Rightarrow f = \langle x \to (x^3/3) + c \mid c \in R \rangle$

۲ – د لاندې فورم مساوات $y' = g(y)$

اووښتونی dy او $g(y) = 3y^2 + 1$ په همدې توګه dx هر د مساوات په یوه خوا ځانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د کوم سره چی د مخامخ بڼې $\int \frac{dz}{z^2+1}$ اینتیګرال پخوا اوبی شویدی.

بیلګه (یادونه : دا بیلګه لکه چی ناریښتیا اوبی وی، پام ورته وکړی،؟؟ .)

$$y' = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 1$$

$$\frac{dy}{3y^2+1} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3y^2+1} = \int dx$$

$\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|$ کیڼ لور ته ځانله کیږي په داسی توګه، چی د اینتیګریشنشابته

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنې خوا ته راوړل شي او مساوات د3 √ 2 سره خل شي.

$$\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|+c_1=x+c_2$$

$$\ln\left|\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}\right|=2\cdot\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)$$

د لوګاريتم د اوبيونی سره په بنې لور اکسپونتشلفنکشن لاس ته راځي، کوم چې په يوه ځل توپه کيدی شي.

د سادوني لپاره تاکل کيږي

$$c=e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

بيا د (3 - 3y) سره ځل کيږي او بالاخره مساوات د y سره کيڼ لور ته راوړل کيږي همداسی √3 و بنې خوا ته.

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x+2\sqrt{3}(c_2-c_1)}$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{2\sqrt{3}(c_2-c_1)}=c$$

$$\frac{3y+\sqrt{3}}{3y-\sqrt{3}}=e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=(3y-\sqrt{3})\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

$$3y+\sqrt{3}=3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c$$

د y نوکوتلو وروسته د دفرنځيالمساوات د ټوليز اوبيونی فنکشنمساوات لاس ته راځي

$$3y-3y\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c=-\sqrt{3}\cdot e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-\sqrt{3}$$

$$3y(1-e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c)=-\sqrt{3}(e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1)$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c+1}{e^{2\sqrt{3}\cdot x}\cdot c-1};\ c\in\mathbb{R}$$

۳ . د $y'=f(x)\,.\,g(y)$ بنې مساوات

د فرنځيالمساوات د بيليدنی وروسته اينتيګراليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y پسی اوبیونی وروسته ږدو

$$e^{c_2 - c_1} = c$$

وریسی بیا f ټولیز یا عمومي اوبی دی

بیلګه :

$$y' = 4x^2 \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = 4x^2 \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = 4 \int x^2 \, dx$$

$$\ln|y| + c_1 = \frac{4}{3} x^3 + c_2$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3 + (c_2 - c_1)}$$

$$y = e^{\frac{4}{3}x^3} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright e^{c_2 - c_1} = c$$

$$y = c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3}$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c \cdot e^{\frac{4}{3}x^3} \mid c \in \mathbb{R} \rangle$$

.

۴ – د $y' = f(x) / g(y)$ بنې یا فورم مساوات اووښتونی y , dy او x , dx دوه لوریز خانله کیږي.

$$y' = x / y$$

$$dy / dx = x / y$$

$$\Rightarrow \quad y \, dy = x \, dx$$

بیا د مساواتو داوړه خواوې اینټیګرالیږي او د y پسی اوبی کیږي.

$$\int y \, dy = \int x dx$$

$$(1/2)\, y^2 + c_1 = (1/2)\, x^2 + c_2$$

ږدو

$$2(c_2 - c_1) = c$$

$$y^2 = x^2 + c \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{x^2 + c}$$

دافنکشن f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی یا حل دی

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow x^2 + c \mid c \in R \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د لاندي فورم مساوات

$$y' = g(y) / f(x)$$

اووبنتوني y ، dy او x ، dx په دواړو خواوو ځانله کیږي . او په اخر کی دو خواوي اینتیګرالیږي او په y پسی اوبی کیږي.

هغه لاس ته راوړي اینتیکرشنثابتی ږدو: $c_2 - c_1 = \ln|c|$

$$y' = y / x \;;\quad dy / dx = y / x$$

$$\int dy / y = \int dx / x \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = \ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_2 - c_1 \quad , c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x . c|$$

$$y = x.c$$

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow x.c \mid c \in R >$$

دا لاس ته راغلی f تولیز حل دی

بیلګی

1 . $y' - 3x = -4x^2$

$$dy / dx = 4x^2 + 3x$$

$$y = 4. \int x^2\, dx + 3. \int x\, dx$$

$$y = (4/3)\, x^3 + c_1 + (3/2)\, x^2 + c_2$$

ږدو $c_2 + c_1 = c$

$$\Rightarrow \quad f = < x \longrightarrow (4/3)\, x^3 + (3/2) x^2 + c >$$

دا f د مساوات تولیزه ابیونه ده

۲ . $\sin x - y' = \cos x + y'$

$$\sin x - dy / dx = \cos x + dy / dx$$

$$2dy = \sin x \,.\, dx - \cos x \,.\, dx$$

$$y = (1/2) \int \sin x\, dx - (1/2) \int \cos x\, dx$$

$$y = -(1/2)\cos x + c_1 - (1/29 \sin x + c_2$$

پردو: $c_1 + c_2 = c$

$$\Rightarrow \quad f = \langle x \longrightarrow -(1/2)\cos x - (1/2)\sin x + c \rangle$$

3 . $\quad 2.y' = 2y^2 + 8y - 2$

مساوات د مربعتکمیلولو له لارې په فورم $(z+a)^2 - b^2$ راوړل کیږي

$$y^2 + 4y - 1 = (y^2 + 4y + 4) - 4 - 1$$

$$= (y-4)^2 - (\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \int \frac{dz}{(z+a)^2 - b^2}$$

دا لاندې اینتیګرال د مخه اوبې شوی دی (پا داپو ،شته)

$$\int [(1/(z+a)^2 - b^2] dz$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (y+2)^2 - (\sqrt{5})^2$$

$$\frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+2)^2 - (\sqrt{5})^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| + c_1 = x + c_2$$

$$\ln \left| \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} \right| = 2\sqrt{5} \cdot x + 2\sqrt{5}(c_2 - c_1)$$

$$\ln z = a \Leftrightarrow z = e^a$$

$$\Rightarrow \frac{y+2-\sqrt{5}}{y+2+\sqrt{5}} = e^{2\sqrt{5} \cdot x} \cdot e^{2\sqrt{5} \cdot (c_2 - c_1)}$$

پردو $e^{2\sqrt{5} \cdot (c_2 - c_1)} = c$. بیا د $y + 2 + \sqrt{5}$ سره ضلیږي، ورپسې هغه غړی، چې y لري د مساوات یوې لور ته ځانله کیږي او y له نوکانو راوخي، دا د y په لور اوبې – یا حل کیږي، چې په دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

توکه ټولیز اوبی لاس ته راځي .

$$y=\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x,-\frac{(2+\sqrt{5})\cdot c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}+\sqrt{5}-2}{1-c\cdot e^{2\sqrt{5}\cdot x}}\right\rangle$$

بیلګه ۴ : $y' = y$

د $x = 0$ لپاره $y = e$ دی

غږی $g(x)$ او dy د مساوات په یوه لور بیلیږي. په اخر کی دواړه خواوي آینتیګرال کیږي.

$$dy / dx = y$$
$$dy / y = dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int (1 / y)\, dy = \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = x + c_2$$
$$\ln|y| = x + (c_2 - c_1)\ ,\ \ c_2 - c_1 = c$$
$$\ln|y| = x + c$$
$$y = e^{x+c}$$

د y په لور اوبیونه ټولیز اوبی f ورکوي

$$\Rightarrow f = \langle x \longrightarrow e^{x+c} \rangle$$

ثابته c د شرایطو $x_1 = 0$ او $y_1 = e$ څخه لاس ته راځي.

$$c = \ln|y| - x$$
$$= \ln e - 0 = 1$$

دلت $c = 1$ او f_1 توته ټیزه اوبیونه ده.

$$\Rightarrow f_1 = \langle x \longrightarrow e^{x+1} \rangle$$

بیلګه ۵ . $x.\, |y = x - 1$

ورزیات شرایط : د $x_1 = 0$ لپاره دي $y_1 = 10$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دفرنځیالمساوات د پسی اړول کیږي او مات یا کسر په برخه ماتونو توټه کیږي.
د دي برخمساواتو اینتیګرالونی وروسته د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبیونه یا حل لاس ته راځي

ږدو $c_1 + c_2 + c_3 = c$

اوبی

$$x \cdot \sqrt{\frac{dy}{dx}} = x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

$$dy = \left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx$$

$$\int dy = \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$y = x + c_1 - 2 \cdot \ln|x| + c_2 - \frac{1}{x} + c_3$$

$$y = x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c \right\rangle$$

وریسی د اینتیګرال ثابته C د شرایطو $x = 2 ; y = 10$ ځای په ځاي کولو څخه شمیرل کیږي.

$$c = y_1 - x_1 + 2.\ln|x_1| + 1/x_1$$

ږدو $x_1 = 2,\ y_1 = 10$

$$= 10 - 2 + 2.\ \ln 2 + 1/2 \ = 9{,}8863$$

بیا د c ارزښت په ټولیز اوبی کی ځاي په ځاي کیږي او په دي توګه پارتیکوالار اوبی لاس ته راځی.

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot \to x - 2 \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + 9{,}8863 \right\rangle$$

بیلګه ۶ : $y'^2 = 1 - x^2$

شرایط: د $x = 1$ لپاره $y = 0$ دی

د دفرنځیالمساواتو ریښه(جذر) وځي یا نیول کیږي او د y په لور اوبی کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(dy / dx)^2 = 1 - x^2$$
$$dy / dx = \sqrt{1 - x^2}$$
$$dy = \sqrt{1 - x^2} . dx$$

په لاندې کی راغلی اینتیګرال $\int \sqrt{1 - x^2}\ dx$ د مخه اوبی شوی دی. دا اینتیګریشن مو بیا ټولیز اوبیونی ته بیایی.

$$\int dy = \int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + c$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x + c \right\rangle$$

د c ثابته د شرایط $x_1 = 1$ او y_1 د اینبوولو له لارې شمیرل کیږي.

که $c = -\frac{\pi}{4}$ په f کی کیږدو، نو f_1 پارتیکولار اوبیونه لاس ته راځي

$$c = y_1 - \frac{x_1}{2}\sqrt{1 - x_1^2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x_1 \blacktriangleright x_1 = 1,\ y_1 = 0$$

$$c = 0 - 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$c = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin} x - \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

بیلګه ۷ : $y' = y.[x / (x^2+1)]$

اوس dy , y او $dx , f(x) = x / (x^2 + 1)$ د دفرنخیالمساوات په دواړو خواو کی ځانله کیږي.

د مساوات دواړه خواوی اینتیګرال کیږي او بیا د y پسی اوبي یا حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dy / dx = y.[x /(x^2+1)]$$

$$dy / y = [x / [x^2 + 1)] .dx$$

$$\int dy / y = \int [x / (x^2+1)] .dx = \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$\ln|y| = (1/ 2) \ln(x^2+1) + C$$

د اینتیګرالثابتو c_1 او c_2 یوځایونه و $c_2 - c_1 = \ln | c |$ ته هدفمند دی

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2 +1} +(c_2 - c_1) , \; c_2 - c_1 = \ln |c |$$

$$\ln | y | = \sqrt{x^2 + 1} + \ln | c |$$

$$\ln | y | = \ln| \sqrt{x^2 + 1} . c |$$

$$y = \sqrt{x^2 + 1} . c$$

او لاندې f تولیز اوبیفنکشن دی

$$=> \quad f = < x \longrightarrow c\sqrt{x^2 +1} >$$

بیلګه ۸: $y ' = [(x^2 - 4) / x^2]. \quad 1 - y^2$

ور زیات شرطونه: د $x_1 = 1$ لپاره $y_1 = 1$ دی

او $g(x)$, dy او $f(x)$, dx د مساوات په دواړو لورو خانله کیږي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-4)\sqrt{1-y^2}}{x^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{(x^2-4)\cdot dx}{x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx - 4 \cdot \int \frac{dx}{x^2}$$

د مساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي، د دواړو اینتیګریشنثابتو c_1

او c_2 ، c_4 زیاتون د سره c مساوي لیکل کیږي: $c_2 - c_1 - c_4 = c$

$$\text{Arcsin } y + c_1 = x + c_2 -4[- (1 / x) + c_3]$$

$$\text{Arcy} = [(x^2 + 4) / x] + c$$

$$y = \sin [((x^2 + 4) / x) + c]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې په اخر کې ټولیز اوبی f لاس ته راځي

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + c\right)\right\rangle$$

ثابته c د ورکړ شوو شرایطو څخه پیداکیږي، داسې ، چې x_1 او y_1 د فنکشن-مساوات په ټولیز اوبی کې ځای په ځای شي.
په دې توګه ورپسې ټوټه اوبیونه f_1 لاس ته راځي

$$c = \text{Arcsin}\, y_1 - \frac{x_1^2+4}{x_1} \blacktriangleright x_1 = 1, \quad y_1 = 1$$

$$= \text{Arcsin}\, 1 - \frac{1^2+4}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 5$$

$$\Rightarrow f_1 = \left\langle x \cdot - \sin\left(\frac{x^2+4}{x} + \frac{\pi}{2} - 5\right)\right\rangle$$

بیلګه ۹ : $x^2.y^2 + y^2 + x.y^3.y' = x.y.y'$
دفرنځیالمساوات د dx سره ځلیږي اوپه $x.y^2$ ویشلکیږي.
غړي د x , dx سره په یوه خوا او د y , dy سره په بله خواځانله کیږي. انتیګریشن د اوبی په خیر یو ایمپلیځیت د فنکشن مساوات ورکوي، کوم ، چې ایمپلیځیت نه شي انځوریدلی وروسته پردو $c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$

$$x^3 \cdot y^2 + y^2 + x \cdot y^3 \cdot \frac{dy}{dx} - x \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^3 \cdot y^2 \cdot dx + y^2 \cdot dx + x \cdot y^3 \cdot dy - x \cdot y \cdot dy = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} + y \cdot dy - \frac{dy}{y} = 0$$

$$x^2 \cdot dx + \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} - y \cdot dy$$

$$\int x^2\, dx + \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y} - \int y\, dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x^3}{3} + c_1 + \ln|x| + c_2 = \ln|y| + c_3 - \frac{y^2}{2} + c_4$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{y^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{y}\right| + c = 0$$

بیلگه ۱۰ : dx - dy = / dy / y) + [(4.dx)/ (4 + x)]

د x , dx او y , dy ځانلوني وروسته د دفرنځیالمساوات دواړه خواوې اینتیګرالیږي

د اینتیګریشنثابتي، کیدی شی سره رایوځای شي، اوبی اکسپلیځیت نه شي انځوریدی

$$dx - \frac{4 \cdot dx}{4 + x} = \frac{dy}{y} + dy$$

$$\int dx - 4\int \frac{dx}{4 + x} = \int \frac{dy}{y} + \int dy$$

$$x + c_1 - 4 \cdot \ln|4 + x| + c_2 = \ln|y| + c_3 + y + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_4 + c_3 - c_2 - c_1 = c$$

$$x - 4\ln|4 + x| = \ln|y| + y + c$$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساواتد هوموجینو اووښتونکو یا واریابلو سره

د هوموجینو اووښتونکو سره دیفرنځیالمساوات په هر غړي کی یو دیفرنځیال dx یا dy لري.

د واریابلوx او y د اکسپونتتو یا په جګګیونو زیاتون د مساواتو په هر غړي کی برابر لوي دی.

دیفرنځیالمساوات د هوموجیناووښتونکو سره دSubstitution سبستیچیوشن یا (د) په ځاي اینښووني یا بدلون له لارې ځان اوبیوني یا حل ته پریږدي، په کوم کي چی y = x.z ځاي په ځاي کیږي، او د کوم سره چی بیا z د x فنکشن دی.

(د) په ځاي اینښوونه مو یوه مساوات ته بیایي، چی اوښتونکی کي بیلی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سبستیچیوشن : په ورکړ شوي مساوات $y = x . z$ او په ورته یا همدې توګه $y^2 = x^2 . z^2$ سبستیچیوشن کو.کله چی ترم $y = x . z$ د خلقاعدې سره دفرنځیالیږي، نو د dy لپاره بیا $z.dx + x.dz$ پږدو ،

دا نوي منځ ته راغلي مساوات د خانله شوو اوښتونو یا واریابلو سره د د فرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.په کوم کی چی د x^2 سره خانله شي او د x , dx همداسی z , dz سره غږي د بڼیبدلون له لارې خانله شي

$$x^2 \quad + y^2 \quad + x \cdot y \cdot y' = 0$$

$$\frac{x^2 \cdot dx}{dx} + \frac{y^2 \cdot dx}{dx} + \frac{x \cdot y \cdot dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{x^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{y^2 \cdot dx}_{n=2} + \underbrace{x \cdot y \cdot dy}_{n=2} = 0$$

Man setzt $y = x \cdot z \blacktriangleright z = f(x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

بیلګه : $x^2.dx + y^2 .dx + xydy = 0$

اوبی یا حل : اوبی په څلورو پلونو کی پلی کوو

۱ – په مساوات کی بدلون منځ راولو یا سبستیچیوشن کوو

$$y = x.z \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 . z^2$$

$$dy = z.dx + x.dz$$

$$x^2.dx + x^2.z^2.dx + xxz\,(z.dx + x.dz) = 0$$

$$x^2.dx + x^2z^2.dx + x^3z.dz = 0$$

$$dx(1 + 2z^2) = -x.z.dz$$

$$dx / x = -(z.dz) / (1+2z^2)$$

دا نوی رامنځ ته شوی مساوات د په دواړه لوري خانلهٔ شوو اووښتونکو د دیفرنځیالمساوات په بڼه راوړل کیږي.

۳ – د مساوات دواړه خواوې اینتیګرال کیږي.

د اینتیګرال $\int x.dx / (a^2 + x^2) = (\frac{1}{2}) \ln(a^2 + x^2)$ اوبی راته د مخه روښان دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{z}{1+2z^2}\,dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2}\int \frac{z}{\frac{1}{2}+z^2}\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}+z^2\right) + c_2 \blacktriangleright z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

انیتیکرایشنثابتي په یوه لور راوړل کیږي او لویه z^2 بیرته د y^2/x^2 سره بدلیږي. د لوګاریتم د زیاتون څخه بیا د یو خل(ضرب) لوګاریتم جوړیږي او د لوګاریتممساوات د اکسپونشلمساوات په څیر لیکل کیږي.

بیا x ربنښي ته راوړل کیږي او مساوار په ۴ توان کیږي.

د $e^{4(c-c)} = c$ لپاره لیکیل کیږي، اوس د y ساده شمیرل کیدی شي.

هغه f چې وروسته لاس ته راخي د دفرنځیالمساوات تولیز فنکشن اوبی دی

$$\ln|x| + \ln\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{y^2}{x^2}} = c_2 - c_1$$

$$\ln\left|x\cdot\sqrt[4]{\frac{0,5\cdot x^2+y^2}{x^2}}\right| = c_2 - c_1$$

$$x\cdot\sqrt[4]{\frac{0,5\cdot x^2+y^2}{x^2}} = e^{c_2-c_1}$$

$$\sqrt[4]{0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2} = e^{c_2-c_1}$$

$$0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = e^{4(c_2-c_1)} \blacktriangleright e^{4(c_2-c_1)} = c$$

$$0,5\cdot x^4 + x^2\cdot y^2 = c$$

$$x^2\cdot y^2 = c - 0,5x^4$$

$$y^2 = \frac{1}{x^2}(c - 0,5x^4)$$

$$y = \frac{1}{x}\sqrt{c-0,5x^4}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot -\frac{1}{x}\sqrt{c-0,5x^4}\right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

لومړی) $x + y = y'.x$

دلته $y = x.z$ سبستیچیوشن کیږي او د په توانقاعدې له مخی dy / dx جوړوو او ږدو $dy = z.dx + x.dz$. اوس د بنیبدلو له لارې x , dx او dz د مساواتو په دواړولورو خانله کیږي.

$$x + y = \frac{dy}{dx} \cdot x \quad \blacktriangleright y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \cdot z + x \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$x + x \cdot z = \frac{x}{dx} \cdot (z \cdot dx + x \cdot dz)$$

$$x \cdot dx + x \cdot z \cdot dx = x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot dz$$

د اووبنتونکو له بیلولو وروسته مساوات په دواړو لورو اینتیګرالیږي.د اینتیګر- یشنشابتي رایوخاي کیږي.

دا لاس ته راغلی f د دفرنځیالمساوات ټولیز اوبی دی.

$$x \cdot dx = x^2 \cdot dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dz$$

$$\ln|x| + c_1 = z + c_2 \quad \blacktriangleright c_1 - c_2 = c$$

$$\ln|x| + c = z \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$y = x(\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto x(\ln|x| + c) \rangle$$

بیلګه ۲ : $(x^2 + y^2).dx = xy.dx$

سبستیچیوشن یا د اووبنتونکو بدلون $y = x.z$ او $y^2 = x^2 . z^2$ د خلقاعدې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره dy / dx جوړوو او پردو dy = z.dx + x.dz .

د مساوات بڼه بدلون سره x,dx همداسې z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

د اوښتونکو، داوړو لورو ته له بيلولو وروسته مساوات اينتيګراليږي.

$$(x^2+y^2)\,dx = x\cdot y\cdot dy$$

$$x^2\cdot dx + y^2\cdot dx = x\cdot y\cdot dy$$

$$\blacktriangleright\ y = x\cdot z \Rightarrow y^2 = x^2\cdot z^2$$

$$\Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$$

$$x^2\cdot dx + x^2\cdot z^2\cdot dx = x\cdot x\cdot z(z\cdot dx + x\cdot dz)$$

$$dx + z^2\cdot dx = z^2\cdot dx + z\cdot x\cdot dz$$

$$\frac{dx}{x} = z\cdot dz$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int z\,dz$$

$$\ln|x| + c_1 = \frac{z^2}{2} + c_2$$

بياد z^2 په ځاي y^2/x^2 ځاي په ځاي کيږي، د $2(c_2 - c_1)$ لپاره c پردو.

لاس ته راغلی f د دفرنځيالمساوات ټوليز اوډې دی.

$$2\cdot\ln|x| + 2c_1 - 2c_2 = z^2 \quad \blacktriangleright\ z^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

$$2c_1 - 2c_2 = c$$

$$2\cdot\ln|x| + c = \frac{y^2}{x^2}$$

$$y^2 = x^2(2\cdot\ln|x| + c)$$

$$y = x\sqrt{2\cdot\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\langle x \mapsto x\sqrt{2\cdot\ln|x| + c}\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلکه ۳ $y' = (y/x) - (y^2 / x^2)$

سبستیچیوشن(د) په خای ایښوول

د خلقاعدي $y = x . z$ او $y^2 = x^2 . z^2$

سره dy / dx جوړوو او ړدو

$dy = z.dx + x.dz$

د مساوات د بني بدلون له لاري x,dx

همداسی z, dz په دواړو لوروخانله کوو

د اووښتونکو له بیلولو وروسته

مساوات ایتیګرالوو.

د z لپاره بیرته y/x ړدو او

ایتیګریشنثابتی رایوخاي کوو.

د مساوات د y پسی اوبی مو

تولیز اوبي f ته بیایي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z \Rightarrow y^2 = x^2 \cdot z^2$$
$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$\frac{z \cdot dx + x \cdot dz}{dx} = \frac{x \cdot z}{x} - \frac{x^2 \cdot z^2}{x^2}$$

$$z + \frac{x \cdot dz}{dx} = z - z^2$$

$$-\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}$$

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} + c_1 = \ln|x| + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{y}{x}$$

$$c_2 - c_1 = c$$

$$\frac{x}{y} = \ln|x| + c$$

$$y = \frac{x}{\ln|x| + c}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x}{\ln|x| + c} \right\rangle$$

بیلکه ۴ : $y' . (y - x) = y$

(د) په خاي ړدو $y = x.z$,

د خلقانون سره dy / dx جوړوو

مساوات بنیبدلونسره x,dx همداسی

z,dz په دواړو لورو خانله کوو.

د اووبنتونو خانلونی وروسته

دواړه خواوپاینتیګرالوو.

نو باور لري

$\int [f'(x) / f(x)].dx = \ln[f(x)] + C$

$$dy(y - x) = y \cdot dx$$

$$\blacktriangleright \quad y = x \cdot z$$
$$\Rightarrow dy = z \cdot dx + x \cdot dz$$

$$(z \cdot dx + x \cdot dz)(x \cdot z - x) = x \cdot z \cdot dx$$

$$x \cdot z^2 \cdot dx - x \cdot z \cdot dx + x^2 \cdot z \cdot dz - x^2 \cdot dz - x \cdot z \cdot dx = 0$$

$$z^2 \cdot dx - z \cdot dx + x \cdot z \cdot dz - x \cdot dz - z \cdot dx = 0$$

$$dx(z^2 - 2z) + x \cdot dz(z - 1) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{z - 1}{z^2 - 2z} dz = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2z - 2}{z^2 - 2z} dz = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|x| + c_1 + \frac{1}{2}\ln|z^2 - 2z| + c_2 = 0$$

$$2 \cdot \ln|x| + \ln|z^2 - 2z| = 2(-c_1 - c_2)$$

$$\ln x^2 + \ln|z^2 - 2z| = -2(c_1 + c_2)$$

(د) په ځایونه y = x. z

د z = y / x اینسوونی سره په

څټ راګرځول کیږي.

$$\blacktriangleright\ y = x \cdot z$$

$$\Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\ln\left|x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x}\right)\right| = -2(c_1 + c_2)$$

$$\ln|y^2 - 2xy| = -2(c_1 + c_2)$$

$$y^2 - 2xy = e^{-2(c_1 + c_2)}$$

$$\blacktriangleright\ e^{-2(c_1 + c_2)} = c$$

$$\underline{y^2 - 2xy = c}$$

وروستی اوبیونه مو فنکش-

برابرون ته بیایي، کوم چی یواځي

ایمپلیلیخیت انځوریدلی شي.

۱ . ۲ . ۳ لاینی دیفرنځیال مساوات

د لمړي نظم لاینی دیفرنځیالمساوات

لاندي ، هغه مساوات پوهیږو، چی y

او 'y په ۱ – ام ګراد کی ، دا په دي

مانا چی لاینی وي، ولري.دا شرطونه

داوبښتونکي x لپاره باور نه لري.

دلته F(x) او f(x) د x فنکشنونه

یا بلواک دي او یا ثابتی.

$$allgemein: \frac{dy}{dx} + y \cdot f(x) = F(x)$$

Beispiele:

- $y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$
- $y' \cdot x = x \cdot \sin x - y$
- $y' + x^2 = x^4 \cdot y$

د لاینی دفرنځیالمساوات اوبیونی لپاره کیدی شي، چی بیلابیلی هغه ارزښتیز

متودونه وکارول شي.

د برنولي (Bernoulli) متود له مخی اوبیونه

۱ – سبستیچیوشنوو y = u(x).v(x) له

دي څخه دخلقاعدي له لاري لاس ته راځي

$$y' - y \cdot \frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\blacktriangleright\ y = u(x) \cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

د y او ' y لپاره ارزښتونه په دفرنځیا-

لمساوات کي کیښول کیږي

$$\Rightarrow u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - u(x) \cdot v(x)\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – لومړی u(x) همداسی v(x) له نوکانو راوځي

۳ – د u(x) همداسی v(x) لپاره د ځنکشمیرنی سره یو ترم غوښتل کیږي، کوم چې نوکترم [$dv / dx -(2/x)v(x)$] او له دې سره د u خلوونې یا فاکتور صفر کیدی شي .

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)=0$$

$$\frac{dv}{v(x)}=\frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v(x)}=2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v(x)|+c_1=2\cdot\ln|x|+c_2$$

$$\ln|v(x)|=\ln x^2+c_2-c_1$$

$$v(x)=x^2\cdot e^{c_2-c_1}\blacktriangleright c_2-c_1=0$$

$$v(x)=x^2$$

دا د $v(x)=x^2$ لپاره حالت دی، د نیونی $c_2 - c_1 = 0$ لاندې

د v(x) لپاره راپیدا ارزښت، دا په دې مانا چې x^2 په مساوات کې کیښوول شي.له v(x) سره چې ځل $u(x)[dv/dx- 2v(x) / x]$ په صفر برابر شي یو پاتی غړی راکوي، له کوم سره چې du همداسی x,dx په دواړو خواو ځانله کیدی شي.

$$u(x)\left[\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v(x)\right]+v(x)\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}\blacktriangleright v(x)=x^2$$

$$u(x)\cdot\quad 0\quad +x^2\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x^3}$$

۴ – له پاتی غړي څخه u(x) د اینتیګرال کولو له لارې تاکل کدی شي.

$$\int du=\int\frac{x+1}{x^3}\,dx$$

$$\int du=\int\frac{1}{x^2}\,dx+\int\frac{1}{x^3}\,dx$$

$$u(x)=-\frac{1}{x}+c_1-\frac{1}{2x^2}+c_2\ \blacktriangleright c_1+c_2=c$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c$$

۵ – په وتلمساوات $y = u(x).v(x)$ کې راپیدا ارزښتونه کیښوول کیږي :

$u(x) = -(1/x)-(½x^2)+c; v(x) = x^2$

لاس ته راوړنه یې د ورکړ شوي اینتیګر المساوات ټولیز اوبیونه ده.

$$y=\quad u(x)\quad\cdot v(x)$$

$$=\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c\right)\cdot x^2$$

$$=-x-\frac{1}{2}+cx^2;\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f=\left\langle x\mapsto cx^2-x-\frac{1}{2}\middle|c\in\mathbb{R}\right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاګرانژ Lagrange متود له لارې اوبيونه

همدا بيلګه به اوس ددوم يعنې لاګرانژ له متود وشميرل شي.

۱ – خاې په خاى کوو0 = F(x) او راپاتې پاتې مساوات y' - y.f(x) = 0 د ورسره بلدمتود د اوبښتونکو بيلولو له لارې اوبى کوو. د اينتيګريشن ثابطې پهخاې، چې ګټور دى لوګاريتم ټاکو، چې دا لو- ګاريتم بيا له منځه ځى. $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ثابته C په لنډ شوي هوموجين مساوات y' - y .f(x) کې ثابته نه ده، بلکه د x يو فنکشن دى.

۲ – لاس ته راوړى مساوات د y لپاره د ځل يا ضرب قاعدې له لارې ديفرنځياليږي.

۳ – د y او y' دواړه ټوټه اوبيونې په سرچينز مساوات کې خاې په خاې کيږي او مساوات و dC(x) / dx پسې اوبى کيږي.

۴ – د اينتيګرالولو لا لارې C(x) لاس ته راوړ لکيږي.

۵ – په مساوات y = x².C(x) کې د C(x) لپاره ارزښت کيښول کيږي او مساوات ساده کيږي

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$y' - y\cdot f(x) = F(x) \blacktriangleright F(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - y\cdot\frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} = 2\cdot\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| + c_1 = 2\cdot\ln|x| + c_2$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + c_2 - c_1 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln x^2 + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|x^2\cdot c|$$

$$y = x^2 \cdot c \Rightarrow c = c(x)$$

$$= u(x)\cdot v(x)$$

$$u(x) = x^2 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = c(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{dc(x)}{dx}$$

$$\Rightarrow y' = 2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx}$$

$$y' - y\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$2x\cdot c(x) + x^2\frac{dc(x)}{dx} - x^2\cdot c(x)\cdot\frac{2}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x}\cdot c(x) - \frac{2}{x}\cdot c(x)$$

$$\int dc(x) = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x^3}$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{1}{x} + k_2 - \frac{1}{2x^2} + k_3 \blacktriangleright k_2 + k_3 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k;\ k \in \mathbb{R}$$

$$y = x^2 \cdot c(x)$$

$$= x^2\cdot\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + k\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا نتیجه هم همغه برابره ټولیزه اوبیونه ده، لکه د مخه تیر د لاګرانژ اوبیونی متود.	$y = -x - \frac{1}{2} + k \cdot x^2;\ k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to kx^2 - x - \frac{1}{2} \middle\| k \in \mathbb{R} \right\rangle$

بیلګه: د ۱ -ام نظم مساوت y' - ay = x د لانګرانژ او برنولي متودو له لارې اوبی کړی!

الف – (د) پۀ ځاي ایښوونی (سبستیچیوشن) y = u.v له لارې او مناسب رابیلیدنی ته dy / dx=u.(dv/dx)+ v(du/dx)	$y' - ay = x \blacktriangleright y = u(x) \cdot v(x)$ $u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} - a \cdot u(x) \cdot v(x) = x$ $u(x)\left[\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x)\right] + v(x)\frac{du}{dx} = x$
ب – u(x) له نوکانو راوځي پ– په نوکانو کی ترم باید صفر شي، چی د u اود نوکانو ځل صفر شي.د اینتیګرالولو سره لویه v(x) ټاکل کیږي.	$\frac{dv}{dx} - a \cdot v(x) = 0$ $\int \frac{dv}{v(x)} = a \cdot \int dx$ $\ln\|v(x)\| + c_1 = ax + c_2$ $\ln\|v(x)\| = ax + c_2 - c_1$ $v(x) = e^{ax + c_2 - c_1}$ $= e^{ax} \cdot e^{c_2 - c_1} \blacktriangleright c_2 - c_1 = 0$ $= e^{ax}$
ت – د v(x) لپاره دا راپیدا ترم ځاي په ځاي کیږي او د اینتیګرال کیدو له لارې u لاس ته راځي. د اینتیګرال اوبی د ټوته اینتیګرال له لارې پیدا کیږي.	$u(x) \cdot [0] + e^{ax} \cdot \frac{du}{dx} = x$ $\int du = \int \frac{x}{e^{ax}} dx$ $u(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c$
ت – لاس ته راوړی ارزښت په مساوات y = u.v کی کیښوول کیږي. لاس ته راوړنه د برنولي پسي ټولیز اوبی دی	$y = u(x) \cdot v(x) = \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + c\right) \cdot e^{ax}$ $y = -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + c \cdot e^{ax}$ $\Rightarrow f = \left\langle x \cdot \to c \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \right\rangle$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف – د لاګرانژ پسی ښی لور
په صفر مساوي ګیښنول کیږي
او dx همداسی dy, y په دواړو
لورو ځانله کیږي.
راپاتی مساوات dy / y = a.dx
اینتیګرالیږي، د y پسی بڼه–
بدلیږي او $c_2 - c_1 = \ln|c|$ ږدو.

$$y' - a \cdot y = x \blacktriangleright x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} - a \cdot y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \cdot \int dx$$

$$\ln|y| + c_1 = ax + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$

$$\ln|y| = ax + \ln|c(x)|$$

$$y = e^{ax} \cdot e^{\ln|c(x)|}$$

$$= e^{ax} \cdot c(x) = u(x) \cdot v(x)$$

ب – د y لپاره برابرون د خل–
قاعدې له لارې دیفرنځیالیږي.

$$y' = e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax}$$

پ – د y او' y لپاره ټوټه اوبیوني
په پیلبرابرون کی کیښنول کیږي.
داسی ودیز برابرون د dc(x)
پسی اوبی کیږي له دې سره
a.e^ax . C(x) له منځه ځي

$$y' \qquad -a \cdot y \qquad = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} + c(x) \cdot a \cdot e^{ax} - a \cdot e^{ax} \cdot c(x) = x$$

$$e^{ax} \cdot \frac{dc(x)}{dx} = x$$

ت ۰ ارزښت C(x) د اینتیګر–
الولو له لارې لاس ته راځي

$$\int dc(x) = \int \frac{x}{e^{ax}} \, dx$$

$$c(x) + k_1 = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$c(x) = -\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k; \; k \in \mathbb{R}$$

ټ – لاس ته راوړلی ارزښتونه
په مساوت
y = u(x) v(x) e^ax .C(x)
کی ږدو

$$y = e^{ax} \cdot c(x)$$

$$= e^{ax} \cdot \left(-\frac{ax+1}{a^2 \cdot e^{ax}} + k \right)$$

$$= -\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} + k \cdot e^{ax}; \; k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto k \cdot e^{ax} - \frac{x}{a} - \frac{1}{a^2} \,\middle|\, k \in \mathbb{R} \right\rangle$$

نتیجه د لاګرانژ پسی ټولیز اوبی دی.
دا د برنولي د نتیجی سره سرخوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: مساوات y' + y/x = sinx د برنولي متود سره اوبې کړی.

$$y' + \frac{y}{x} = \sin x$$

(د) په ځایکو y = u(x).v(x) او y او y' په دفرنځیالبرابرون کی ږدو

$$\blacktriangleright y = u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow y' = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

$$u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} + \frac{u(x)\cdot v(x)}{x} = \sin x$$

$$u(x)\cdot\left(\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x}\right) + v(x)\frac{du}{dx} = \sin x$$

نوکترم په 0 سره برابر ږدو او v شمیری.

$$\frac{dv}{dx} + \frac{v(x)}{x} = 0 \Rightarrow v(x)\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v(x)} = -\int \frac{dx}{x}$$

د پاتیمساوات څخه راپاتی دی v(x)(du/dx) = sin x

$$\ln|v(x)| + c_1 = -\ln|x| + c_2 \;\blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c|$$

$$\ln|v(x)| = \ln|x^{-1}| + \ln|c|$$

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot c^c \;\blacktriangleright c = 0$$

د c = 0 له امله لاس ته راځي: v(x) = 1 / x

$$\Rightarrow v(x) = \frac{1}{x}$$

$$v(x)\frac{du}{dx} = \sin x$$

له پاتبرابرون څخه u(x) د اینتیګرالولوله لارې تاکل کیږي

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{du}{dx} = \sin x$$

$$\int du = \int x\cdot\sin x\, dx$$

$$u(x) + k_1 = \sin x - x\cdot\cos x + k_2 \;\blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$

$$u(x) = \sin x - x\cdot\cos x + k;\; k\in\mathbb{R}$$

په (x). y = u(x) کی لاس ته راوړل شوي ارزښتونه د u او v لپاره ځاي په ځاي کړی. لاس ته راوړنه د برنولي پسی د ورکړ شوي مساوات تولیز اوبیدی.

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$= (\sin x - x\cdot\cos x + k)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x}$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{k}{x} \,\middle|\, k\in\mathbb{R} \right\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه : مساوات $y' + y = e^{-x}$ د لاګرانژ د متود له لارې اوبی کړی.

ړدو $F(x) = e^{-x} = 0$ او پاتې مساوات د اووښتونو د بیلولو له لارې اوبی کوو.

$$y' + y = e^{-x} \blacktriangleright e^{-x} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} + y = 0$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

د اینتیګریشنثابتو په ځیر کینښول کیږي $c - c = \ln|c(x)|$ او y تاکو د خلقاعدې سره y' شمیرل کیږي

$$\ln|y| + c_1 = -x + c_2 \blacktriangleright c_2 - c_1 = \ln|c(x)|$$
$$\ln|y| = -x + \ln|c(x)|$$
$$y = e^{-x} \cdot c(x)$$
$$= u(x) \cdot v(x)$$
$$y' = \frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}$$

د y او y' لپاره برخ اوبیونی په پیلمساوات کی کینښول کیږي او $c(x) . e^{-x}$ او e^{-x} لرې کیږي.

$$\underbrace{\frac{dc(x)}{dx} \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x}}_{y'} + \underbrace{e^{-x} \cdot c(x)}_{y} = e^{-x}$$

د اینتیګریشن له لارې $c(x)$ تاکل کیږي.

$$\int dc(x) = \int dx$$
$$c(x) + k_1 = x + k_2 \blacktriangleright k_2 - k_1 = k$$
$$c(x) = x + k;\ k \in \mathbb{R}$$

په مساوات $y = e^{-x} . (x)$ کې $c(x)$ کینښوول کیږي. نتیجه د لاګرانژ پسی تولیز اوبیونه ده

$$y = e^{-x} \cdot c(x) \blacktriangleright c(x) = x + k$$
$$= e^{-x}(x + k);\ k \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow f = \langle x \cdot - e^{-x}(x + k) | k \in \mathbb{R} \rangle$$

تمرینونه

۱ . ۲ د لمړینظم دفرنځیالمساوات

۱ . ۲ . ۱ د فرنځیالمساوات د بیلوشوو اوښتونو سره

د لاندې دفرنځیالمساوات لپاره تولیزبن اوبیونیورکړی

1. $y' = \frac{y}{2a}$
2. $y' = axy$
3. $y' - 1 = x^2 + x^4$
4. $y' - x^3 = y - x^3$
5. $\frac{y'}{2x} = y^2$
6. $y' = \frac{y^2}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $2xy^2 = y'$

8. $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}$

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2 + x^2}}$

10. $x^2 + 2x = y'$

11. $xy' = y \cdot \ln y$

12. $(1 - x^2)\,dy + xy \cdot dx = 0$

13. $y' = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

14. $y' = e^x y$

15. $\sqrt{y'} = y'x$

16. $y' = (yy')^2$

17. $dy = \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

18. $y' = \frac{x^2\sqrt{x^2 + 4}}{y^2\sqrt{y^2 + 9}}$

19. $yx \cdot \sin(2x) = y'$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-}$

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 y^3$

23. $(x + y)^2 = y'$

24. $y'^2 y = x^2 y' - y'$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

26. $y' \cdot \operatorname{Arcsin} y = x^2$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

28. $y \cdot \ln x = y'$

29. $x \cdot \sinh x = y' \cdot \cosh y$

30. $\frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$

۱ . ۲ . ۲ دیفرنځیالمساوات د هوموجین اووښتونکو یا واریابلو سره لاندې دفرنځیالمساوات اوبی کړی

1. $y'x = -(x + y)$

2. $y'x = y$

3. $y' = \frac{x + y}{x}$

4. $y'x^2 - yx = x^2 + y^2$

5. $y'xy = y^2 - x^2$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

7. $dy \cdot x = (y - x)\,dx$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$

9. $(x + y)\,dx - (x - y)\,dy = 0$

10. $x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$

11. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$

12. $y' = \frac{y}{x} \ln\frac{y}{x}$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

14. $y^2 + (x^2 - xy)\,y' = 0$

15. $y^2 \cdot dx - 3x^2 \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

17. $xy' = y(\ln y - \ln x)$

18. $y \cdot dx + \sqrt{4xy} \cdot dy = x \cdot dy$

19. $\frac{2y(y - x)}{x^2 - 2xy + y^2} = y'$

20. $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۲ . ۳ لاینې دیفرنځیالمساوات

لاندې دیفرنځیالمساوات د برنولي او لاګرانژ متودونو سره اوبې کړې.

1. $y' + 2xy = \frac{x}{e^{x^2}}$	**2.** $y' = e^x - y$	**3.** $y' - y = x^2 - 1$
4. $y' = e^{3x} - 2y$	**5.** $y'x = y + x^2 \cdot \sin x$	**6.** $y'x = x \cdot \sin x - y$
7. $y' + y + \cos x - e^{2x} = 0$	**8.** $y' + ay = b \cdot e^{cx}$	**9.** $y' + ay - b \cdot \sin(cx) = 0$
10. $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{\ln x}$	**11.** $y' = a + bx + cy$	**12.** $xy' + 1 = e^x + y$
13. $y'(1 - x^2) + xy = 1$	**14.** $\frac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$	**15.** $y' + y \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$
16. $y' - y \cdot x = x^2 - 1$	**17.** $y'x^2 + y = x$	**18.** $y' + \frac{1}{1+x} y + x^2 = 0$
19. $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$	**20.** $y' + y \cdot \tan x = \sin(2x)$	**21.** $y' - 2y = 3 - x$

۱ . ۳ د دویم نظم دیفرنځیالمساوات

د دویم نظم دیفرنځیالمساوات لاندې یو مساوات پوهیږو، چې $y'' = d^2y / dx^2$ د خورا جګ دفیرنځیالکوشنت یا دفیرنځیالویش په څیر ولري، د دې ترڅنګ کیدی شي $y' = dy / dx$. x او y رامنځ ته شي.

د دیفرنځیالمساواتو په دې پیلونی په چاپیریال کی کیدی شي ، چی لنډ یو څو د دویم نظم دیفرنځیالمساوات او د هغو کارونه یا استعمال باندې خبرې وشي.

د $y'' = f(x)$ بنی دیفرنځیالمساوات

بېلګه:

د اوبیوني تلنه: د رابیلیدنی د له منځه وړلو د اوبیوني پرینځیپ ډیرواره اینتیګرالول دي.

الف: د برابرون دواړه لوري اینتیګرالیږي

۲ – راپورته شوي دفرنځیالمساوات بیا اینتیګرالیږي.

۳ – په ورکړ شوي حالت کې له شرایطو c_1 او c_2 وټاکی

Beispiel:

$$y'' = -\sin x$$

$$\int y''\,dx = \int -\sin x\,dx$$

$$y' = \cos x + c_1 ; c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int y'\,dx = \int \cos x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$\underline{\underline{y = \sin x + c_1 x + c_2 ; c_2 \in \mathbb{R}}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x \mapsto -\sin x + c_1 x + c_2 | c_1 ; c_2 \in \mathbb{R} \rangle}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی:

لمړی – $y'' = 1 / (1+x^2)$

د لمړي اینتګریشن سره لاس ته y' راځي

بیا د y' اینتیګریشن سره y لاس ته راځي اوله دې سره د f تولیزه اوبیونه

$$\int y''\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$y' = \operatorname{Arctan} x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int \operatorname{Arctan} x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_3 + c_1 x + c_4$$

$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 = c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto x \cdot \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

دویم – $y'' = x^2 + x + 1$

لمړی اینتیګرال راکوي

ثابتي c_3, c_4, c_5 د اینتیګر-یشنثابتی c_1 ته یوځاي کیږي

دویم ایتګریشن y راکوي

ثابتی c_6, c_7, c_8, c_9 ایتیګریشن ثابتی c_2 ته رائیوځایکیږي

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int dx$$

$$y' = \frac{x^3}{3} + c_3 + \frac{x^2}{2} + c_4 + x + c_5$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \frac{1}{3}\int x^3\,dx + \frac{1}{2}\int x^2\,dx + \int x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = \frac{x^4}{12} + c_6 + \frac{x^3}{6} + c_7 + \frac{x^2}{2} + c_8 + c_1 x + c_9$$

$$= \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \right\rangle$$

---

3. $y'' = x \cdot e^x = u(x) \cdot v'(x)$

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - {}$$

$$+ \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

$$\int x \cdot e^x\,dx = x \cdot e^x - \int e^x\,dx$$

$$= x \cdot e^x - e^x + c_1$$

دلته f تولیز اوبیفنکشن دی

$$\int y''\,dx = \int x \cdot e^x\,dx = \int u(x) \cdot v'(x)\,dx$$

$$y' = x \cdot e^x - e^x + c_1$$

$$\int y'\,dx = \int x \cdot e^x\,dx - \int e^x\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y = x \cdot e^x - e^x + c_3 - e^x + c_4 + c_1 x + c_5$$

$$\blacktriangleright\ c_3 + c_4 + c_5 = c_2$$

$$= e^x(x-2) + c_1 x + c_2$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto e^x(x-2) + c_1 x + c_2 \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جگ نظم دف. مساوات کیدی شي کله کله په ورته توگه اوبی شي

4. $y^{(4)} = x$

لمړی اتیگرالونه "' y رااکوي،
دومه – ''y دریمه– 'y او
څلورم انتیکریشن y راکوي

$$\int y^{(4)}\,dx = \int x\,dx$$

$$y''' = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$\int y'''\,dx = \frac{1}{2}\int x^2\,dx + c_1 \cdot \int dx$$

$$y'' = \frac{x^3}{6} + c_2 + c_1 x + c_3$$

$$\int y''\,dx = \frac{1}{6}\int x^3\,dx + c_1 \cdot \int x\,dx + (c_2 + c_3)\int dx$$

$$y' = \frac{x^4}{24} + c_4 + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_5 + (c_2 + c_3)x + c_6$$

$$\int y'\,dx = \frac{1}{24}\int x^4\,dx + \frac{1}{2}c_1 \cdot \int x^2\,dx + (c_2 + c_3)\int x\,dx + (c_4 + c_5 + c_6)\int dx$$

اړوند انتیکریشنثابتی سره
رایوخاي کیږي

$$y = \frac{x^5}{120} + c_7 + \frac{x^3}{6}c_1 + c_8 + (c_2 + c_3)\frac{x^2}{2} + c_9 + (c_4 + c_5 + c_6)x + c_{10}$$

$k_1 = c_1$

$k_2 = c_2 + c_3$

$k_3 = c_4 + c_5 + c_6$

$k_4 = c_7 + c_8 + c_9 + c_{10}$

$k_1; k_2; k_3; k_4 \in \mathbb{R}$

$$= \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4$$

د لته f د تولیز ابیفنکشن دی

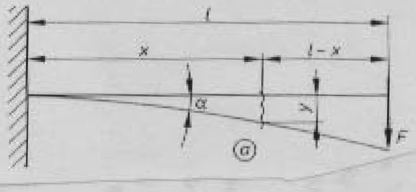
$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{x^5}{120} + k_1\frac{x^3}{6} + k_2\frac{x^2}{2} + k_3 x + k_4 \right\rangle$$

بیلگه : یوه یونوریز غزول شوي باوړونی کیږون y وشمیری، چی اوږدوالی l او تکیه‌وله پریوتلی زور یی F وي له میخانیك څخه د کیږون شمیرنی برابرون څرگند دی. د یو لنډ برابرون دی، چی په تخنیك د واړه ورسره بلد کیږون لپاره باور لري. په یوه په خوښه ځاي a کی کیږومومنت دی $-F(l-x)$

کیږونمونت = M

د ترموالی– یاالاستیخیتي مودول= E

د هواري ورونمومنت = I



(c) ketabton.com: The Digital Library

د اینتیګراولو له لارې "y په 'y اوړي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = -F(l-x)$$

$$= \frac{F(l-x)}{E \cdot I}$$

د دویم اینتیګرالونی د مخه ثابته c_1 د باروړوني مخ ته پراته شرایطو څخه شمیرل کیږي. د $x = 0$ په ځای کی جګوالی 'y هم صفر دی. د دې سره ثابته $c_1 = 0$ ده.

$$y' = \frac{F}{E \cdot I} \int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + c_1$$

für $x = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

دویم اینتیګرولول مود یفرنشلبررابرون ته بیایي.

$$y = \frac{F \cdot l}{E \cdot I} \int x\,dx - \frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2\,dx$$

$$= \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + c_2$$

دومه ثابته c_2 هم صفر دی، دا چی د y راګرونه د $x = 0$ په ځای کی د صفر سره برابره ده.

für $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$$y = \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

ماکسیمال ګرونه د $x = l$ سره پرته ده. د y_{max} د $x = l$ ځای په ځای کولو سره لاس ته راځي.

$$\Rightarrow f = \left\langle x \cdot - \frac{F}{E \cdot I}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\right\rangle$$

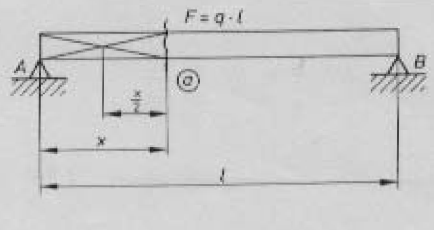
für $x = l \Rightarrow y_{max} = \frac{F}{E \cdot I} \cdot \frac{l^3}{3}$

بیلګه په دوه ستنو ولاړ باروړونکي ماکسیمال ګرون وشمیرئ، د لیکي بار q سره. د تیر په یوه ځای a باندې مومنتمساوات ځاي په ځاي کوو.

دا چی بار په برابرډول ویشل شوی دی، نو پرتی هر A او B هر یو یی د ټول بار نیمی دي.

$$A = B = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{F}{2}$$

$$M = \frac{q \cdot l}{2}\,x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

Die Momentengleichung د مومنټبرابرون

$$M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

په ډيفرنشيالمساوات کي کيښول کيږي.

$$y'' = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \blacktriangleright M = \frac{q \cdot l}{2} x - \frac{q}{2} x^2$$

$$= -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} x + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} x^2$$

د y'' لپاره برابرون د اينتيګريشن سره و y' ته بيرته بيول کيږي

$$y' = -\frac{q \cdot l}{2 \cdot E \cdot I} \int x \, dx + \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx$$

$$= -\frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} + c_1$$

په $x = l / 2$ ځاي کی هغه لوي کږون مخ ته پروت دی، دا په دې مانا چی په دې ځاي کی تنجنت د کږونکربنی سره پرته يعنی افقي پرته ده، جګی يا جګوالی $y' = 0$ مساوي په صفر دی.

$$x = \frac{l}{2} \quad y' = 0$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + c_1$$

$$c_1 = 0 - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

د c_1 لپاره راپيداشوی ارزښت په برابرون y' کی ايښول کيږي. د y' د بيا يا نوي اينتيګرلوني سره فنکشن y ټاکل کيږي.

$$y' = \frac{q \cdot x^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^2}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$= \frac{q}{6 \cdot E \cdot I} \int x^3 \, dx - \frac{q \cdot l}{4 \cdot E \cdot I} \int x^2 \, dx + \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \int dx$$

$$y = \frac{q \cdot x^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{q \cdot l^3 \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} + c_2$$

د $x = 0$ په ځاي کی راګرون $y = 0$ دی. د دې سره ثابته $c_2 = 0$ ده.

$$x = 0 \quad y = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} (x^4 - 2 \cdot l \cdot x^3 + l^3 \cdot x)$$

د $x = l / 2$ لپاره هغه خورا لوي کږون y_{max} مخ ته لرو دی، چی د ½ اينښوولو سره د خورا لوي کږون فرمول لاس ته راځي

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow y_{max} = \frac{q}{24 \cdot E \cdot I} \left(\frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{2} \right)$$

$$= \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y''=f(y)$ فورم یا بڼي دیفرنځیال مساوات

اوبیوونکنه *Lösungsgang:*

$$y' = \frac{dy}{dx} = z,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dy},$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

۲ – مساوات اینتیګرایږي او z شمیرل کیږي.

۳ – او بیا ورپسی د واریابلی د خانلونی متود له لاري شمیرل کیږي.

د اوبیونی په خیر ایمپلیځیت فنکشنمساوات لاس ته راځي

بېلګه **Beispiel:**

$$y'' = ay \;\blacktriangleright y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = ay \;\blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

$$\frac{dz}{dy}z = ay$$

$$z\cdot dz = a\cdot y\cdot dy$$

$$\int z\,dz = a\cdot\int y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{ay^2}{2} + c_2$$

$$z^2 = ay^2 + 2(c_2 - c_1) \;\blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay^2 + c_3} \;\blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$\int dx = \int\frac{dy}{\sqrt{ay^2 + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|y + \sqrt{y^2 + \frac{c_3}{a}}\right| + c_5$$

بېلګې: **Beispiele:**

1. $y'' = \frac{a}{2}$

$$\frac{dz}{dx} \qquad \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{dy}{dy} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright y' = z$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{a}{2} \;\blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}z$$

$$\frac{dz}{dy}z = \frac{a}{2}$$

$$\int z\,dz = \frac{a}{2}\int dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات اینتیګریشن پسی z شمیرل کیږي

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{a}{2} y + c_2$$

$$z^2 = ay + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{ay + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

ورپسی د اووښتونی د خانلونی متود له لارې شمیرل کیږي

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{ay + c_3}}$$

$$x + c_4 = \frac{2}{a} \sqrt{ay + c_3} + c_5 \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$(x + c_6)^2 = \frac{4}{a^2} (ay + c_3)$$

$$\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3 = ay$$

$$\Rightarrow y = \frac{a}{4} (x + c_6)^2 - \frac{c_3}{a}$$

د لته f ټولیزه اوبیونه ده

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{a} \left[\frac{a^2}{4} (x + c_6)^2 - c_3 \right] \right\rangle$$

2. $y'' = -\frac{1}{2} \sin y$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright y' = z$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{2} \sin y \quad \blacktriangleright \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} z$$

$$\int z \, dz = -\frac{1}{2} \int \sin y \, dy$$

$$\frac{z^2}{2} + c_1 = \frac{1}{2} \cos y + c_2$$

$$z^2 = \cos y + 2(c_2 - c_1) \quad \blacktriangleright 2(c_2 - c_1) = c_3$$

$$z = \sqrt{\cos y + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

د دفرنځیالمساوات اوبیونه مو یوه ناواوبیووني (نامنحل) اینتیګرال ته بیایي.

$$x + c_4 = \int \frac{dy}{\sqrt{\cos y + c_3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y'' = f(y')$ بڼي دفرنځيلامساوات

Lösungsgang: اوبيونلار

$y' = \frac{dy}{dx} = z$

$y'' = \frac{dz}{dx}$ ein.

۲ – راپورته شوی مساوات اینتیګرال کیږي او په z پسی ترتیبیږي

۳ – دلته z اوبی کیږي، بیا اینتیګرالول یي د دیفرنځیال-مساوات ټولیز اوبیونه لاس ته راځي.

Beispiel: بیلګه:

$$y'' = ay' \quad \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a \cdot z$$

$$\frac{dz}{z} = a \cdot dx$$

$$\int \frac{dz}{z} = a \cdot \int dx$$

$$\ln z + c_1 = ax + c_2$$

$$\ln z = ax + c_2 - c_1 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = e^{ax + c_3} \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int e^{ax + c_3} dx$$

$$y = \frac{1}{a} e^{ax + c_3} + c_4 \quad \blacktriangleright e^{c_3} = c_5$$

$$\Rightarrow f = \left\langle x \mapsto \frac{1}{a} c_5 \cdot e^{ax} + c_4 \right\rangle$$

Beispiele: بیلګې:

1. $y'' = y'^2$

$$y'' = y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{z} + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$c_2 - c_1 = c_3$$

$$-\int \frac{dx}{x + c_3} = \int dy$$

$$-\ln|x + c_3| + c_4 = y + c_5 \quad \blacktriangleright c_4 - c_5 = c_6$$

$$\Rightarrow y = c_6 - \ln|x + c_3|$$

$$\Rightarrow f = \langle x \mapsto c_6 - \ln|x + c_3| \rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. $y'' = 1 - y'^2$

$$y'' = 1 - y'^2 \blacktriangleright y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1 - z^2$$

$$\int \frac{dz}{1 - z^2} = \int dx$$

$$\text{Artanh}\, z + c_1 = x + c_2 \quad \blacktriangleright c_2 - c_1 = c_3$$

$$z = \tanh(x + c_3) \quad \blacktriangleright z = \frac{dy}{dx}$$

$$\int dy = \int \tanh(x + c_3)\, dx$$

$$y + c_4 = \ln|\cosh(x + c_3)| + c_5 \quad \blacktriangleright c_5 - c_4 = c_6$$

$$y = \underline{\underline{c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|}}$$

د لته f د تولیز اٍیفنکشن دی

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x, -c_6 + \ln|\cosh(x + c_3)|\rangle}}$$

تمرینونه

۳۱ . د دوم نظم دفرنځیالمساوات

لاندي دفرنځیالمساوت اوبی کړی

1. $y'' = \frac{1}{x}$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

3. $y'' - x^3 = 0$

4. $y'' = x + \sin x$

5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

6. $y'' = \tan x$

7. $y'' = \sinh x$

8. $y'' = e^{x^2}$

9. $y^{(4)} = \cos x$

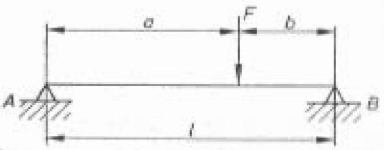
10. $y'' = e^x$

11. $y^{(4)} = \sinh(2x)$

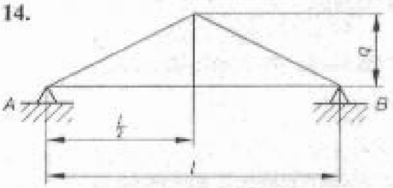
12. $y^{(5)} = \cosh(ax)$

د کږون لاین او خورا جګ یا ماکسیمال کږوونی مساوات د لاندي بارونحالت یا بار حالت یا دروندونی حالت لپاره پیدا کړی

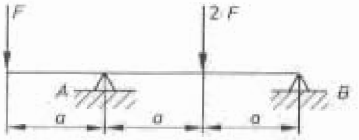
13.



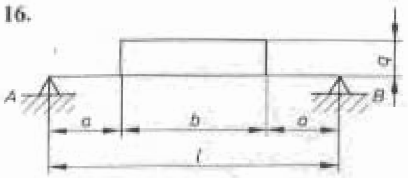
14.



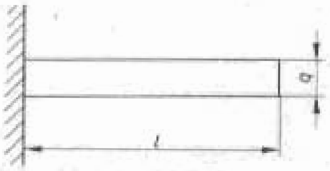
15.



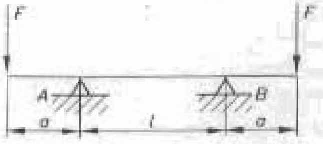
16.



17.



18.



لاندي دفرنشیالمساوات اوبی کړی

19. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$ 20. $y'' = a \cdot e^{y}$ 21. $y^4 - y^3 y'' = 1$

22. $y'' = \dfrac{1}{y}$ 23. $y^2 = k^2 y''$ 24. $y'' = y^2$

25. $y^2 \cdot y'' = a$ 26. $y'' = 6y - 4$ 27. $y'' = 1 + y'^2$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$ 29. $y'' = e^{y'}$ 30. $y'' = y'^3$

31. $y'^2 - 3y''^2 = 0$ 32. $y''' + y''^2 = 0$ 33. $xy''^2 = y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تمرینونو اوبیونه یا حل

۱ . ۱ بنسټکلیمی تمرینونه

1. $y''=x\cdot e^x$

$$\int x\cdot e^x\,dx=e^x(x-1)+c_1$$

$$y''=(y')'=x\cdot e^x$$

$$y'=\int x\cdot e^x\,dx$$

$$y'=x\cdot e^x-e^x+c_1$$

$$y=\int x\cdot e^x\,dx-\int e^x\,dx+c_1\int dx$$

$$y=e^x(x-1)+c_2-e^x-c_3+c_1x+c_4$$

$$c_2-c_3+c_4=c$$

2. $y''-x=0$

$$y''=(y')'=x$$

$$y'=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+c_1$$

$$y=\int (y')\,dx=\frac{1}{2}\int x^2\,dx+c_1\int dx$$

$$y=\frac{1}{2\cdot 3}x^3+c_2+c_1x+c_3$$

$$c_2+c_3=c$$

$$y=\frac{1}{6}x^3+c_1x+c$$

3. $2y'-\cos x=0$

$$y'=\frac{1}{2}\cos x$$

$$y=\frac{1}{2}\int \cos x\,dx$$

$$y=\frac{1}{2}\sin x+c$$

4. $x\cdot y''=3y'$

$$x\cdot y''=3y' \blacktriangleright y'=z;\quad y''=z'$$

$$z'=\frac{dz}{dx}$$

$$x\cdot z'=3z$$

$$x\cdot\frac{dz}{dx}=3z$$

$$\frac{dz}{z}=\frac{3dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dz}{z} = 3 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln z = 3 \ln x$$

$$z = x^3 \quad \blacktriangleright z = y'$$

$$y' = x^3 \Rightarrow y = \int x^3 \, dx = \frac{x^4}{4} + c$$

5. $y \cdot \ln x = x \cdot y'$

$$y \cdot \ln x = x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\ln x}{x} \, dx = \frac{1}{y} \, dy$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \frac{1}{y} \, dy$$

$$\frac{1}{2} \ln^2 x = \ln y$$

$$y = e^{\frac{1}{2} \ln^2 x} + c$$

6. $y' \cdot y + y' + x = 0$

$$y'(y+1) = -x$$

$$\frac{dy}{dx}(y+1) = -x$$

$$\int (y+1) \, dy = -\int x \, dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = -\frac{x^2}{2} + c_1$$

$c_2 = 2c_1$

$$y^2 + 2y = -x^2 + c_2$$

$c = 1 + c_2$

$$y = -1 \pm \sqrt{1 - x^2 + c_2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{c - x^2}$$

7. $y' - x^2 = 3e^x$

$$y' = 3e^x + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + x^2$$

$$dy = (3e^x + x^2) \, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy = \int (3e^x + x^2)\,dx$$

$$y = 3e^x + \frac{1}{3}x^3 + c$$

8. $\sin x - e^x = y'$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x - e^x$$

$$dy = (\sin x - e^x)\,dx$$

$$\int dy = \int (\sin x - e^x)\,dx$$

$$y = -\cos x - e^x + c$$

9. $y \cdot y' = x + 1$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = x + 1$$

$$y \cdot dy = (x+1) \cdot dx$$

$$\int y\,dy = \int (x+1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + c_1$$

$c = 2c_1$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 2x + c}$$

10. $y' \cdot y^2 = y' - x^2$

اوبیونه د y پسی اوبیوړ نه دی،
له دي امله ایمپلیښیت اوبیونه

$$y'(y^2 - 1) = -x^2$$

$$dy(y^2 - 1) = (-x^2)\,dx$$

$$\int (y^2 - 1)\,dy = -\int x^2\,dx$$

$$\frac{y^3}{3} - y = -\frac{x^3}{3} + c$$

11. $\frac{dy}{dx} - 3x = e^x$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + 3x$$

$$\int dy = \int (e^x + 3x)\,dx$$

$$y = e^x + \frac{3}{2}x^2 + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. $y' - x^2 = x^2 - y'$

$$2y' = 2x^2 \quad \|:2$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2$$

$$\int dy = \int x^2\,dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} + c$$

13. $\frac{dy}{dx} + \cos x = 1$

$$dy = (1 - \cos x)\,dx$$

$$\int dy = \int (1 - \cos x)\,dx$$

$$y = x - \sin x + c$$

14. $y^3 \cdot y' = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$c = 4c_1$

$$y^3 \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\int y^3 \cdot dy = \int \sqrt{x^2 - 1}\,dx$$

$$\frac{y^4}{4} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c_1$$

$$y^4 = 2x\sqrt{x^2 - 1} - 2\ln|x + \sqrt{x^2 - 1}| + c$$

$$y = \pm\sqrt[4]{2x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 + c}$$

15. $x^2 \cdot y' = x^4 - x^2$

که دفرنشیالمساوات په x^2 ویشل کیږي،
باید $x \neq 0$ وغوښتل شي.
که د $x \neq 0$ لپاره اوبیونه په پام کې ونیول
شي، پیژندل کیږي چې دفرنشیالمساوات
د $x = 0$ لپاره هم اوبیونه پوره کوي، په دې
توګه د ټول x لپاره اوبیونه پوره ده.

$$x \neq 0 \Rightarrow y' = x^2 - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 1$$

$$dy = (x^2 - 1)\,dx$$

$$\int dy = \int (x^2 - 1)\,dx$$

$$y = \frac{x^3}{3} - x + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

16. $e^x \cdot y' = y$

ساده د $y = 0$ پارتیکولار اوبیونه پیژندل کیږي.

د نورې کارونې لپاره دې $y \neq 0$ نیول شوی وي

Partikuläre Lösung: $y=0$ پارتیکولار اوبیونه

$$y \neq 0 \Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^{-x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^{-x}\,dx$$

$$\ln|y| = -e^{-x} + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-e^{-x}+c_1}$$

$$= e^{-(e^{-x})} \cdot e^{c_1}$$

$$c = e^{c_1}$$

$$y = c \cdot e^{-(e^{-x})}$$

د $c = 0$ سره پارتیکولار- یا توته اوبیونه خوندي ده.

17. $y'' = 7x^3$

$$\frac{dy'}{dx} = 7x^3$$

$$\int dy' = 7\int x^3\,dx$$

$$y' = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{4}x^4 + c_1$$

$$\int dy = \int\left(\frac{7}{4}x^4 + c_1\right)dx$$

$$y = \frac{7}{20}x^5 + c_1x + c_2$$

18. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \sin x$$

$$\frac{dy'}{dx} = \sin x$$

$$\int dy' = \int \sin x\,dx$$

$$y' = -\cos x + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x + c_1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy = \int (-\cos x + c_1)\,dx$$

$$y = \underline{\underline{-\sin x + c_1 x + c_2}}$$

19. $3x - y'' = a$

$$y'' = 3x - a$$

$$\frac{dy'}{dx} = 3x - a$$

$$\int dy' = \int (3x - a)\,dx$$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 - ax + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - ax + c_1\right) dx$$

$$y = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + c_1 x + c_2}}$$

20. $y'' = y'$

Partikuläre Lösung پارتیکولار اوبیونه

ثابته = $\underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

سملاسی y = a = const د پارتیکو- لار اوبیونی په ځیر پیژندل کیږي. د پسی اوبیونی لپاره تیك د0 =|y′ سره فنکشن رانیول کیږي، دا په دې مانا چی ناثابت فنکشنونه

$$y' \neq 0 \Rightarrow y'' \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{dx} \cdot \frac{1}{y'} = 1$$

$$\frac{dy'}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy'}{y'} = \int dx$$

$$\ln |y'| = x + c_1^*$$

$$e^{\ln |y'|} = e^{x + c_1^*}$$

$$= e^x \cdot e^{c_1^*}$$

$e^{c_1^*} = c_1$

$$y' = c_1 \cdot e^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=c_1\cdot e^x$$

$$\int dy=\int c_1\cdot e^x\,dx$$

$$y=c_1\cdot e^x+c_2$$

په روښانه توګه د $C_1=C_2=0$ همداسې د $C_1=0$ سره پورتنی پارتیکیولار اوبې په تولیز اوبي کې دننه یا خوندي دي.

21. $y''=x\cdot\cos x$

$$\frac{dy'}{dx}=x\cdot\cos x$$

$$\int dy'=\int \underset{u_1}{x}\cdot\underbrace{\cos x\,dx}_{dv_1}$$

$$y'=x\cdot\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\frac{dy}{dx}=x\cdot\sin x+\cos x+c_1$$

$$\int dy=\int(x\cdot\sin x+\cos x+c_1)\,dx$$

$$y=\int \underset{u_2}{x}\cdot\underbrace{\sin x\,dx}_{dv_2}+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx+\sin x+c_1x$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+\sin x+c_1x+c_2$$

$$=2\sin x-x\cdot\cos x+c_1x+c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۲ د لمړي نظم ديفرنځيالمساوات ته تمرينونه

۱ . ۲ . ۱ ديفرنځيالمساوات د بيلوشوو اووښتونکو سره

1. $y' = \frac{y}{2a}$

$y = 0$: پارتيکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{2a}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2a} \int dx$$

$$\ln |y| = \frac{x}{2a} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{x}{2a} + c_1}$$

$$= e^{\frac{x}{2a}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{x}{2a}}$$

$c = e^{c_1}$

پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبی هم دننه دي(C = 0)

2. $y' = axy$

$y = 0$: پارتيکولار اوبيونه

نيونه: Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = ax$$

$$\int \frac{dy}{y} = a \int x \, dx$$

$$\ln |y| = \frac{ax^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\frac{a}{2}x^2 + c_1}$$

$$= e^{\frac{a}{2}x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{\frac{a}{2}x^2}$$

د c = 0 سره پارتيکيولار اوبيونه په ټوليز اوبيونی کی دننه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. $y'-1=x^2+x^4$

$$\frac{dy}{dx}=1+x^2+x^4$$

$$\int dy=\int(1+x^2+x^4)\,dx$$

$$y=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+c$$

4. $y'-x^3=y-x^3$

د دي ديفرنځيالبرابرون اوبی د تيرتمرين ۱ څخه د $a=1/2$ سره، لاس ته راوړل کيږي

$$y'=y+x^3-x^3$$

$$y'=y$$

$$y=c\cdot e^x$$

5. $\frac{y'}{2x}=y^2$

$y=0$: زيکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y\neq 0$

$$\Rightarrow\ y'\cdot\frac{1}{y^2}=2x$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y^2}=2x$$

$$\int\frac{dy}{y^2}=2\int x\,dx$$

$$-\frac{1}{y}=x^2+c$$

$$y=-\frac{1}{x^2+c}$$

$$y=0$$

د ديفرنځيالمساوات اوبيونه يو زينکولار اوبی لري.

6. $y'=\frac{y^2}{x^2}$

$y=0$:زينکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y\neq 0$

$$\Rightarrow\ y'\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{1}{x^2}$$

ساده پيژندلکيږي، چې اوبی $y=0$ ، زيکولار اوبی دی چې دا به وروسته وښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c$$

$$= -\frac{1-c\cdot x}{x}$$

$$y = \frac{x}{1-c\cdot x}$$

$$y = 0$$

7. $2xy^2 = y'$

د دي ديفرنځيالمساوات اوبی د ترمخه تیر تمرين ۵ څخه رانيول کيدی شي

$\underline{\underline{y=0}}$ :: زيکولارزوبيونه

Voraussetzung: $y \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x \Rightarrow y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = -\frac{1}{x^2+c}$$

$$y = 0$$

8. $y' = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}$$

$$a^2 y \cdot dy = b^2 x \cdot dx$$

$$a^2 \int y\, dy = b^2 \int x\, dx$$

$$a^2 \cdot \frac{y^2}{2} = b^2 \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 + 2c_1$$

$c = -2c_1$

اوبی په ایمپلیځیته بڼه (اهرامغوځی)

$$\underline{\underline{b^2x^2 - a^2y^2 = c}}$$

9. $y' = \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$\int dy = 2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$y = \underline{\underline{2\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+c}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10. $x^2+2x=y'$

$$\frac{dy}{dx}=x^2+2x$$

$$\int dy=\int (x^2+2x)\,dx$$

$$y=\frac{x^3}{3}+x^2+c$$

11. $x\cdot y'=y\cdot \ln y$

د تمرینورکړي ښخه ورکول کیږي
(د ln y له امله)، چې y > 0 باید
باور ولري. د دیفرنځیالمساوات پسی
کارونی لپاره یواځي x != 0 نیول شوی.

$$\int \frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \quad f(x)\triangleq \ln y.$$

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y\cdot\ln y$$

نیونه: Voraussetzung: $x\neq 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y\cdot\ln y}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y\cdot\ln y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,dy=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln y|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln y|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln y=c\cdot x$$

$$e^{\ln y}=e^{c\cdot x}$$

$$y=e^{c\cdot x}$$

اوبی دیفرنځیالمساوات د x = 0
لپاره هم پوره کوي، چی له دې
امله دا تولیز اوبی دی

پارتیکولار اوبیونه: $y=0$

12. $(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0$

د پارتیکیوالر اوبی په څیر y = 0
سملاسي پیژندل کیږي. ددیفرنځ-
یالمساوات د نورو اوبیو لپاره لمړی
بایدy != 0 ونیول شي اوx != 0 - 1
دا په دې مانا چی y.(1 - x)²≠0

نیونه: Voraussetzung: $y\cdot(1-x^2)\neq 0$

$$(1-x^2)\,dy+xy\cdot dx=0 \quad \|:y(1-x^2)$$

$$\frac{dy}{y}+\frac{x}{1-x^2}\,dx=0$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} + c_1$$

$$= (e^{\ln|1-x^2|})^{\frac{1}{2}} \cdot e^{c_1}$$

$$y = c \cdot \sqrt{|1-x^2|}$$

$e^{c_1} = c$

د $c = 0$ سره په دې کې پارتيکيو- لار اوبې دننه يا خوندي دی.

د $1 - x^2 = 0$ لپاره،دا په دې مانا ، چې $|x| = 1$ اوبې هم ديفرنخيالمسا- وات پوره کوي، داسې چې دا ټولېز اوبې انځوروي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$y = -\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$= -\int \frac{dz}{z}$$

$$= -\ln|z| + c$$

$$= -\ln|\sin x + \cos x| + c$$

بدلون (سبستيچيوشن)

$z = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow dz = (\cos x - \sin x)\, dx$

14. $y' = e^x \cdot y$

$y=0$: پارتيکولار اوبيونه

نيونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = e^x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int e^x\, dx$$

$$\ln|y| = e^x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{e^x + c_1} = e^{(e^x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{(e^x)}$$

د $c = 0$ سره په دې کې ټوټه اوبيونه خوندي ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

15. $\sqrt{y'} = y' \cdot x$

زیکولار اوبیونه: $y' = 0$

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0, \quad x \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = \frac{y'}{\sqrt{y'}} \cdot x \quad \blacktriangleright \text{quadrieren}$$ مربع کونه

$$1 = y' \cdot x^2$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int dy$$

$$y = -\frac{1}{x} + c \quad \blacktriangleright \text{für } x \neq 0$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

16. $y' = (y \cdot y')^2$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ زینکولاراوبی

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$ ثابت

Voraussetzung: $y' \neq 0$: نیونه

$$\Rightarrow \quad 1 = y^2 \cdot y'$$

$$1 = y^2 \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\int y^2 \, dy = \int dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = x + c_1$$

$c = 3c_1$

$$y = \sqrt[3]{3x + c}$$

$y = a = \text{const.}$ ثابت

17. $dy = \dfrac{dx}{x(x^2 + 2x + 1)}$

$$\int dy = \int \frac{dx}{x(x+1)^2}$$

$$= \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \right) dx$$

$$= \int \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2} \, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Koeffizientenvergleich: د کوونو انډول

I: $A+B=0$

II: $2A+B+C=0$

III: $A=1$

I: $1+B=0 \Rightarrow B=-1$

II: $2-1+C=0 \Rightarrow C=-1$

$$\int \mathrm{d}y=\int \frac{A(x^2+2x+1)+B(x^2+x)+Cx}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \frac{x^2(A+B)+x(2A+B+C)+A}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+c$$

$$\underline{\underline{\int \mathrm{d}y=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{1}{x+1}+c}}$$

18. $y'=\dfrac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$

دواړه اینتیګرالونه همغه فورم لري او د ۲ . ۵ تمرین ۷۴ سره په پرتله ریکورزیونفرمول ټاکل کیږي.

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+c$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x^2\sqrt{x^2+4}}{y^2\sqrt{y^2+9}}$$

$$\int y^2\sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y=\int x^2\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{y}{4}\sqrt{(y^2+9)^3}-\frac{9}{4}\int\sqrt{y^2+9}\,\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{x}{4}\sqrt{(x^2+4)^3}-\frac{4}{4}\int\sqrt{x^2+4}\,\mathrm{d}x \quad \|\cdot 4$$

$$y\sqrt{(y^2+9)^3}-9\left[\frac{y}{2}\sqrt{y^2+9}+\frac{9}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|\right]=$$

$$=x\sqrt{(x^2+4)^3}-$$

$$-4\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|\right]+c$$

$$y(y^2+9)\sqrt{y^2+9}-\frac{9}{2}y\sqrt{y^2+9}-\frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|=$$

$$=x(x^2+4)\sqrt{x^2+4}-2x\sqrt{x^2+4}-$$

$$-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c$$

$$\frac{y}{2}(2y^2+9)\sqrt{y^2+9}-\frac{81}{2}\ln|y+\sqrt{y^2+9}|=$$

$$=x(x^2+2)\sqrt{x^2+4}-8\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c$$

اوبیونه یواځي په ایمپلیخیت فورم ممکن ده.

$$\underline{\underline{y(2y^2+9)\sqrt{y^2+9}-81\ln|y+\sqrt{y^2+9}|=}}$$

$$\underline{\underline{=x(2x^2+4)\sqrt{x^2+4}-16\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+c}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

19. $y \cdot x \cdot \sin(2x) = y'$

Partikuläre Lösung: $\underline{\underline{y=0}}$

Voraussetzung: $y \neq 0$

▶ $x \cdot \sin 2x = y' \cdot \frac{1}{y}$

$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = x \cdot \sin 2x$

پارځيل اينتيګرال

$\int \frac{dy}{y} = \int \underset{\downarrow u}{x} \cdot \underbrace{\sin 2x\, dx}_{dv}$

$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx$

$\ln|y| = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x} + c_1$

$= e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

د c = 0 سره پارتيکيوالر اوبې
په دې کې خوندي دی.

$\underline{\underline{y = c \cdot e^{\frac{1}{4}(\sin 2x - 2x\cos 2x)}}}$

20. $\frac{dx}{dy} = \ln y$

$dx = \ln y\, dy$

$\int dx = \int \ln y\, dy$

$x = \underline{\underline{y(\ln y - 1) + c}}$

21. $dx(e^y + e^{-y}) = dy(e^x + e^{-x})$

دا چې دواړه اينتيګرالونه برابر فورم
لري بسيا کوي ،چې يو وشميرل شي
بدلون (سبستيچيوشن)

$t = e^x \Rightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$

$\int \frac{dy}{e^y + e^{-y}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$

$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}$

$= \int \frac{e^x \cdot dx}{e^{2x} + 1}$

$= \int \frac{dt}{t^2 + 1}$

$= \text{Arctan}\ t + c$

$= \underline{\underline{\text{Arctan}\ e^x + c}}$

اوبې په ايمپليخيتفورم

$\underline{\underline{\text{Arctan}\ e^y = \text{Arctan}\ e^x + c}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

22. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = x^2 \cdot y^3$

دریمه ریښه یی راوستل کیږي.
یا یی ۳ . جذر نیول کیږي

$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow y'^3 = x^2 \cdot y^3$

$\underline{\underline{y=0}}$: پارتیکولار اوبیونه

Voraussetzung: $y \neq 0$ **نیونه :**

$y'^3 \cdot \frac{1}{y^3} = x^2$

$\frac{y'}{y} = x^{\frac{2}{3}}$

$\frac{dy}{y} = x^{\frac{2}{3}} \cdot dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int x^{\frac{2}{3}} dx$

$\ln|y| = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c_1$

$e^{\ln|y|} = e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2} + c_1} = e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2}} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$y = \underline{\underline{c \cdot e^{\frac{3}{5} x \sqrt[3]{x^2}}}}$

د $c = 0$ سره پارتیکیوالر اوبی
په دې کی خوندي دی.

23. $(x+y)^2 = y'$

لمړی په سبستیچیوشن پیل کوو.

$z = x + y; \quad y = z - x$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(z-x)}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx}$

$= \frac{dz}{dx} - 1$

$z^2 = \frac{dz}{dx} - 1$

$\frac{dz}{dx} = z^2 + 1$

$\frac{dz}{z^2+1} = dx$

$\int \frac{dz}{z^2+1} = \int dx$

$\text{Arctan } z = x + c$

$z = \tan(x+c)$

$x + y = \tan(x+c)$

$y = \underline{\underline{\tan(x+c) - x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24. $y'^2 \cdot y = x^2 \cdot y' - y'$

Singuläre Lösung: $y' = 0$ ـ ینګولاراوبیونه

$y' = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = a = \text{const.}}}$

Voraussetzung: $y' \neq 0$ نیونه

$\Rightarrow$ په y' ویشنه اجازه لري

$y' \cdot y = x^2 - 1$

$$\frac{dy}{dx} \cdot y = x^2 - 1$$

$$\int y\,dy = \int (x^2 - 1)\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - x + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$c = 2c_1$

$$y^2 = \frac{2}{3}x^3 - 2x + c$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 - 2x + c}$$

$y = a = \text{const.}$

25. $y'^2 - 2x - x^2 = 0$

$$y'^2 = x^2 + 2x$$

$$y' = \pm\sqrt{x^2 + 2x}$$

$$= \pm\sqrt{x^2 + 2x + 1 - 1}$$

$$= \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}$$

سبستیچیوشن :

$z = x + 1 \Rightarrow dx = dz$

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx =$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|$$

$$\int dy = \pm\int \sqrt{(x+1)^2 - 1}\,dx$$

$$y = \pm\int \sqrt{z^2 - 1}\,dz$$

$$= \pm\left[\frac{z}{2}\sqrt{z^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln|z + \sqrt{z^2 - 1}|\right] + c$$

$$\underline{\underline{y = \pm\frac{1}{2}\left[(x+1)\sqrt{x^2 + 2x} -\right.}}$$

$$\underline{\underline{\left. - \ln|x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}|\right] + c}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

26. $y' \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$

پارخیل (توټه-) اینتیګرال

$$\frac{dy}{dx} \cdot \text{Arcsin}\, y = x^2$$

$$\int \underbrace{\text{Arcsin}\, y}_{u}\, \underset{dv}{\underset{\downarrow}{dy}} = \int x^2\, dx$$

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y - \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy = \frac{1}{3} x^3$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$y \cdot \text{Arcsin}\, y + \sqrt{1-y^2} = \frac{1}{3} x^3 + c$$

27. $x \cdot e^{x^2} = y' \cdot e^y$

بدلون (سبستیچیوشن)

$$x^2 = z \Rightarrow dx = \frac{dz}{2x}$$

$$x \cdot e^{x^2} = \frac{dy}{dx} \cdot e^y$$

$$\int e^y \cdot dy = \int x \cdot e^{x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int e^z\, dz$$

$$e^y = \frac{1}{2} e^z + c$$

$$= \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$\ln(e^y) = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + c\right)$$

28. $y \cdot \ln x = y'$

$y = 0$: پارتیکولار اوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y \neq 0$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{1}{y} \cdot y'$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \ln x\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = x\cdot\ln x - x + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x(\ln x-1)+c_1} = e^{x(\ln x-1)}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c\cdot e^{x(\ln x-1)}}}$$

د $c=0$ سره پارتیکیوالر اوبې په دې کې خوندي دی.

29. $x\cdot\sinh x = y'\cdot\cosh y$

پارخیل اینتیګرال

$$x\cdot\sinh x = \frac{dy}{dx}\cdot\cosh y$$

$$\int \cosh y\cdot dy = \int \underset{u}{x}\cdot\underbrace{\sinh x\,dx}_{dv}$$

$$= x\cdot\cosh x - \int \cosh x\,dx$$

$$\sinh y = x\cdot\cosh x - \sinh x + c$$

$$y = \underline{\underline{\operatorname{Arsinh}[x\cdot\cosh x - \sinh x + c]}}$$

30. $\dfrac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y} = y'$

پارخیل یا پارشل اینتیګرال

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Arsinh} x}{\operatorname{Arcosh} y}$$

$$\int \underbrace{\operatorname{Arcosh} y}_{u_1}\,\underbrace{dy}_{dv_1} = \int \underbrace{\operatorname{Arsinh} x}_{u_2}\,\underbrace{dx}_{dv_2}$$

$$y\cdot\operatorname{Arcosh} y - \int \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\,dy =$$

$$= x\cdot\operatorname{Arsinh} x - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$\underline{\underline{y\cdot\operatorname{Arcosh} y - \sqrt{y^2-1} = x\cdot\operatorname{Arsinh} x - \sqrt{x^2+1} + c}}$$

۱ . ۲ . ۳ دیفرنځیالمساوات د هوموجینو اووبنتونکو سره

پام وړ : یو څو د دې اوبیونو دیفرنځیالمساوات د هوموجین واریابلو سره دیفرنځیا-لمساوات نه دي، مګر دا اجازه ورکوي یا ځان دې ته پرېږدي، چې د سبستیچیوشن $y = x.z$ له لارې اوبې شي (تمرین ۸ ، ۱۲ ، ۱۶ ، ۱۷ ، ۱۸ ، ۲۰)

1. $y'\cdot x = -(x+y)$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = z\cdot dx + x\cdot dz$

$dy\cdot x = -(x+y)\,dx$

$(z\cdot dx + x\cdot dz)x = -x\cdot dx - x\cdot z\cdot dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \neq 0$: پس په x ویشنه اجازه لري

$$z \cdot dx + x \cdot dz = -dx - z \cdot dx$$
$$x \cdot dz = dx(-1-2z)$$
$$-\frac{dz}{1+2z} = \frac{dx}{x}$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{2}{1+2z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2}{1+2z}\,dz \mathrel{\hat=} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+2z| = \ln|x| + c_1$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| = \ln|x| + c_1$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| - \ln|x| = c_1$$
$$\frac{1}{2}\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \frac{2}{2}\ln|x| = -c_1$$
$$\frac{1}{2}\left[\ln\left|1+\frac{2y}{x}\right| + \ln x^2\right] = -c_1 \quad \| \cdot 2$$
$$\ln x^2 \cdot \left|1+\frac{2y}{x}\right| = -2c_1$$
$$\ln|x^2+2yx| = -2c_1$$
$$e^{\ln|x^2+2yx|} = e^{-2c_1}$$
$$x^2+2yx = c$$

$$e^{-2c_1} = c$$

$$y = \frac{c-x^2}{2x}; \quad x \neq 0$$

$y=0$ :: پارتیکولار اوبیونه

2. $y' \cdot x = y$

دا دیفرنځیلامساوات په ساده توګه د اووښتونو یا واریابلو بیلولو له لارې اوبې کیدی شي.

نمونه : Voraussetzung: $y \neq 0,\ x \neq 0$

$$\Rightarrow y' \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\underline{\underline{y = c \cdot x}}$$

په دې اوبیونوکي پارتیکیولاراوبیونی خوندي دي(د $c = 0$ سره) اود $x = 0$ لپاره هم ، دا په دې مانا، چی دا ټولیز اوبی دی.

3. $y' = \dfrac{x+y}{x}$

د وظیفي ورکوني سره سم لاسی $x \neq 0$ ورکوي

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

$$dy = \left(1 + \frac{y}{x}\right) dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = (1+z)\, dx$$

$$x \cdot dz = dx$$

$$dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$z = \ln|x| + c$$

$$y = \underline{\underline{x(\ln|x| + c)}}$$

4. $y' \cdot x^2 - y \cdot x = x^2 + y^2$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$dy \cdot x^2 - y \cdot x \cdot dx = (x^2 + y^2)\, dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)x^2 - x^2 \cdot z \cdot dx = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\, dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$x \cdot dz + z \cdot dx - z \cdot dx = (1 + z^2)\, dx$$

$$x \cdot dz = (1 + z^2)\, dx$$

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{Arctan} z = \ln|x| + c$$

$$\tan(\operatorname{Arctan} z) = \tan(\ln|x| + c)$$

$$z = \tan(\ln|x| + c)$$

$$y = \underline{\underline{x \cdot \tan(\ln|x| + c)}}$$

د $x \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $y' \cdot x \cdot y = y^2 - x^2$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$dy \cdot x \cdot y = (y^2 - x^2)\,dx$$

$$(x \cdot dz + z \cdot dx) \cdot x^2 \cdot z = (x^2 \cdot z^2 - x^2)\,dx$$

نيونه: x |= 0 له دې امله په x^2 ويش

$$(x \cdot dz + z \cdot dx)z = (z^2 - 1)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = z^2 \cdot dx - dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = -dx$$

$$\int z \cdot dz = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = -\ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = -2\ln|x| + 2c_1$$

$c = 2c_1$

$$= c - \ln x^2$$

$z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x\sqrt{c - \ln x^2}; \quad x \neq 0$$

6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y'$

د وظيفي ورکړې څخه روښانه ده، چې همدا اوس y |= 0 او x |= 0 باور لري.

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \| \cdot xy$$

$$xyy' = x^2 + y^2$$

$$x^2 \cdot z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (x^2 + x^2 \cdot z^2)\,dx \quad \| : x^2$$

$$z(x \cdot dz + z \cdot dx) = (1 + z^2)\,dx$$

$$z \cdot x \cdot dz + z^2 \cdot dx = dx + z^2 \cdot dx$$

$$z \cdot x \cdot dz = dx$$

$$z \cdot dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int z \cdot dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} z^2 = \ln|x| + c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2 = 2\ln|x| + 2c_1$$

$2c_1 = c; \quad z = \frac{y}{x}$

$$y = \pm x\sqrt{\ln x^2 + c}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

7. $dy \cdot x = (y - x) \cdot dx$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$z = \frac{y}{x}$

$x^2 \cdot dz + x \cdot z \cdot dx = (x \cdot z - x) \cdot dx$

نیونه: x |= 0 له دي امله په x ويش

$x \cdot dz + z \cdot dx = z\,dx - dx$

$x \cdot dz = -dx$

$\int dz = -\int \frac{dx}{x}$

$z = -\ln|x| + c$

$y = x(c - \ln|x|); \quad x \neq 0$

8. $y' - \frac{y}{x} = \tan\frac{y}{x}$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$\frac{y}{x} = z$

د وظيفي ورکړی څخه روښانه ده، چې همدا اوس x |= 0 لاس ته راځي.

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$

$z = \frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} - z = \tan z$

$dy = (z + \tan z)\,dx$

$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot dx + \tan z \cdot dx$

$x \cdot dz = \tan z \cdot dx$

$\int \frac{dz}{\tan z} = \int \frac{dx}{x}$

$\int \frac{\cos z}{\sin z}\,dz = \int \frac{dx}{x}$

$\ln|\sin z| = \ln|x| + c_1$

$e^{\ln|\sin z|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$

$\sin z = c \cdot x$

$z = \text{Arcsin}\,(c \cdot x)$

$y = x \cdot \text{Arcsin}\,(c \cdot x)$

9. $(x + y) \cdot dx - (x - y) \cdot dy = 0$

$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$

$(x + x \cdot z) \cdot dx - (x - x \cdot z) \cdot (x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

نیونه: x ≠ 0 له دي امله په x ويش

$(1 + z)\,dx - (1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = 0$

$(1 + z)\,dx - x(1 - z)\,dz - (z - z^2)\,dx = 0$

$(1 + z^2)\,dx - x(1 - z)\,dz = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{dx}{x}=\int\left(\frac{1}{1+z^2}-\frac{z}{1+z^2}\right)dz$$

$$=\int\frac{dz}{1+z^2}-\frac{1}{2}\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz$$

$$\int\frac{2z}{1+z^2}\,dz \triangleq \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|x|=\text{Arctan}\, z-\frac{1}{2}\ln|1+z^2|+c$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$\ln|x|=\text{Arctan}\,\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2}+c$$

اوبیونی یواځي په ایملیخیته بنه یا فورم ورکړ شوی دی.

< $x\neq 0$ لپاره >

10. $x^2+xy+y^2=x^2\cdot y'$

$y=z\cdot x\Rightarrow dy=z\cdot dx+x\cdot dz$

$$(x^2+xy+y^2)\,dx=x^2\cdot dy$$

$$(x^2+x^2z+x^2z^2)\,dx=x^2(z\cdot dx+x\cdot dz)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(1+z+z^2)\,dx=z\cdot dx+x\cdot dz$$

$$(1+z^2)\,dx=x\cdot dz$$

$$\int\frac{dz}{1+z^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\text{Arctan}\, z=\ln|x|+c$$

$$\tan(\text{Arctan}\, z)=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\tan(\ln|x|+c)$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$y=x\cdot\tan(\ln|x|+c)$$

< $x\neq 0$ لپاره >

11. $y'=\dfrac{2xy}{3x^2-y^2}$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$y'\cdot(3x^2-y^2)=2xy$$

$$dy\cdot(3x^2-y^2)=2xy\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3x^2-x^2z^2)=2x^2z\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(3-z^2)=2z\cdot dx$$

$$3x\cdot dz+3z\cdot dx-xz^2\cdot dz-z^3\,dx=2z\cdot dx$$

$$(3x-xz^2)\,dz+(z-z^3)\,dx=0$$

$$x(3-z^2)\,dz=(z^3-z)\,dx$$

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{3-z^2}{z^3-z}=\frac{3-z^2}{z(z^2-1)}$$

$$=\frac{3-z^2}{z(z+1)(z-1)}$$

$$=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}+\frac{C}{z-1}$$

$$=\frac{A(z^2-1)+B(z-1)z+C(z+1)z}{z^3-z}$$

$$=\frac{z^2(A+B+C)+z(-B+C)-A}{z^3-z}$$

$$=\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}$$

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz=\int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{-3}{z}+\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z-1}\right)dz=\int \frac{dx}{x}$$

$$-3\ln|z|+\ln|z+1|+\ln|z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z|^3+\ln|(z+1)(z-1)|=\ln|x|+c_1$$

$$-\ln|z^3|+\ln|z^2-1|=\ln|x|+c_1$$

$$\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln\left|\frac{z^2-1}{z^3}\right|}=e^{\ln|x|+c_1}$$

$$=e^{\ln|x|}\cdot e^{c_1}$$

$$\frac{z^2-1}{z^3}=c\cdot x$$

$$z^2-1=c\cdot x\cdot z^3$$

$$\frac{y^2}{x^2}-1=c\cdot\frac{y^3}{x^2}\quad\Big\|\cdot x^2$$

$$y^2-x^2=c\cdot y^3;\quad x\neq 0$$

د اینتکرال اینتکرالونکی

$$\int \frac{3-z^2}{z^3-z}\,dz$$

په ټوټه ماتونو ټوټه کيږي

د ضريبونو پرتله:

$$\text{I: } A+B+C=-1$$
$$\text{II: } -B+C=0$$
$$\text{III: } -A=3;\ \underline{\underline{A=-3}}$$

$$\text{I: } -3+B+C=-1$$

$$\left.\begin{array}{r} B+C=2 \\ \text{II: } -B+C=0 \end{array}\right\}+$$
$$2C=2;\ \underline{\underline{C=1}}$$

$$\text{II: } -B+C=0;\ \underline{\underline{B=1}}$$

$$e^{c_1}=c$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow z=\frac{y}{x}$$

په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. $y' = \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$\frac{y}{x} = z$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته

راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\, dz \triangleq \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = z \cdot \ln z$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx = z \cdot \ln z \cdot dx$$

$$x \cdot dz = z(\ln z - 1)\, dx$$

$$\int \frac{dz}{z(\ln z - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{\frac{1}{z}}{\ln z - 1}\, dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |\ln z - 1| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln|\ln z - 1|} = e^{\ln|x| + c_1} = e^{\ln|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z - 1 = c \cdot x$$

$$\ln z = c \cdot x + 1$$

$$e^{\ln z} = e^{c \cdot x + 1}$$

$$z = e^{c \cdot x + 1}$$

$$\underline{\underline{y = x \cdot e^{c \cdot x + 1}; \quad x > 0}}$$

13. $x \cdot dy - y \cdot dx = y \cdot dy$

$$y = x \cdot z \Rightarrow dy = x \cdot dz + z \cdot dx$$

$$(x - y)\, dy = y \cdot dx$$

$$(x - x \cdot z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = x \cdot z \cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$(1 - z)(x \cdot dz + z \cdot dx) = z \cdot dx$$

$$x \cdot dz + z \cdot dx - zx \cdot dz - z^2 \cdot dx = z \cdot dx$$

$$x(1 - z)\, dz - z^2 \cdot dx = 0$$

وړپسې نیونې :: $z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\Rightarrow \frac{1 - z}{z^2}\, dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\right) dz = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\frac{1}{z} - \ln |z| = \ln |x| + c$$

$$-\frac{1}{z} = \ln |x| + \ln |z| + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{z}=\ln|x\cdot z|+c \quad \| \cdot z$$

$$-1=z\cdot\ln|x\cdot z|+c\cdot z$$

$$-1=\frac{y}{x}\cdot\ln|y|+c\cdot\frac{y}{x}$$

$z=\frac{y}{x}$ په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$\frac{y}{x}(\ln|y|+c)+1=0;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0$$

14. $y^2+(x^2-xy)y'=0$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$y'(x^2-xy)=-y^2$$

$$dy(x^2-xy)=-y^2\cdot dx$$

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(x^2-x^2z)=-x^2z^2\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$(x\cdot dz+z\cdot dx)(1-z)=-z^2\cdot dx$$

$$x(1-z)\,dz+(z-z^2)dx=-z^2\,dx$$

$$x(1-z)\,dz=-z\cdot dx$$

وړپسی نیونی : $z\neq 0$ (d.h. $y\neq 0$)

په z ویش اجازه لري

$$\frac{1-z}{z}dz=-\frac{dx}{x}$$

$$\int\left(\frac{1}{z}-1\right)dz=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|z|-z=-\ln|x|+c$$

$$\ln|z|+\ln|x|=z+c$$

$$\ln|z\cdot x|=z+c$$

$z=\frac{y}{x}$ په ایمپلیخیته بڼه اوبیونه

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+c;\quad x\neq 0;\quad y\neq 0$$

15. $y^2\cdot dx-3x^2\cdot dx+2xy\cdot dy=0$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$0=(y^2-3x^2)\,dx+2xy\cdot dy$$

$$=(x^2\cdot z^2-3x^2)\,dx+2x^2\cdot z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

نیونه: $x \neq 0$ له دې امله په x^2 ویش

$$0=(z^2-3)\,dx+2z(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$0=(3z^2-3)\,dx+2xz\cdot dz$$

$$-3(z^2-1)\,dx = 2xz\cdot dz$$

$$-3\,\frac{dx}{x} = \frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$-3\int\frac{dx}{x} = \int\frac{2z}{z^2-1}\,dz$$

$$\int\frac{2z}{z^2-1}\,dz \mathrel{\hat=} \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$-3\ln|x| = \ln|z^2-1| + c_1$$

$$e^{-3\ln|x|} = e^{\ln|z^2-1|+c_1}$$

$$e^{\ln|x^{-3}|} = e^{\ln|z^2-1|}\cdot e^{c_1}$$

$$e^{c_1} = c_2$$

$$x^{-3} = (z^2-1)\cdot c_2$$

$$c = \frac{1}{c_2};\quad z = \frac{y}{x}$$

$$z^2-1 = \frac{c}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^2} - 1 = \frac{c}{x^3}\quad \|\cdot x^2$$

$$y^2 - x^2 = \frac{c}{x}$$

$$y = \pm\sqrt{x^2+\frac{c}{x}};\quad x \neq 0$$

16. $xy' = y + \sqrt{y^2-x^2}$

$$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$$

$$x\cdot dy = (y+\sqrt{y^2-x^2})\,dx$$

$$x(x\cdot dz + z\cdot dx) = (xz + \sqrt{x^2z^2-x^2})\,dx$$

$$= (xz + x\sqrt{z^2-1}\,dx$$

نیونه: $|x| \neq 0$ له دې امله په x ویش

$$x\cdot dz + z\cdot dx = z\cdot dx + \sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$x\cdot dz = \sqrt{z^2-1}\,dx$$

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$$

$$\ln|z+\sqrt{z^2-1}| = \ln|x| + c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{z^2-1}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z = \frac{y}{x}$$

$$z + \sqrt{z^2-1} = c\cdot x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1}=c\cdot x \quad \| \cdot x$$

$$\underline{\underline{y+\sqrt{y^2-x^2}=cx^2;\quad x\neq 0}}$$

په ایملیخیت فورم اوبی

17. $xy'=y(\ln y-\ln x)$

$$x\cdot y'=y\cdot \ln\frac{y}{x}$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$\frac{y}{x}=z$$

$$x\cdot dy=y\cdot\ln\frac{y}{x}\cdot dx$$

$$x(x\cdot dz+z\cdot dx)=x\cdot z\cdot\ln z\cdot dx \quad \| : x$$

$$x\cdot dz+z\cdot dx=z\cdot\ln z\cdot dx$$

$$x\cdot dz=z(\ln z-1)\,dx$$

د پوښتنوسملاسی x>0,y>0 لاس ته راځي دا په دې مانا ، چې z>0 هم

$$\frac{dz}{z(\ln z-1)}=\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz \mathrel{\widehat{=}} \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z-1}\,dz=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|\ln z-1|=\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|\ln z-1|}=e^{\ln|x|+c_1}=e^{\ln|x|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$\ln z-1=c\cdot x$$

$$\ln z=c\cdot x+1$$

$$e^{\ln z}=e^{c\cdot x+1}$$

$$z=\frac{y}{x}$$

$$z=e^{c\cdot x+1}$$

$$\underline{\underline{y=x\cdot e^{c\cdot x+1};\quad x>0}}$$

18. $y\cdot dx+\sqrt{4xy}\cdot dy=x\cdot dy$

$$y\cdot dx=(x-\sqrt{4xy})\,dy$$

$$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$$

$$x\cdot z\cdot dx=(x-\sqrt{4x^2z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$=(x-2x\sqrt{z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

د پوښتنکونی ځخه لاس ته راځي، چې تل $4xy\geq 0$ باید باور ولري دا په دې مانا چې $x.y\geq 0$ هم

نیونه: $x\neq 0$ له دې امله په x ویش

$$z\cdot dx=(1-2\sqrt{z})(x\cdot dz+z\cdot dx)$$

$$z\cdot dx=x(1-2\sqrt{z})\,dz+(z-2z\sqrt{z})\,dx$$

$$0=x(1-2\sqrt{z})\,dz-2z\sqrt{z}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري نيوځې $\because z \neq 0$ (d.h. $y \neq 0$)

$$\frac{1-2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}}\,dz=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{2z\sqrt{z}}\,dz-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz-\int\frac{dz}{z}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{z^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\ln|z|=\ln|x|+c$$

$$-z^{-\frac{1}{2}}=\ln|x|+\ln|z|+c$$

$$z=\frac{y}{x}\qquad -\frac{1}{\sqrt{z}}=\ln|x\cdot z|+c$$

$$-\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln|y|+c$$

پـه ايمپليـځيـتـه بـڼـه اوبيونه

$$0=\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|+c;\quad x\cdot y>0$$

19. $\dfrac{2y(y-x)}{x^2-2xy+y^2}=y'$

$$y'=\frac{2y(y-x)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y(x-y)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{-2y}{x-y}$$

$$0=(x-y)\,dy+2y\cdot dx$$

$y=x\cdot z\Rightarrow dy=x\cdot dz+z\cdot dx$

$$0=(x-xz)(x\cdot dz+z\cdot dx)+2xz\cdot dx$$

نیونه: $x \neq 0$ له دي امله په x ویش

$$0=(1-z)(x\cdot dz+z\cdot dx)+2z\cdot dx$$

$$0=x(1-z)\,dz+(z-z^2+2z)\,dx$$

$$0=x(1-z)\,dz+(3z-z^2)\,dx$$

$$-x(1-z)\,dz=(3z-z^2)\,dx$$

$$\int\frac{1-z}{3z-z^2}\,dz=-\int\frac{dx}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{z-1}{z(z-3)}\,dz = -\int \frac{dx}{x}$$

یو پارشلماتبیلونه یا تجزیه ساده ورکوي

$$\blacktriangleright \int \left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-3}\right)dz = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z-3}\right)dz$$

$A=\frac{1}{3}$; $B=\frac{2}{3}$.

$$\frac{1}{3}\ln|z|+\frac{2}{3}\ln|z-3| = -\ln|x|+c_1 \quad \| \cdot 3$$

$$\ln|z|+\ln(z-3)^2 = -3\ln|x|+3c_1$$

$$\ln|z(z-3)^2| = \ln|x^{-3}|+3c_1$$

$$e^{\ln|z(z-3)^2|} = e^{\ln|x^{-3}|+3c_1}$$

$$= e^{\ln|x^{-3}|}\cdot e^{3c_1}$$

$e^{3c_1}=c$

$$z(z-3)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}\left(\frac{y}{x}-3\right)^2 = c\cdot x^{-3}$$

$$\frac{y}{x^3}(y-3x)^2 = c\cdot x^{-3} \quad \| \cdot x^3$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

$$\underline{\underline{y(y-3x)^2=c;\quad x\neq 0}}$$

20. $y' = \frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$$dy = \left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)dx$$

$y = x\cdot z \Rightarrow dy = x\cdot dz + z\cdot dx$

$\frac{y}{x}=z$

$$x\cdot dz + z\cdot dx = (z+\sqrt{1+z^2})\,dx$$

$$= z\cdot dx + \sqrt{1+z^2}\,dx$$

$$x\cdot dz = \sqrt{1+z^2}\,dx$$

د پوښتنورکوونی شخه سملاسي $x \neq 0$ ورکوي، چی دا نوربايد فرض نه شي

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|$$

$$\ln|z+\sqrt{1+z^2}| = \ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|z+\sqrt{1+z^2}|} = e^{\ln|x|+c_1} = e^{\ln|x|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$z+\sqrt{1+z^2} = c\cdot x$$

$z=\frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = c\cdot x \quad \| \cdot x$$

په ایمپلیخیت فورم اوبی

$$\underline{\underline{y+\sqrt{x^2+y^2} = c\cdot x^2;\quad x\neq 0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $y'+2xy=\frac{x}{e^{x^2}}$

$$y=u\cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

$$u=u(x);\quad v=v(x)$$

د برنولي متود له مخې

رامنځ ته شوي اینتیګرالثابته c_1 تل په خوښه ټاکل کیدونکی ده. له دي امله c_1 داسي ټاکل کیږي، چې وروسته شمیرنه یې ترممکنې اندازې ساده شي.

۱ – د برنولي متود له مخې اوبې

$$u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}+2xuv=x\cdot e^{-x^2}$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx}+2xv\right)}_{=0}+v\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2xv$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int x\,dx$$

$$\ln|v|=-x^2+c_1$$

$$e^{\ln|v|}=e^{-x^2+c_1}=e^{-x^2}\cdot e^{c_1}$$

Wählen: $c_1=0$

$$\Rightarrow v=e^{-x^2}$$

$$u\cdot 0+e^{-x^2}\cdot\frac{du}{dx}=x\cdot e^{-x^2}\quad \|:e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx}=x$$

$$\int du=\int x\,dx$$

$$u=\frac{x^2}{2}+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$y=e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)$$

۲ – دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+2xy=0$$

$$dy=-2xy\cdot dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int x\,dx$$

$$\ln|y| = -x^2 + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2+c_1} = e^{-x^2} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-x^2}}}$$

دا افاده د 'y لپاره په دیفرنخیالمساوات اینسول کیږي.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot c(x) + 2x \cdot c(x) \cdot e^{-x^2} = = x \cdot e^{-x^2}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x^2} = x \cdot e^{-x^2} \quad \| : e^{-x^2}$$

$$\frac{dc(x)}{dx} = x$$

$$\int dc(x) = \int x\,dx$$

$$\underline{c(x) = \frac{x^2}{2} + k}$$

$$y = \underline{\underline{e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + k\right)}}$$

2. $y' = e^x - y$

$$y = u \cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

$$u = u(x); \quad v = v(x)$$

۱ – د برنولي متود له مخې اوبی

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x - u \cdot v$$

$$u\underbrace{\left(\frac{dv}{dx} + v\right)}_{=0} + v \cdot \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{dv}{dx} = -v$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int dx$$

$$\ln|v| = -x + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\underline{v = e^{-x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-x} \cdot \frac{du}{dx} = e^x \quad \| \cdot e^x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{du}{dx}=e^{2x}$$

$$\int du=\int e^{2x}\,dx$$

$$u=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+c\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+c\cdot e^{-x}$$

۲ - دلاګرانج د متود له مخې اوبې

$$y'+y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int dx$$

$$\ln|y|=-x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-x+c_1}=e^{-x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-x}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساواتکي کیږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}-e^{-x}\cdot c(x)=e^{x}-c(x)\cdot e^{-x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-x}=e^{x}\quad\|\cdot e^{x}$$

$$\frac{dc(x)}{dx}=e^{2x}$$

$$\int dc(x)=\int e^{2x}\,dx$$

$$c(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+k$$

$$y=\left(\frac{1}{2}e^{2x}+k\right)\cdot e^{-x}$$

$$=\frac{1}{2}e^{x}+k\cdot e^{-x}$$

3. $y'-y=x^2-1$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ - د برنولي متود له مخې اوبی

$$u\cdot v'+v\cdot u'-u\cdot v=x^2-1$$

$$\underbrace{u(v'-v)}_{=0}+v\cdot u'=x^2-1$$

$$\frac{dv}{dx}=v$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int dx$$

$$\ln|v|=x+c_1$$

$c_1=0$ وټاکه

$$v=e^{x}$$

$$u\cdot 0+e^{x}\cdot u'=x^2-1 \quad \|:e^{x}$$

$$\frac{du}{dx}=(x^2-1)\cdot e^{-x}$$

$$\int du=\int x^2\cdot e^{-x}dx-\int e^{-x}dx$$

$$u=\int x^2\cdot e^{-x}dx+e^{-x}$$

$\int x^2\cdot e^{-x}dx$

دا پورته اینتیگرال د پارشل ایتیگرال سره اوبی کیږي

$$\int x^2\cdot e^{-x}dx=x^2\cdot(-e^{-x})-\int(-e^{-x})\cdot 2x\,dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\int x\cdot e^{-x}dx$$

$$=-x^2\cdot e^{-x}+2\left[x(-e^{-x})-\right.$$

$$\left.-\int(-e^{-x})dx\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} + 2\int e^{-x} dx$$
$$= -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$
$$= -e^{-x}(x^2+2x+2)+c$$

$$\underline{u = -e^{-x}(x^2+2x+2)+e^{-x}+c}$$

$$y = u \cdot v$$
$$= [-e^{-x}(x^2+2x+2)+e^{-x}+c] \cdot e^x$$
$$= -(x^2+2x+2)+(e^{-x}+c)e^x$$
$$\underline{\underline{= ce^x - x^2 - 2x - 1}}$$

۲ – دلاگرانج د متود له مخې اوبې :

$$y' - y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = y$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\ln|y| = x + c_1$$
$$y = c \cdot e^x \qquad c = e^{c_1}$$
$$\underline{\underline{y = c(x) \cdot e^x}}$$

په ديفرنځيالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x$$
$$c'(x) \cdot e^x + c(x) \cdot e^x - c(x) \cdot e^x = x^2 - 1$$
$$c'(x) \cdot e^x = x^2 - 1 \quad \| : e^x$$
$$c'(x) = (x^2-1) \cdot e^{-x}$$
$$c(x) = \int (x^2-1) \cdot e^{-x} dx$$
$$\underline{c(x) = -e^{-x}(x^2+2x+2)+e^{-x}+k}$$

دا ايتيکريشن همدا په برخه ۱
کی اوبی شو

$$y = c(x) \cdot e^x = -x^2 - 2x - 2 + 1 + ke^x$$
$$\underline{\underline{= ke^x - x^2 - 2x - 1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $y'=e^{3x}-2y$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

وټاکی $c_1=0$

١ - د برنولي متود له مخی اوبی

$$u\cdot v'+v\cdot u'=e^{3x}-2u\cdot v$$

$$u\underbrace{(v'+2v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{3x}$$

$$\frac{dv}{dx}=-2v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int dx$$

$$\ln|v|=-2x+c_1$$

$$\underline{v=e^{-2x}}$$

$$u\cdot 0+e^{-2x}\cdot u'=e^{3x} \quad \|:e^{2x}$$

$$\frac{du}{dx}=e^{5x}$$

$$\int du=\int e^{5x}dx$$

$$\underline{u=\frac{1}{5}e^{5x}+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\left(\frac{1}{5}e^{5x}+c\right)e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{=\frac{1}{5}e^{3x}+c\cdot e^{-2x}}}$$

٢ - دلاگرانج د متود له مخی اوبی

$$y'+2y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-2y$$

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

$$\ln|y|=-2x+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-2x+c_1}=e^{-2x}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot e^{-2x}\Rightarrow \underline{\underline{y=c(x)\cdot e^{-2x}}}$$

$$y'=c'(x)\cdot e^{-2x}-2e^{-2x}\cdot c(x)$$

په دیفرنخیالمساوات کی دي کیښوول شي

$$c'(x)\cdot e^{-2x}-2e^{-2x}\cdot c(x)=e^{3x}-2c(x)\cdot e^{-2x}$$

$$c'(x)\cdot e^{-2x}=e^{3x}\quad \|\cdot e^{2x}$$

$$c'(x)=e^{5x}$$

$$\underline{c(x)=\frac{1}{5}e^{5x}+k}$$

$$y=c(x)\cdot e^{-2x}$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{5}e^{3x}+k\cdot e^{-2x}}}$$

5. $y'\cdot x=y+x^2\cdot\sin x$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$(u\cdot v'+v\cdot u')\cdot x=u\cdot v+x^2\cdot\sin x$$

$$u\underbrace{(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'=x^2\cdot\sin x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: x |= c , په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$c_1=0$ وټاکی

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'=x^2\cdot\sin x\quad \|:x^2$$

$$\frac{du}{dx}=\sin x$$

$$\underline{u=-\cos x+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=\underline{\underline{x(c-\cos x)}}$$

دا اوبی دیفرنخیالمساوات د x = 0 لپاره هم پوره کوي، دا په دې مانا چي دا تولیز اوبی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ د لاګرانج متود له لارې اوبې

$y' \cdot x - y = 0 \quad \| : x$

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + c_1} = e^{\ln |x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

دلته هم لمړی $x \neq 0$ غوښتل کیږي، اوبې لکه پورته مګر د $x = 0$ لپاره به هم باور ولري.

$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$

$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot x = c(x) \cdot x + x^2 \cdot \sin x$

$$c'(x) \cdot x^2 = x^2 \cdot \sin x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \sin x$$

$$\underline{c(x) = -\cos x + k}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای په ځای کړی.

$y = \underline{\underline{x(k - \cos x)}}$

6. $y'x = x \cdot \sin x - y$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

۱ – د برنولی متود له لارې اوبې

$(u \cdot v' + v \cdot u') \cdot x = x \cdot \sin x - u \cdot v$

$u\underbrace{(v' \cdot x + v)}_{=0} + x \cdot v \cdot u' = x \cdot \sin x$

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = -v$$

نیونه: $x \neq 0$، ځکه په x ویشنه ،

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |v| = -\ln |x| + c_1$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکه

$$\ln |v| = \ln \left|\frac{1}{x}\right|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v=\frac{1}{x}$$

$$u\cdot 0+u'=x\cdot \sin x$$

$$\int du=\int x\cdot \sin x\, dx$$

پارشل یا توټه انیتیګریشن

$$u=x(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cdot\cos x+\sin x+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+c);\quad x\neq 0$$

۲ . د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$$y'\cdot x+y=0$$

نیونه: $x \neq 0$, څکه په x ویشنه ٬

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|x|+c_1}=e^{\ln|\frac{1}{x}|}\cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=\frac{c}{x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې کیږدی

$$y'=\frac{x\cdot c'(x)-c(x)}{x^2}=\frac{c'(x)}{x}-\frac{c(x)}{x^2}$$

$$c'(x)-\frac{c(x)}{x}=x\cdot\sin x-\frac{c(x)}{x}$$

$$c'(x)=x\cdot\sin x$$

دالاندې

$$\int x\cdot\sin x\,dx$$

اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$\int dc(x)=\int x\cdot\sin x\,dx$$

$$c(x)=-x\cdot\cos x+\sin x+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{1}{x}\cdot c(x)$$

$$=-\cos x+\frac{1}{x}(\sin x+k);\quad x\neq 0$$

7. $y'+y+\cos x-e^{2x}=0$

$y=u\cdot v \Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولی متود له لارې اوبی

$$u\cdot v'+v\cdot u'+u\cdot v=e^{2x}-\cos x$$

$$u\underbrace{(v'+v)}_{=0}+v\cdot u'=e^{2x}-\cos x$$

$$\frac{dv}{dx}=-v$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx$$

$$\ln|v|=-x+c_1$$

$$v=e^{-x}$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکی

$$u\cdot 0+e^{-x}\cdot u'=e^{2x}-\cos x \quad \|\cdot e^{x}$$

$$u'=e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x$$

$$u=\int(e^{3x}-e^{x}\cdot\cos x)\,dx$$

$$=\int e^{3x}\cdot dx-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}e^{3x}-\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

دا اینتگرال

$$\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

د ټوټه انتیګرال سره اوبی کیږي

$$F=\int e^{x}\cdot\cos x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int\sin x\cdot e^{x}\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\int e^{x}\cdot\sin x\,dx$$

$$=e^{x}\cdot\sin x-\Big[e^{x}(-\cos x)-\int(-\cos x)\cdot e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x - \underbrace{\int e^x \cdot \cos x \, dx}_{F}$$

$$2F = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x + c_1$$

$$F = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + c$$

$c = \frac{1}{2} c_1$

$$u = \frac{1}{3} e^{3x} - F$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + c \cdot e^{-x}$$

۲ – د اګرانژ متود له لارې اوبې :

$$y' + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx$$

$$\ln |y| = -x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-x + c_1} = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-x} \Rightarrow y = c(x) \cdot e^{-x}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځای په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} - e^{-x} \cdot c(x) + c(x) \cdot e^{-x} + \cos x - e^{2x} = 0$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} = e^{2x} - \cos x \quad \| \cdot e^x$$

$$c'(x) = e^{3x} - e^x \cdot \cos x$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int (e^{3x} - e^x \cdot \cos x) \, dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = c(x) \cdot e^{-x}$

$$= \frac{1}{3} e^{2x} - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + k \cdot e^{-x}$$

8. $y' + ay = b \cdot e^{cx}$

۱ –د برنولي متود له لارې اوبې

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$u \cdot v' + v \cdot u' + auv = b \cdot e^{cx}$

$u\underbrace{(v' + av)}_{=0} + v \cdot u' = b \cdot e^{cx}$

$\frac{dv}{dx} = -av$

$\int \frac{dv}{v} = -a \int dx$

Wählen: $c_1 = 0$: وټاکئ

$\ln |v| = -ax + c_1$

$v = e^{-ax}$

$u \cdot 0 + e^{-ax} \cdot u' = b \cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$

$u' = b \cdot e^{x(a+c)}$

$u = \frac{b}{a+c} e^{x(a+c)} + c_2$

$y = u \cdot v$

$$= \frac{b}{a+c} e^{cx} + c_2 \cdot e^{-ax}$$

۲ – د لاګرانژ متود له لارې اوبې

$y' + ay = 0$

$\frac{dy}{dx} = -ay$

$\int \frac{dy}{y} = -a \int dx$

$\ln |y| = -ax + c_1$

$c_2 = e^{c_1}$

$y = c_2 \cdot e^{-ax} \Rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{-ax}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دیفرنځیالمساوات کي ځای په ځای کړی

$$y' = c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} - ac_2(x)\cdot e^{-ax} + ac_2(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax} = b\cdot e^{cx} \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x) = b\cdot e^{x(a+c)}$$

$$c_2(x) = \frac{b}{a+c}\, e^{x(a+c)} + k$$

$$y = c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$= \frac{b}{a+c}\, e^{cx} + k\cdot e^{-ax}$$

9. $y' + ay - b\cdot\sin(cx) = 0$

$y = u\cdot v \Rightarrow y' = u\cdot v' + v\cdot u'$

$y = f(x) = u(x)\cdot v(x)$

i ۱ - د برنولي متود له لاري اوبی

$$u\cdot v' + v\cdot u' + auv - b\sin cx = 0$$

$$u\underbrace{(v' + av)}_{=0} + v\cdot u' - b\sin cx = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -av$$

$$\int \frac{dv}{v} = -a\int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln|v| = -ax + c_1$$

$$v = e^{-ax}$$

$$u\cdot 0 + e^{-ax}\cdot u' - b\sin cx = 0 \quad \| \cdot e^{ax}$$

$$u' = b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیګرال د ټوټه یا پارشل اینتیګرال له لاري اوبی کیږي

$$u = b\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot\cos cx + \frac{ab}{c}\int e^{ax}\cdot\cos cx\,dx$$

$$= -\frac{b}{c}\, e^{ax}\cdot\cos cx +$$

$$+\frac{ab}{c}\left[e^{ax}\cdot\frac{\sin cx}{c} - \frac{a}{c}\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u=-\frac{b}{c}\,e^{ax}\cdot\cos cx+\frac{ab}{c^2}\,e^{ax}\cdot\sin cx-$$

$$-\frac{a^2}{c^2}\cdot b\underbrace{\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx}_{u}$$

$$\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)u=\frac{b}{c}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_2$$

$$1+\frac{a^2}{c^2}=\frac{a^2+c^2}{c^2}$$

$$\underline{u=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3}$$

$$c_3=c_2\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

$$y=u\cdot v$$

$$\underline{\underline{=\frac{bc}{a^2+c^2}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+c_3\cdot e^{-ax}}}$$

۲ - د لاګرانژ د متود له لارې اوبی

$$y'+ay=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-ay$$

$$\int\frac{dy}{y}=-a\int dx$$

$$\ln|y|=-ax+c_1$$

$$y=c_2\cdot e^{-ax}\Rightarrow\underline{\underline{y=c_2(x)\cdot e^{-ax}}}$$

$$c_2=e^{c_1}$$

په دیفرنخیالمساوات کی دي کیښوول شي

$$y'=c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}-ac_2(x)\cdot e^{-ax}+ac_2(x)\cdot e^{-ax}-b\cdot\sin cx=0$$

$$c_2'(x)\cdot e^{-ax}=b\sin cx\quad\|\cdot e^{ax}$$

$$c_2'(x)=b\cdot e^{ax}\cdot\sin cx$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c_2(x)=b\int e^{ax}\cdot\sin cx\,dx$$

$$\underline{=\frac{bc}{a^2+c^2}\,e^{ax}\left(\frac{a}{c}\sin cx-\cos cx\right)+k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=c_2(x)\cdot e^{-ax}$$

$$=\frac{b}{a^2+c^2}\,(a\cdot\sin cx-c\cdot\cos cx)+k\cdot e^{-ax}$$

۱ – د برنولي د متود له لاري اوبي

$$u\cdot v'+v\cdot u'=\frac{uv}{x}+\frac{1}{\ln x}$$

$$u\underbrace{\left(v'-\frac{v}{x}\right)}_{=0}+v\cdot u'=\frac{1}{\ln x}$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$\underline{v=x}$$

$$u\cdot 0+x\cdot u'=\frac{1}{\ln x}\quad\Big\|\cdot\frac{1}{x}$$

$$u'=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$u=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx$$

$$=\underline{\ln|\ln x|+c}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=x\,(|\ln|\ln x|+c)$$

۲ – د لاگرانژ دمتودي له لاري وبی

$$y'-\frac{y}{x}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

10. $y'=\frac{y}{x}+\frac{1}{\ln x}$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

د سوالورکونی څخه سملاسی لاس ته راځی $x>0$

وټاکی: Wählen: $c_1=0$

$$\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln |y| = \ln |x| + c_1$$

$$y = c \cdot x \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot x}}$$

$c = e^{c_1}$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$$y' = c'(x) \cdot x + c(x)$$

$$c'(x) \cdot x + c(x) = c(x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$c'(x) \cdot x = \frac{1}{\ln x} \quad \Big\| \cdot \frac{1}{x}$$

$$c'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$c(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\, dx$$

$$= \underline{\ln |\ln x| + k}$$

$$y = c(x) \cdot x$$

$$= \underline{\underline{x(\ln |\ln x| + k)}}$$

11. $y' = a + bx + cy$

۱ - د برنولی متودله لارپاوبی

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$$u \cdot v' + v \cdot u' = a + bx + cuv$$

$$u\underbrace{(v' - cv)}_{=0} + v \cdot u' = a + bx$$

$$\frac{dv}{dx} = cv$$

$$\int \frac{dv}{v} = c \int dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وتاکه

$$\ln |v| = cx + c_1$$

$$\underline{v = e^{cx}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پارشل ایتیکریشن یا اینتیکراول

$$u \cdot 0 + e^{cx} \cdot u' = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$u' = (a+bx) \cdot e^{-cx}$$

$$u = \int (a+bx) e^{-cx} \, dx$$

$$= a \int e^{-cx} \, dx + b \int x \cdot e^{-cx} \, dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \int x \cdot e^{-cx} \, dx$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} + b \left[-\frac{x}{c} e^{-cx} + \frac{1}{c} \int e^{-cx} \, dx \right]$$

$$= -\frac{a}{c} e^{-cx} - \frac{bx}{c} e^{-cx} - \frac{b}{c^2} e^{-cx} + c_1$$

$$= -\frac{1}{c} e^{-cx} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1$$

$$y = u \cdot v$$

$$= -\frac{1}{c} \left(a + bx + \frac{b}{c} \right) + c_1 \cdot e^{cx}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبي

$$y' - cy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = cy$$

$$\int \frac{dy}{y} = c \int dx$$

$$\ln |y| = cx + c_1$$

$c_2 = e^{c_1}$

$$y = c_2 \cdot e^{cx} \Rightarrow y = c_2(x) \cdot e^{cx}$$

په دیفرنځیالمساوات کي ځای
په ځاي کړی یا کیږدی

$$y' = c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} + c \cdot c_2(x) \cdot e^{cx} = a + bx + c \cdot c_2^{(x)} \cdot e^{cx}$$

$$c_2'(x) \cdot e^{cx} = a + bx \quad \| \cdot e^{-cx}$$

$$c_2'(x) = (a+bx) e^{-cx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_2(x)=\int (a+bx)e^{-cx}\,dx$$

$$=-\frac{1}{c}\,e^{-cx}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+c_2$$

$$y=k(x)\cdot e^{cx}$$

$$=-\frac{1}{c}\left(a+bx+\frac{b}{c}\right)+k\cdot e^{cx}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

12. $xy'+1=e^x+y$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$x(u\cdot v'+v\cdot u')+1=e^x+uv$$

$$\underbrace{u(xv'-v)}_{=0}+xv\cdot u'+1=e^x$$

$$x\cdot\frac{dv}{dx}=v$$

نیونه: $x \neq 0$, ځکه په x ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v|=\ln|x|+c_1$$

$$v=x$$

Wählen: $c_1=0$: وټاکه

$$u\cdot 0+x^2\cdot u'+1=e^x$$

$$u'=\frac{e^x-1}{x^2}$$

$$u=\int\frac{e^x}{x^2}\,dx-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$=\int\frac{e^x}{x^2}\cdot dx+\frac{1}{x}$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\frac{e^x}{x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\dots$$

د دي لاندي اینتیګرال

$$\int\frac{e^x}{x^2}\,dx$$

اوبی کی د انتیګرایشن لپاره لړی ودیزینه باندې تیریدنه نه شي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{e^x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$u = \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + c$$

$$y = u\cdot v$$

$$= c\cdot x + x\cdot \ln|x| + \frac{x^2}{1\cdot 2!} + \frac{x^3}{2\cdot 3!} + \frac{x^4}{3\cdot 4!} + \ldots$$

für $x \neq 0$

۲ – دلاگرانژمتود له لارې اوبی

$$xy' - y = 0$$

نیونه: $x \neq 0$, څکه په x ویشنه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = \ln|x| + c_1$$

$c = e^{c_1}$

$$y = c\cdot x \Rightarrow y = c(x)\cdot x$$

$$y' = c'(x)\cdot x + c(x)$$

په دیفرنخیالمساوات کی کیږدی

$$x^2\cdot c'(x) + c(x)\cdot x + 1 = e^x + c(x)\cdot x$$

$$x^2\cdot c'(x) + 1 = e^x \quad \| : x^2$$

$$c'(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$$

دا اینتیگرال همدا اوس تر ۱ لاندې اوبی شویدی.

$$c(x) = \int \frac{e^x}{x^2}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \ln|x| + \frac{x}{1\cdot 2!} + \frac{x^2}{2\cdot 3!} + \frac{x^3}{3\cdot 4!} + \ldots + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=c(x)\cdot x$

$$=k\cdot x+x\cdot\ln|x|+\frac{x^2}{1\cdot 2!}+\frac{x^3}{2\cdot 3!}+\frac{x^4}{3\cdot 4!}+\ldots$$

$x\neq 0$

13. $y'(1-x^2)+xy=1$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=u\cdot v'+v\cdot u'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ . د برنولي د متود له لاري دا دلته

$$(uv'+vu')(1-x^2)+xuv=1$$

$$u\underbrace{[v'(1-x^2)+xv]}_{=0}+vu'(1-x^2)=1$$

$$\frac{dv}{dx}(1-x^2)=-xv$$

نیونه: $|x|=1$; ویشنه په $1-x^2$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{-x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی

$$\ln|v|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$

$$=\ln|1-x^2|^{\frac{1}{2}}$$

$$v=\sqrt{|1-x^2|}$$

د ورپسی اوبیوني لپاره باید د
$|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$v=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & \text{für } |x|<1\\ \sqrt{x^2-1} & \text{für } |x|>1\end{cases}$$

1. Fall: $v=\sqrt{1-x^2};\quad |x|<1$

$$u\cdot 0+\sqrt{1-x^2}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$

$$u'=\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$u=\int\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$$

Substitution: سبستیچیوشن :

$$1-x^2=z^2\Rightarrow dx=-\frac{z\cdot dz}{x}$$

$$=\int\frac{1}{z^3}\cdot\frac{-z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u=-\int \frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1-z^2}}$$

$x=\sqrt{1-z^2}; \quad dx=-\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1-z^2}}$

سبستيچيوشن

$z=\sin t \Rightarrow dz=\cos t\cdot dt$

$\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t; \quad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$

$$=-\int \frac{\cos t\, dt}{\sin^2 t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t}}$$

$$=-\int \frac{dt}{\sin^2 t}$$ ► بنسټ اينتيګرال

$$=\cot t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

دا اوبي ديفرنځيالمساوات

د $|x|=1$ هم پوره کوي

$$y=u\cdot v$$

$$=x+c\cdot\sqrt{1-x^2} \quad \text{für } |x|\le 1$$

2. Fall: $v=\sqrt{x^2-1}; \quad |x|>1$

$$u\cdot 0+\sqrt{x^2-1}\cdot u'\cdot(1-x^2)=1$$

$$u'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\,(1-x^2)}$$

Substitution: سبستيچيوشن :

$x^2-1=z^2 \Rightarrow dx=\frac{z\cdot dz}{x}$

$x=\sqrt{1+z^2}; \quad dx=\frac{z\cdot dz}{\sqrt{1+z^2}}$

$$u=-\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\int \frac{1}{z^3}\cdot\frac{z\, dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$u=-\int \frac{dz}{z^2\cdot\sqrt{1+z^2}}$$

سبستيچيوشن

$z=\sinh t \Rightarrow dz=\cosh t\cdot dt$

$\sqrt{1+\sinh^2 t}=\cosh t$

$$=-\int \frac{\cosh t\, dt}{\sinh^2 t\cdot\sqrt{1+\sinh^2 t}}$$

$$=-\int \frac{dt}{\sinh^2 t}$$ ► بنسټ اينتيګرال،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u=\coth t+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+\sinh^2 t}}{\sinh t}+c$$

$$=\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}+c$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+c$$

$$\coth t=\frac{\cosh t}{\sinh t}$$

$$y=u\cdot v$$

$$=x+c\cdot\sqrt{x^2-1}$$ د $|x|\geq 1$ لپاره

د نورو x لپاره $y=x+c\cdot\sqrt{|1-x^2|}$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات د $|x| = 1$ هم پوره کوي په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت کارونی له لاري و یوه اوبی ته رایوځای شي.

۲ – د لاگرانژ متود له لاري اوبی

$$y'(1-x^2)+xy=0$$

نیونه: $|x| |= 1$; ویشنه په $1 - x^2$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{1-x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx$$

$$\int\frac{-2x}{1-x^2}\,dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+c_1$$

$$=\ln\sqrt{|1-x^2|}+c_1$$

$$y=\sqrt{|1-x^2|}\cdot c$$

$$c=e^{c_1}$$

$$y=c(x)\cdot\sqrt{|1-x^2|}$$

د نورو اوبیونولپاره باید د $|x|$ لپاره دوه حالتونه توپیر شي

$$y=\begin{cases}c(x)\cdot\sqrt{1-x^2} & \text{د } |x|<1 \text{ لپاره}\\ c(x)\cdot\sqrt{x^2-1} & \text{د } |x|>1 \text{ لپاره}\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>1. Fall:</u> $y = c(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$; $|x|<1$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$y' = c(x)\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + c'(x)\cdot\sqrt{1-x^2}$$

$$\underbrace{c(x)\cdot\frac{-x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}}_{-c(x)\cdot x\sqrt{1-x^2}} + c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + xc(x)\cdot\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x)(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

دا اینتیګرال همدا اوس په برخه۱
حالت ۱ کی وشمیرل شو

$$c(x) = \int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + k$$

دا اوبی دیفرنځیالمساوات
د $|x| = 1$ هم پوره کوي

$$y = c(x)\cdot\sqrt{1-x^2} = x + k\cdot\sqrt{1-x^2} \quad \text{für } |x|\le 1$$

<u>2. Fall:</u> $y = c(x)\cdot\sqrt{x^2-1}$; $|x|>1$

په دیفرنځیالمساوات کي ځاي
په ځاي کړی.

$$y' = c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1} + c(x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1} + c(x)\frac{x(1-x^2)}{\sqrt{x^2-1}} + x\cdot c(x)\cdot\sqrt{x^2-1} = 1$$

$$(1-x^2)\cdot c'(x)\cdot\sqrt{x^2-1} = 1$$

$$c'(x) = \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اینیگرال همدا اوس برخه ۱
۲ . حالت کی اوبی شو

دا اوبی دیفرنخیالمساوات
د $|x| = 1$ هم پوره کوي
په ۱ او ۲ حالت کی د ارزښت
کارونی له لارې و یوه اوبی ته
رایوځاي شي.

14. $\dfrac{y'}{\sin x} - y = 1 - \cos x$

$y = u \cdot v \Rightarrow y' = uv' + vu'$

$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$

دپوښتنی څخه $x \neq 0$ ورکوي،
دا په دې مانا چی $x \neq n \cdot \pi$
د $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ سره

Wählen: $c_1 = 0$

سبستیچیوشن (بدلون)

$z = \cos x \Rightarrow dx = \dfrac{dz}{-\sin x}$

$$c(x) = -\int \frac{dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + k$$

$$y = c(x) \cdot \sqrt{x^2-1}$$

$$= x + k \cdot \sqrt{x^2-1} \quad \text{für } |x| \geq 1$$

$$y = x + k \cdot \sqrt{|1-x^2|} \quad \text{für alle } x$$

۱ - د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - \sin x \cdot y = \sin x (1 - \cos x)$$

$$uv' + vu' - uv \cdot \sin x = \sin x \cdot (1 - \cos x)$$

$$\underbrace{u(v' - v \cdot \sin x)}_{=0} + vu' = \sin x (1 - \cos x)$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |v| = -\cos x + c_1$$

$$v = e^{-\cos x}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\cos x} \cdot u' = \sin x (1 - \cos x) \quad \| \cdot e^{\cos x}$$

$$u' = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

$$u = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} dx$$

$$= -\int (1 - z) e^z dz$$

$$= -\int e^z dz + \int z \cdot e^z dz$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = -e^z + \int z \cdot e^z \, dz$$

پارشل یا ټوټه ایتیګریشن

$$= -e^z + z \cdot e^z - \int e^z \, dz$$

$$= -e^z + z \cdot e^z - e^z + c$$

$$= e^z(z-2) + c$$

$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{\cos x - 2 + c \cdot e^{-\cos x}}}$$

۲ - د لاګرانج متود له لارې اوبې

$$\frac{y'}{\sin x} - y = 0 \quad \| \cdot \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \sin x$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \sin x \, dx$$

$$\ln |y| = -\cos x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\cos x + c_1} = e^{-\cos x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\cos x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\cos x}}}$$

په دیفرنځیالمساوات کې ځاي په ځاي کړی.

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\cos x} + c(x) \cdot \sin x \cdot e^{-\cos x}$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} + c(x) \cdot e^{-\cos x} - c(x) \cdot e^{-\cos x} = 1 - \cos x$$

$$\frac{c'(x)}{\sin x} e^{-\cos x} = 1 - \cos x \quad \| \cdot \sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$c'(x) = \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کې اوبې شو

$$c(x) = \int \sin x (1 - \cos x) e^{\cos x} \cdot dx$$

$$= \underline{e^{\cos x} \cdot (\cos x - 2) + k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=c(x)\cdot e^{-\cos x}$

$=\cos x-2+k\cdot e^{-\cos x}$

15. $y'+y\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

١ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

$u\underbrace{(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=\frac{1}{2}\sin 2x$

$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\cos x$

$\int\frac{dv}{v}=-\int\cos x\,dx$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی

$\ln|v|=-\sin x+c_1$

$v=e^{-\sin x}$

$\sin 2x=2\cos x\cdot\sin x$

$u\cdot 0+e^{-\sin x}\cdot u'=\frac{1}{2}\sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$

$u'=\frac{1}{2}\sin 2x\, e^{\sin x}$

Substitution: بدلون

$\sin x=z\Rightarrow dx=\frac{dz}{\cos x}$

پارشل یا ټوټه ایتیګریشن

$u=\int\sin x\cdot\cos x\cdot e^{\sin x}\,dx$

$=\int z\cdot e^{z}\cdot dz$

$=z\cdot e^{z}-\int e^{z}\,dz$

$u=z\cdot e^{z}-e^{z}+c$

$=e^{z}(z-1)+c$

$=e^{\sin x}(\sin x-1)+c$

$y=u\cdot v$

$=\sin x-1+c\cdot e^{-\sin x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – د لاګرانج د متود له لارې اوبی

$y' + y \cdot \cos x = 0$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$c = e^{c_1}$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow y = \underline{\underline{c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$

په دیفرنخیالمساوات کي ځاي په ځاي کړی.

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$
$$+ \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot e^{\sin x}$$

دا اینتیګرال همدا اوس برخه ۱ کی اوبی شو

$$c(x) = \int \cos x \cdot \sin x \cdot e^{\sin x} dx$$
$$= \underline{\underline{e^{\sin x}(\sin x - 1) + k}}$$

$$y = c(x) \cdot e^{-\sin x}$$
$$= \underline{\underline{\sin x - 1 + k \cdot e^{-\sin x}}}$$

16. $y' - yx = x^2 - 1$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبی

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$

$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} - u \cdot v \cdot x = x^2 - 1$$

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] + v \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$\left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0$

$$\frac{dv}{dx} - v \cdot x = 0$$

$v = v(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dv}{v} = \int x\,dx$$

$$\ln v = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$e^{\ln v} = e^{\frac{x^2}{2} + c_1} = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot e^{c_1};\ c_1 = 0$$

$$v = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$v \cdot \frac{du}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2 - 1}{v}$$

$$du = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx$$

$$\int du = \int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1)\,dx$$

$$u = u(x) = \underline{-x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2}$$

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$y = (-x e^{-\frac{x^2}{2}} + c_2) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y = -x + c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f = \underline{\underline{\langle x, -c_2 \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - x \rangle}}$$

۲ – د لاګرانخ د متود له لارې اوبې

$$y' - yx = x^2 - 1$$

$$c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} - c_1(x) e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = x^2 - 1$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx} = x^2 - 1$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{x^2 - 1}{e^{\frac{x^2}{2}}}$$

د

$$v(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$u \cdot \left[\frac{dv}{dx} - v \cdot x\right] = 0.$$

د راپاتی مساواتو به $u = u(x)$ د اینتیګریشن له لارې وټاکل شي.

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1)\,dx$$

$$= \int e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot x \cdot x\,dx - \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} + \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx -$$

$$- \int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + c_2$$

دا لاسته راغلی ارزښتونه $u(x)$ او $v(x)$ به په برابرون $y = u(x).v(x)$ کی کېښنول شي.

دا لاسته راوړنه د ورکړشوي دفرنځیالمساوات تولیزه اوبیونه ده

$$F(x) = 0$$

$$\Rightarrow y' - y \cdot x = 0;\ x^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} - y \cdot x = 0$$

$$\frac{dy}{y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln c_1(x)$$

$$\underline{y = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\underline{y' = c_1(x) \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x + e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dc_1(x)}{dx}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dc_1(x)=\frac{x^2-1}{e^{\frac{x^2}{2}}}\,dx=e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$\int c_1(x)\,dx=\int e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)\,dx$$

$$\underline{c_1(x)=-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2}$$

$$y=c_1(x)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$=(-x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}+c_2)\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$y=-x+c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f=\underline{\underline{\langle x\mapsto -c_2\cdot e^{\frac{x^2}{2}}-x\rangle}}$$

دا د مساوات $y'-yx=0$ د اوبیونی سره لاس ته راغلی اینتیګریشنشابته د x فنکشن دی

y د $c_1(x)$ لپاره برخاوبی کی اینبول کیږي.

لاس ته راوړنه همغه تولیزه اوبیونه ده، لکه څنګه چې د برونولی متود له لاري لاس ته راغلی

١ - د برنولي متود له لارې اوبی

17. $y'\cdot x^2+y=x$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

$$(uv'+vu')x^2+uv=x$$

$$u\underbrace{(x^2v'+v)}_{=0}+x^2vu'=x$$

$$x^2v'=-v$$

نیونه: $x\,|=0$ د x^2 سره ویشنه

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|v|=\frac{1}{x}+c_1$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکی

$$v=\underline{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$u\cdot 0+x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}\cdot u'=x\quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$u'=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

$$u=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}\,dx$$

دا اینتیګرال کیدی شي یواځې د لړیودیزي له لارې اوبی شي

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\dots$$

$$z=-\frac{1}{x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2!x^2}-\frac{1}{3!x^3}+\frac{1}{4!x^4}-+\dots$$

$$\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2!x^3}-\frac{1}{3!x^4}+\frac{1}{4!x^5}-+\dots$$

$$u=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c$$

$$y=u\cdot v$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+c\right)$$

د $x\neq 0$ لپاره

۲ - د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'\cdot x^2+y=0$$

نیونه: $x \neq 0$ د x^2 سره ویشنه

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln|y|=\frac{1}{x}+c_1$$

$$y=c\cdot e^{\frac{1}{x}}\Rightarrow y=c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$c=e^{c_1}$

په دیفرنځیالمساوات کې کېږدی

$$y'=c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-\frac{c(x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}-c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}+c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x$$

$$x^2\cdot c'(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}=x \quad \|:x^2\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$c'(x)=\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}$$

دا اینټیګرال
همدا اوس برخه ۱کې اوبې شو

$$c(x)=\int\frac{1}{x}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\frac{1}{4!4x^4}+-\dots+k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=c(x)\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$=e^{\frac{1}{x}}\left(\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2!2x^2}+\frac{1}{3!3x^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4!4x^4}+-\ldots+k\right)$$

für $x\neq 0$

١ - د برنولي متود له لاري اوبيونه

18. $y'+\dfrac{1}{1+x}y+x^2=0$

$$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$$

$$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

د پوښتني کولو څخه همدااوس

ورکوي $x|=-1$

$$uv'+vu'+\frac{uv}{1+x}+x^2=0$$

$$u\underbrace{\left(v'+\frac{v}{1+x}\right)}_{=0}+vu'+x^2=0$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{-v}{1+x}$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{1+x}$$

Wählen: $c_1=0$

$$\ln|v|=-\ln|1+x|+c_1$$

$$-\ln|1+x|=\ln|1+x|^{-1}$$

$$v=\frac{1}{1+x}$$

$$u\cdot 0+\frac{u'}{1+x}+x^2=0\quad\|\cdot(1+x)$$

$$u'=-x^2(1+x)$$

$$u=-\int(x^2+x^3)\,dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+c_2$$

$$y=u\cdot v$$

$c=12c_2$

$$=\frac{c-4x^3-3x^4}{12(1+x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y'+\frac{1}{1+x}y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{1+x}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{1+x}$$

$$\ln|y|=-\ln|1+x|+c_1$$

$$e^{\ln|y|}=e^{-\ln|1+x|+c_1}=e^{\ln\left|\frac{1}{1+x}\right|}\cdot\underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y=c\cdot\frac{1}{1+x}\Rightarrow y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$y'=c'(x)\cdot\frac{1}{1+x}-c(x)\cdot\frac{1}{(1+x)^2}$$

په دیفرنخیالمساوات کی کېږدی

$$\frac{c'(x)}{1+x}-\frac{c(x)}{(1+x)^2}+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{c(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$\frac{c'(x)}{1+x}+x^2=0$$

$$c'(x)=-x^2(1+x)$$

$$c(x)=-\int(x^2+x^3)\,dx$$

$$=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+c_2$$

$$y=\frac{c(x)}{1+x}$$

$$=\frac{k-4x^3-3x^4}{12(1+x)}$$

$k=12c_2$

19. $y'+y\cdot\cos x=e^{-\sin x}$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبیونه

$$uv'+vu'+uv\cdot\cos x=e^{-\sin x}$$

$$u\underbrace{(v'+v\cdot\cos x)}_{=0}+vu'=e^{-\sin x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dv}{v} = -v \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \cos x \, dx$$

Wählen: $c_1 = 0$ وټاکی

$$\ln |v| = -\sin x + c_1$$

$$\underline{v = e^{-\sin x}}$$

$$u \cdot 0 + e^{-\sin x} \cdot u' = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$u' = 1$$

$$\underline{u = x + c}$$

$$y = u \cdot v$$

$$= \underline{\underline{(x+c)\, e^{-\sin x}}}$$

۲ - د لاګرانژ موتود له لاري اوبيونه

$$y' + y \cdot \cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -y \cdot \cos x$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \cos x \, dx$$

$$\ln |y| = -\sin x + c_1$$

$$e^{\ln |y|} = e^{-\sin x + c_1} = e^{-\sin x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c}$$

$$y = c \cdot e^{-\sin x} \Rightarrow \underline{\underline{y = c(x) \cdot e^{-\sin x}}}$$

په دیفرنشیالمساوات کی کېږدی

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} - \cos x \cdot c(x) \cdot e^{-\sin x} +$$

$$+ c(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x = e^{-\sin x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} = e^{-\sin x} \quad \| \cdot e^{\sin x}$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \underline{\underline{x + k}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

20. $y'+y\cdot\tan x=\sin(2x)$

$y=u\cdot v\Rightarrow y'=uv'+vu'$

$y=f(x)=u(x)\cdot v(x)$

د پوښتني کولو څخه همدااوس

cso x |= 0 ورکوي

$$-\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx=\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

Wählen: $c_1=0$ وټاکئ:

$y=c(x)\cdot e^{-\sin x}$

$=(x+k)e^{-\sin x}$

۱ – د برنولي متود له لارې اوبيونه

$uv'+vu'+uv\cdot\tan x=\sin(2x)$

$\underbrace{u(v'+v\cdot\tan x)}_{=0}+vu'=\sin(2x)$

$\frac{dv}{dx}=-v\cdot\tan x$

$\int\frac{dv}{v}=-\int\tan x\,dx$

$=-\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$\ln|v|=\ln|\cos x|+c_1$

$v=\cos x$

$u\cdot 0+\cos x\cdot u'=\sin(2x)$

$=2\sin x\cdot\cos x \quad \|:\cos x$

$u'=2\sin x$

$u=2\int\sin x$

$=-2\cos x+c$

$y=u\cdot v$

$=\cos x\cdot(c-2\cos x)$

– د لاګرانژ موتود له لارې اوبيونه

$y'+y\cdot\tan x=0$

$\frac{dy}{dx}=-y\cdot\tan x$

$\int\frac{dy}{y}=-\int\tan x\cdot dx$

$=-\int\frac{\sin x}{\cos x}\cdot dx$

$\ln|y| = \ln|\cos x| + c_1$

$c = e^{c_1}$

$y = \cos x \cdot c \Rightarrow y = \underline{c(x) \cdot \cos x}$

په ديفرنځيالمساوات کی کينبوول

$y' = c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x$

$c'(x) \cdot \cos x - c(x) \cdot \sin x + c(x) \cdot \underbrace{\cos x \cdot \tan x}_{\sin x} = \sin(2x)$

$c'(x) \cdot \cos x = \sin(2x)$

$= 2 \sin x \cdot \cos x \quad \| : \cos x$

$c'(x) = 2 \sin x$

$c(x) = 2 \int \sin x \cdot dz$

$= \underline{\underline{-2 \cos x + k}}$

$y = c(x) \cdot \cos x$

$= \underline{\underline{(k - 2 \cos x) \cdot \cos x}}$

21. $y' - 2y = -x + 3$

$y = u(x) \cdot v(x) = u \cdot v$

$y' = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

له $\left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] = 0$

$u = u(x)$ لاس ته راځي

د $u = e^{2x}$

$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2u\right] = 0.$ سره ځل لرو

د لاندي پاتی برابرون څخه د ایتیګرال له لاري

$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$

$v = v(x)$ تاکل کيږي

۱ - د برنولي متود له لاري اوبيونه

$y' - 2 \cdot y = -x + 3$

$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} - 2 \cdot u \cdot v = -x + 3$

$v \cdot \left[\frac{du}{dx} - 2 \cdot u\right] + u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$

$\frac{du}{dx} - 2u = 0$

$\int \frac{du}{u} = \int 2\,dx$

$\ln u = 2x + c_1 \Rightarrow \underline{u = e^{2x} \cdot e^{c_1}}$

$c_1 = 0 \Rightarrow u = e^{2x}$

$u \cdot \frac{dv}{dx} = -x + 3$

$\frac{dv}{dx} = \frac{-x + 3}{u} \blacktriangleright u = e^{2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dv = e^{-2x}(3-x)\,dx$$

$$v = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$v = e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

$$\int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$= 3\int e^{-2x}\,dx - \int x\cdot e^{-2x}\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}e^{-2x} - \left[x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}e^{-2x}\right] + c_2$$

$$y = u(x)\cdot v(x)$$

$$y = e^{2x}\cdot\left[e^{-2x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2\right]$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} + e^{2x}\cdot c_2$$

$$f = \left\langle x, -\frac{1}{2}x + e^{2x}\cdot c_2 - \frac{5}{4}\right\rangle$$

د $u(x)$ او $v(x)$ لاس ته راوړي ارزښتونه د $y=u(x).v(x)$ په مساوات کې کېښول کیږي.
لاس ته راوړنې د ورکړ شوي دفرنځیالبرابراون ټولیز اوبې دي

۲ - د لاګرانژ موتود له لارې اوبیونه

$$y' - 2y = -x + 3$$

$$y' - 2y = 0$$

$$y = c_3(x)\cdot e^{2x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x}$$

ږدو $-x + 3 = 0$ نولرو

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\cdot 2$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int 2\,dx$$

$$\ln y = 2x + c_1$$

$$y = e^{2x+c_1} = e^{2x}\cdot e^{c_1} = c_3(x)\cdot e^{2x}$$

د $e^{c_1} = c_3(x)$ اینتیګریشن ثابتي
د x فنکشن دی

$$c_3(x)\cdot e^{2x}\cdot 2 + c_3'(x)\cdot e^{2x} - 2\cdot c_3(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$\Rightarrow c_3'(x)\cdot e^{2x} = -x + 3$$

$$c_3'(x) = (-x+3)\cdot e^{-2x}$$

$$\int c_3'(x) = \int e^{-2x}\cdot(3-x)\,dx$$

$$c_3(x) = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}\right) + c_2$$

د y او 'y لپاره دواړه برخاوبیونې
په پیلمساوات $y' - 2y = -x + 3$
کې کېښول کیږي
د اینتګریشن له لارې لویه $c_3(x)$
پیداکیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برابرون کی کیښول کیږي c_3(۲)
$y=c_3(x)\cdot e^{2x}$

$$y=\left[e^{-2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}\right)+c_2\right]\cdot e^{2x}$$

لاسته راوړنه همغه ټولیزه اوبیونه

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}+e^{2x}\cdot c_2$$

ده، لکه د مخه د برنول د متود
له لارې راپیدا شوه

$$f=\left\langle x\cdot -\frac{1}{2}x+e^{2x}\cdot c_2-\frac{5}{4}\right\rangle$$

۱ . ۳ د دوم نظم درفنځیالمساوات

1. $y''=\frac{1}{x}$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{1}{x}$$

د پوښتنیورکړي څخه لاسته $x\,|=0$
راځي

$$\int dy'=\int\frac{dx}{x}$$

$$y'=\ln|x|+c_1$$

وریسی اوبیونی ته دې حالتونه $x>0$
او $x<0$ توپیر شي

$$=\begin{cases}\ln x+c_1 & \text{für } x>0\\ \ln(-x)+c_1 & \text{für } x<0\end{cases}$$

1. Fall: $y'=\ln x+c_1;\quad x>0$

$$\int dy=\int(\ln x+c_1)\,dx$$

پارشل یا ټوټه ایتیګریشن

$$y=\int\underbrace{\ln x}_{u}\;\underbrace{dx}_{dv}+c_1\int dx$$

$$=x\cdot\ln x-\int dx+c_1\cdot x$$

$$=x(\ln x+c_1-1)+c_2$$

$c_3=c_1-1$

$$=x(\ln x+c_3)+c_2;\quad x>0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Fall: $y' = \ln(-x) + c_1; \quad x < 0$

$$\int dy = \int [\ln(-x) + c_1]\, dx$$

$$y = \int \underbrace{\ln(-x)}_{u} \cdot \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int x \cdot \frac{-1}{-x}\, dx + c_1 \cdot x$$

$$= x \cdot \ln(-x) - \int dx + c_1 \cdot x$$

$$= x[\ln(-x) - 1 + c_1] + c_2$$

پارځیل یا پارشل اینتیګرال

$c_3 = -1 + c_1$

$$= x[\ln(-x) + c_3] + c_2; \quad x < 0$$

د ارزښتکرښو کارونی له لاري کیدی شي دواړه اوبیونی رایوځای شي. نومبدلون یا ـاړونه: $c_3 \triangleq c_1$

$$y = x(\ln|x| + c_1) + c_2$$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = f(x)$$

$$\int dy' = \int f(x)\, dx$$

$$y' = \int f(x)\, dx + c_1$$

$$y = \int \left[\int f(x) \cdot dx + c_1 \right] dx + c_2$$

3. $y'' - x^3 = 0$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x^3$$

$$\int dy' = \int x^3\, dx$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^4}{4} + c_1 \right) dx$$

$$y = \frac{x^5}{20} + c_1 \cdot x + c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4. $y'' = x + \sin x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x + \sin x$$

$$\int dy' = \int (x + \sin x)\,dx$$

$$y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$\int dy = \int \left(\frac{x^2}{2} + c_1 - \cos x\right) dx$$

$$y = \frac{x^3}{6} + c_1 \cdot x - \sin x + c_2$$

5. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln |x + \sqrt{a^2+x^2}| + c$$

دلته ارزښتکرښي ضرور نه دي

خکه چی $x+\sqrt{1+x^2}>0$ د ټولو

x لپاره باور لري

پاشل اینتیګریشن

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\int dy' = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1$$

$$\int dy = \int \underbrace{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}_{u} \underbrace{dx}_{dv} + c_1 \int dx$$

$$y = x \cdot \ln (x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{x + \sqrt{1+x^2}}\,dx + c_1 x$$

$$= x[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= x[\ln (x + \sqrt{1+x^2}) + c_1] - \sqrt{1+x^2} + c_2$$

6. $y'' = \tan x$

ددې انتیګرالبرابرون اوبیوني

کی په لمړودینه تریدنه ناشونی ده

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \tan x$$

$$\int dy' = \int \tan x\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = c_1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} + \frac{2x^6}{6\cdot 15} + \frac{17x^8}{8\cdot 315} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^7}{315} + \frac{17x^9}{22680} + \dots$$

د $|x| < \frac{\pi}{2}$ لپاره

7. $y'' = \sinh x$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \sinh x$$

$$\int dy' = \int \sinh x\, dx$$

$$y' = \cosh x + c_1$$

$$\int dy = \int (\cosh x + c_1)\, dx$$

$$y = \sinh x + c_1\cdot x + c_2$$

8. $y'' = e^{x^2}$

د دي انتيګرالبرابرون اوبيوني يواځي لړبودينی سره شونی ده.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$z = x^2$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \frac{x^{10}}{5!} + \dots$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = e^{x^2}$$

$$\int dy' = \int e^{x^2}\, dx$$

$$y' = c_1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} + \dots$$

$$y = c_2 + c_1\cdot x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{30\cdot 2!} + \frac{x^8}{56\cdot 3!} + \frac{x^{10}}{90\cdot 4!} + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9. $y^{(4)}=\cos x$

$y^{(4)}=\dfrac{dy'''}{dx}=\cos x$

$\int dy'''=\int \cos x\,dx$

$y'''=\dfrac{dy''}{dx}$

$y'''=\sin x+c_1^*$

$\int dy''=\int(\sin x+c_1^*)\,dx$

$y''=\dfrac{dy'}{dx}$

$y''=-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*$

$\int dy'=\int(-\cos x+c_1^*\cdot x+c_2^*)\,dx$

$y'=\dfrac{dy}{dx}$

$y'=-\sin x+c_1^*\cdot\dfrac{x^2}{2}+c_2^*\cdot x+c_3$

$\int dy=\int\left(-\sin x+\dfrac{c_1^*}{2}\cdot x^2+c_2^*\cdot x+c_3\right)dx$

$y=\cos x+\dfrac{c_1^*}{6}x^3+\dfrac{c_2^*}{2}x^2+c_3x+c_4$

$c_1=\dfrac{1}{6}c_1^*;\quad c_2=\dfrac{1}{2}c_2^*$

$y=\cos x+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4$

10. $y'''=e^x$

$y'''=\dfrac{dy''}{dx}=e^x$

$\int dy''=\int e^x\,dx$

$y''=e^x+c_1^*$

$\int dy'=\int(e^x+c_1^*)\,dx$

$y'=e^x+c_1^*\cdot x+c_2$

$\int dy=\int(e^x+c_1^*\cdot x+c_2)\,dx$

$y=e^x+c_1^*\cdot\dfrac{x^2}{2}+c_2x+c_3$

$c_1=\dfrac{1}{2}c_1^*$

$=e^x+c_1x^2+c_2x+c_3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

11. $y^{(4)} = \sinh(2x) \quad \blacktriangleright y^{(4)} = \dfrac{dy'''}{dx} \Rightarrow dy''' = y^{(4)} \cdot dx$

$$\int dy''' = \int \sinh(2x)\,dx$$

$$y''' = \frac{1}{2}\cosh(2x) + c_1 \quad \blacktriangleright y''' = \frac{dy''}{dx} \Rightarrow dy'' = y''' \cdot dx$$

$$\int dy'' = \int\left(\frac{1}{2}\cosh(2x) + c_1\right)dx$$

$$y'' = \frac{1}{2}\int \cosh(2x)\,dx + \int c_1\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2x) + c_2 + c_1x + c_3 \quad \blacktriangleright c_2 + c_3 = c_4$$

$$= \frac{1}{4}\sinh(2x) + c_1x + c_4$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow dy' = y'' \cdot dx$$

$$\int dy' = \int\left(\frac{1}{4}\sinh(2x) + c_1x + c_4\right)dx$$

$$y' = \frac{1}{8}\cosh(2x) + c_5 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_6 + c_4x + c_7 \quad \blacktriangleright c_5 + c_6 + c_7 = c_8$$

$$= \frac{1}{8}\cosh(2x) + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_4x + c_8$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = y' \cdot dx$$

$$\int dy = \int\left[\frac{1}{8}\cosh(2x) + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_4x + c_8\right]dx$$

$$y = \frac{1}{16}\cosh(2x) + c_9 + \frac{1}{6}c_1x^3 + c_{10} + \frac{1}{2}c_4x^2 + c_{11} + c_8x + c_{12}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{16}\cosh(2x) + \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{2}c_4x^2 + c_8x + k}}$$

12. $y^{(5)} = \cosh(ax) \quad \blacktriangleright y^{(5)} = \dfrac{dy^{(4)}}{dx} \Rightarrow dy^{(4)} = y^{(5)} \cdot dx$

$$\int dy^{(4)} = \int \cosh(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sinh(ax) + c_1 = y^{(4)} = \frac{dy'''}{dx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dy''' = \int\left[\frac{1}{a}\sinh(ax)+c_1\right]dx = \frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_2+c_1x+c_3$$

$$y''' = \frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_1x+c_4 = \frac{dy''}{dx}$$

$$\int dy'' = \int\left[\frac{1}{a^2}\cosh(ax)+c_1x+c_4\right]dx$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax)+c_5+\frac{1}{2}c_1x^2+c_6+c_4x+c_7$$

$$y'' = \frac{1}{a^3}\sinh(ax)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8 = \frac{dy'}{dx}$$

$$\int dy' = \int\left[\frac{1}{a^3}\sinh(ax)+\frac{1}{2}c_1x^2+c_4x+c_8\right]dx$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax)+c_9+\frac{1}{6}c_1x^3+c_{10}+\frac{1}{2}c_4x^2+c_{11}+c_8x+c_{12}$$

$$y' = \frac{1}{a^4}\cosh(ax)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{4}c_4x^2+c_8x+c_{13} = \frac{dy}{dx}$$

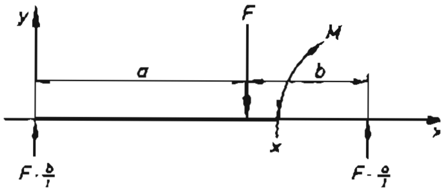
$$\int dy = \int\left[\frac{1}{a^4}\cosh(ax)+\frac{1}{6}c_1x^3+\frac{1}{4}c_4x^2+c_8x+c_{13}\right]dx$$

$$y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax)+c_{14}+\frac{1}{24}c_1x^4+c_{15}+\frac{1}{12}c_4x^3+c_{16}+\frac{1}{2}c_8x^2+c_{17}+c_{13}x+c_{18}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{a^5}\cosh(ax)+\frac{1}{24}c_1x^4+\frac{1}{12}c_4x^3+\frac{1}{2}c_8x^2+c_{13}x+k}}$$

د مومنتو تاکلو لپاره باید ورشوګا-
نی یاساحی $0\leq x\leq a$ او $a\leq x\leq a+b=l$
توپیر شي

ورشو 1. Bereich: $0 \leq x \leq a$

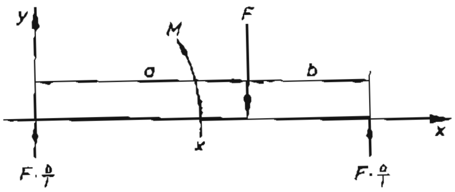


$$M - F\cdot\frac{b}{l}\cdot x = 0$$

$$\underline{\underline{M = F\cdot\frac{b}{l}\cdot x}} \quad \text{für } 0 \leq x \leq a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b=l$



$$M - F \cdot \frac{a}{l} \cdot (l-x) = 0$$

$$M = F \cdot \frac{a}{l}(l-x) \quad \text{für } a \leq x \leq l$$

د ورشو یا تعریفډیري $0 < x < a$ لپاره د کړونلاین y_1 ټاکنه

د دې دواړود هریوه ورشو یا ساحولپاره دې کړونلاین وټاکل شي، چې د x=a لپاره باید یوځاي ولوېږي.

$$y_1'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{b}{l} \cdot x}{E \cdot I}$$

$$\int dy_1' = -\frac{F \cdot b}{l \cdot E \cdot I} \int x \, dx$$

$$y_1' = -\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1$$

$$y_1 = \int \left(-\frac{F \cdot b}{2lEI} x^2 + c_1 \right) dx$$

$$= -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x + c_2$$

د $x = 0$ لپاره کړون 0 دی.

$$y_1(0) = 0 - c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + c_1 \cdot x$$

د ورشو یا تعریفډیري $0 < x < l$

لپاره د کړونلاین y_2 ټاکنه:

$$y_2'' = -\frac{M}{E \cdot I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy_2'}{dx} = -\frac{F \cdot \frac{a}{l}(l-x)}{E \cdot I}$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$\int dy_2' = -\frac{F \cdot a}{lEI} \int (l-x)\,dx$$

$$= \frac{F \cdot a}{lEI} \int z\,dz$$

$$y_2' = \frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3$$

$$\int dy_2 = -\int \left(\frac{F \cdot a}{2lEI} z^2 + c_3 \right) dz$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} z^3 - c_3 \cdot z + c_4$$

$$= -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 - c_3(l-x) + c_4$$

ثابتی c_4 د غاړیارزښت $y_2(l) = 0$
څخه ټاکل کیږي

$$y_2(l) = c_4 \quad c_4 = 0$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 - c_3(l-x)$$

په فنکشنونو y_1 او y_2 رامنځ ته شوي ثابتي c_1 او c_2 داسی وټاکل شي، چی دواړه فنکشنونه په $x=a$ کی یوځای پریوځي، دا په دي مانا، چی باور لري

$y_1(a) = y_2(a)$

$y_1'(a) = y_2'(a)$

$$y_1(a) = y_2(a)$$

$$-\frac{Fba^3}{6lEI} + c_1 \cdot a = -\frac{Fab^3}{6lEI} - c_3 \cdot b$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$-\frac{Fba^2}{2lEI} + c_1 = +\frac{Fab^2}{2lEI} + c_3$$

دا ثابتي c_1 او c_2 په y_1 او y_1 کی ګېښول کیږي

$$c_1 = \frac{Fab(a+2b)}{6lEI}$$

$$c_3 = \frac{-Fab(2a+b)}{6lEI}$$

$$y_1 = -\frac{F \cdot b}{6lEI} x^3 + \frac{Fab(a+2b)}{6lEI} x$$

$$y_2 = -\frac{F \cdot a}{6lEI} (l-x)^3 + \frac{Fab(b+2a)}{6lEI} (l-x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\begin{cases}\frac{Fbx}{6lEI}\left[a(a+2b)-x^2\right] & \text{für } 0\le x\le a\\ \frac{Fa(l-x)}{6lEI}\left[b(b+2a)-(l-x)^2\right] & \text{für } a\le x\le l\end{cases}$$

رایوخایون :

$$y_1'=\frac{Fb}{6lEI}\left[a(a+2b)-3x^2\right]$$

$$y_1'=0$$

$$x_m^2=\frac{a}{3}(a+2b)$$

$$x_{m(1)}=\pm\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}$$

$$x_m=\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}$$

ماکسیمالګرځونه کیدیشي د y_1 یا y_2 ورشو کی داسی پرته وي، چی دفرنځیالیدی شي.

د $b < a$ له امله لاسته راځی

$$\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}<\sqrt{\frac{a}{3}(a+2a)}=a,$$

دا په دې ماناچی $x_m < a$ په x_mکی ماکسیمالګرځون د y_1 ورشوکی پروت دی، چی نوروy_2 کی څیړنی ته باید اړ نه دی

$$\left(x_m=-\sqrt{\frac{a}{3}(a+2b)}<0 \text{ ist hier sinnlos.}\right)$$ دلته بې مفهومه

ماکسیمال ګرځون y_{max}

$$y_{max}=y_1(x_m)$$

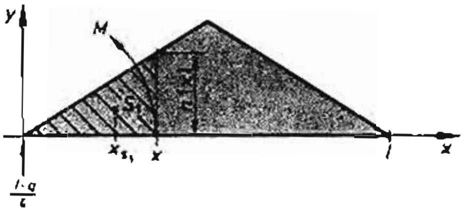
$$=\frac{Fb\sqrt{a(a+2b)}}{6\sqrt{3}lEI}\left[a(a+2b)-\frac{a}{3}(a+2b)\right]$$

$$=\frac{Fab(a+2b)\sqrt{a(a+2b)}}{9\sqrt{3}lEI}$$

1. Bereich: $0\le x\le\frac{l}{2}$ ورشو

۱۴ – ټول بار $F = (½)\, l.q$ دی داسی چی پروتزور په A او B هریو کی $(¼) l.q$ دی

دا کربنی شوې هواره دا بار $(½)h(x).x$ دی.



$$h(x)=\frac{2q}{l}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دروندتکی پروتمحور x_{S1} کیدی شي بنستهندسیز و $x_{S1} = (2/3)x$ ته وشمیرل شي.

$$0 = M + (x - x_{s1}) \cdot \frac{1}{2} h(x) \cdot x - x \cdot \frac{l \cdot q}{4}$$

$$M = \frac{l \cdot q}{4} x - \left(x - \frac{2}{3} x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2q}{l} x \cdot x$$

$$= \frac{l \cdot q}{4} x - \frac{q}{3l} x^3 \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

د کږونلاین y_1 ټاکنه د لاندي ورشو لپاره $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$:

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$\frac{dy_1'}{dx} = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right)$$

$$\int dy_1' = -\frac{q}{EI} \int \left(\frac{l}{4} x - \frac{1}{3l} x^3\right) dx$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{1}{12l} x^4 + c_1\right)$$

د سیومتري دلائلو له امله c_1 له لاندي څخه لاس ته راځي

$x_m = \frac{l}{2}$ mit $y_1'\left(\frac{l}{2}\right) = y_2'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$

$$0 = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12l} \cdot \frac{l^4}{16} + c_1\right)$$

$$c_1 = -\frac{l^3}{32} + \frac{l^3}{192}$$

$$= -\frac{5l^3}{192}$$

$$y_1' = -\frac{q}{EI}\left(\frac{l}{8} x^2 - \frac{x^4}{12l} - \frac{5l^3}{192}\right)$$

$$\int dy_1 = \frac{q}{EI} \int \left(\frac{x^4}{12l} - \frac{lx^2}{8} + \frac{5l^3}{192}\right) dx$$

$y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$y_1 = \frac{q}{EI}\left(\frac{x^5}{60l} - \frac{lx^3}{24} + \frac{5l^3 \cdot x}{192}\right) + c_2$$

$$y_1(0) = \frac{q}{EI} \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتریکی بارونی یا زور له امله کږونلاین و x = l /2 ته سیو- متري دی۔د y_2 لپاره په ورشو l/2≤x≤l کی په y_1 کی فقط x د l - x سره بدل کړي.

$$y_1 = \frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$\text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2}$$

$$y = \begin{cases} \frac{qx}{12EI}\left(\frac{x^4}{5l} - \frac{lx^2}{2} + \frac{5l^3}{16}\right) & \text{für } 0 \le x \le \frac{l}{2} \\ \frac{q(l-x)}{12EI}\left[\frac{(l-x)^4}{5l} - \frac{l(l-x)^2}{2} + \frac{5l^3}{16}\right] & \text{für } \frac{l}{2} \le x \le l \end{cases}$$

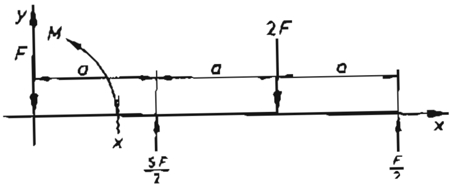
د xm = l /2 لپاره ماکسیمالکږون له y_1 څخه شمیرل کیدی شي.

$$y_1\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql}{24EI}\left(\frac{l^3}{80} - \frac{l^3}{8} + \frac{5l^3}{16}\right)$$

$$y_{max} = \frac{ql^4}{120EI}$$

۱۵ - دي ټوبنتنی سره د x لپاره دري ورزوګانی باید توپیر شي

1. Bereich: $0 \le x \le a$ ورشو :



$$0 = M + F \cdot x \Rightarrow M = -F \cdot x$$

د 0≤x≤a لپاره کږونلاین: y_1

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^3 + c_1 x + c_2$$

ژی ارزښت : $y_1(a) = 0 \Rightarrow c_2$

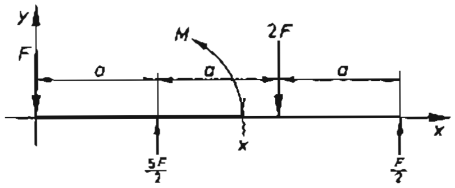
$$0 = \frac{Fa^3}{6EI} + c_1 a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{Fa^3}{6EI} - c_1 a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x - a)$$

2. Bereich: $a \le x \le 2a$: ورډنګو



$$0 = M - \frac{5F}{2}\cdot(x - a) + F\cdot x$$

$$M = \frac{5F}{2}(x - a) - F\cdot x$$

$$= \frac{3F}{2}x - \frac{5aF}{2}$$

$$= \frac{F}{2}(3x - 5a)$$

y_2 :لپاره کږونلاین $a \le x \le 2a$ د

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3x - 5a)$$

$$y_2' = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3}{2}x^2 - 5ax + c_3\right)$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3x + c_4\right)$$

ژی ارزښت : $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{a^3}{2} - \frac{5a^3}{2} + c_3a + c_4\right)$$

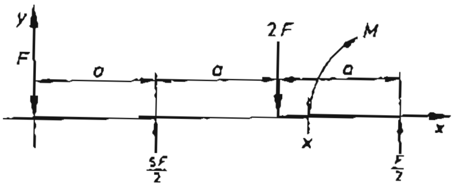
$$c_4 = \frac{5a^3}{2} - \frac{a^3}{2} - c_3a$$

$$= \frac{4a^3}{2} - c_3a$$

$$y_2 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{x^3}{2} - \frac{5a}{2}x^2 + c_3(x - a) + 2a^3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3. Bereich: $2a \le x \le 3a$ وریتو



$$0 = M - \frac{F}{2}(3a - x) \Rightarrow M = \frac{F}{2}(3a - x)$$

د $2a \le x \le 3a$ لپاره کږونلاین : y_3

$$y_3'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{F}{2EI}(3a - x)$$

$$y_3' = -\frac{F}{2EI}\left(3ax - \frac{x^2}{2} + c_5\right)$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5 x + c_6\right)$$

ژی ارزبنت : $y_3(3a) = 0 \Rightarrow c_6$

$$0 = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{27a^3}{2} - \frac{27a^3}{6} + 3ac_5 + c_6\right)$$

$$c_6 = -27a^3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) - 3ac_5$$

$$= -9a^3 - 3ac_3$$

$$y_3 = -\frac{F}{2EI}\left[\frac{3a}{2}x^2 - \frac{x^3}{6} + c_5(x - 3a) - 9a^3\right]$$

دا په فنکشنونو y_1 , y_2 , y_3 کی لا دننه ثابتی c_1 , c_3 , c_5 بایدد دي دري فنکشنونو رایوځایونی له لاري وټاکل شي

د c_3 او c_5 ټاکه:

شرتونه: $y_2(2a) = y_3(2a)$

$y_2'(2a) = y_3'(2a)$

$$y_2(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[4a^3 - 10a^3 + ac_3 + 2a^3\right]$$

$$= -\frac{F}{2EI}\left[ac_3 - 4a^3\right]$$

$$y_3(2a) = -\frac{F}{2EI}\left[6a^3 - \frac{4}{3}a^3 - ac_5 - 9a^3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$y_2(2a) = y_3(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}[ac_3 - 4a^3] = -\frac{F}{2EI}\left[-\frac{13a^3}{3} - ac_5\right]$$

$$c_3 - 4a^2 = -\frac{13a^2}{3} - c_5$$

مساوات یا برابرون I

$$\text{I:} \quad c_3 + c_5 = -\frac{1}{3}a^2$$

$$y_2'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 10a^2 + c_3)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2)$$

$$y_3'(2a) = -\frac{F}{2EI}(6a^2 - 2a^2 + c_5)$$

$$= -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$y_2'(2a) = y_3'(2a)$$

$$-\frac{F}{2EI}(c_3 - 4a^2) = -\frac{F}{2EI}(4a^2 + c_5)$$

$$c_3 - 4a^2 = 4a^2 + c_5$$

مساوات یا برابرون II

$$\text{II:} \quad c_3 - c_5 = 8a^2$$

د مساواتو I او II خخه c_3 او c_3 ساده راپیدا کیږي

$$\text{I+II:} \quad 2c_3 = -\frac{1}{3}a^2 + 8a^2 \Rightarrow c_3 = \frac{23}{6}a^2$$

$$\text{I-II:} \quad 2c_5 = -\frac{1}{3}a^2 - 8a^2 \Rightarrow c_5 = -\frac{25}{6}a$$

د c_1 ټاکنه

ثابته c_1 د $y_1'(a) = y_2'(a)$ اړیکو خخه شمیرل کیږي

$$y_1'(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y_2'(a) = -\frac{F}{2EI}\left(\frac{3a^2}{2} - 5a^2 + \frac{23a^2}{6}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_2'(a) = -\frac{Fa^2}{6EI}$$

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{Fa^2}{6EI} \Rightarrow c_1 = -\frac{2Fa^2}{3EI}$$

په بنده بڼه کې د ټولو درې ورشوګانو یا ساحو انځورونه:

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}(x^3 - 4a^2x + 3a^3) & \text{für } 0 \le x \le a \\ \frac{-F}{12EI}(3x^3 - 15ax^2 + 23a^2x - 11a^3) & \text{für } a \le x \le 2a \\ \frac{F}{12EI}(x^3 - 9ax^2 + 25a^2x - 21a^3) & \text{für } 2a \le x \le 3a \end{cases}$$

د ماکسیمال راکړونې ټاکلو لپاره باید y'_1 ، y'_2 او y'_3 جوړ شي.

$$y_1' = \frac{F}{6EI}(3x^2 - 4a^2)$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \pm a\sqrt{\frac{4}{3}}$$

هم x_1 او هم x_2 د ورشو $0 \le x \le a$ څخه دباندې پراته دي، چې له دې امله د ماکسیمالراګرون لپاره په پوښتنه کې نه راځي په ورشو $0 \le x \le a$ کې کیدی شي ماکسیما-لکړون یواځې په ژی ارزښت $x_{m1}=0$ کې رامنځ ته شي.

$$y_1(0) = y_1(x_{m_1}) = y_{max_1}$$

$$y_{max_1} = \frac{Fa^3}{2EI}$$

$$y_2' = -\frac{F}{12EI}(9x^2 - 30ax + 23a^2)$$

$$y_2' = 0 \Rightarrow 9x^2 - 30ax + 23a^2 = 0$$

$$x^2 - \frac{10}{3}ax + \frac{23}{9}a^2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{5}{3}a \pm \sqrt{\frac{25}{9}a^2 - \frac{23}{9}a^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1;2}=\frac{5}{3}a\pm\frac{\sqrt{2}}{3}a$$

$$x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$$

دا پورته ارزښت نور د y_1 باوورشو $a\leq x\leq 2a$ کی نه دی پروت، چی له دې امله يواځ د x_2 لپاره ماکسيمال راکړون مو مخ ته پريوتی شي.

دلته پامور نه دی ► $x_1=\frac{5}{3}a+\frac{\sqrt{2}}{3}a>2a$

$$x_{m_2}=\frac{a}{3}(5-\sqrt{2})$$

$$y_{max_2}=y_2(x_{m_2})$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(5-\sqrt{2})^3-\frac{5a^3}{3}(5-\sqrt{2})^2+\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=\frac{-F}{12EI}\left[\frac{a^3}{9}(155-77\sqrt{2})-\frac{5a^3}{3}(27-10\sqrt{2})\right.$$

$$\left.+\frac{23a^3}{3}(5-\sqrt{2})-11a^3\right]$$

$$=-\frac{Fa^3}{108EI}[155-77\sqrt{2}-405+150\sqrt{2}+$$

$$+345-69\sqrt{2}-99]$$

$$y_{max_2}=-\frac{Fa^3}{108EI}[-4+4\sqrt{2}]$$

$$=-\frac{Fa^3}{27EI}(\sqrt{2}-1)$$

پام دې وي، چی دا راکړون د y-محور په مثبت- يا زياتونلور رامنځ ته کيږي (دا په دې مانا، چی تراوسه پاس يا پورته پروت دی)، ځکه چی په دې کواوردیناتسیستم کی زور F کمون (تفریق) نخښه لري.

$$y_3'=\frac{F}{12EI}(3x^2-18ax+25a^2)$$

$$y_3'=0\Rightarrow 3x^2-18ax+25a^2=0$$

$$x^2-6ax+\frac{25}{3}a^2=0$$

$$x_{1;2}=3a\pm\sqrt{9a^2-\frac{25}{3}a^2}$$

$$=3a\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

د x_1 - ارزښت نور د y_3 باوورشو کی نه دی پروت، نو ځکه يواځي

دلته پامور نه دی ► $x_1=3a+a\sqrt{\frac{2}{3}}>3$

د x_2 لپاره ماکسیمال راکړوون موجود کیدی شي

$$x_{m_3}=a\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$y_{max_3}=y_3(x_{m_3})$$

$$=\frac{F}{12EI}\left[a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3-9a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\right.$$

$$\left.+25a^3\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-21a^3\right]$$

$$=\frac{Fa^3}{12EI}\left[33-\frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-9\left(\frac{29}{3}-6\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\right.$$

$$\left.+25\left(3-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-21\right]$$

$$=\frac{Fa^3}{12EI}\left[33-\frac{83}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}-87+54\sqrt{\frac{2}{3}}+\right.$$

$$\left.+75-25\sqrt{\frac{2}{3}}-21\right]$$

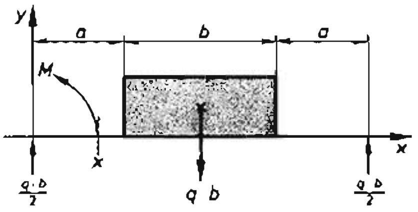
$$=\frac{Fa^3}{12EI}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{Fa^3}{9EI}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۱۶ . د x لپاره دري ورشوګانی توپیر کیدی شي.

1. Bereich: $0\leq x\leq a$: لمړۍ ټوټه (ورشو)

$l=2a+b$



$$0=M-\frac{q\cdot b}{2}x\Rightarrow M=\frac{q\cdot b}{2}x$$

د $0\leq x\leq a$ لپاره کړوونلاین y_1:

$$y_1''=-\frac{M}{E\cdot I}$$

$$=-\frac{qb}{2EI}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_1' = -\frac{qb}{4EI}x^2 + c_1$$

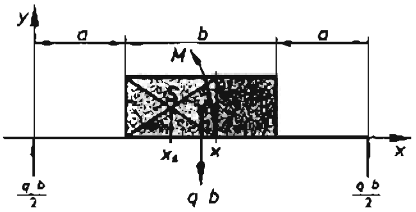
$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1x + c_2$$

اژی ارزښت: $y_1(0) = 0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -0 + 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{qb}{12EI}x^3 + c_1x$$

2. Bereich: $a \leq x \leq a+b$ ورښو



$$0 = M + q(x-a)\cdot(x-x_s) - \frac{qb}{2}x$$

$x_s = \frac{x+a}{2}$

$$M = \frac{qb}{2}x - q(x-a)\cdot\frac{x-a}{2}$$

$$= \frac{qb}{2}x - \frac{q}{2}(x-a)^2$$

$$= \frac{q}{2}[bx - (x-a)^2]$$

$$= \frac{q}{2}[bx - x^2 + 2ax - a^2]$$

$$= \frac{q}{2}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

د $a \leq x \leq a+b$ لپاره کړونلاین :X_2

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= -\frac{q}{2EI}[-x^2 + x(2a+b) - a^2]$$

$$= \frac{q}{2EI}[x^2 - x(2a+b) + a^2]$$

$$y_2' = \frac{q}{2EI}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}(2a+b) + a^2x + c_3\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیومتري باروېشنې له امله

$y_2'\left(a+\frac{b}{2}\right)=0,$

باور لري، له کوم سره

چې c_3 ټاکله کېږي.

$$0=\frac{q}{2EI}\left[\frac{(2a+b)^3}{24}-\frac{(2a+b)^3}{8}+\frac{a^2}{2}(2a+b)+c_3\right]$$

$$c_3=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+3(2a+b)^2-(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+2(2a+b)^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-12a^2+8a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{2a+b}{24}\left[-4a^2+8ab+2b^2\right]$$

$$=\frac{1}{12}(2a+b)(b^2+4ab-2a^2)$$

$$=\frac{1}{12}(2ab^2+8a^2b-4a^3+b^3+4ab^2-2a^2b)$$

$$=\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)$$

ثابتې c_1 او c_4 باید له فنکشنونو y_1 او y_2 څخه د پوشانیزشرتونو $y_1(a)=y_2(a)$ او $y_1'(a)=y_2'(a)$ له امله وټاکل شي.

$$y_2=\frac{q}{2EI}\left[\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}(2a+b)+\frac{a^2x^2}{2}+c_3x+c_4\right]$$

د c_1 ټاکنه

$$y_1'(a)=-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2}{2}(2a+b)+a^3+c_3\right]$$

$$=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-a^3-\frac{a^2b}{2}+a^3+c_3\right]$$

$$y_2'(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^3}{3}-\frac{a^2b}{2}+\frac{1}{12}(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[4a^3-6a^2b+b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3\right]$$

$$=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$y_1'=y_2'(a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{qb}{4EI}a^2+c_1=\frac{qb^2}{24EI}(b+6a)$$

$$c_1=\frac{qb}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

د c_4 ټاکنه

$$y_1(a)=-\frac{qba^3}{12EI}+\frac{qba}{24EI}(6a^2+6ab+b^2)$$

$$=\frac{qab}{24EI}(4a^2+6ab+b^2)$$

$$y_2(a)=\frac{q}{2EI}\left[\frac{a^4}{12}-\frac{a^3}{6}(2a+b)+\frac{a^4}{2}+c_3a+c_4\right]$$

$$=\frac{q}{24EI}[a^4-4a^4-2a^3b+6a^4+12ac_3+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[3a^4-2a^3b+ab^3+6a^2b^2+6a^3b-$$

$$-4a^4+12c_4]$$

$$=\frac{q}{24EI}[-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+12c_4]$$

$$y_1(a)=y_2(a)$$

$$ab(4a^2+6ab+b^2)=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$4a^3b+6a^2b^2+ab^3=-a^4+4a^3b+6a^2b^2+ab^3+$$

$$0=-a^4+12c_4$$

$$c_4=\frac{a^4}{12}$$

3. Bereich: $a+b\le x\le l$ وردشو

$$y_1=\frac{qbx}{24EI}(6a^2+6ab+b^2-2x^2)$$

$$x:\blacktriangleright l-x$$

$$y_3=\frac{qb(l-x)}{24EI}[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2]$$

د دې ورشو لپاره کيدی شي کرښونلاين y_3 له y_1 څخه ساده وشميرل شي،څکه چی دا د سيومتری دروندوالي يا بارونی له امله و$(2a+b)(½)= l/2 =x$ ته سيومتري دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو درې ورشوګان په رابندفورم کی د ګېږونلاین انځورونه

$$y=\begin{cases}\dfrac{qbx}{24EI}\,(6a^2+6ab+b^2-2x^2) & \text{für } 0\le x\le a\\[2ex] \dfrac{q}{24EI}\,[x^4-2x^3(2a+b)+6a^2x^2+x(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4] & \text{für } a\le x\le a+b\\[2ex] \dfrac{qb(l-x)}{24EI}\,[6a^2+6ab+b^2-2(l-x)^2] & \text{für } a+b\le x\le l\end{cases}$$

د سیومتریکي باروېشنی له امله مېاکسیمال راکږونه په لاندې کی پرته ده

$$x_m=\frac{l}{2}=\frac{1}{2}\,(2a+b).$$

$$y_{max}=y_2(x_m)=y_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$=\frac{q}{24EI}\left[\frac{1}{16}\,(2a+b)^4-\frac{1}{4}\,(2a+b)^4+\frac{3}{2}\,a^2(2a+b)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\,(2a+b)\,(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+a^4\right]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[(2a+b)^4-4(2a+b)^4+24(2a+b)^2a^2+$$

$$+8(2a+b)\,(b^3+6ab+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[-3(16a^4+32a^3b+24a^2b^2+8ab^3+b^4)+24a^2(4a^2+4ab+b^2)+$$

$$+8(2a+b)\,(b^3+6ab^2+6a^2b-4a^3)+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[-48a^4-96a^3b-72a^2b^2-24ab^3-3b^4+96a^4+96a^3b+24a^2b^2+$$

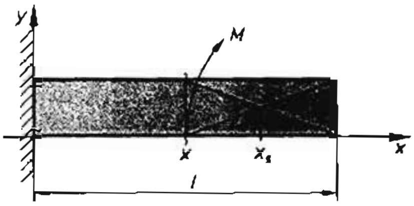
$$+16ab^3+96a^2b^2+96a^3b-64a^4+8b^4+48ab^3+48a^2b^2-32a^3b+16a^4]$$

$$=\frac{q}{384EI}\,[64a^3b+96a^2b^2+40ab^3+5b^4]$$

$$=\frac{qb}{384EI}\,(64a^3+96a^2b+40ab^2+5b^3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

17.



$x_s = \frac{l+x}{2}$

$$0 = M + q(l-x)\cdot(x_s - x)$$

$$= M + q(l-x)\cdot\frac{l-x}{2}$$

$$= M + \frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$M = -\frac{q}{2}(l-x)^2$$

$$y'' = = \frac{M}{EI}$$

$$= \frac{q}{2EI}(l-x)^2$$

Substitution: بدلون

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$y' = \frac{q}{2EI}\int (l-x)^2\,dx$$

$$= -\frac{q}{2EI}\int z^2\,dz$$

$$= -\frac{q}{6EI}z^3 + c_1$$

$$= -\frac{q}{6EI}(l-x)^3 + c_1$$

ژی ارزښت : $y'(0) = 0 \Rightarrow c_1$

$$0 = -\frac{q}{6EI}l^3 + c_1;\quad c_1 = \frac{ql^3}{6EI}$$

$$y' = \frac{q}{6EI}\left[l^3 - (l-x)^3\right]$$

بدلون (سبستیچیوشن)

$z = l - x \Rightarrow dx = -dz$

$$y = \frac{q}{6EI}\int \left[l^3 - (l-x)^3\right]dx$$

$$= -\frac{q}{6EI}\int (l^3 - z^3)\,dz$$

$$= -\frac{q}{6EI}\left(l^3\cdot z - \frac{z^4}{4} + c_2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 + c_2\right]$$

ژی ارزښت
Randwert: $y(0)=0 \Rightarrow c_2$

$$0 = -\frac{q}{6EI}\left[l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2\right]$$

$$0 = l^4 - \frac{1}{4}l^4 + c_2; \quad c_2 = -\frac{3}{4}l^4$$

$$y = -\frac{q}{6EI}\left[(l-x)l^3 - \frac{1}{4}(l-x)^4 - \frac{3}{4}l^4\right]$$

$$= \frac{q}{24EI}\left[(l-x)^4 - 4l^3(l-x) + 3l^4\right]$$

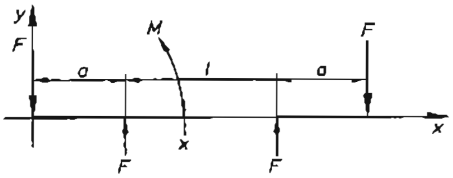
ماکسیماراګرځون په ژی ارزښت z = l کی رامنځ ته کیږي.

$$y_{max} = y(l)$$

$$= \frac{ql^4}{8EI}$$

۱۸ . د x لپاره دې بیا درې ورشوګانی توپیر شي.

1. Bereich: $0 \leq x \leq a$ ورشو



$$0 = M + x \cdot F \Rightarrow M = -x \cdot F$$

y_1: د $0 \leq x \leq a$ لپاره کرونلاین

$$y_1'' = -\frac{M}{EI}$$

$$= \frac{F}{EI}x$$

$$y_1' = \frac{F}{2EI}x^2 + c_1$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}x^2 + c_1x + c_2$$

ژی ارزښت
Randwert: $y_1(a)=0 \Rightarrow c_2$

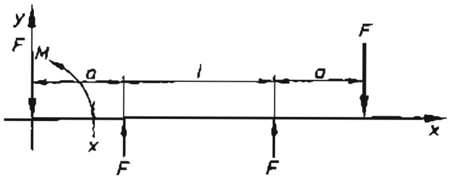
$$0 = \frac{F}{6EI}a^3 + c_1a + c_2$$

$$c_2 = -\frac{F}{6EI}a^3 - c_1a$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}(x^3 - a^3) + c_1(x-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Bereich: $a \le x \le a+l$ ورڅو



$$0 = M + x \cdot F - (x-a)F$$
$$= M + x \cdot F - x \cdot F + a \cdot F$$
$$M = -aF$$

د $0 \le x \le a+l$:y_2 لپاره کړونلاین

$$y_2'' = -\frac{M}{EI}$$
$$y_2'' = \frac{aF}{EI}$$
$$y_2' = \frac{aF}{EI}x + c_3$$

د سیومتریکي باروشني له امله باور لري:

$$y_2'\left(a+\frac{l}{2}\right) = 0 \Rightarrow c_3$$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right) + c_3$$
$$c_3 = -\frac{aF}{EI}\left(a+\frac{l}{2}\right)$$
$$y_2' = \frac{aF}{EI}\left[x - \left(a+\frac{l}{2}\right)\right]$$
$$y_2 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}(2a+l) + c_4\right]$$

تړی اررښت

Randwert: $y_2(a) = 0 \Rightarrow c_4$

$$0 = \frac{aF}{EI}\left[\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}(2a+l) + c_4\right]$$
$$0 = \frac{a^2}{2} - a^2 - \frac{al}{2} + c_4$$
$$c_4 = \frac{a^2}{2} + \frac{al}{2}$$
$$= \frac{a}{2}(a+l)$$
$$y_2 = \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن y_1 ثابته c_1 د هومو-گینیتي شرتونو $y'_1(a) = y'_2(a)$ له لارې پیدا کړي.

$$y'_1(a) = \frac{Fa^2}{2EI} + c_1$$

$$y'_2(a) = \frac{aF}{EI}\left[a - \left(a + \frac{l}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{alF}{2EI}$$

$$y'_1(a) = y'_2(a)$$

$$\frac{Fa^2}{2EI} + c_1 = -\frac{alF}{2EI}$$

$$c_1 = -\frac{aF}{2EI}(a+l)$$

$$y_1 = \frac{F}{6EI}\left[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)\right]$$

د سیومتریکی باروېشنی له امله کږونلاین y_3 و $x = a + (1/2)$ ته سیومتري دی د کږونلاین y_1 سره. له دې سره y_3 سملاسی له y_1 څخه شمیرل کیږي.

3. Bereich: $a + l \leq x \leq 2a + l$ وروستو

$$y_1 = y_1(x)$$

$$x: \blacktriangleright 2a + l - x$$

$$y_3 = \frac{F}{6EI}\left[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)\right]$$

د ټولو درې ورشوګانو لپاره په یو رابندفورم کې د اوبیونو (حلونو) انځورونه

$$y = \begin{cases} \frac{F}{6EI}\left[x^3 - a^3 - 3a(a+l)(x-a)\right] & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ \frac{aF}{2EI}\left[x^2 - x(2a+l) + a(a+l)\right] & \text{für } a \leq x \leq a+l \\ \frac{F}{6EI}\left[(2a+l-x)^3 - a^3 - 3a(a+l)(a+l-x)\right] & \text{für } a+l \leq x \leq 2a+l \end{cases}$$

دوه ماکسیمال، مختلف راګرونونه رامنځ ته کیږي

$$y_{max_1} = y(0) = y_{max_2} = y(2a+l)$$

$$y_{max_1} = y_1(0)$$

$$= \frac{F}{6EI}\left[-a^3 - 3a(a+l)(-a)\right]$$

$$= \frac{F}{6EI}\left[-a^3 + 3a^3 - 3a^2 l\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{max_1}=\frac{Fa^2}{6EI}(2a+3l)=y_{max_2}$$

$$y_{max_3}=y\left(a+\frac{l}{2}\right)$$

$$=y_2\left(a+\frac{l}{2}\right)=y_2\left(\frac{2a+l}{2}\right)$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[\frac{1}{4}(2a+l)^2-\frac{1}{2}(2a+l)^2+a(a+l)\right]$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[-\frac{1}{4}(4a^2+4al+l^2)+a^2+al\right]$$

$$=\frac{aF}{2EI}\left[-a^2-al-\frac{l^2}{4}+a^2+al\right]$$

$$=-\frac{al^2F}{8EI}$$

19. $y''=\frac{1}{\sqrt{y}}$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنکونې څخه لاسته راځي:

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\int z\,dz=\int y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$y>0.$

$$\frac{z^2}{2}=2y^{\frac{1}{2}}+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=4\sqrt{y}+2c_1^*$$

$c_1=2c_1^*$

$$z=\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}}$$

$$t=4\sqrt{y}+c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy=\frac{1}{2}\sqrt{y}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}(t-c_1)\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{t-c_1}{\sqrt{t}}dt$$

$$=\frac{1}{8}\int\left(\sqrt{t}-\frac{c_1}{\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}t\sqrt{t}-2c_1\sqrt{t}\right)+c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=\frac{\sqrt{t}}{12}(t-3c_1)+c_2$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{4\sqrt{y}+c_1}\,(4\cdot\sqrt{y}-2c_1)+c_2;\quad y>0$$

20. $y''=a\cdot e^y$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=a\cdot e^y$$

$$\int z\cdot dz=a\int e^y\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=a\cdot e^y+c_1^* \quad \|\cdot 2$$

$c_1=2c_1^*$

$$z^2=2ae^y+c_1$$

$$z=\sqrt{2ae^y+c_1}$$

Substitution: بدلون

$t^2=2ae^y+c_1\Rightarrow$

$\Rightarrow 2t\,dt=2ae^y\,dy$

$$dy=\frac{t\cdot dt}{ae^y}$$

$$=\frac{2t}{t^2-c_1}\cdot dt$$

$$\int\frac{dx}{a-x^2}=\frac{1}{\sqrt{a}}\text{ Artanh }\frac{x}{\sqrt{a}}+c$$

für $a>0$

$$\int\frac{dt}{c_1-t^2}=\frac{1}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{2ae^y+c_1}}$$

$$=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-c_1}\,dt$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2-c_1}=-2\int\frac{dt}{c_1-t^2}$$

$$x=-2\frac{1}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\frac{t}{\sqrt{c_1}}+c_2$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c_1}}\text{ Artanh }\sqrt{\frac{2a}{c_1}e^y+1}+c_2;\quad c_1>0$$

21. $y^4-y^3\cdot y''=1$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$y^4-y^3\cdot\frac{dz}{dy}\cdot z=1$$

نیونه: $y\neq 0$ په y^3 ویشنه

$$y-\frac{dz}{dy}z=y^{-3}$$

$$\int z\cdot dz=\int(y-y^{-3})\,dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^2}{2}=\frac{y^2}{2}+\frac{y^{-2}}{2}+c_1 \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=y^2+y^{-2}+2c_1$$

$$z=\sqrt{y^2+y^{-2}+2c_1}$$

$$=\frac{1}{y}\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}$$

Substitution: بدلون

$$y^2=t \Rightarrow dy=\frac{dt}{2y}$$

$$\int dx=\int\frac{y}{\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+2c_1t+1}}$$

Substitution: بدلون

$$u=t+c_1 \Rightarrow du=dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$a^2 \blacktriangleright 1-c_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1-c_1^2}}$$

$$x=\frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t+c_1+\sqrt{(t+c_1)^2+1-c_1^2}\right|+c_2$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|y^2+c_1+\sqrt{y^4+2c_1y^2+1}\right|+c_2$$

د $y\neq 0$ لپاره

22. $y''=\frac{1}{y}$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

د پوښتنكونى څخه لاسته راځي:

$y\neq 0.$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=\frac{1}{y}$$

$$\int z\,dz=\int\frac{dy}{y}$$

$$\frac{z^2}{2}=\ln|y|+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=2\ln|y|+2c_1^*$$

$$c_1=2c_1^*$$

$$=\ln y^2+c_1$$

$$z=\sqrt{\ln y^2+c_1}$$

Substitution: بدلون

$$t^2=\ln y^2+c_1 \Rightarrow$$

$$\int dx=\int\frac{dy}{\sqrt{\ln y^2+c_1}}$$

$$\Rightarrow 2t\,dt = \frac{2y}{y^2}\,dy$$

$$dy = yt \cdot dt$$

د دي اینتیګریشن سره ل
لړودیني څخه تیریدنه ناشونی ده

$$\int dx = \int \frac{yt \cdot dt}{t}$$

$$= \int y\,dt$$

$$= \int e^{\frac{t^2 - c_1}{2}}\,dt$$

$$= e^{-\frac{c_1}{2}} \int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\blacktriangleright\ x = \frac{t^2}{2}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4 \cdot 2!} + \frac{t^6}{8 \cdot 3!} + \frac{t^8}{16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$\int e^{\frac{t^2}{2}}\,dt = c_2 + t + \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{t^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \frac{t^9}{9 \cdot 16 \cdot 4!} + \cdots$$

$$x = e^{-\frac{c_1}{2}} \left[c_2 + \sqrt{\ln y^2 + c_1} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^3}{6} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^5}{5 \cdot 4 \cdot 2!} + \frac{(\sqrt{\ln y^2 + c_1})^7}{7 \cdot 8 \cdot 3!} + \cdots \right]$$

د $y \neq 0$ ، لپاره

23. $y^2 = k^2 \cdot y''$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 = k^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$\int y^2\,dy = k^2 \int z\,dz$$

$$\frac{y^3}{3} = k^2 \cdot \frac{z^2}{2} + c_1^* \quad \Big\| \cdot \frac{2}{k^2}$$

$$z^2 = \left(\frac{2}{3} y^3 - 2c_1^*\right) \cdot \frac{1}{k^2}$$

$$= \frac{1}{k^2} \cdot \frac{2}{3} (y^3 - 3c_1^*)$$

$$c_1 = -3c_1^*$$

$$z = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{y^3 + c_1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int dx = k\sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{y^3+c_1}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{dy}{\sqrt{c_1\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)}}$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int \left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1+\binom{-\frac{1}{2}}{1}x+\binom{-\frac{1}{2}}{2}x^2+\binom{-\frac{1}{2}}{3}x^3+-$$

$$= 1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

د $|x|<1$ لپاره

د دي اینتیګرال شمیرنه یواځي د لړۍ ودیزئینی له لارې شونی ده.

$$\blacktriangleright \frac{y^3}{c_1} = x$$

$$\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{y^3}{c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^6}{c_1^2}-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^9}{c_1^3}+-\cdots$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

$$x = k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\int\left(1+\frac{y^3}{c_1}\right)^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= k\sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

$$\left|\frac{y^3}{c_1}\right|<1 \Rightarrow |y^3|<|c_1|$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

24. $y''=y^2$

دا دفرنځیالمساوت هغه د مخه تیره پوښتنه ۲۳ کی شمیرلی دفرنځیالمساوات خانګړی حالت دی د $k=1$ سره

$$x = \sqrt{\frac{3}{2c_1}}\left[c_2+y-\frac{1}{2}\frac{y^4}{4c_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y^7}{7c_1^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y^{10}}{10c_1^3}+-\cdots\right]$$

د $|y^3|<|c_1|$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

25. $y^2 \cdot y'' = a$

$$y' = \frac{dy}{dx} = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dy} \cdot z$$

$$y^2 \cdot \frac{dz}{dy} \cdot z = a$$

نیونه: $y \neq 0$ په y^2 ویشنه

$$\int z \cdot dz = a \int \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{z^2}{2} = -\frac{a}{y} + c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$c_1 = 2c_1^*$

$$z^2 = -\frac{2a}{y} + c_1$$

$$z = \sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}$$

$$\int dx = \int \frac{dy}{\sqrt{c_1 - \frac{2a}{y}}}$$

Substitution: بدلون

$$c_1 - \frac{2a}{y} = t^2 \Rightarrow dy = \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$x = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{ty^2}{a}\, dt$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{4a^2}{(c_1 - t^2)^2}\, dt$$

$$= 4a \int \frac{dt}{[(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)]^2}$$

$$= 4a \int \frac{dt}{(\sqrt{c_1} + t)^2 \cdot (\sqrt{c_1} - t)^2}$$

ایتیگرال په توټه یا پارشلماتو ماتو توټه یا تجزیه کیږي

$$= 4a \int \left[\frac{A}{\sqrt{c_1} + t} + \frac{B}{(\sqrt{c_1} + t)^2} + \frac{C}{\sqrt{c_1} - t} + \frac{D}{(\sqrt{c_1} - t)^2} \right] dt$$

د څلوونو یا ضریبونو اڼهول:

$$1 = A(\sqrt{c_1} + t)(\sqrt{c_1} - t)^2 + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(\sqrt{c_1} + t)^2(\sqrt{c_1} - t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} - t) + B(\sqrt{c_1} - t)^2 + C(c_1 - t^2)(\sqrt{c_1} + t) + D(\sqrt{c_1} + t)^2$$

$$= A(c_1\sqrt{c_1} - c_1 t - \sqrt{c_1}\, t^2 + t^3) + B(c_1 - 2\sqrt{c_1}\, t + t^2) + C(c_1\sqrt{c_1} + c_1 t - \sqrt{c_1}\, t^2 - t^3) +$$

$$+ D(c_1 + 2\sqrt{c_1}\, t + t^2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1=t^3(A-C)+t^2(-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D)+t(-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1})+$$
$$+Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1$$

$$\text{I}:\quad 0=A-C \qquad\qquad \Rightarrow A=C$$
$$\text{II}:\quad 0=-A\sqrt{c_1}+B-C\sqrt{c_1}+D$$
$$\text{III}:\quad 0=-Ac_1-2B\sqrt{c_1}+Cc_1+2D\sqrt{c_1}$$
$$\text{IV}:\quad 1=Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Cc_1\sqrt{c_1}+Dc_1$$

$$\text{II}:\quad 0=-2A\sqrt{c_1}+B+D$$
$$\text{III}:\quad 0=-2B\sqrt{c_1}+2D\sqrt{c_1}\quad \|:2\sqrt{c_1} \qquad\qquad \Rightarrow B=D$$
$$\text{IV}:\quad 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+Bc_1+Dc_1$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{II}: & 0=-2A\sqrt{c_1}+2B \quad \|\cdot c_1 \\ \text{IV}: & 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+2Bc_1\end{array}\right\}+$$
$$\overline{1=\qquad 4Bc_1} \qquad \Rightarrow B=\frac{1}{4c_1}=D$$

$$\text{IV}:\quad 1=2Ac_1\sqrt{c_1}+\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow A=\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}=C$$

له دې سره x شميرل يږي.

$$x=4a\int\left[\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{\frac{1}{4c_1\sqrt{c_1}}}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{\frac{1}{4c_1}}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$
$$=\frac{a}{c_1}\int\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}+t)^2}+\frac{1}{\sqrt{c_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}+\frac{1}{(\sqrt{c_1}-t)^2}\right]dt$$
$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}+t|-\frac{1}{\sqrt{c_1}+t}-\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln|\sqrt{c_1}-t|+\frac{1}{\sqrt{c_1}-t}\right]+c_2$$
$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+t}{\sqrt{c_1}-t}\right|+\frac{2t}{c_1-t^2}\right]+c_2$$
$$=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{c_1}+\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{\sqrt{c_1}-\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}\right|+\frac{2\sqrt{c_1-\frac{2a}{y}}}{c_1-\left(c_1-\frac{2a}{y}\right)}\right]+c_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=\frac{a}{c_1}\left[\frac{1}{\sqrt{c_1}}\ln\left|\frac{\sqrt{yc_1}+\sqrt{yc_1-2a}}{\sqrt{yc_1}-\sqrt{yc_1-2a}}\right|+\frac{1}{a}\sqrt{y(yc_1-2a)}\right]+c_2 \quad \text{für } y\neq 0$$

26. $y''=6y-4$

$$y'=\frac{dy}{dx}=z \Rightarrow y''=\frac{dz}{dy}\cdot z$$

$$\frac{dz}{dy}\cdot z=6y-4$$

$$\int z\,dz=\int(6y-4)\,dy$$

$$\frac{z^2}{2}=3y^2-4y+c_1^* \quad \| \cdot 2$$

$$z^2=6y^2-8y+2c_1^*$$

$$z=\sqrt{6y^2-8y+2c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$=\sqrt{6}\sqrt{y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*}$$

$$c_1=-\frac{4}{9}+\frac{1}{3}c_1^*$$

$$z=\sqrt{6}\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}$$

$$\int dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\int\frac{dy}{\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}}$$

Substitution: بدلون

$$t=y-\frac{2}{3}\Rightarrow dy=dt$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+c_1}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|$$

$$x=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln|t+\sqrt{t^2+c_1}|+c_2$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\ln\left|y-\frac{2}{3}+\sqrt{\left(y-\frac{2}{3}\right)^2+c_1}\right|+c_2$$

27. $y''=1+y'^2$

$$y'=z\Rightarrow y''=\frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx}=1+z^2$$

$$\int dx=\int\frac{dz}{1+z^2} \quad ► \text{ بنسټ اینتیګرال}$$

$$x=\text{Arctan}\,z+c_1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{Arctan} z = x - c_1$$

$$z = \tan(x - c_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan(x - c_1)$$

$$\int dy = \int \tan(x - c_1)\,dx$$

$$y = -\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\,dx$$

$$= -\ln|\cos(x - c_1)| + c_2$$

$$\int \frac{-\sin(x - c_1)}{\cos(x - c_1)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

28. $y''^2 = 1 + y'^2$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \operatorname{Arsinh} z$$

$$y'' = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int dx$$

$$\operatorname{Arsinh} z = x + c_1$$

$$z = \sinh(x + c_1)$$

$$y = \int \sinh(x + c_1)\,dx$$

$$= \cosh(x + c_1) + c_2$$

29. $y'' = e^{y'}$

$$y' = z; \quad y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^{z}$$

$$\int e^{-z}\,dz = \int dx$$

$$-\int e^{-z}\,dz = -\int dx$$

$$e^{-z} = -x + c_1$$

$$\ln(e^{-z}) = \ln(c_1 - x)$$

$$-z = \ln(c_1 - x)$$

$$y' = -\ln(c_1 - x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سبستیچیوشن

$c_1 - x = t \Rightarrow dx = -dt$

پارشل - یا ټوټه اینتیګرال

$$y = -\int \ln(c_1 - x)\,dx$$

$$= \int \underbrace{\ln t}_{u}\,\underbrace{dt}_{dv}$$

$$= t\cdot\ln t - \int \frac{1}{t}\cdot t\,dt$$

$$= t\cdot\ln t - t + c_2$$

$$= t(\ln t - 1) + c_2$$

$$= (c_1 - x)[\ln(c_1 - x) - 1] + c_2$$

30. $y'' = y'^3$

$y' = z;\quad y'' = \frac{dz}{dx}$

ثابت $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$: زینګولاراوبیونه

نیونه : Voraussetzung: $y' \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} = z^3$$

$$\int \frac{dz}{z^3} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2z^2} = x + c_1^*$$

$c_1 = -c_1^*$

$$z^2 = -\frac{1}{2(x + c_1^*)}$$

$$= \frac{1}{2(c_1 - x)}$$

$$z = \frac{1}{\pm\sqrt{2(c_1 - x)}}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{c_1 - x}}$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-2\sqrt{c_1 - x}) + c_2$$

$$y = \pm\sqrt{2(c_1 - x)} + c_2$$

$y = a = \text{const.}$ = ثابته

(c) ketabton.com: The Digital Library

31. $y' \cdot y' - 3y''^2 = 0$

$$y' = z \Rightarrow y'' = \frac{dz}{dx}$$

$$y'^2 - 3y''^2 = 0$$

$$y'^2 = 3y''^2$$

$$y' = \pm\sqrt{3}y''$$

پارتیکولار اوبیونه : $y' = 0 \Rightarrow y = a = \text{const.}$

Voraussetzung: $y' = z \neq 0$ ؛ نیونه

$$z = \pm\sqrt{3}\frac{dz}{dx}$$

$$\pm\sqrt{3}\int\frac{dz}{z} = \int dx$$

$$\ln|z| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*$$

$$e^{\ln|z|} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x + c_1^*} = e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot \underbrace{e^{c_1^*}}_{c_1}$$

$$z = c_1 \cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x}$$

$$y = c_1\int e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot dx$$

$$y = \pm\sqrt{3}c_1 \cdot e^{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x} + c_2$$

د $c_1 = 0$ سره په دي کی
پارتیکولاراوبیونه خوندي ده

32. $y''' + y''^2 = 0$

$$y'' = z \Rightarrow y''' = \frac{dz}{dx}$$

زیګولارزوبیونه : $y'' = 0 \Rightarrow y' = a$

$$y = ax + b$$

نیونه : $y'' = z \neq 0$

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = -z^2$$

$$-\int\frac{dz}{z^2} = \int dx$$

$$\frac{1}{z} = x + c_1$$

$$z = \frac{1}{x + c_1} = y''$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسی ایتیګریشن لپاره
دي ارزښتکرښی کیښول شي

$$y' = \int \frac{dx}{x+c_1}$$

$$= \ln|x+c_1| + c_2$$

1. Fall: $x + c_1 > 0$

$$y' = \ln(x+c_1) + c_2$$

$$y = (x+c_1)[\ln(x+c_1) - 1] + c_2 x + c_3$$

2. Fall: $x + c_1 < 0$

د ارزښتکرښوکارونی سره د دواړو
حالتتوپیرونو لاس ته راوړنی یا
نتیجی رایوځای کیږي

$$y' = \ln(-x-c_1) + c_2$$

$$y = (x+c_1)[\ln(-x-c_1) - 1] + c_2 x + c_3$$

$$y = (x+c_1)[\ln|x+c_1| - 1] + c_2 x + c_3$$

$$y = ax + b$$

33. $xy'^2 = y$

$$(y')^2 = \frac{y}{x}$$

د اوښتونو یا واریابلو بیلښت
x, dx und y, dy

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

اینتیګریشن

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

$$2\sqrt{x} + c_1 = 2\sqrt{y} + c_2$$

$\frac{c_1 - c_2}{2} = c$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + \frac{c_1 - c_2}{2}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} + c$$

$$y = x + 2c\sqrt{x} + c^2$$

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library