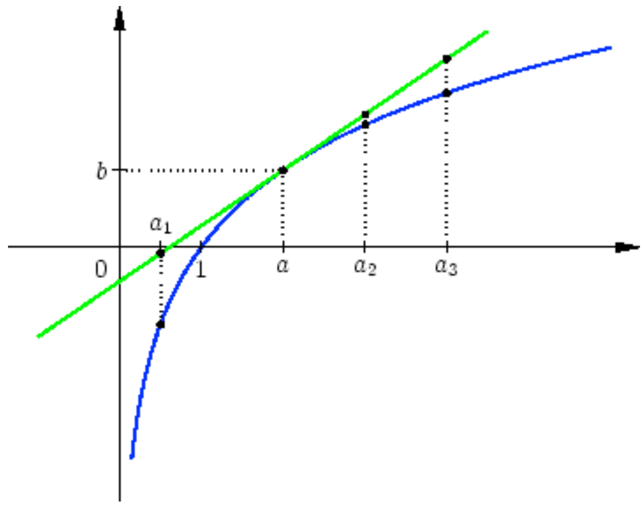
فنکشنل انالیزې

Funktionalanalysis



Ketabton.com

ډاکتر ماخان میرزي شینواری

دلوي خښتن په نامه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: فنکشنتيوري

ليکونکی:

ژباړی   :   ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

د خپريدو لړی   ....

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال   ۲۰۱۲

د ژباړي بريښنا پته :   smakhan1946@gmail.com

چاپ چارې

چاپ ته يې د هر چمتو هيوادوال مرسته په سترګو منل کيږي

.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

نيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

متريکي فضاوې ۱
د اويکليد يا اقليدس متريک ۲
د هامينګ واټن ۲
په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه ۳
په متريکي فضا کې د کوشي پرلپسي(ترادف) ۴
د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی ۴
نورم ۵
د يوې نورمي وکتور فضا متريک ۶
اپيسيلون- جال ۹
په متريکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) ۱۰
په يوه ساحه باندې ناپرېکيدونکي توابع ۱۱
ازماېښتي توابع ۱۱
کمزوري يا ضعيف مشتقونه ۱۲
توپولوژيکي وکتور فضاوې ۱۳
د بانخ فضا ۱۴
په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکې توابع ۱۴
په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع ۱۴
p -انتيګرالوړ توابع ۱۵
محدود توابع ۱۶
د موزونو اريتميتيکي او هندسي منځ ترمنځ .. ۱۶
د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه ۱۸
د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناوساوات ۱۹
د سوبوليف فضاوې ۲۱
د سوبوليو په کې خونديوني جمله ۲۵
د بانخ ځای په ځای ټکي جمله ۲۷
سکالار ضرب ۲۸
هيلبرت – فضا ۲۹
مربع جمعه کيدونکي پرلپسي ۳۰
مربع انتيګراوړ توابع ۳۰
د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا ۳۲
د هاردي-ليبسک فضا ۳۳
پوره اورتونورمالسيستم ۳۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هيلبرت٠فضا کې فوری-پروجکشن (پرېوستون) ٣۴
په هيلبرت- فضا باندې د کونوکسو ٣۶
په هيلبرت-فضا کې اورتوگونال کومپليمنت ٣٨
په هيلبرت-فضا کې د بيسل-نامساوات ٣٩
په هيلبرت- فضا کې د فورير(فوريې) وديزيينه ۴٠
په هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کتمتوالی ۴١
ناپرېکيدونکې کربښيز فنکشنال ۴٢
د هان-بانخ د دوام(مخ ته بيونې) جمله ۴۵
دوال- يا دوه گونې فضا ۴٨
بيدوالفضا ۵٠
د p - انتيگراوړ توابعو دوالفضا ۵٠
د ريسخ د انخورولو جمله ۵١
کمزورې پولې ته تلنه ۵٣
محدود کربښيز اوپراتورونه ۵۵
انتيگرال اوپراتور ۵۵
د کربښيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه ۵٧
برابرډوله پولې ته تلنه ۵٧
د برابر ډوله محدودوالي اصول ۵٧
د باناخ-شتاينهوز جلمه ۵٨
کومپاکت اوپراتورونه ۶١
د وازو توابعو په هکله جمله ۶٣
د رابند يا بند گراف جمله ۶۵
په هيلبرت-فضا کې د يوه کربښيز اوپراتور ماتريکس ۶۶
ادجونگيرې اوپراتور ۶٩
يونيتار اوپراتور ٧٠
د يوه کربښيز اوپراتور آيگن ارزښتونه ٧٣
د هرميتيکې اوپراتورونو آيگن ارزښتونه ٧۴
د يوه هرميتيکې کومپاکت اوپراتور نورم ٧۵
د کومپاکت هرميتيکې اوپراتورونو سپکترال آنځورون ٧٩
شتورم-ليوويل-پرابلم ٨١
گړندی لوېدونکی ازماېښت تابع ٨۴
تيمپيريرې ديسريبوشنونه ٨۶
د تيمپريرې ديستريبيوشنونو مشتق ٨٨
ديراک- او هيويزايد – فنکشنال ٨٩
اپروکسيمې کتمتوالی ٩١

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګرندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن ۹۳
د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريې –ترانسفورميش ۹۴
د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې ۹۶
ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه ۹۹
د لاپلاس - اوپراتور بنسټيزه اوبيونه(حل) ۱۰۲
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې: ۱۰۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنل انلیزې Fuktionalanalysis

متریکي فضاوې

یوه ډېری یا سټ M متریکي بلل کیږي، که په M باندې یو فنکشنواتن یا تابع واټن d د لاندې خویونو سره تعریف وي:

M1 زیاتیزوالی یا مثبتوالی $d(x,y) \geq 0$ او $d(x,y)=0$ تیک هلته، که $x=y$ وي.

M2 سیومتري

$$d(x,y)=d(y,x)$$

M3 درېګوډېز – یا مثلثاتي مساوات

$$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$$

د ټولو $x,y,z \in M$ لپاره.

تابع d د M متریک په حیث هم بلل کیږي.

د متریک له لارې په کانونیکي ډول په M باندې یوه توپولوژي هم تعریفیږي. له

$$B(x_0;r)=\{x \in M : d(x,x_0)<r\}$$

سره په x_0 باندې یو واز غونداری د وړانګې r سره هم په نخښنه کیږي. یوه برخه ډېرئ $U \subseteq M$ نو له دې امله وازه بلل کیږي، که هر یوه $x \in U$ ته یوه وړانګه $r>0$ شتون ولري، داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$B(x;r) \subseteq U$

دی.
ليکونکي: اِيپ او هوليک

د اويکليد يا اقليدس متريک **Euklidische Metrik**

په $\mathbb{R}^n$ کې د اويکليد واټن

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}$$

يو متريک دی.
مثبتوالی او سيومتري سملاسي ليدل کيږي او درېګوډي مساوات سيده د لاندې مينکوفسکي Minkowskischen نابرابرون څخه لاس ته راځي:

$d_2(x,y)$
$=$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |(x_k - z_k) + (z_k - y_k)|^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - z_k|^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k - $$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د هامينګ واټن **Hamming-Abstand**

پای پرلپسي له 0 او 1 د کودکول په تيوري کې (دوه بيز- -Binär) لغاتونه بلل کيږي.

د دوه n -ځايزو لغاتونو x او y د هيمينګ-واټن

$=$

$d_H(x,y) =$ د k ګنون يا تعداد د $x_k \neq y_k$ سره

يو ماتريکس دی په n -ځايزو بينارلغاتونو.
د بيلګې په توګه د $n = 3$ لپاره
$d(011,110) = 2$

او واز غونډاری $B(101;2)$ او $x = 101$ د وړانګې 2 سره توکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$001, \quad 111, \quad 100 \,.$$

خوندي لري.
توکي چې له 101 په دوه ځايونو کې توپير لري، په دې پورې اړه نه لري، ځکه واټن بايد له دوه کوچنی وي.
مثبتوالی او سيمتري روښانه دي. د درېګودي نامساوات د ورته واي تعريف څخه لاس ته راځي

$$d_H(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

او د مطلقه ارزښتونو

$$|x_j - z_j| = |x_j - y_j + y_j - z_j| \leq |x_j - y_j| + |y_j - z_j| \,.$$

لپاره د درېګودي نامساوات.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په متريکي فضاو کې پولې ته تلنه

په متريکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) پولې $x \in M$ ته تلونکي بلل کيږي، که دا لاندې باور ولري.

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$$

توکی x د (x_n) پرلپسي پوله بلل کيږي او يوائځنۍ ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

که (x_n) د x او y په لور وهڅيږي، نو باور لري

$$d(x,y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y)$$

د ټول n لپاره، او داچې

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y) = 0$$

دی، بايد

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d(x,y)=0$

هم وي او له دې سره $x=y$ باور لري، داپه دې معنا چې پوله ارزښت يواځنی دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په متريکي فضا کې کوشي- پرلپسي(ترادف)
Cauchy-Folgen in metrischen Räumen

په يوه متريکي فضا M کې يوه پرلپسي (x_n) کوشي – پرلپسي بلل کيږي، که د هر $r>0$ لپاره يوه پيژند نخښه يا ايندکس n_0 شتون ولري، داسې چې د ټول $m,n>n_0$ لپاره

$d(x_m,x_n)<r$

باور ولري. په ځانګړې توګه پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي-پرلپسي ده.
که په يوه متريکي فضا M کې هره کوشي-پرلپسي په M کې يو پوله ارزښت لري، نو M پوره يا مکمل بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په M کې دې (x_n) يوه پولې ته تلونکې پرلپسي وي د پولې ارزښت $x\in M$ سره. د هر $r>0$ لپاره يو ايندکس n_0 شتون لري، داسې چې د ټولو $n>n_0$ لپاره

$d(x_n,x)<r/2$

باور لري. نو د دريګوټي نامساوات له مخې بيا دا لاندې باور لري

$d(x_m,x_n)\leq d(x_m,x)+d(x,x_n)<r/2+r/2=r$

د ټول $m,n>n_0$ لپاره. د دې په تعقيب په M کې هره پولې ته تلونکې پرلپسي کوشي – پرلپسي ده.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې متريکي فضا پوره- يا تکميلوالی

که د يو متريکي فضا M يو واټن تابع d په يوه پورته ډېرئ $\widetilde{M} \supset M$ تعريف وي، کومه چې په M کې د ټولو کوشي-پرلپسيو پوله رازښتونه خوندي ولري، نو پايونه $\overline{M} \subseteq \widetilde{M}$ نسبت و d ته د M پوره کيدونکې بلل کيږي.

په ټوله توګه کيدی شي د M پوره کيدنه بې له په پورته -ډيرئ کې له خونديوني تعريف شي. له دې سره سرې $\overline{M}$ د پولې ته تلونکو پرلپسيو ورته ټولګي سره په نخښه کوي يا پيژني.
د ډېريو پوره کيدنه د ناپريکيدونکو توابعو په څېړنه کې غوره رول لوبوي.
خويونه، کوم چې په کې باور لري، کيدی شي د د پوله ارزښت-جوړونو له لارې $\overline{M}$ ته يووړل شي. بېّ ځانګړې توګه يو ناپريکيدونکی تابع همدا اوس په M د هغه ارزښتونو له لارې يواځنی ټاکل شوی دی.
ليکونکي: ايپ، هيوليګ

نورم Norm

په حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V يو نورم يو تابع
$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

دی د لاندې خويونو سره:

- Positivität: مثبتوالی(زياتيزوالی)

$$\|v\| > 0 \quad \text{د} \quad v \neq 0 \quad \text{لپاره}$$

- Homogenität: هوموجينيتي

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

- Dreiecksungleichung: دريګوډيز- مثلثاتي نامساوات

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته u, v په خوښه وکترونه دي او λ يو په خوښه سکالار.

د يوه نورم په مرسته کيدی شي د

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

له لارې د دوه وکوترونو په منځ کې يو واټن تعريف شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،هيوررنر

د يوې نورمي وکتور فضا متريک
Metrik eines normierten Vektorraumes

په يوه وکتورفضا V د يوه نورم $\|\cdot\|$ دواټنتابع يا واټنفنکشن
$d(u,v) = \|u - v\|$

سره برابر دی. دا ځانګړی متريک دوه ورزيات خويونه لري:

- ترانسليشن اينواريانځ يا د د خوژښت يا کښولو سره بې تغيري Translationsinvarianz

$$d(u + w, v + w) = d(u, v)$$

- هوموجينيتيHomogenität

$$d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u, v)$$

د ټولو $u, v, w \in V$ او سکالار λ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليک

نيم نورم Halbnorm

په يوه حقيقي يا کومپلکس وکتور فضا V باندې يو نيمنورم يو تابع
$p : V \to \mathbb{R}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د لاندې خويونو سره:

HN1(HN د نيم نظم لپاره)

: ناکميزوالی يا نامنفيوالی:

$$p(v) \geq 0$$

HN2

:Homogenität هوموجينوالی

$$p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$$

HN3

:Dreiecksungleichung درېګوډي يا مثلثي نابرابرون

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v)$$

د ټولو $u, v \in V$ او λ لپاره.

يو نيم نورم ټيک هلته يو نورم دی، کله چې $p(x) = 0$ فقط د $x = 0$ لپاره باور ولري.

د نيم نورم د تعريف لپاره وروستني دواړه خويونه بسيا کوي. ناکميزوالی کيدی شي له دوي لاس ته راوستل.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

له هوموجينيټي څخه سيده لاس ته راځي

$$p(0) = p(0 \cdot x) = 0p(x) = 0$$

او د درېګوډي نامساوات سره

$$0 = p(0) = p(x + (-x)) \leq p(x) + p(-x) = $$
$$= p(x) + |-1| p(x) = 2p(x) \,,$$

دا په دې معنا چې ناکميزوالی يا نامنفيوالی

$$p(x) \geq 0$$

دی، د ټولو $x \in V$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

متريک، چې د نيم نورم څخه رامنځ ته کيږي
Metrik, induziert durch Halbnormen

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه وکتور فضا V د نیمنورم یوې پرلپسي (p_k) لپاره

$$p_k(v) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \Longrightarrow v = 0$$

باور ولري، د ټول $v \in V$ لپاره، نو نیمنورم یو متریک منځ ته راوړي. د کانوني واټن تابع دا لاندې ده

$$d(u,v) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} \,.$$

نسبت دې متریک ته پرلپسي (v_n) ټیک هلته د v په لور ځي یا هځیږي، که

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

د ټولو $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور ولري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د متریک د اکسیمونو څخه یوازې د درېګوډي نامساوات ساده نه دي. باور لري

$$\frac{p_k(u-w)}{1+p_k(u-w)} = 1 - \frac{1}{1+p_k(u-w)}$$

$$\leq 1 - \frac{1}{1+p_k(u-v)+p_k(v-w)}$$

$$\leq \frac{p_k(u-v)}{1+p_k(u-v)} + \frac{p_k(v-w)}{1+p_k(v-w)}$$

او له دې سره دی

$$\leq d(u,v) + d(v,w) \;.\; d(u,w)$$

د پولې ته تلنې لپاره لومړی نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, v) = 0$$

باور لري او یو k شتون لري، داسې چې

$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور نه لري. له دې سره نو يو برخه پرلپسي (v_{n_j}) شتون لري چې د هغې لپاره تل
$$p_k(v_{n_j} - v) > \varepsilon > 0$$
باور لري او له دې امله
$$d(v_{n_j}, v) \geq 2^{-k}\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} > 0$$
باور لري، کوم چې مخامخوالی یا تضاد دی.

له بله پلوه دې $\varepsilon > 0$ وي او باور دې ولري
$$\lim_{n\to\infty} p_k(v_n - v) = 0$$
د ټول k لپاره. نو يو k_0 شتون لري، داسې چې
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} < \frac{\varepsilon}{2}$$
باور لري. پسې هم نسبت نيممتريک ته د پولې ته تلنې له امله لاس ته راځي، چې د 1 او k_0 تر منځ دهر k لپاره يو n_k شتون لري، داسې چې د ټولو $n > n_k$ لپاره
$$p_k(v_n - v) < \frac{2^{k-1}}{k_0}\varepsilon$$
باور لري. که کيږدو
$$n_0 = \max_{k=1,\dots,k_0} n_k\,,$$
نو د ټولو $n > n_0$ لپاره باور لري
$$d(v_n, v) =$$
$$\sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{p_k(v_n - v)}{1+p_k(v_n - v)}$$
$$< \sum_{k=1}^{k_0} 2^{-k}\,\frac{2^{k-1}}{k_0}\,\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$
څه چې نسبت متريک ته پولې ته تلنه ښايي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایپسیلون- جال **Epsilon-Netz**

د یو متریکي فضا M د یوې برخدېرۍ K لپاره یو ε – جال یو پوښوونکی یا پټوونکی دی، چې د پاي ډېرو غونډارو
$B(x_1;\varepsilon),\ldots,B(x_n;\varepsilon)$

جوړ دی. دا مینیمال وړانګه $\varepsilon_n(K)$، چې د n منځټکو x_i په ښه یا اوپټیمال ټاکنې د M پوښوونې ته بسیا کوي، د ε-اینتروپي ε-Entropie (فزیکي لویه چې د تودخۍ پروسي خوزښتلور په نخښه کوي)بلل کیږي.
که یوه K ته د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو ε-جال شتون ولري، نو K توتالي محدود یا رابند بلل کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په متریکي فضاوو کې کومپاکت(سره نښتی) او نسبي کومپاکت ډېرۍ

د یوه متریکي فضا M کومپاکت برخه ډېرۍ K کیدی شي په درې ورته ډولونو خویونیز شي
لومړی: هره وازو ډطریو سره د K پټه ونه یا پوښونه هر پای برخه پوښونه لري.
دویم : په K کې هره پرلپسې یوه پولې ته ت لونکې برخه پرلپسې په K کې لري.
دریم : K توتالي محدوده او پوره ده.
په پام کې دې وي، چې په $\mathbb{R}^n$ کې باوري د کومپاکت ډېرۍ کرکتریزه کونه په دریم کې محدودیت او رابندوالی په ګوته کوي.

د یوه متریکي فضا M یوه برخدېرۍ R نسبي کومپاکت بلل کیږي، که د $\overline{R}$ رابندوالی یا راتړلوالی کومپاکت وي، یا دې ته ورته، که په R کې هره پرلپسې یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه به د حقیقی اعدادو مختلفي برخدېرۍ تر څېړنې لاندې ونیول شی.
لومړی : انتروال $[0,1]$ د $\mathbb{R}$ یو کومپاکت (او له دې سره یو ن سبي کومپاکت) برخدېرۍ ده، ځکه چې رابنده یا تړلی او محدوده ده.
دویم : انتروال $(0,1]$ د $\mathbb{R}$ کومپامت برخدېرۍ نه ده، ځکه چې د بیلګې په توګه ، د، پرلپسې $1/n$ ، $n\in\mathbb{N}$ پوله خوندي نه لري. دا چې $\overline{(0,1]}=[0,1]$ دی، نو دا نیم

(c) ketabton.com: The Digital Library

واز انتروال نسبي کومپاکت دی. دریم: څلورم: انتروال $[0,\infty)$ د $\mathbb{R}$ کومپاکت برخډېرئ نه ده، ځکه چې په حقیقت کې د وازې ډېرئ $(n-1,n+1)$ ، $n\in\mathbb{N}_0$ څخه پوښ کیږي، مګر دې ته یو پای برخه پوښونه شتون نه لري. له دې امله نیم ناپای انتروال هم نسبي کومپاکت نه دی، ځکه چې د بیلګې په توګه د طبیعي اعدادو پرلپسې $1,2,\dots$ پولې ته تلونکې برخه پرلپسې نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په یوه ساحه باندې ناپرېکیدونکي توابع **Stetige Funktionen auf einem Gebiet**

په $\mathbb{R}$ باندې د(حقیقي- یا کومپلکس ارزښتیزو) ناپریکیدونکو توابعو په فضا $C(\mathbb{R})$ د نیمنورم

$$|f|_{[-k,k]}=\max_{|x|\le k}|f(x)|$$

له لارې د لاندې سره یو متریک تولیدوي

$$d(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\frac{|f-g|_{[-k,k]}}{1+|f-g|_{[-k,k]}}\ .$$

نسبت دې متریک ته پولې ته تلنه په خوښه کومپاکت انتروال باندې برابرډوله پولې ته تلنه په ګوته کوي. له دې سره پورهوالی لاس ته راځي، ځکه چې په برابرډوله پولې ته تلنې سره ناپرېکیدنه خوندي پاتې کیږي.
د تولیزې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}$ لپاره به ورته توګه مخ ته ځو. د انتروال $[-k,k]$ په ځای یوه دا ساحه جوړه وونکې د کومپاکتو ډېریو پرلپسې

$$K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots\subset D$$

کارول کیږي یا استعمالیږي.
د $C_0(D)$ سره په D د ناپرېکیدونکو توابعو ډېرئ په نخښه کوو، د کومپاکت وړونکي(انتقال کوونکي) سره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ازماېښتي توابع **Testfunktionen**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې ساحې $D \subseteq \mathbb{R}$ لپاره په D باندې د ناپای ډېرواره مشتقوړ توابعو لپاره ساحه $C^\infty(D)$ ده.
د تابع لاندې فضا، چې د کومپاکت برخه ډېرۍ $K \subset D$ د باندې برته ده ورکيږي، د $C_0^\infty(D)$ سره يا د ازماېښت توابعو $\mathcal{D}$ په نخښه کيږي. دا فضا چې له شوارڅ(Schwartz) له خوا منځ ته راوستل شوې، په ټوټه انتګرالمساواتو او ديستريبوتيو تيوري مطالعه کې غوره رول لوبوي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

کمزوري يا ضعيف مشتقونه **Schwache Ableitung**

د ټوټه انتيګرال په مرسته کيدی شي کلاسيکي مشتقکليمې ټولنيزې شي. يو تابع

$$\partial^\alpha f, \quad \partial^\alpha = \prod_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)^{\alpha_\nu}$$

يو په تعريف ورشو يا ساحه D تعريف شوې تابع f د کمزورې مشتق په نامه يادوو، که

$$\int_D \partial^\alpha f(x)g(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_D f(x)\partial^\alpha g(x)\,dx, \quad \forall g \in C_0^\infty(D),$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$، $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ سره باور ولري. له دې سره و ړاندنيونه ده، چې د ازماېښت توابع g لپاره دواړه انتيګرالونه شتون لري. د بيلګې په توګه دا حالت هلته رامنځ ته کيږي، که $\partial^\alpha f$ او f په هر د D په هر کومپامتبرخه ډېرۍ مطلق انتيګرالوړ وي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

توپولوژيکي وکتور فضاوې **Topologischer Vektorraum**

يو توپولوژيکي وکتروفضا V يوه وکتور فضا ده، د وازو ډېريوو ياسټونو په يوه سيستم $\mathcal{U}$ باندې د لاندطخويونو سره ورکړل شوی يا روښانه شوی دی

T1

$\emptyset \in \mathcal{U}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

T2

$V \in \mathcal{U}$

T3

د هرو وازو ډېريو یا سټونو $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$

T4

د په خوښه وازو ډېريو $U_i \in \mathcal{U}$ لپاره باور لري

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{U} .$$

یوه وازه ډېرئ $U(v) \in \mathcal{U}$ د یوه ټکي $v \in V$ چاپیریال بلل کیږي، که $v \in U(v)$ باور ولري.

د سرچینې یا پیل د چاپیریالونو $U_i(0)$ ډېرئ لوکال بنسټ $\mathcal{B}$ بلل کیږي، که هر چاپیریال $U(0)$ د لوکال بنسټ یو توکی خوندي ولري

$$\exists_i : U_i(0) \subseteq U(0) .$$

داسې یو توپولوژیکي جوړښت کیدی شي د بیلګي په توګه د یوه متریک یا نورم له لارې کره وټاکل شي یا کره شي. دا یو پولې ته تلنکلیمه راکوي. یوه پرلپسې (v_n) ټیک هلته یوه کوښي پرلپسې ده، که د ټولو $U_i(0) \in \mathcal{B}$ لپاره یو ایندکس n_0 داسې شتون ولري چې د ټولو $m, n > n_0$ لپاره

$v_m - v_n \in U_i(0)$ باور ولري.

که v_∞ د (v_n) پوله ارزښت وي، نو د v_∞ په هر چاپیریال U کې د پرلپسې ټول

(c) ketabton.com: The Digital Library

غړي پراته دي تر د پای ډېرو غړو پورې يعنې پای ډېر غړي کيدی شي له دې چاپريال دباندې پراته وي.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د بانخ فضا Banach-Raum

يو نورمي وکتورفضا V د بانخ فضا بلل کيږي، که د نورم له لارې منځ ته راغلي متريک پوره وي، دا په دې معنا چې که هره کوشي پرلپسې په V کې يو پوله ارزښت ولري.

هر رابنده لاندې وکتور فضا $U \subset V$ هم د د بانخ فضا ده.
په ځانګړې توګه پای پراخيدونکې يا پای بعدې فضاوې نورمي وکتور فضاوې دي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په يوه کومپاکت ډېريو باندې ناپرېکيدونکې توابع
Stetige Funktionen auf einer kompakten Menge

د ناپرېکيدونکو(حقيقي- يا کومپلکس ارزښتيز) توابع په يوه کومپاکت برخه ډېريو $K \subseteq \mathbb{R}^n$ باندې فضا $C(K)$ بانخ فضا ده نسبت د

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x)|$$

له لارې تعريف شوي نورم ته. پوره کيدنه لاس ته راځي، ځکه چې برابرډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.
د تعريف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه يا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکيدونکې توابع بايد نه دی، ماکسيموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په کومپاکت ډېريو باندې مشتقوړ توابع
Differenzierbare Funktionen auf einer kompakten Menge

د m -ځله ناپرېکيدونکو مشتقوړ توابعو)(حقيقي – يا کومپلکس ارزختيزې) فضا $C^m(K)$ په يوه کومپاکت برخه ډېرئ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ نسبت و

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_{k,\infty}=\sum_{|\alpha|\le k}\|\partial^\alpha f\|_\infty$$

ته د تعریف شوي نورم یو باناخ-فضا ده. پوره والی لاس ته راځي، ځکه چې د ټوټه مشتقونو $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ، $\partial^\alpha f$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع، د برابر ډوله پولې ته تلنه ساتلې پاتې کيږي.

د تعریف ورشو کومپکتوالی روښانه دی. په وازه یا نامحدود ډېرئ باندې ناپرېکیدونکې توابع باید نه دی، ماکسیموم ولري، له دې امله د حالتونو سره سم پای نورم نه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

p -انتیګرالوړ توابع p-integrierbare Funktionen

د یوې ساحې $D\subseteq\mathbb{R}^n$ لپاره $L^p(D)$ ، $1\le p<\infty$ ، د تابع باناخ-فضا په ګوته کوي، چې هغه نسبت و نورم

$$\|f\|_p=\left(\int_D |f|^p\right)^{1/p}$$

ته د ناپرېکیدونکي له لارې د د کومپاکت وړونکي ډېرئ سره ښپروکسیمي کيږي، دا په دې معناچې د $L^p(D)$ رابندونه Abschluß ده نسبت و $\|\cdot\|_p$ ته ده.
توابع فقط تر کچې صفر پورې په ډېرئ ټکي ډوله تعریف دي. سړی لیکي $f=g$
ن.ه. : نږدې هرچېرته (almost everywhere)
د توابعو لپاره، چې فقط په یو صفرډېرئ یا"فرسټ سره توپیري او داسې توابع راپیژني.
په ټیکه توګه سړی ورته والی یا اکویوالنت تر څېرنې لاندې نیسي، چې د هغوی لپاره f او g ځای نیونکي یا نماینده ګان دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لبسک انیګرال په مرسته کېدی شي $L^p(D)$ په ټولیزه توګه د په خوښه لیبسک-کچوړ ډېرئ لپاره تعریف شي. د اپروکسیمیشن ته کیدی شي، ریمن-انتیګرال ته ورته د زیني توابع کارول کیږي، چي د لیبسک-کچوړ د D په برخه ډېرئ ثابت دی.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

محدود توابع Beschränkte Funktionen

د لیبسک کچوړ توابعو f $D \subseteq \mathbb{R}^n$ د ساحي یا ورشو لپاره د بانخ فضا د $L^\infty(D)$ سره په نخښه کو، چي په یوه صفرډېرئ محدود دی، دا په دې معنا،چي
$$|f(x)| \leq c < \infty$$
نږدې هر چیرته دی. د c کوچني بند یا بندیز یا نور هم ښه پوله د
$$||f||_\infty = \operatorname{ess}\sup_{x \in D} |f(x)|$$
سره په نخښه کوو.
فضا $L^\infty(D)$ د ټول هرچیرته په D محدودو توابعو یوه اصلي برخه ډېرئ ده. دواړه فضاوې کیدی شي نسبت $||\cdot||_\infty$ ته د ناپرېکیدونکو توابعو سره جوړي یا تولید کړای شي. دا یو روښانه توپیر دی د p – انتیګرلوړ توابعو $L^p(D)$ ته.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د موزونو اریتمیتیکي او هندسي منځ ترمنځ نابرابرونونه

Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel

د زیاتیزو یامثبتو $a_1, \ldots, a_n$ ګنونو لپاره اریمیتیکي منځ نسبت هن**دسي منځ یا وسط ته کوچنی نه دی:**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}\,.$$

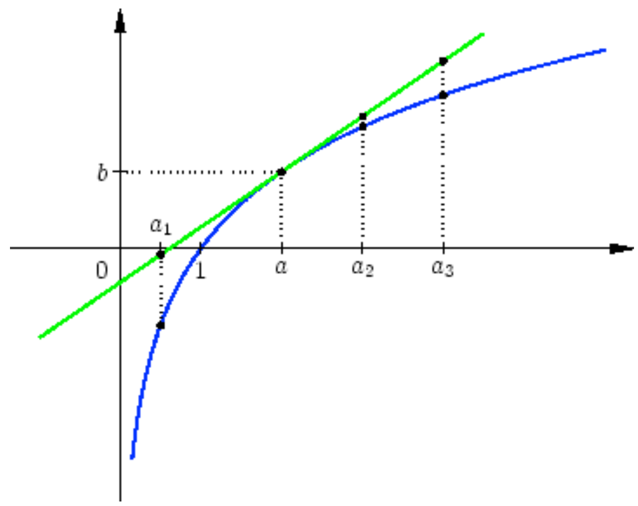
په ټولیزه توګه د مثبت وزن λ_i لپاره د $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ سره باور لري

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1}\cdots a_n^{\lambda_n}\,.$$

برابروالی ټیک هلته باور لري، که $a_1=\cdots=a_n$ باور ولري.

سړی د $a=\sum_i \lambda_i a_i$ او $b=\ln a$ سره د لوګاریتم کوني وروسته موَزن نابرابرون یا نامسوات ورته غوښتني لاسته راوړي.

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \leq \ln a\,.$$



که-لکه په مشتق کې چې ښوول شوی- وکارول شي، چې تانجنت

$$g:\ \ y=b+\frac{1}{a}(x-a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاريتم د ګراف پورته لور ته پروت دی، نو د $\sum_i \lambda_i = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\sum_i \lambda_i \ln a_i \le \sum_i \lambda_i \left(b + \frac{1}{a}(a_i - a) \right) = b + \frac{1}{a} \left(\sum_i \lambda_i a_i - a \right) = b$$

لکه چې غوښتل مو.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرالونو لپاره د هولدر نابرارونونه
Höldersche Ungleichung für Integrale

وي دې $f \in L^p(D)$ او $g \in L^q(D)$ د $1 < p < \infty$ او د $1/p + 1/q = 1$
سره. نو $fg \in L^1(D)$ باور لري او لاندې د هولدر نامساوات باور لري

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\, dx \right)^{1/q}.$$

مساوات تيک هلته باور لري، که د توابعو $|f|^p$ ، $|g|^q$ څخه يو يې نږدې هر چيرته د د بل ډېرواره وي.
د پولې حالت $p = \infty$ ، $q = 1$ (همداسې $p = 1$ ، $q = \infty$ د f او g سره بدليدنې) لپاره

$$\int_D |f(x)g(x)|\, dx \le \|f\|_\infty \int_D |g(x)|\, dx.$$

باور لري
د $p = q = 2$ لپاراه دا مساوات د کوشي-شوارځ نامساوات هم بلل کيږي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

فقط دا ناساده حالت $1 < p < \infty$ تر ځيرنې لاندې نيسو. داپسې بي له ټوليزو بنديزونو کيدی شي ونيول شي يا فرض شي، چې انتيګرال

$$I_1 = \int_D |f(x)|^p dx \quad \text{او} \quad I_2 = \int_D |g(x)|^q dx$$

زياتيز يامثبت دي. که د بيلګې په توګه $I_1 = 0$ وی،، نو $|f|^p$ او له دې سره به هر f چيرته ورک شي، دا په دې معنا چې، $\int_D |f(x)g(x)|\,dx = 0$ او نا مساوات به په ساده توګه پوره وی. دا چې نامساوات د سکالا کونې $f \to rf$ ، $g \to sg$ په مقابل کې اينواريانت يا بې تغيره دی، کيدی شي برسېره پردې $I_1 = I_2 = 1$ ونيول يا فرض شي.
د موَزنو اريتميتيکي - او هندسي - يا ځمککچيز منځ ترمنځ باور لري

$$|fg| = (|f|^p)^{1/p}(|g|^q)^{1/q} \leq \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q\,.$$

له دې سره $fg \in L^1(D)$ دی او د انتيګرالونې پسې لاس ته راځي

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq \frac{1}{p}I_1 + \frac{1}{q}I_2 = 1\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرال لپاره د مينکوفسکي ناساوات
Minkowskische Ungleichung für Integrale

د دوه توابعو f او g په $L^p(D)$ کې د $1 \leq p < \infty$ سره د مينکوفسکي نامساوات باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

مساوات ټیک هلته باور لري، که د توابعو f ، g څخه یو یې تل هر چیرته د بل ډېرواره یو نامنفي ولري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دا چې حالت $p=1$ ساده دی، په لاندې کې به $p>1$ ونیول یا فرض شي. ورپسې دې همداسې $1/p+1/q=1$ وي او انتیګرال

$$I=\int_D |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

دې بې له تولیزو محدودیتونو زایاتیز وي. نو د درېګوډي نا مساوات سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} I &= \int_D |f(x)+g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\ &\le \int_D |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_D |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx. \end{aligned}$$

د هولدر نامساوات او $(p-1)q=p$ سره

$$\le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\left(\int_D |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}$$

$$=\left(\left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}+\left(\int_D |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\right)I^{1/q}\,.$$

د $I^{1/q}$ سره د وېشنې له لارې سرې د مينکوفسکي نامساوات لاس ته راوړي
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د سوبوليف فضاوې **Sobolev-Räume**

د ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره
$W^{k,p}(D), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \leq p \leq \infty,$

د توابعو باناخ فضا بنايي د $\leq k$ نظم د کمزورو مشتقونو سره په $L^p(D)$ او

$$\|f\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k}\int_D |\partial^\alpha f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

کې همداسې

$$\|f\|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|\leq k}\|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|\leq k}\ \operatorname{ess\,sup}_{x\in D}|\partial^\alpha f(x)|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړونده نورم. اړونده نیم نورم

$$|f|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty$$

همداسې

$$|f|_{k,\infty} = \max_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f\|_\infty = \max_{|\alpha|=k} \operatorname{ess\,sup}_{x\in D} |\partial^\alpha f(x)|$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.
په ځانګړي توګه دی

$$W^{0,p}(D) = L^p(D) \,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګې په توګه تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0,$$

په n –بعدیزې یا n –پراخیدونې یونګردئ(دایره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$$

تر څیرنې نیول کیږي. د $s > -n$ لپاره f انتیګرالوړ دی،، څکه چې د ګردئ کواوردیناتونه(پراته ولاړ محرونه) ($r = |x|$) سرې لاس ته راوړي

$$\|f\|_{0,1} = \int_D |x|^s \, dx = c_n \int_0^1 r^s r^{n-1} \, dr \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته چې c_n دا $n-1$ – بعديز حجمونو يونفضا (واحد فضا) ده. پسی دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2}x_\nu$$

د $s > 1-n$ لپاره د f يو انتيګرالوړ کمزوری مشتق دی، په سرچينه کې د سيګولاريټي سره. په غونډاري کواودينات کې سړی لاس ته رانړي

$$\|f\|_{1,2}^2 = \int\limits_D |f(x)|^2\,dx + \sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_D |\partial_\nu f(x)|^2\,dx$$

$$= \text{const.}\int\limits_0^1 \left(r^{2s} + s^2 r^{2s-2}\right) r^{n-1}\,dr$$

د $r = |x|$ سره. له دې سره $f \in W^{1,2}$ دی د $s > 1-n/2$ لپاره. دا چې د $n > 2$ لپاره کميز اکسپوننتونه s هم منځ ته راتلی شي، له دې لاس ته راځي، چې مربع انتيګرالوړ مشتقونه نه اړين محدود دي. د مشتقونو کمزوروالي څخه ناپرېکيدنه لاس ته راځي.

که همدا توابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| > 1\}$$

وڅيړل شي، نو f مربع انتيګرالوړدی د $s < -n/2$ لپاره او کمزوري مشتقونه د $s < 1-n/2$ لپاره مربع انتيګرالوړ دي، کوم چې بيرته د غونډاري کواوردينات

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int\limits_{\tilde{D}} |\partial_\nu f(x)|^2\,dx = \text{const}\int\limits_1^\infty r^{2s-2}r^{n-1}\,dr$$

سره ښوول کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: ايپ، هيوليک

کمزوري مشتقونه په حقيقت کې تولګيزه يا کلاسيکي مشتقکليمه توليزه کوي، مګر قوي سينګولاريتي اجازه نه لري. د بيلګې په توګه تابع

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x_1 \geq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

راوړو، په n-بعدي يا n– پراخيدوني انتروال

$$D = (-1,1)^n$$

ترڅيرني لاندې نيسو. تابع په هيوپرسطحهHyperebene

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$$

پرېکيدونکي ده او مربع – انتيګرالوړ کمزوری مشتق $g = \partial_1 f \in L^2(D)$ نه لري، دا په دې معنا چې مساوات

$$\int_D g(x)\varphi(x)\,dx = -\int_D f(x)\partial_1\varphi(x)\,dx$$

د هيڅ کوم g لپاره د ټول $\varphi \in C_0^\infty(D)$ لپاره پوره ورړ دی. د دې لپاره چې دا وښايو، نو يو ازمايښت تابع

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad \varphi(0) > 0\,,$$

ټاکو او ودې ته د $1 > \varepsilon > 0$ لپاره

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \ldots, x_n), & x_1 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

له دې سره په پورته مساوات کې د ښي اړخ لپاره راکوي

$$\int_D f(x)\partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx \qquad = -\int_{x_1 \geq 0} \partial_1\varphi_\varepsilon(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int\limits_{(-1,1)^{n-1}} \varphi_\varepsilon(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n$$

$$\int\limits_{n-1} \varphi(0, x_2, \dots, x_n)\, dx_2 \dots dx_n = \text{const} > 0$$

په داسي حال کې چې په کينه خوا د کوشي-شوارخ نامساوت

$$\left| \int\limits_D g(x)\varphi_\varepsilon(x)\, dx \right| \le \|g\|_2 \left(\int\limits_D |\varphi(x_1/\varepsilon, x_2, \dots, x_n)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

$$\left(\int\limits_D |\varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)|^2\, \varepsilon\, dy \right)^{1/2} = O\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

د ε سره د صفر0 په لور ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د سوبوليو په کې خونديوني جمله**Sobolevscher Einbettungssatz**

د يوې ليښشيخ ورشو $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره د سوبوليو-فضا لپاره خونديونه

$$W^{k,p}(D) \subset W^{l,q}(D), \quad q > p, \quad \frac{k-l}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري، له کوم سره چې د $q = \infty$ لپاره تیک یوه خوندیونه په $W^{l,\infty}(D) \cap C^l(D)$ پسې منځ ته راځي.
د محدودې ورشو لپاره خوندیونه کومپاکتده، دا په دې معنا چې محدوده ډېرئ په $W^{k,p}(D)$ کې پولې ته تلونکې پرلپسې په کې $W^{k,p}(D)$ لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د بیلګی په توګه خوندیونه

$$W^{1,p} \subset W^{0,q} = L^q$$

د تابع

$$f(x) = |x|^s, \quad s \neq 0$$

په مټه په n–بعدیز یونغونډاري

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x| < 1\}$$

څېړل کیږي. تابعه د $s > -n/q$ لپار q–انتیګرالوړ ده، ځکه چې د غونډاري کواوردینات ($r = |x|$) سره لاس ته راځي

$$\|f\|_{0,q}^q = \int\limits_D |x|^{sq}\, dx = c_n \int\limits_0^1 r^{sq} r^{n-1}\, dr\,,$$

د کوم سره چې c_n د یوونغونډاري $(n-1)$-بعدیز حجم دی. نور پسې دی

$$\partial_\nu f(x) = s|x|^{s-2} x_\nu$$

د f یو کمزوری مشتق دی، کوم چې د $s > 1 - n/p$ لپاره p– انتیګرالوړ دی. دا بیرته کیدی شي د غونډاري کواوردینات له لارې وازمایل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_D |\partial_\nu f(x)|^p \, dx \le |s|^p \int_0^1 r^{(s-1)p} r^{n-1} \, dr \,,$$

د کوم سره چط

$$|x_\nu|^p \le \left(\sum_\nu |x_\nu|^2 \right)^{p/2} = r^p$$

کارول شوی. د خونديونې جملې پسې $W^{1,p} \subset W^{0,q}$ دی، که

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$$

همداسې

$$1 - \frac{n}{p} = n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right) > n\left(-\frac{1}{q}\right)$$

باور ولري، کوم چې په باندې د پورته شرايطو سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بانخ ځای په ځای تکي جمله **Banachscher Fixpunktsatz**

که g يو رايوځای کيدونکي تابع وي، کوم چې يوه نه تشه، رابنده ډېرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځيره کړي، دا په دې معنا چې، باور لري

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c < 1$ سره، نو g یو یوائځنی ځاپه ځای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$ لري. که له
$x_0 \in D$ راووځو یا مخ ته لاړ شو، نو کیدی شي x_* د اتریشن پرلپسي (د تکرار پرلپسي) له لارې

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیر(په نږدې توګه ټاکل) شي یا نږدې (که غواړئ: تقریبي) وټاکل شي. د ناټیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \le \frac{c^k}{1-c}\,\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې، که د اتریشنپرلپسي یا د تکرار پرلپسي د هر پیل ارزښت لپاره کرښیزه پولې ته لاړه شي.
د ځای په ځاي ټکي جمله په ټولیزه توګه په پوره متریکي فضاو کې باور لري. دا چې د ترانسلیشن واریانځ او نورم هوموجینیتی ته اړتیاپیښنه نه شي، کیدی شي سرې $\|x - y\|$ د یوه ټولیز واټن تابع له لارې $d(x,y)$ بدل کړي.
لیکونکي: اپپ، بوسلې، هیولیګ

سکالار ضرب **Skalarprodukt**

یو سکالار ضرب په یو کومپلکس وکتور فضا V یو تابع دی
$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

د لاندې خویونو سره:

- مثبتوالی Positivität: :

$$\langle v, v\rangle > 0 \quad \text{für} \quad v \ne 0$$

- مایلسیمتري Schiefsymmetrie: :

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- کرښيزوالی Linearität:

$$\langle \lambda u + \varrho v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \varrho \langle v, w \rangle$$

له دې سره $u, v, w \in V$ او $\lambda, \varrho \in \mathbb{C}$ په خوښه وکتورونه همداسې سکالار دي.
د مايل سيومتري په بسته يو کومپلکس سکالار ضرب نسبت و دويمي متحولي يا اووښتوني ته کرښيز نه دی:

$$\langle u, \lambda v + \varrho w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \overline{\varrho} \langle u, w \rangle \,.$$

يواځې د حقيقي سکالار لپاره کومپلکس کنجوګيشن بې معنا دی.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ، کرايخ

هيلبرت - فضا Hilbert-Raum

يوه هيبرت – فضا H يوه پوره نورمي (حقيقي يا کومپلکس) وکتور فضا ده، چې په کومه کې نورم د سکالار ضرب له لارې تعريف ده:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \,.$$

په ځانګړې توګه د کوشي – شواذرځ نابرابرونونه باور لري

$$|\langle u, v \rangle| \le \|u\| \|v\|$$

همداسې د غبرګ اړخيز-ايدنتيتي يا - - کتمتوالی

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \,.$$

سرې د هيلبرت-فضا Hilbert-Raum سيپارابل Hilbert-Raum بولي، که يوه ګڼلوړ اورتونورمال بنسټ

$$e_1, e_2, \ldots, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \,,$$

شتون ولري. په دې حالت کې هر $v \in H$ د فوری- وديزينه-die Fourier Entwicklung

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې نسبت پورته نورم ته پولې ته تلونکي ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع جمعه کېدونکې پرلپسې Quadratsummierbare Folgen

مربع جمعه کېدونکې پرلپسې
$c_1, c_2, \ldots, \quad c_i \in \mathbb{C}$

هيلبرت-فضا l^2 جوړوي سبت سکالار ضرب ته

$$\langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k} \,.$$

فضا l^2 د يوه سيپارابل هيلبرت-فضا H پروتو تويپ دی، ځکه چې هر توکی

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \in H$$

کيدی شي د د اورتوګونال بنسټ د ضريب c_k سره معلومه identifiziert شي. له دې سره باور ل ري

$$\|v\|_H = \|c\|_{l^2} \,,$$

دا په دې معنا، چې فضاوې H او l^2 ايزومورف دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

مربع انتيګراوړ توابع **Quadratintegrierbare Funktionen**

د يوې ورشو يا سطحې $D \subset \mathbb{R}^n$ لپاره $L^2(D)$ د تابع $f: \; D \to \mathbb{C}$ فضا بنايي
د لاندې سر

$$\int_D |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

او دا د سکالار ضرب

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle f, g\rangle_2 = \int\limits_D f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

له لارې منځ ته راغلی نورم $\|\cdot\|_2$.

په بدیله توګه کیدی شي $L^2(D)$ د ښویي تابع په څیر د رابندېدنې په توګه هم تعریف شي، دا په دې معنا ، چې هر مربع انتیګرالوړ تابع کېدی شي د یوې ناپای پرلپسي په توګه د زیاتځله مشتقوړ تابع f_n له لارې اپروکسیمی یا په نږدې توګه انځور شي شي:

$$\|f - f_n\| \to 0, \quad n \to \infty\,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د بیلګې په توګه تابع

$$f(x) = |x|^s$$

په پراخیدونې یا - بعدیزې یوونګردی(دایره واحد)

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

تر ځیرنې لاندې ونیل شي.

د غونډاري کواوردینات ($r = |x|$) سره لاس ته راځي

$$\int\limits_D |f(x)|^2\,dx = c\int\limits_0^1 r^{2s} r^{n-1}\,dr = c\left[\frac{r^{2s+n}}{2s+n}\right]_0^1,$$

دا په دې معنا چې f د $2s > -n$ لپاره مربع اایګرال وړ دی.

که همدا تابع په ساحه

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}\,,$$

تر ځیرنې لاندې ونیسو، نو بیا هم د غونډاري کواوردینات سر لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{\bar{D}} |x|^{2s}\, dx = c \int_1^{\infty} r^{2s} r^{n-1}\, dr\,,$$

دا په دې معنا، چې $2s < -n$ د f لپاره مربع انتيګرالوړ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د مربع انتيګرالوړ توابعو سوبوليف – فضا

Sobolev-Raum der quadratintegrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ لپاره $H^k(D) = W^{k,2}(D)$ د (حقيقي - يا کومپلکس ارزښتيزو) هيلبرت-فضا په ګوته کوي. توابع د مربع انتيګرالوړ کمزورو ټوټه مشتقونو سره ، چې نظم $\leq k$ لري د سکالار ضرب

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

له لارې

$$\langle f, g\rangle_{k,2} = \sum_{|\alpha|\leq k} \int_D \partial^\alpha f(x) \overline{\partial^\alpha g(x)}\, dx$$

منځ ته راغلي نورم $\|\cdot\|_{k,2}$ سره. اړونده نيم نورم

$$|f|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_D |\partial^\alpha f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}$$

فقط د جګ نظم مشتق کاروي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د فورير- لړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

په $D = [-\pi, \pi]$ باندې مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \,,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} c_k e^{\mathrm{i}kx} \overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

دی، د فوریې – بنسټ $e^{\mathrm{i}kx}$ د اورتوګونالیټي په اساس.

مشتق

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}kc_k e^{\mathrm{i}kx}$$

مربع انتیګرالوړ دی، که

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty \,,$$

وي، ځکه چې

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx = -\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} kc_k e^{\mathrm{i}kx} j\overline{c_j} e^{-\mathrm{i}jx} \, dx = -2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 \,.$$

دا چې له دویم شرط لومړی لاس ته راځي، نو لرو $f \in H^1$ د $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 |c_k|^2 < \infty$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د هاردي-لیبسک فضا**Hardy-Lebesgue-Raum**

د هاردي-لیست – فضا HL د ټولو د یوونکردئ په ټیکلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

هولومورف توابعو

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

څخه جوړه ده

د

$$\|f\|_{HL}^2 = \langle f, f \rangle_{HL} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \overline{c_k} < \infty \,.$$

سره.

پوره اورتونورمالسیستم **Vollständiges Orthonormalsystem**

یو اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ په هیلبرت- فضا کې پوره یا ماسیمال بلل کیږي، که

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

باور ولري.

$$\forall_{i \in I} \quad \langle u, e_i \rangle = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

یو اورتونورمال سیستم ټیک هلته د هیلبرت – فضا یو اورتونورمال بنسټدی، کله چط هغه پوره وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په هیلبرت٠فضا کې فوری-پروجکشن (پرېوستون) **Fourier-Projektion in Hilbert-Räumen**

د یوه وکتور v فوریي –پروجکشن په یوه هیلبرت-فضا H کې د اورتونورمالسیستم $e_1, e_2, \ldots$ ، سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p_n v = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad c_k = \langle v, e_k \rangle$$

و v ته ښه اپروکیمیشن دی د سکالار ضرب $\langle\cdot,\cdot\rangle$ له لارې ایندوڅیرت (منځ ته راغلی) نور م $\|\cdot\|$ سره، دا په دې معناچې

$$\|v - p_n v\| = \min_{q=\sum_{k=1}^{n} d_k e_k} \|v - q\| .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

سړی لومړی په پام کې نیسي، چې

$$\langle v - p_n v, e_j \rangle = 0, \quad 1 \le j \le n .$$

دا د $\{e_j\}$ د اورتونورمالیټي څخه ترلي لاس ته راځي، ځکه چې

$$\langle p_n v, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \langle e_k, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad 1 \le j \le n .$$

د یوه په خوښه اپروکسیمیشن $q = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$ لپلره باور لري

$$\|v - q\|^2 = \|v - p_n v + p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \langle v - p_n v, \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n}(c_k - d_k)e_k} \rangle + \langle \underbrace{p_n v - q}_{\sum_{k=1}^{n}(c_k - d_k)e_k}, v - p_n v \rangle + \|p_n v - q\|^2$$

$$= \|v - p_n v\|^2 + \|p_n v - q\|^2 ,$$

داپهدې معنا، چې نتیکاوی مینیمال کیږي، که q د فوری- پروجکشن $p_n v$ وي.

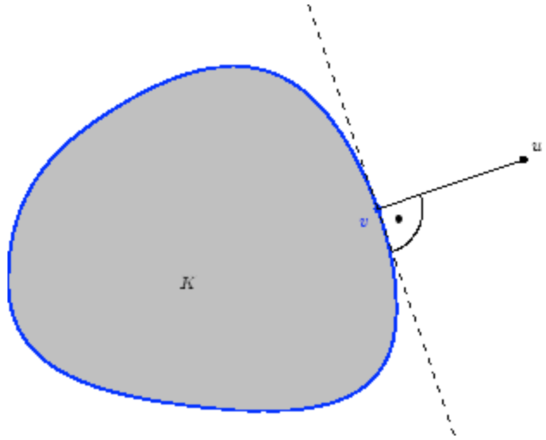
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هيلبرت- فضا باندې د کونوکسو(وتلو) ډېريو خورا ښه اپروکسيميشن
Beste Approximation von konvexen Mengen in Hilbert-Räumen

د يوه هيلبرت-فضا H د يوه رابند کونوکس برخه ډېرئ K لپاره هر $u \in H$ ته يو يواځنی ځورابنه اپروکسيميشن شتون لري د دې لاندې سره

$$\|u-v\| = \inf_{w \in K} \|u-w\| \,.$$



خورابنه اپروکسيسميشن يواځنی د

$$\langle u-v, w-v \rangle \le 0,$$

له لارې د ټولو $w \in K$ لپاره کرکتريزه(خوي ټاکنی) شوی، دا په دې معنا، چې د وکتورونو $u-v$ او $w-v$ ترمنځ کونج پخ دی.

په ځانګړې توګه د رابندو کرښيزو برخه فضاوو U خورا ښه اپروکسيميشن شتون لري.
په دې حالت کې دا پورته سکالار ضرب صفر دی، داپه دې معنا، چې ناټيکاوی $u-v$ و U ته اورتوګونا دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

که

$$d = \inf_{w \in K} \|u - w\|$$

ځای په ځای کړو

او یوه پرلپسي (u_n) په K د

$$\|u - u_n\| \to d, \quad n \to \infty ,$$

سره کې وټاکو، نو د K کونوکسیټي له امله باور لري

$$\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in K$$

او ورپسې

$$\|2u - (u_n + u_m)\|^2 \geq 4d^2 .$$

د غبرګ اړخیز-کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$\|(u - u_n) - (u - u_m)\|^2$$
$$= \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - \|(u - u_n) + (u - u_m)\|^2$$
$$\leq \{2\|u - u_n\|^2 + 2\|u - u_m\|^2\} - 4d^2 .$$

دا چې د کړوړ وړو نوکانو افاده یا وبینه د $4d^2$ په لور هڅیږي، نو

$$\lim_{n,m \to \infty} \|u_m - u_n\|^2 = 0$$

لرو او (u_n) په H کې یوه کوشي -پرلپسي ده، دا په دې معنا، چې یو $v \in K$ شتون لري

د $\lim_{n \to \infty} u_n = v$ او $\|u - v\| = d .$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت يواځنی دی، ځکه چې که يو بل پوله ارزښت $w \in K$ شتون لرودی د $\|u-w\| = d$ سره، نو پرلپسي $v, w, v, w, \ldots$ به لکه پورته پولې ته تلونکې وی او باید $v = w$ باور ولري.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

پە هيلبرت-فضا کې اورتوګونال کومپليمنت
Orthogonales Komplement in Hilbert-Räumen

د يوې هيبرت-فضا H هرې رابندې لاندې – يا برخه – فضا Uته يو اورتوګونال کومپلمنت ،، دا په دې معنا، چې يوه رابنده لاندې فضا

$$U^{\perp} = \{v \in H : \langle u, v \rangle = 0, \quad \forall u \in U\} \ ,$$

شتون لري د

$$H = U \oplus U^{\perp} \ .$$

سره.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

دا چې $U^{\perp}$ د H يو لاندې – يا برخه فضا ده، سيده له سکالار ضرب $\langle u, v \rangle$ څخه لاس ته راځي، او د کوښش – شوارڅ مساوات له لارې رابندوالی لاس ته راځي.
د $u \in U$ او $u \in U^{\perp}$ لپاره $\langle u, u \rangle = 0$ باور لري او له دې سره $u = 0$ همداسې

$$U \cap U^{\perp} = \{0\} \ .$$

دا چې U کونوکس ده، نو د $w \in H$ لپاره يو خورا ښه اپروکسيميشن $u \in U$ شتونلري، هغه چې نورم

$$\|w - u\|$$

ميمال کوي. که کيږدو $v = w - u$، نو د ټولو $\tilde{u} \in U$ او ټولو α لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 \leq \|v - \alpha\tilde{u}\|^2 = \|v\|^2 - \overline{\alpha}\langle v, \tilde{u}\rangle - \alpha\langle \tilde{u}, v\rangle + \alpha\overline{\alpha}\|\tilde{u}\|^2 .$$

د

$$\overline{\alpha} = \frac{\langle \tilde{u}, v\rangle}{\|\tilde{u}\|^2} \qquad \alpha = \frac{\langle v, \tilde{u}\rangle}{\|\tilde{u}\|^2},$$

همداسې
.

سره لاس ته راځي

$$\|v\|^2 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle \tilde{u}, v\rangle|^2}{\|\tilde{u}\|^2}$$

او له دې سره

$$\langle \tilde{u}, v\rangle = 0 \qquad v \in U^{\perp} .$$

همداسې
.

$$w = u + v$$

دا چې دی، نو

$$H = U \oplus U^{\perp}$$

و ښوولشو.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په هيلبرت-فضا کې د بيسل-نامساوات
Bessel-Ungleichung in Hilbert-Räumen

په يوه هيلبر-فضا H کې د هر اورتونورمالسيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i\in I} |\langle v, e_i\rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

د ټولو $v \in H$ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ښونه فقط يوه ګڼلوړ اورتونورمال سيسم لپاره مخ ته بيايو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دې $i_1, i_2, \ldots, i_n$ د ایدکشن(پیژند نخښو) یوه په خوښه پرلپسې په I کې. د کومپلکی اعدادو یوهپه خوښه پرلپسي $c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_n}$ لپاره د e_i له اورتونورمالیتي څخهه لاس ته راځي

$$0 \leq \left\| v - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} e_{i_k} \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_{i_k} \langle e_{i_k}, v \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{c_{i_k}} \langle v, e_{i_k} \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_{i_k}|^2$$

$$= \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle - c_{i_k}|^2 .$$

د $c_{i_k} = \langle v, e_{i_k} \rangle$ ټاکنو لپاره دا دا معنا لري

$$0 \leq \|v\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2$$

همداسې

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_{i_k} \rangle|^2 \leq \|v\|^2 .$$

دا نامساوات د پولي ته تگ $n \to \infty$ سره هم ساتلی پتې کیږي.
لیکونکي: اپپ، هیولیگ

پـه هیلبرت- فضا کې د فوریر(فوریې) ودیزیینه
Fourier-Entwicklung in Hilbert-Räumen

په یوه هیلبرت-فضا H کې د یوه پوره اورتونورمال سیستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره سرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u = \sum_{i\in I} \langle u, e_i \rangle e_i$$

د u د فوريې – وديزينه بولي.
ليکونکي: اپپ، هيوليگ

پە هيلبرت – فضا کې د پارزيوال-کټمټوالی

Parseval-Identität in Hilbert-Räumen

د يوې هيلبرت-فضا H د هر (نه په اړيينه توگه ګڼلوړ) پوره اورتونورمال سيستم $\{e_i : i \in I\}$ لپاره باور لري

$$\sum_{i\in I} |\langle v, e_i \rangle|^2 = \|v\|^2, \quad v \in H\,,$$

دا په دې معنا، چې نورم v د بنسټ ضريبونو د l^2 -نورم سره سر خوري.

ليکونکي: اپپ، هيوليگ

ښوونه سيپارابل خيلبرت-فضا لپاره مخ ته بيول کيږي.

د سکالار ضرب د ناپرېکيدني له امله

$$\left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle v - \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k, e_j \right\rangle = \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0$$

دی،، د ټولو e_j لپاره، دا په دې معنا، چې

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k \rangle e_k\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|v\|^2 = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\langle v, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle v, e_k \rangle|^2$$

داپه دې معنا، چې د پارزيوال – کتوتوالی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ناپرېکيدونکي کرښيز فنکشنال Stetiges lineares Funktional

په يوه حقيقي (کومپلکس) توپولوژيکي وکتورفضا V باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز بنکشنل Λ يو ناپرېکيدونکی کرښيز تا بع دی د V په پسې.($\mathbb{C}$)$\mathbb{R}$.

په يوه نورمي وکتورفضا کې د Λ ناپرېکيدنوالی ورته دی په صفر باندې د يوونغونډاري يا واحدغونډاري د څېرې ته. په دې حالت کې سړی

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

د کرښيز فنکشنل د نورم په حيث تعريفوې يا پېژند ورکوي.

د نورم د هوموجينيتي په بنسټ هم ورته تعريفونه

$$\|\Lambda\| = \sup_{v\neq 0} \frac{|\Lambda v|}{\|v\|} = \sup_{\|v\|\leq 1} |\Lambda v|$$

شوني دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د دې لپاره چې وښايو، چې د ناپرېکيدنې څخه محدودوالی لاس ته راځي، نيسو، چې Λ په نورمي وکتورفضا باندې ناپرېکيدونکې دی، په صفر د يوونغونډاري څېره يا عکس نامحدود دی، دا په دې معنا، چې د هر $n \in \mathbb{N}$ لپاره په V کې يو v_n شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\|v_n\| \le 1$ او $|\Lambda v_n| > n\,.$

سره.

که کیږدو

$$u_n = \frac{1}{n} v_n\,,$$

نو لاس ته راځي

$$\|u_n\| \le \frac{1}{n}\,,$$

دا په دې معنا،چې $u_n \to 0$ د $n \to \infty$ لپاره او د فنکشنل د ناپرېکیدنې په بنسټ له دې سره لاس ته راځي $\Lambda(u_n) \to \Lambda(0)$. د فنکشنل د کریزوالي سره باور لري

$$\Lambda 0 = \Lambda(0 \cdot v) = 0 \Lambda v = 0$$

د ټولو $v \in V$ لپاره او له دې سره $|\Lambda u_n| \to 0$. له بله اړخه دی

$$|\Lambda u_n| = \frac{1}{n} |\Lambda v_n| > 1\,,$$

چې تضاد انځوروي.

برعکس له محدودوالي څخه ناپرېکیدنوالی لاس ته راځي، که سړی ړنیسي، چې

$$|\Lambda u| < c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په صفر د یوونغونداري د ټولو u لپاره. که اوس سړی یوه په V کې په خوښه پرلپسي (v_n) ولري د $v_n \to v$ او $v_n \neq v$ سره د ټولو n لپاره، نو سړی لاس ته راوړي

$$|\Lambda v_n - \Lambda v| = |\Lambda(v_n - v)| = \|v_n - v\| \left|\Lambda\left(\frac{v_n - v}{\|v_n - v\|}\right)\right| \le \|v_n - v\|c \to 0\,,$$

دا په دې معنا، چې د فنکشال ناپرېکیدنه لرو.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پیلګې لپاره دا کرښیز فنکشنال

$$\Lambda f = f(1)$$

د ټول $f \in C[0,1]$ لپاره رانیسو.

د په $C[0,1]$ د ماکسیموم نورم سره،

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|\,,$$

لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |f(1)| \le \sup_{\|f\|_\infty=1} \|f\|_\infty = 1\,,$$

دا به دې معنا، چې فنکشنال ناپرېکیدونکی دی. د تابع (فنکشن) $f(x) = 1$ سره د ټولو $x \in [0,1]$ لپاره د فنکشنال د نورم لپاره راکوي

$$\|\Lambda\| = 1\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د دې لپاره په $C[0,1]$ باندې L^2 -نورم وکاروو،

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} ,$$

او توابعو پرلپسې راواخلو

$$f_n(x) = \sqrt{2n+1} x^n, \quad n \in \mathbb{N} ,$$

نوو سړی لاس ته راوړي

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 (2n+1) \, x^{2n} \, dx = 1 ,$$

مګر

$$f_n(1) = \sqrt{2n+1}$$

له ټولو پولو اوړي یا له ټول پولو لوییږي، دا پهدې معنا، چې فنکشنل پرېکیدونکی دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د هان-بانخ د دوام(پسې تلني یا مخ ته بیوني) جمله

Fortsetzungssatz von Hahn-Banach

د یوه نورمي وکتور فضا پ V ه یوه لاندېفضا یا برخه فضا U باندې هر ناپرېکیدونکي کربنیز فنکشنال Λ ته یوه نورم ته وفاداره پرمخ ته تلنه شتون لري، داپه دې معنا، چې په V یو ناپرېکیدونکی کربنیز فنکشنال $\tilde{\Lambda}$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tilde{\Lambda}u = \Lambda u, \quad u \in U$$

او

$$\sup_{v \in V, \|v\|=1} |\tilde{\Lambda}v| = \|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\| = \sup_{u \in U, \|u\|=1} |\Lambda u| .$$

سره

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه د $L^2(-1,1)$ په لاندې فضا

$$U = \text{span}\{1, x, x^2\}$$

باندې د اړونده نورم

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

سره کرښيز فنکشنال

$$\Lambda f = f(0)$$

رااخلو.

يو تابع يا فنکشن

$$f = a + bx + cx^2$$

له U څخه لاندې نورم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (a+bx+cx^2)^2\,dx = 2a^2 + \frac{2}{3}\,b^2 + \frac{4}{3}\,ac + \frac{2}{5}\,c^2\,.$$

له دې سره له Λ څخه په U لاس ته راځي

$$\|\Lambda|_U\|^2 = \max_{0\neq f\in U} \frac{|\Lambda f|^2}{\|f\|_2^2} = \max_{(a,b,c)\neq(0,0,0)} \frac{a^2}{2a^2 + \frac{2}{3}b^2 + \frac{4}{3}ac + \frac{2}{5}c^2}\,.$$

د ځای په ځای یا کلک a د $b=0$ ، $c=-\frac{5}{3}\,a$ لپاره مخرج یا ماتلاندې مینیمال کیږي ، دا په دې معنا، چې

$$\|\Lambda|_U\| = \sqrt{\frac{a^2}{\frac{8}{9}a^2}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,.$$

په روښنه توګه په L^2 باندې د فنکشنال ارزښتونه پرېکیدونکې ده. د دې لپاره چې د Λ لپاره یو پرمخ بیونه وګټو ، نو ایښوونه

$$\tilde\Lambda f = \int_{-1}^{1} \underbrace{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}_{p(x)}\,f(x)\,dx$$

کوو او ضریبونه α,β,γ دغوښتو څخه ټاکو، چې $\tilde\Lambda$ د Λ سره د U په یوه بنسټ باید یو د بل سره سر وخوري.

$$\Lambda\left\{\begin{array}{c}1\\x\\x^2\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}2\alpha+\frac{2}{3}\gamma\\ \frac{2}{3}\beta\\ \frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{5}\gamma\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right\} = \tilde\Lambda\left\{\begin{array}{c}1\\x\\x^2\end{array}\right\}.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{9}{8}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -\frac{15}{8}\,.$$

د کوشي-شوارڅ نامساوات په بنسټ دی

$$|\tilde{\Lambda} f| \leq \|p\|_2 \|f\|_2\,,$$

یعني $\|\tilde{\Lambda}\| \leq \|p\|_2$. ډا چې $p \in U$ نو دا لاندې هم باور لري

$$\|\tilde{\Lambda}|_U\| \geq \frac{|\tilde{\Lambda} p|}{\|p\|_2} = \frac{\int_{-1}^{1} |p(x)|^2\, dx}{\|p\|_2} = \|p\|_2\,.$$

دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\|\tilde{\Lambda}\| = \|p\|_2 = \sqrt{2\left(\frac{9}{8}\right)^2 + 0 + \frac{4}{3}\,\frac{9}{8}\left(-\frac{15}{8}\right) + \frac{2}{5}\left(-\frac{15}{8}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}\,,$$

دا په دې معنا، چې $\tilde{\Lambda}$ د Λ نورمساتونکی یا - وفادار پر مخ وړنه ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

دوال- یا دوه ګونې فضا Dualraum

دیوه نورمي وکتور فضا V دوال- یا دوه ګونې فضا V' په V د ناپرېکېدونکو کربنیزو فنکشالونو Λ لاندې د نورم

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|v\|=1} |\Lambda v|$$

سره په V' نخښنه شوی یو بانخ-فضا ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليكونكي: اپپ، هيوليګ

سيده ليدل کيږي، چې V' يوه نورمي وکترفضا ده. د ښوول بې د V' پروه والى دى.

وي دې (Λ_n) يوه کوشي- پرلپسي په V' کې دا په دې معنا دى، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_0 شتون ل ري، داسې چې دټولو $n, m > n_0$ لپاره

$$\|\Lambda_n - \Lambda_m\| < \varepsilon$$

باور لري. نو د هر $v \in V$ لپاره باور لري

$$\|\Lambda_n v - \Lambda_m v\| = \|(\Lambda_n - \Lambda_m)v\| \leq \|\Lambda_n - \Lambda_m\||v| < \varepsilon|v|$$

داپه دې معنا، چې $(\Lambda_n v)$ يوه سکالار کوشي – پرلپسي ده، نو يو پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ لري. دا د $\Lambda v = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n v$ له لارې تعريف شوى تابع کرښيز او له پورته تخمينونو نورم پرلپسي د ناپرکيدني له لارې د $m \to \infty$ لپاره

$$\|(\Lambda_n - \Lambda)v\| \leq \varepsilon|v|$$

د $n > n_0$ لپاره. له دې لاس ته راځي،چې $\Lambda_{n_0} - \Lambda$ او له دې سره هم $\Lambda = (\Lambda - \Lambda_{n_0}) - \Lambda_{n_0}$ ناپرېکيدونکي دى، او

$$\|\Lambda_n - \Lambda\| < \varepsilon$$

د $n > n_0$ لپاره باور لري،دا په دې معنا، چې

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda_n = \Lambda\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

بيدوالفضا (دوه دوه بيزه فضا) Bidualraum

د يوې نورمي وکتورفضا V بيدوال-يا بيدوه بيزه فضا V'' د V' دوه بيزه فضا ده. دا چې هر توکی $v \in V$ دې

$$\Lambda \mapsto \Lambda v, \quad \Lambda \in V'$$

يو ناپريکيدونکی کربنيز فنکشنال په V' جوړ کړي، کيدی شي V د V'' يوې لاندې فضا سره جوړ شي يا منځ ته راشي. باورلري

$$V'' = V\ ,$$

نو V رفلکسيو يا هنداروني بلل کيږي.

رفلکسيو باناخ-فضاوې فضاوي $L^p(D)$، $1 < p < \infty$ دي، همداسې هر پاې بعدي(پراخيدوني) وکتور فضاوي. $L^1(D)$ او $C[0,1]$ د نا-هنداروني بيلګې باناخ - فضا دي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د p - انتيګراوړ توابعو دوالفضا

Dualraum der p-integrierbaren Funktionen

د يوې ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ او $1 \leq p < \infty$ لپاره دی

$$L^p(D)' = L^q(D), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس یوائي $L^q(D) \subseteq L^p(D)'$ اینکلوزیون یا خوندیونه ښوول کیږي.

هر $g \in L^q(D)$ ته د

$$\Lambda : \quad f \mapsto \Lambda f = \int_D f(x)g(x)\,dx, \quad \forall f \in L^p(D),$$

له لارې په $L^p(D)$ یو ناپرېکیدونکی کرښیز فنکشنال تعریف دی، خکه چې هولدر نامساوت پسې د د انتیګرالونو لپاره دی

$$\int_D |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\int_D |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_D |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty$$

د $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ سره. له دې لاس ته راځي

$$\|\Lambda\| = \sup_{\|f\|_p = 1} |\Lambda f| \le \|g\|_q .$$

د $f = \mathrm{sign}(g)|g|^{q-1}$ لپاره نامساوات تیره یا تیز دي، دا په دې معنا، چې سړی لاس ته راوړي

$$\|\Lambda\| = \|g\|_q .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ریسځ د انځورولو جمله Darstellungssatz von Riesz

د یوې هیبرت-فضا H او یوه کره یا کلک $v \in H$ لپاره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda : \quad u \mapsto \Lambda u = \langle u, v\rangle, \quad \forall u \in H$$

له لارې يو ناپرېکيدونکی کربنيز تابع په H د

$$\|\Lambda\| = \|v\|$$

سره تعريف دی.

معکوس هر يو ناپرېکيدونکي کربنيز فنکشنال $\Lambda \in H'$ ته ټيک يو $v \in H$ شتون لري، داسې چې پورته مساوات باور لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بېلګې په توګه د مربعجمعه وړ پرلپسې l^2 رانيسو. وي دې $\Lambda \in (l^2)'$، نو ټيک يوه پرلپسې په l^2 کې شتنو لري د

$$\Lambda c = \langle c, d\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}, \quad \forall c \in l^2 .$$

سره.

د d څخه و Λ ته ديواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا l^2 د خپل دوال- يا دوه ګونې فضا $(l^2)'$ سره و ښوول شي ياو پيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه مربع انتيګرا لوړ توابع $L^2(D)$ په ورشو $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رانيسو. وي دې $\Lambda \in L^2(D)'$، نو ټيک يو تابع $g \in L^2(D)$ شتون لري د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \langle f, g \rangle = \int_D f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad \forall f \in L^2(D)\,.$$

سره.

له g څخه و Λ ته د يواځني تنظيم له لارې کيدی شي فضا L^2 د خپلي دوال- يادوه ګوني فضا $(L^2)'$ سره وپيژندل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

کمزوري پولې ته تلنه Schwache Konvergenz

په يوه نورمي شوي وکتورفضا V يوه پرلپسي (v_n) کمزورې پولې v ته ځي، که

$$v_n \rightharpoonup v\,,$$

که

$$\Lambda(v_n - v) \to 0, \quad \forall\,\Lambda \in V'\,.$$

د Λ د ناپرېکيدنې په بنسټ هره پولې ته تلونکې پرلپسي

$$v_n \to v \quad \Leftrightarrow \quad \|v_n - v\| \to 0$$

هم کمزورې پولې ته تلونکې ده. معکوسوالی يا په ښتوالی په ټوليزه توګه باور نه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه په فضا کې مربع جمعه کيدونکې پرلپسې‌و l^2 کې پلپسي

(c) ketabton.com: The Digital Library

e	$= (0, 0, 0, \ldots)$
e^1	$= (1, 0, 0, \ldots)$
e^2	$= (0, 1, 0, \ldots)$
	$\vdots$

رانیول کیږي. دا چې هر ناپرېکیدونکی کربنیز فنکشنال Λ په l^2 د رسسخ(وبینه: ریخ) د انځورېزې جملې

$$\Lambda c = \langle c, d \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \overline{d_k}$$

په حیث د کلک یا کره $d \in l^2$ سره لیکل کیږي، نو لاس ته راځ

$$\Lambda(e^n - e) = \langle e^n, d \rangle = \overline{d_n} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ځکه چې d مربعجمعه وړ دی، دا په دې معنا، چې دی

$$e^n \rightharpoonup e, \quad n \to \infty.$$

مګر په ر حالت

$$||e^n - e|| = 1,$$

داپه دې معنا، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^n \not\to e\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

محدود کرښيز اوپراتورونهBeschränkte lineare Operatoren

د نورمي وکتورونو فضاو تر منځ يو کرښيز تابع

$$L:\quad V \to W$$

محدود کرښيز اوپراتور بلل کيږي، که د اوپراتور نورم

$$\|L\| \,=\, \sup_{\|v\|=1} \|Lv\|$$

پای وي. محدودوالی د L د ناپرېکيدنوالي سره په يوه معنا دی.

سړی کرښيز اوپراتور هغه په کرښيز الجبر کي د کرښيز تابع په ځای کاروي، چي داناپای ـبعديز Kontext غوره وښايو يا را مخ ته کړو.

د ټولو کرښيزو مخدودو له V څخه د W پسي اوپراتورونو د $\mathcal{L}(V,W)$ سره په نخښه کيږي. دا باناخ-فضا ده، که W يوه باناخ-فضا وی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

انتيګرال اوپراتور Integraloperatoren

د يوه تابع

$$K:\quad D\times D \ni (x,y) \mapsto K(x,y) \in \mathbb{R}, \quad D\subseteq \mathbb{R}^n,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د

$$(Lf)(x) = \int_D K(x,y) f(y)\, dy$$

له لارې يو كرښيز اوپراتو تعريفيږي. د مخته څېړي- يا تابع - او ډڅېړي فضا(تابع تابع) V او W د داسې په نامه زړي تابع K د خويونو په واک كې دي.

په لاندې كې يوه څو بيلګې او همداسې د اړونده اوپراتور نورمونه وركړ شوي.

- K په $\overline{D} \times \overline{D}$ ناپرېكيدونكې، D محدود ده.

$$L: \quad C(\overline{D}) \to C(\overline{D})$$

$$\|L\| = \max_{x \in \overline{D}} \int_D |K(x,y)|\, dy$$

- $K \in L^2(D \times D)$

$$L: \quad L^2(D) \to L^2(D)$$

$$\|L\| \le \left(\int_D \int_D |K(x,y)|^2\, dx\, dy \right)^{1/2}$$

- $D = \mathbb{R}^n$, $K(x,y) = \varphi(x-y)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L: \quad L^p(D) \to L^p(D)$$

$$\|L\| = \int_D |\varphi(z)|\, dz$$

د کرښيزو اوپراتورونو پولې ته تلنه Konvergenz linearer Operatoren

د محدودو کرښيزو اوپراتورونو پرلپسيو لپاره لاندې دوه کليمې کارول کيږی.

- ټکي ډوله پولې ته تلنهPunktweise Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ ټکيډوله د يوه اوپراتور L په لور پولې ته ځي، که

$$L_n v \to Lv, \quad \forall v \in V\,.$$

- برابرډوله پولې ته تلنه Gleichmäßige Konvergenz

يوه پرلپسي $L_n \in \mathcal{L}(V,W)$ برابرډوله ديوه اوپراتور L په لور   پولې ته تلونکې ده، که وي

$$\|L_n - L\| = \sup_{\|v\|=1} \|L_n v - Lv\| \to 0\,.$$

د برابرډوله پولې ته تلنې څخه ټکي ډوله پولې ته تلنه راکوي، معکوس په ټوليزه توګه باور نه لری.

د برابر ډوله محدودوالي اصول Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د یوې باناخ-فضا V په یوه نورمي وکتور فضا W کې د یوې محدودې کرښیز اوپراتورونو (L_n) پرلپسې لپاره لاندې باور ولري

$$\sup_n \|L_n v\| < \infty \quad \forall v \in V ,$$

،

نو لاس ته راځي

$$\sup_n \|L_n\| < \infty ,$$

دا په دې معنا، چې د اوپراتور-نورم برابرډوله مخدودوالی.

د باناخ-شتاینهوز جلمه Satz von Banach-Steinhaus

وي دې V, W باناخ-فضا او U یوه د V ټینګه یا(غلیضه) برخه دېرئ، نو بیا یوه پرلپسې $L_n \in \mathcal{L}(V, W)$ ټیک هلته ټکي ډوله و یوه کرښیز محدود اوپراتور L ته ځي،

$$L_n v \to L v , \quad \forall v \in V,$$

که

(a)

$$\forall u \in U , \quad L_n u$$

پولې

$$\sup_n \|L_n\| < \infty .$$

(b)

د باناخ شرایط a) او b) دې پوره وي او v دې یو په خوښه وکتور له V څخه وي. دا جې U په V کې ټینګه یا کیمنډلې ده، نو د $\varepsilon > 0$ لپاره یو $u \in U$ شتون لري، داسې چې دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|u - v\| < \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|}\,.$$

پرلپسې $(L_n u)$ د نیونې یا فقضیې له مخې پولې ته ځي، یعني یو n_0 ایندکس یا پیژندنخښه شتون لري، داسې چې د $m, n > n_0$ لپاره

$$\|L_m u - L_n u\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

باور لري. له دې لاس ته راځي

$$\|L_m v - L_n v\| \le \|L_m v - L_m u\| + \|L_m u - L_n u\| + \|L_n u - L_n v\|$$

$$\sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} + \frac{\varepsilon}{3} + \sup_n \|L_n\| \frac{\varepsilon}{3\sup\limits_n \|L_n\|} = \varepsilon\,,$$

داپه دې معنا، چې $(L_n v)$ په W کې یوه کوشي-پرلپسې ده. دا چې W پوره ده، ن و پوله ارزښت شتون لري، یعني

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv \in W\,.$$

د L محدودوالی او کرښیزوالی تړلی د نورم له ناپرېکېدنې لاس ته راځي.

د معکوسونې لپاره دې فقط شرایط b) و ښوول شي. دا د برابرېدوله محدودوالي له شرایطو څخه لاس ته راځي، ځکه چې

$$\lim_{n\to\infty} L_n v = Lv$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، چې $\sup_n \|L_n v\|$ د ټولو v لپاره پای دی.

وي دې

$$s_n f = \sum_{j=1}^{n} w_{j,n} f(x_{j,n})$$

د لاندې انتیګرال لپاره نږدېونه

$$sf = \int_0^1 f(x)\, dx\,.$$

که وزنونه $w_{i,n}$ زیاتیز یا مثبت وي او s_n ټیک دی د $< n$ درجې پولینوم لپاره، نو لاس ته راځي

$$sf = \lim_{n\to\infty} s_n f$$

د $f \in C[0,1]$ لپاره.

ښوونه د باناخ-شتاینهوز له جملې ترلی لاس ته راځي، په کارول شوی په $s_n \in \mathcal{L}(C[0,1], \mathbb{R})$ او د $C[0,1]$ پولینومونو ټینګه برخه فضا باندې. د پولینوم p لپاره د $s_n p$ پولې ته تلنه روښانه دی،، ځکه چې $s_n p = sp$ دی د $n > \mathrm{Grad}\, p$ لپاره.

د دې لپاره چې برابرډوله محدودوالی وښایو، سړی په پام کې نیسي، چې

$$\sum_{j=1}^{n} w_{j,n} = 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې s_n د ثابتو یا د تل همغو توابعو $f(x) = c$ لپاره تېک دی. له دې لاس ته راځي

$$\|s_n\| = \sup_{\|f\|_\infty=1} |s_n f| = 1.$$

کومپاکت اوپراتورونه Kompakte Operatoren

د باناخ-فضاو تر ةنځ یو اوپراتور $L \in \mathcal{L}(V, W)$ کومپاکت دی، که د V په W کې د یوونغونډاري(واحدغونډوسکې یا -کرې) B څېره یا عکس نسبي کومپاکت وي، دا به دېمعنا، چې په B کې د هرې پرلپسې (v_n) لپاره پرلپسې (Lv_n) یوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې ولري.

د بېلګې په توګه په $\mathcal{L}(V, W)$ کې دوه اوپراتورونه د $V = W = l^2$ سره رانیسو.

- اوپراتور Der Operator

$$L : \quad (c_1, c_2, c_3 \ldots) \mapsto (c_1, c_2, c_3 \ldots)$$

کومپاکت نه دی، خکه چې د بیلګې په توګه د پرلپسې‌و پلرپسي

$= Le_1 = (1, 0, 0, \ldots)$	e_1	
$= Le_2 = (0, 1, 0, \ldots)$	e_2	
$\vdots$	$\vdots$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

په B کې پولې ته تلونکې برخه پرلپسي نه لري.

- Der Operatorکرښیزه تابع

$$L: \quad (c_j) = (c_1, c_2, c_3, \ldots) \mapsto (c_1, c_2/2, c_3/3, \ldots) = (\tilde{c}_j)\,,$$

$$, \quad \tilde{c}_j = c_j/j$$

کومپاکت دی. د دې لپاره دې وي (c_n) یوه په خوښه په B کې د پرلپسیو پرلپسي. نو سړی په لومړي ځل کره کوي، چې په روښانه توګه د توکي

$$c_n = (c_{n,1}, c_{n,2}, c_{n,3}, \ldots)$$

لپاره دا پرلپسي په هر ځاي $c_{n,j}$ کې محدود دي. یعنې

$$|c_{n,j}| \leq 1\,.$$

که د دې پرلپسی هر فقط د ټولو پرلپسي توکو لومړني ځایونه $(c_{n,1})$ تر څیرنې لاندې ونیسو، داسې چې د محدودوالي په بنسټ یوه برخپرلپسي $(c_{n_k(1)})$ پیداکړو، د کومو لپاره چې لومړي ځایونه پولې ته ځي. که د دې برخپرلپسیو $(c_{n_k(1)})$ څخه اوس د هر توکي څخه لومړني دوه ځایونه

$$(c_{n_k(1),1}, c_{n_k(1),2}),$$

راونیسو، نو بیرته دمخدودوالي په بنسټ پرخپرلپسي پیداکولای شو، دکومو لپاره، چط د وه کونترې پرلپسي یا ورتر پرلپسي

$$(d_k) = (c_{n_k(k)}), \quad k \in \mathbb{N}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره نو د هر کره J لپاره د J د لومړني ځايونو وکتور $(d_{k,1},\dots,d_{k,J})$ پولې ته ځي.

د دې لپاره چې وښايو، چې (d_k) غوښتوني برخپرلپسي ده، نو يوه د خوښي $\varepsilon > 0$ لپاره يو ايندکس K داسي ټاکو، چې

$$\sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{4}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور ولري. دا چې برخپرلپسي (d_k) د پورته جوړښتاصولو له مخې د لومړنيو K ځايونو لپاره پولې ته ځی، نو يو ايندکس N شتون لري،دا سې، چې د $k,l > N$ لپاره

$$\sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

باور لري. له دې سره د $k,l > N$ لپاره لرو

$$\|Ld_k - Ld_l\|_{l^2}^2 = \sum_{j=1}^{K} \frac{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}{j^2} + \sum_{j=K+1}^{\infty} \frac{\overbrace{|d_{k,j}-d_{l,j}|^2}^{\leq 4}}{j^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

د وازو توابعو په هکله جمله Satz über offene Abbildungen

د باناخ-فضاو تر منځ يو په باندې(surjektiver) محدود کرښيز اوپراتور L يوه وازه ډيرئ په يوه وازه ډيرئ ځېره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که L په کې (injektiv) هم وي، نو محدودوالی له L^{-1} لاس ته راځي. له دې سره حقيقي عدونه a, b د

$$a\|v\| \leq \|Lv\| \leq b\|v\|$$

سره شتون لري د L د مخته ځېرې ځخه د ټولو v لپاره، چېرته چې دويم نامساوات سملاسي د L د محدودوالي ځخه لاس ته راځي.

ليکوني: هيوليګ، اپپ

صرف نظر نه شي کولای، چې د عمليه يا اوپراتوري کيدنه L د باناخ-فضاو تر منځ ده. د دې ترمنځ کتمتوالی $L \in \mathcal{L}(V, W)$ ځيرل کيږي، د کوم سره چې $V = l^1$ د نورم

$$\|v\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$$

سره په نخښه کيږي او ځېره –فضا W د نورم

$$\|w\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |w_k|$$

سره په نخښه کيږي. د

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_1$$

له امله کتمتوالی L يو په (bijektiver) محدود کرښيز اوپراتو دی، مګر داچې

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_\infty = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|_1 = n$$

د $e_1 = (1,0,0,\dots), e_2 = (0,1,0,\dots),\dots$ سره، L^{-1} نامحدود دی.

ليکوني: هيوليگ، اپپ

د رابند يا بند گراف جمله Satz vom abgeschlossenen Graphen

که د بانخ – فضاو ترمنځ اوپراتور $L : V \to W$ رابند وي، دا په دې معنا،چط له

$$v_n \to v \quad \text{او} \quad w_n = Lv_n \to w$$

لاس ته راځي، چې $w = Lv$ دی، نو L محدود دی.

ليکوني: هيوليگ، اپپ

له دې بيلګې ځخه ليدل کيږي، چط سرې د رابند گراف په جمله کې په نيوني يا فرضيي صرف نطر نه شي کولای، داسې چې L د باناخ-فضاو ترمنځ عمل کوي يا اوپريشن کوي. د دې لپاره دفرنځيال اوپراتور

$$\mathcal{L}(V,W) \ni L: \quad f \mapsto f'$$

رانيسو، د کوم سره چې $V = C^1[0,1]$ د سوپريموم نورم $\|\cdot\|_\infty$ سره په نخښه شوی دی او $W = C[0,1]$ سره هم سوپريمومنورم دی. L يوو کرښيز اوپراتور دی، ځکه چې د $f(x) = x^n$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\|f\|_\infty = 1, \quad \|Lf\|_\infty = n$$

باور لري

محدود نه دی. مګر د L ګراف رابند دی، له دې امله چې د یوې پرلپسې (f_n) لپاره
په V کې د $f_n \to f \in V$ ، $Lf_n \to g \in W$ سره باور لري $f_n \to f$ برابر
ډوله دی، $f_n' \to g$, پرابر ډوله دی.

L له دې لاس ته راځي،چې f مشتقوړ دی، او

$$f' = g$$

باور لري.

(Autoren: App/Höllig)

په هیلبرت-فضا کې د یوه کرښیز اوپراتور ماتریکس

Matrix eines linearen Operators im Hilbert-Raum

یو کرښیز اوپراتو

$$L: \quad H \to H$$

په یوه سیپارابل هیلبرت-فضا د اورتوګونال بنسټ $e_1, e_2, \ldots$ سره کیدی شي د
ماتریکس

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a_{j,k}): \quad a_{j,k} = \langle Le_k, e_j \rangle$$

له لارې روښانه شي. باور لري

$$w = Lv \leftrightarrow w_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} v_k \,,$$

چيرته چې $u_l = \langle u, e_l \rangle$ د بتسټ ضريبونه ښايي ياپه ګوته کوي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د فورير-پروجکشن د پولي ته تلنې او د L کرښيزوالي په بنسټ باور لري

$$w_j = \langle Lv, e_j \rangle = \left\langle \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} v_k Le_k, e_j \right\rangle .$$

که پوله او زياتون يا جمعه د سکالار ضرب سره بدل شي، نو سړی د L ماتريک انځورونه لاس ته راوړي.

ليکونکي اپپ، هيوليګ

د بيلګې په توګه به د يوه 2π -پريودي يا 2π - تل بيرته راګرځيدوني تابع

$$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e_k, \quad e_k(x) = e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه رانيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: ضرب $L: f \to \varphi f$: د فوریر – ضریبونو له مخې د ماتریکس- راوړنو
لپاره سړی لاس ته راوړيMatrix-Einträge

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{\mathrm{i}(k-j)x}\,dx = \varphi_{j-k}\,.$$

د نورو ویونو یا لغاتو سره د f ضرب د φ سره د f او φ د فوریي- ضریبونو یو
دیسکرت قتونه په ګوته کوي.

دویم قتونه غبرګونه $L: f \to \varphi \star f$: که د ماتریکس-قیمتونو

$$a_{j,k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) e^{\mathrm{i}(kt-jx)}\,dt\,dx$$

په تعریف کې سړی $y = x - t$ بدل کړي، نو د

$$e^{\mathrm{i}(kt-jx)} = e^{\mathrm{i}((k-j)x)} e^{-\mathrm{i}ky}$$

له امله انتیګرال په y لاس ته راځي

$$a_{j,k} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k e^{\mathrm{i}(k-j)x}\,dx = 2\pi\varphi_k\delta_{j,k}\,.$$

د قاتونې ماتریکس دوه کونجتړی یا دیاګونال دی، د f د فوریي- ضریبونه د 2π –واره
د φ فوری-ضریبونو سره ضربیږي

لیکونکي: اپپ، هیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

ادجونګيري اوپراتور Adjungierter Operator

په يوې سيپارابلې هيلبرت-فضا H باندې د يوه محدود کرښيز اوپراتور L لپاره د

$$\langle Lv, w \rangle = \langle v, L^\star w \rangle, \quad v, w \in H,$$

له لارې يو داسې په نامه ادجونګيري اوپراتور $L^\star$ د ماتريکس

$$(a^\star_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}})$$

سره تعريفيږي. که $L^\star = L$ باور ولري، نو سړی L پخپله يا د ځان سره ادجونګيري يا هرميتيک بولي.

د بيلګې لپاره په $L^2(D)$ يو انتيګرال اوپراتور رانيسو. K دې يو زړي تابع وي د

$$\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dx \, dy < \infty \,,$$

سره، نو د

$$(Lf)(x) = \int\limits_D K(x,y) f(y) \, dy$$

له لارې د هر $f \in L^2(D)$ لپاره يو کرښيز اوپراتو تعريفيږي. د انتيګرال لپاره د کوشي-شوارڅ نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\int\limits_D |(Lf)(x)|^2 \leq \int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \int\limits_D |f(y)|^2 dy \,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې L يو محدود کرښيز اوپراتور دی په $L^2(D)$ د

$$\|L\| \leq \left(\int\limits_D \int\limits_D |K(x,y)|^2 \, dy \, dx \right)^{1/2} .$$

سره.

اړونده ادجونګيري اوپراتو $L^\star$ د

$$(L^\star g)(x) = \int\limits_D \overline{K(y,x)} g(y) \, dy$$

سره تعريفيږي، دا په دې معنا، چې L تيک هلته د ځان سره يا خپل ادجونګيري دی، که نږدې هرچيرته

$$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$$

باور ولري.

يونيتار اوپراتور Unitärer Operator

په يوه هيلبرت-فضا کې يو محدود کرښيز اوپراتور $Q : H \to H$ يونيتار دی، که وي

$$QQ^\star = I = Q^\star Q \, ,$$

چيرته چې I کټوټوالی په ګوته کوي.

د يونيتار اوپراتورونو ورته خويي خوونې يا کرکټريزه کونې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

a)

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H\,,$$

b)

$$\|Qv\| = \|v\|, \quad v \in H\,,$$

کوم ته چې هر چطرته د Q سورجکتیویتې یا په باندې والی له مخه نیول شوی دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که Q یونیتار وي، نو سملاسي لاس ته راځي، چې Q په باندې یا سورجکتیو ده او

$$\langle Qv, Qw\rangle = \langle v, Q^{\star}Qw\rangle = \langle v, w\rangle, \quad v, w \in H,$$

ځکه چې $Q^{\star}Q = I$ ، دا په دې معنا، چې خوبې (a.

دا ساده لیدل کیږي،چې له خوي یا کرمتریزه (aڅخه د $v = w$ سره سملاسي (b لاس ته راځي.

بالاخره له (b څخه لاس ته راځي

$$\langle Q^{\star}Qv, v\rangle = \langle Qv, Qv\rangle = \|Qv\|^2 = \|v\|^2 = \langle v, v\rangle, \quad v \in H$$

د $L = Q^{\star}Q - I = L^{\star}$ سره له دې لاس ته راځي

$$\langle Lv, v\rangle = 0$$

د ټولو $v \in H$ لپاره، همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 = \langle L(v+w), v+w\rangle = \langle Lv, v\rangle + \langle Lv, w\rangle + \langle Lw, v\rangle + \langle Lw, w\rangle$$

$$= \langle Lv, w\rangle + \langle w, Lv\rangle = \langle Lv, w\rangle + \overline{\langle Lv, w\rangle}$$

$$= 2\mathrm{Re}\langle Lv, w\rangle$$

د ټولو $v, w \in H$ لپاره، که په ځتنګړې توګه کیږدو $w = Lv$ نو لاس ته ترې راځي

$$\mathrm{Re}\langle Lv, Lv\rangle = \langle Lv, Lv\rangle = \|Lv\|^2 = 0$$

او له دې سره $Lv = 0$ د ټولو $v \in H$ لپاره، نو $L = 0$ همداسې

$$Q^{\star}Q = I\,.$$

د بېلګې په توګه په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې سکالار شوی د فوریې – ترانسفورمیشن رانیسو د

$$(Lf)(y) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\,dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

سره. دا چې $\|Lf\| = \|f\|$ دی ، نو L یونیتار دی، او ادیونکیري اوپراتور د، اړونده سکالار شوی، د معکوس فوری-ترانسفورمیشن له لارې ورکړ شوی دی:

$$(L^{\star}g)(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y}\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه کرښيز اوپراتور آیګن ارزښتونه

Eigenwerte eines linearen Operators

که د یوه V وکتور فضا یوه کرښيز اوپراتور L لپاره په خپل ځانګي باور ولري

$$Lv = \lambda v, \quad v \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

نو λ آیګن ارزښت بولو او v د آیګنوکتور په حیث(همداسې دیوه وکتور فضا V لپاره آیګن فنکشن). فضا

$$E_\lambda = \{v \in V : Lv = \lambda v\}$$

آیګن فضا بلل کیږي او $m_\lambda = \dim E_\lambda$ د آیګن ارزښت ډېرواروالی بولو.

د بیلګي لپاره به یو ناپرېکیدونکی نا- ثابت 2π - پریودیکي(تل بیرته راګرځیدونی) تابع

$$\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$$

لپاره په $L^2_{2\pi}$ دوه کرښيز اوپراتورونه راونیول شي.

ضرب اوپراتور (i) Der Multiplikationsoperator

$$L: \quad f \mapsto \varphi f$$

آیګن ارزښت نه لري، ځکه چي له $Lf = \lambda f$ په $\varphi(x) = \lambda$ ، $x \in (-\pi, \pi)$ لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دقاتولو اوپراتور (ii) Der Faltungsoperator

$$L: \quad f \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\cdot - t) f(t)\, dt$$

اکسپوننشل تابع $e_j(x) = e^{\mathrm{i}jx}$ د آیګن تابع په څیر لري. باور لري

$$(Le_j)(x) = \sum_k \varphi_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}k(x-t)} e^{\mathrm{i}jt}\, dt = \sum_k \varphi_k (2\pi) \delta_{j,k} e^{\mathrm{i}kx} = 2\pi \varphi_j e_j(x)\,,$$

داپه دې معنا، چې $2\pi\varphi_j$ اړونده ایګن ارزښتونه دی.

د هرمیتیکي اوپراتورونو آیګن ارزښتونه

Eigenwerte hermitescher Operatoren

د یوه هرمیتیکي اوپراتور $L: H \to H$ آیګن ارزښتونه حقیقي دي او آیګنوکتورونه و مختلفو أیګن ارزښتونو ته اورتوګونا دي.

که L هرمیتیکي وي، نو باور لري

$$\overline{\langle Lv, v\rangle} = \overline{\langle v, Lv\rangle} = \langle Lv, v\rangle\,,$$

دا په دې معنا، چې $\langle Lv, v\rangle$ د ټولو $v \in H$ لپاره حقیقي دی. اوس دې $v \neq 0$ د آیګن وکتور وي و آیګن ارزښت λ ته، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle Lv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v\rangle}_{\neq 0}$$

دی، همداسې

$$\lambda = \frac{\langle Lv, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

حقيقي دي.

که $w \neq 0$ د L آيګنوکتور وي و آيګن ارزښت μ ته، نو باور لري

$$\lambda\langle v, w\rangle = \langle Lv, w\rangle = \langle v, Lw\rangle = \mu\langle v, w\rangle$$

او له $\lambda \neq \mu$ سره

$$\langle v, w\rangle = 0\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د يوه هرميتيکي کومپاکت اوپراتور نورم

Norm eines kompakten hermiteschen Operators

د يوه کومپاکت هرميتيکي اوپراتور $L : H \rightarrow H$ لپاره، $\|L\|$ يا $-\|L\|$ د L يو آيګن ارزښت دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه په دوه پلونو(قدمونو) کې صورت نیسي یا پلې کیږي.

(i) لومړی

$$\sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle| = \|L\|$$

ښوول کیږي..

د

$$s = \sup_{\|v\|=1} |\langle Lv, v\rangle|$$

او

$$|\langle Lv, v\rangle| \leq \|Lv\| \|v\|$$

سره سړی سملاسي لاس ته راوړي

$$s \leq \|L\| .$$

د دې لپاره چې معکوسونه یا په څټوالی $\|L\| \leq s$ وښوول شي، لومړی په پامې نیسو، چې د په خوښه حقیقي $\alpha > 0$ لپاره لرو

$$\left\langle L(\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle - \left\langle L(\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv), \alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv \right\rangle$$

$$= \alpha^2 \langle Lv, v\rangle + \langle LLv, v\rangle + \langle Lv, Lv\rangle + \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv, v\rangle$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\alpha^2\langle Lv,v\rangle + \langle LLv,v\rangle + \langle Lv,Lv\rangle - \frac{1}{\alpha^2}\langle LLv,v\rangle$$

$$= 4\langle Lv,Lv\rangle = 4\|Lv\|^2 .$$

د

$$|\langle Lv,v\rangle| = \|v\|^2 \left|\left\langle L\frac{v}{\|v\|},\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\right| \le s\|v\|^2$$

سره او د غبرګاړخيز – يا مازی الاضلاع کټمټوالي سره له دې لاس ته راځي

$$\|Lv\|^2 \qquad \le \frac{s}{4}\left(\left\|\alpha v + \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2 + \left\|\alpha v - \frac{1}{\alpha}Lv\right\|^2\right)$$

$$= \frac{s}{2}\left(\alpha^2\|v\|^2 + \frac{1}{\alpha^2}\|Lv\|^2\right) .$$

که په ځانګړې توګه کېږدو

$$\alpha = \left(\frac{\|Lv\|}{\|v\|}\right)^{1/2}$$

نو راکوي

$$\|Lv\| \le s\|v\|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

داپه دې معنا، چې $\|L\| \leq s$.

له (i) د (ii) Nach (i) existiert eine Folge (v_n) in H mit $\|v_n\| = 1$ und

مخې په H کې یوه پرلپسې (v_n) شتون لري د او

$$|\langle Lv_n, v_n \rangle| \to \|L\| ,$$

سره، دا په دې معنا، چې یوه برخه پرلپسې (v_{n_k}) شتون لري د

$$\langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle \to \lambda$$

او

$$|\lambda| = \|L\| .$$

سره.

اوس فقط ښايو، چې

$$\|Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\| \to 0$$

د دې لپاره په پام کې نیسو $\|Lv\| \leq \|L\| \|v\| = |\lambda| \|v\|$ او

$$Lv_{n_k} - \lambda v_{n_k}\|^2 = \|Lv_{n_k}\|^2 - \langle Lv_{n_k}, \lambda v_{n_k} \rangle - \langle \lambda v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2$$

$$\lambda|^2 \|v_{n_k}\|^2 - \overline{\lambda} \langle Lv_{n_k}, v_{n_k} \rangle - \lambda \langle v_{n_k}, Lv_{n_k} \rangle + |\lambda|^2 ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره چې ښی اړخ د ∞ $\to$ k لپاره د

$$|\lambda|^2 - |\lambda|^2 - |\lambda|^2 + |\lambda|^2 = 0$$

په لور هڅیږي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو سپکترال انځورونه

Spektraldarstellung kompakter hermitescher Operatoren

یوه کومپاکت هر میتیکي اوپراتور $L : H \to H$ ته په یوه هیلبرت-فضا یو اورتونورمل بنسټ له آیګن ارزښتونو څخه شتون لري

$$e_1, e_2, \ldots,$$

د کوم سره چې مطلق ارزښتونو د اړونده آیګن رازښتونه λ_j یوه همغږیزه صفرپرلپسي جوړوي، یعنې

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots, \quad \lambda_j \to 0\,.$$

نسبت دې بنسټ ته L دا لاندې انځورونه لري

$$Lv = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle v, e_j \rangle e_j\,.$$

ښوونه یې په ډېرو برخه پلونو)(قدمونو) کې پلی کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د e_j جوړښت. د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو نورم د خویونو په بنسټ یو آیګن ارزښت $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ شتون لري د لاندطي سره

$$|\lambda_1| = \|L\| .$$

اوس سړی په پام کې نیسي، چې L د آیګنوکور e_1 څخه غزېدلي لاندې فضا E_1 اوتوګونال کومپلمنت ایناریانت پرېږدي. د $v \in E_1^{\perp}$ لپاره دی

$$\langle Lv, e_1 \rangle = \langle v, Le_1 \rangle = \lambda \langle v, e_1 \rangle = 0,$$

داپه دې معنا، چې $Lv \in E_1^{\perp}$. د دې پسې یا د دې په تعقیب L همداسې په $E_1^{\perp}$ باندې یو کومپاکت هرمیتیکي اوپراتور دی. د نورم خوی یا کرکتریزه بېرته یو آیګن لرزښت $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ راکوي د لاندې سره

$$|\lambda_2| = \|L|_{E_1^{\perp}}\| .$$

د λ_2 ارزښښت $\leq |\lambda_1|$ دی ، څکه چې د یوې کوچنۍ فضا په نسبت نورم جوړیږي.

اوس سړی کړی شي جوړښت ایندوکتیو مخ ت ه بوزي:

$$|\lambda_n| = \|L|_{E_n^{\perp}}\|$$

د لومړیو n اوتوګونال آیګنوکتورونو کرښیز پوښ Hülle E_n سره. دا تلنلار پرې کیږي، که $L|_{E_n^{\perp}} = 0$ وي، داپه دې معنا، چې که

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dim \mathrm{Bild}(L) = n < \infty$$

وي.

دويم: د صفر 0په لور پولې ته تلنه: وړاندنيونه، چې $\lambda_j \geq \lambda > 0$ د ناپاى ډېرو j لپاره باور لري، لاندې تضاد ته لاربنودوي. د L د کومپاکتوالي په بنسټ د $\{e_1, e_2, \ldots\}$ څېره يا عکسدا لاندې محدوده ډېرئ يا سټ

$$\{e_1/\lambda_1, e_2/\lambda_2, \ldots\}$$

نسبي کومپاکت ده، بايد يوه پولې ته تلونکې برخه پرلپسې يې خوندي لرودې وی. دا د

$$\|e_j - e_k\|^2 = \|e_j\|^2 + \|e_k\|^2 = 2, \quad j \neq k$$

له امله ناشونې ده.

دريم: د L انځورونه: د جوړښت وروسته $e_1, e_2, \ldots$ يو اورتونورمال بنسټ دی د

$$H = \mathrm{Bild}\, L \oplus \ker L\,.$$

لپاره.

دا وديزېنه تړلې د کرښيزوالي څخه لاس ته راځي، چيرته چې آيگنوکتورونه، کوم چې د $\ker L$ لپاره بنسټ جوړوي، طبعاً ترې تيريدلی شو يا صرف نظر ترې کولای شو.

شتورم-ليوويل-پرابلم Sturm-Liouville-Problem

د ژئ ارزښت پرابلم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Lu = -(pu')' + qu \qquad = f \quad \text{auf} \quad (0,1),$$

$$u(0) = u(1) \qquad = 0,$$

د ناپرېکیدونکي، کره همغږیزو توابعو p, qسره یو ځانګړی شتور-لیوویل پرابلم دی. د کومپاکت-هرمیتیکي اوپراتورونو لپاره د سپکترال انځورنې سره کیدی شي یو اورتوکورمال بنسټ $e_1, e_2, \dots$ شتون د $L^2(0,1)$ لپاره د L آیګن توابعو څخه وښوول شي، د ایګن ارزښتونو

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

او $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty$ سره . د دې بنسټ په مرسته کیدی شي په

$$u = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \langle f, e_j \rangle e_j$$

بڼه انځور شي.

داوینا کیدی شي نوره هم تیزه شي. دا مګر له دې برسیره نور فکر کونې ته اړتیا لري.

د آیګن توابعو څخه د اورتونورمال بنسټ شتون د دې برعکس تړلی د ټولیزې تیوریڅخه، لکه چې په لاندې کې روښانه کیږي.

لومړی: د $f = 0$ لپاره د ژئ پرابلم فقط ساده حل لري. ځکه چې د u سره ضرب ټوټه انتیګرال

$$\int_0^1 \underbrace{p}_{\geq 0}(u')^2 + \underbrace{q}_{\geq 0} u^2 = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي، يعني $u = 0$. د عادي دفرنشل مساواتو څخه اوس لاس ته راځي، چې د ژئ
پرابلم د خوښې $f \in L^2(0,1)$ لپاره يو يوائڼی حل $u \in C^1[0,1]$ لري.

دويم: دا حل u د f کرښيز په واک دی يا کرښيز تابع دی، نو هر L ته يو معکوس اوپراتور A شتون لري:

$$f \to u = Af \, .$$

دريم: د ټوټه انتيکريشن پهمرسته سړی ښايي، چې A د ځان سره – يا خپل ادجونګيري ده. د $u = Af$ ، $v = Ag$ سره دی

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^1 -u(pv')' + quv = \int_0^1 -(pu')'v' + quv = \langle f, Ag \rangle \, .$$

څلورم: د $u = Af$ سره د ضرب له مخې د دفرنشل مساوات د u سره لاس ته راځي او انتيګريشن

$$\int_0^1 p(u')^2 + qu^2 = \int fu$$

او له دې سره

$$c \, \|u\|_{1,2}^2 \leq \|f\|_0 \, \|u\|,$$

د کوم سره چې $c > 0$ د p او q لپاره يوه پورته بند يا بنديز دی، او $\|\cdot\|_{1,2}$ په سوبوليو-فضا $H^1(0,1)$ نورم ښايي. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$ ، نو A په

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری (واحد کره) جوړوي، چې د یوه محدوده ډېرئ یا سټ په $H^1(0,1)$ کې. دا چې $\|u\| \leq \|u\|_{1,2}$، نو A په $L^2(0,1)$ کې یوونغونډاری جوړوي، چې دا د محدودې ډېرئ په $H^1(0,1)$ کې پروت دی، یعني د سوبلیو خوندیونې جملې په بنسټ کومپاکت دی.

پنځم: د کومپاکت هرمیتیکي اوپراتورونو شپکتاکولار انځوروني څخه له آیګن توابعو څخه د یوه اورتونورمال بنسټ شتون لاس ته راځي، چیرته چې د آیګنارزښت مطلق ارزښت λ_j یوه صفرپرلپسې جوړوي. په ورته توګه د معکوس اوپراتور A لپاره وینا سرې لاس ته راوړی شي.

ګړندی لوېدونکی ازماېښت تابع Schnell abfallende Testfunktion

د ګړندي لوېدونکو ازماېښتتوابعو S فضا کومپلکس ارزښتیز توابع $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ لري د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره د ټولو α, β لپاره.

نیمنورم $|\ |_{\alpha,\beta}$ په S باندې یو متریک تعریفوي. د یوه په خوښه کره ټاکلې پرلپسې (α_k, β_k) لپاره مولتی ایندکس جوړه Multiindexpaare سرې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\varrho_k(f) = \frac{|f|_{\alpha_k,\beta_k}}{1 + |f|_{\alpha_k,\beta_k}}$$

ږدي او

$$d(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \varrho_k(f-g)$$

د کانوني واټنتابع په حيث تعريفوي.

فضا $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ د شوارڅ د ازماېښت تابع د S يو نيڼکه يا غليظه لاندې فضا ده. په اناليز کې په S باندې د ناپرېکيدونکو توابعو کيدی شي سرې کړی شي په همغه ازماېښت توابعو د کومپاکت وړونکي سره ځان محدود کړي.

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د ګړندي لوېدونکو توابعو لپاره تيوپيکي بيلګې توابع دي د يوه اکسپوننشل د راکميدو حالت يا ځانتيوني Abklingverhalten, سره، لکه د بيګي په توګه

$$f(x) = p(x)\exp(-|x|^2)\,,$$

چيرته چې p يو په خوښه پولينوم دی.

تابع

$$g(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1\,, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

په $\mathcal{D}$ کې د تابع لپاره يوه بېلګه ده. په همدې توګه gh د $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ سره په $\mathcal{D}$ پورې اړه لري او له دې سره په S پورې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع $f(x) = \exp(-|x|)$ په حقیقت کې کړندئ لویږي، مګر په اصل یا سرچینه کې ناپرېکېدونکې مشتقوړ نه دی او له دې سره په S پورې اړه نه لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

تیمپیریري دیسریبوشنونه Temperierte Distributionen

تیمپریري دیستریبوشن و فضا S ته د ګړندیو لوېدونکو ازماېښت توابعو دوال-یا دوه ګوني فضا S'جوړوي. یعنې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ یو کرښیز تابع دی، کوم چې هر تابع f د

$$|f|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty$$

سره یو کومپلکس ګڼ یا عدد Λf ترتیبوي یا تنظیموي او اټکل

$$|\Lambda f| \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq n} |f|_{\alpha,\beta}$$

د پوره یا کافي لوی $n(\Lambda)$ لپاره پوره کوي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په لاندې کې د تیمپریري دیستریبیوشنونو دوه تیپیکي بېلګې تشریح شوي دي.

(i)

کمزوري جګېدونکي توابع:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه $k \in \mathbb{N}$ لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \frac{dx}{(1+|x|^2)^{k/2}} < \infty$$

نو

$$\Lambda_\varphi f = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi f\,, \quad f \in \mathcal{S}\,,$$

یو تیمپریري دیستریبیوشن تعریفوي. د

$$(1+|x|^2)^{k/2} \leq c \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha|\,,$$

له امله کېدی شي $|\Lambda_\varphi f|$ د

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)|}{(1+|x|^2)^{k/2}} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha f| \right) \leq \tilde{c} \sum_{|\alpha|\leq k} |f|_{\alpha,0}$$

له لارې تخمین یا اټکل شي.

(ii)

د مشتقونو کرښیز کمبینیشن:

د مشتقونو هره موزن یا درونډ زیاتون یا جمعه

$$\Lambda f = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تيمپريري ديستريبيوشن تعريفوي. په جوته توګه باور لري

$$|\Lambda f| \le \left(\max_{\alpha} |c_\alpha|\right) \sum_{\alpha} |f|_{0,\alpha}\,.$$

په ازماېښت توابعو د کرښيزو توابعو لپاره بېلګي چې په $\mathcal{S}$ ناپرېکېدونکې(متمادي) نه دي، دي

$$\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(x^2) f(x)\, dx$$

او

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(k)}(k)\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د تيمپريري ديستريبيوشنونو مشتق

Ableitung von temperierten Distributionen

د يوه ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ توټه مشتق د

$$f \mapsto (\partial^\alpha \Lambda)\, f = (-1)^{|\alpha|} \Lambda\,(\partial^\alpha f)\ , \quad f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعريف شوی ديستريبيوشن دی. دا تعريف د کمزورو مشتقونو کونځپت(کنسپټ) توليز کوي او د

$$\Lambda_\varphi f = \int_D \varphi(x) f(x)\, dx\,, \quad \varphi \in C_0^\infty(D)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ورسره بلد مشتق تعریف سره سرخوري یا یو غبریز کیږي.

$$\partial^\alpha \Lambda_\varphi = \Lambda_{\partial^\alpha \varphi} \, .$$

د تعریف سره سم تمپیریري دیستریبیشن ناپای زیات مشتقوړ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

دیراک- او هیویزایډ – فنکشنال Dirac- und Heavyside-Funktional

د هیویزایډ-فنکشنال H یو دیستریبیوشن دی، هغه چې د تابع

$$h : x \mapsto \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

له لارې ایندوځیر کیږي، دا په دې معنا، چې

$$Hf = \int_0^\infty f \, .$$

.

د مشتق H' لپاره راکوي

$$f \mapsto H'f = -H(f') = -\int_0^\infty f' = -\left(\lim_{x\to\infty} f(x) - f(0)\right) = f(0) = \delta f \, ,$$

دکوم سره چې δ یو دیراک-تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تيمپيريي ديستريبيوشنونو ضرب(څل)

Multiplikation von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ سره د يوه كمزوري چټكېدونكي تابع $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ضرب د

$$(\varphi\Lambda)\, f = \Lambda\, (\varphi f)\ \ , f \in \mathcal{S}\,,$$

له لارې تعريف شوى تيمپريرى ديستريبيوشن $(\varphi\Lambda)$ دى.

$$\sup_x \left| \left(1 + |x|^2\right)^{-s/2} \partial^{\alpha}\varphi \right| < \infty$$

د ټولو ضربيزو(ډېر) اندكشني(پېژندنښو) α او $s(\alpha) > 0$ لپاره. دا شرايط په ځانګړې توګه د ټول پولينومونو لپاره پره دى.

ليكونكي: هيوليک، هيورنر

د تيمپيريي ديستريبيوشنونو قات كونه يا راغبرګونه

Faltung von temperierten Distributionen

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره اويوه ګړندي لويدونكي ازماېښت تابع $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره

$$\left(\Lambda \star \varphi\right)\,(x) = \Lambda\varphi(x - \cdot)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د له لارې یوه قاتونه یا را غبرگونه تعریف ده.

تابع $\Lambda \star \varphi$ ناپای ډېر مشتقوړ دی او کمزوری جګېدونکی، کېدی شي د تيمپيريري ديستريبيوشن سره و پېزندل شي،

که $\Lambda = \Lambda_\psi$ له $\psi \in \mathcal{D}$ سره وي، نو

$$(\Lambda \star \varphi)\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\psi(y)\,dy\,,$$

قاتونه ده د ديستريبيوشن سره يعني د تابع لپاره ورسره بلد تعريف دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

اپروکسيمي کتمتوالی Approximierende Identität

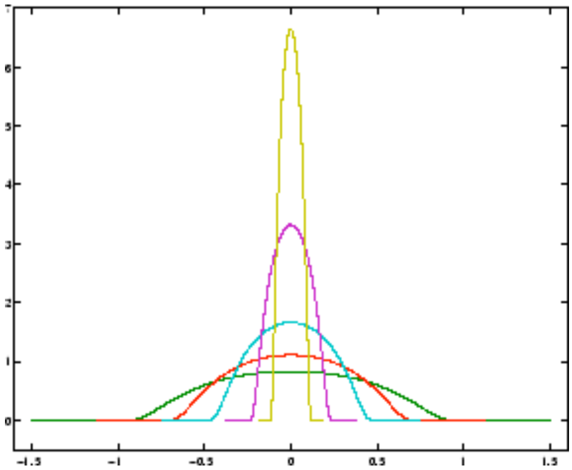
وي دې $\varphi \in \mathcal{D}$ يو د

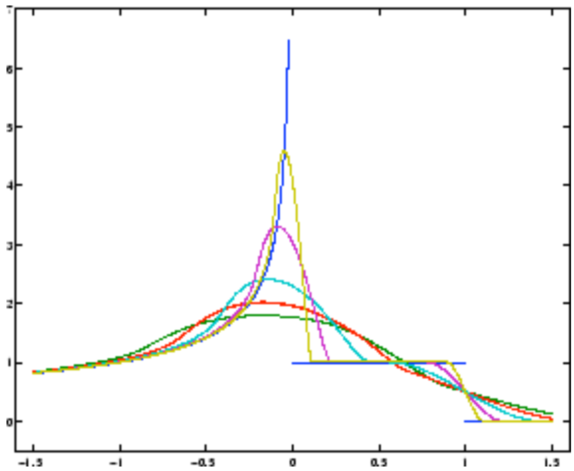
$$\varphi \geq 0\,, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$$

سره ازماېښتي تابع او $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ ، نو باور لري

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi_\varepsilon \star f = f\,, \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





کينه ځيرونه ياتابع د $\varepsilon = 1, .75, .5, .25, .125$ لپاره φ_ε او $\varphi = c\exp(1/(x^2-1))\,, x \in \mathbb{R}$ ښايي ، ښئ تابع يا ځيرونه اړونده قاتوني ښايي.

لکه په تابع کي چي ښوول شوی دی، کيدی شي قاتونه د توابعو د خويوني لپاره وکارول شي، څکه چي

$$\varphi_\varepsilon \star f \in L^p \cap C^\infty\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې اپروکسيمسشن-پروسې په مرسته بسيا کوي، چې د بيلګي په توګه دا کټمټوالی د ناپرکيدونکو کربنيز اوپراتورونو لپاره فقط د خويو توابعو لپاره وښايو.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د ګړندي لويدونکو توابعو د فوريې- ترانسفورميشن

Fourier-Transformation schnell abfallender Testfunktionen

د فوريې ترانسفورميشن

$$f \to \hat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dx$$

اد فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن

$$g \to \check{g}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y) \exp(\mathrm{i}xy)\, dy$$

ناپرېکيدونکي کربنيز اوپراتورونه دي د ګړندي لويدونکو ازماېښت توابعو په فضا S باندې

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

تر يوه نورمي شوي ضريب د فوريې – ترانسفورميشن او د فوريې په څټ يا معکوس ترانسفورميشن پورې په $L^2(\mathbb{R}^n)$ باندې ايزومتريګانې دي، کوم چې يو بل ته معکوس يا په څټ دی. دا چې $S \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ دی، نو بايد چې د S په توپولوژي کې ناپرېکيدنه وښايو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فوريي – ترانسفورميشن قوانينو سره سم باور لري

$$\left|(\mathrm{i}y)^\alpha \partial^\beta \hat{f}(y)\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right) \exp(-\mathrm{i}xy)\, dy\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n} \left|\left(1+|x|^2\right)^n \partial^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right|\, dx\,.$$

دا چې $\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-n}\, dx < \infty$ دی، نو کيدی شي ښئ خوا د $\mathcal{S}$ د نيم نظم له لارې اټکل شي.

د په څټ يا معکوس فوريي – ترانسفورميشن لپاره په ورته توګه مخ ته ځو.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن د فوريي –ترانسفورميشن

Fourier-Transformation einer temperierten Distribution

د يوه تيمپيريري ديستريبيوشن $\Lambda \in \mathcal{S}'$ د فوريي –ترانسفورميشن د

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi}\,, \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

له لارې تعريف دی او په $\mathcal{S}$ باندې يو ناپرېکيدونکی کرښيز اوپراتور تعريف دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ديستريبيوشن $\hat{\Lambda}$ کېدی شي په دېرو حالتونو کې د

$$\hat{\Lambda}(y) = \Lambda_x e^{-\mathrm{i}xy}$$

له لارې وشمېرل شي. د ټوليزو تيمپريري ديتريبيوشنونو Λ لپاره داکتمتوالی بايد د يوه اپروکسيميشن-پورسي په مرسته و ښوول شي، ځکه چې $e^{-\mathrm{i}xy}$ يو نه اجازه لرونکي ازماېښت تابع دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د $\Lambda = \Lambda_\psi$ لپاره د $\psi \in \mathcal{S}$ سره دی

$$\Lambda\hat{\varphi} = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dx\,\psi(y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\exp(-\mathrm{i}xy)\,dy\,\varphi(x)\,dx\,.$$

دويمه ليکه د $\Lambda_{\hat{\psi}}\varphi$ سره برابره ده، دا په دې معنا، چې $\hat{\Lambda}$ د $\hat{\psi}$ له لارې اينډوخير شوی ديستريبيوشن دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د تمپوريري ديستريبيوشنونو د فوريې – ترانسفورميشن لپاره قواعد يا لارې

د توابعو د فوريې – ترانسفورميشن ته ورته لاندې کتمتوالی د ګړنديو لوېدونکو ازماېښت توابعو و $\varphi \in \mathcal{S}$ لپاره باور لري ا و د تيپريري ديستريبيوشنونو $\Lambda \in \mathcal{S}'$ لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- مشتقونه او ضربونه:

د يوه پولينوم $p(y)=\sum a_\alpha y^\alpha$ لپاره باور لري

$$p\widehat{(-\mathrm{i}\partial)}\Lambda = p\hat{\Lambda}\,.$$

لهدې سره دی $p(-\mathrm{i}\partial)=\sum a_\alpha(-\mathrm{i})^{|\alpha|}\partial^\alpha$. په ځانګړې توکه $-\mathrm{i}\partial_\nu$ توپه مشتقونه د y_ν سره ضرب په ګوته کوي(دلته دی $p(y)=y_\nu$).

په ورته توګه باور لري

$$\widehat{p\Lambda}=p(\mathrm{i}\partial)\hat{\Lambda}\,.$$

- Faltung: قاتونه:

$$\widehat{\Lambda\star\varphi}=\hat{\varphi}\hat{\Lambda}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د ماتو نظمونو د سوبوليف-فضاګانې

Sobolev-Räume gebrochener Ordnung

د سوبوليف-فضا $H^s(\mathbb{R}^n)\ ,\ s\in\mathbb{R}$ د ټولو تيمپيرى ديستريبيوشنونو Λ څخه جوړه ده د

$$w^s\hat{\Lambda}\in L^2(\mathbb{R}^n)\ ,\quad w(y)=\left(1+|y|^2\right)^{1/2}\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره .

دا خویونه یا کرکتاریزه کونه د $H^k(\mathbb{R}^n)\ ,\ k \in \mathbb{N}_0$ تولګیز تعریف تولیز کوي، د تولو توابعو فضا په حیث د مربع انتیګرالوړ توته مشتقونو سره بالاخره تر نظم k پورې.

د کمیز یا منفي اکسپوننت یا جګګن سره فضاوې د زیاتیز یا مقبت اکسپوننت سره فضاوو دوه ګوني فضاوې دي.

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)'\ ,\quad s \geq 0\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیوررنر

د ښووني لپاره د $n=1$ حالت تر څېړني لاندې نیسو. تولیز حالت کېدی شي په ورته توګه تر څیړني لاندې ونیول شي او تنها تخنیکي پیچلی دی

(i)

د $k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د تعریف سره همغږیزوالی د پلانشرل-کتمتوالي Plancherel-Identitätڅخه لاس ته را ځي

$$f, f', \ldots, f^{(k)} \in L^2 \Leftrightarrow \hat{f}, |y|\hat{f}, \ldots, |y|^k\hat{f} \in L^2\,.$$

دا چې

$$|y|^j \leq \left(1+|y|^2\right)^{k/2} \leq c\left(1+|y|^k\right)\ ,\quad y \in \mathbb{R}$$

د $j \leq k$ لپاره دی، ورته والی کرکتي کوني $\left(1+|y|^2\right)^{k/2}\hat{f} \in L^2$ ته بیایي

(ii)

د دوال فضا کرکتري کونه کیدی شي د د یوه ابسترکت د لیل سره وښوول شي. که د فوريې ترانسفورمیشن د F سره په نخښه شي w^s او د ضرب د W سره ، نو سړی لاندې دیاګرام لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L^2 \xleftarrow{W} \hat{H}^s \xleftarrow{F} H^s \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{C}\,.$$

یو فنکشنال $\Lambda \in (H^s)'$ یو فنکشنال

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda F^{-1} W^{-1} : L^2 \to \mathbb{C}\,.$$

ایندوخیرت کوي.

دا چې $(L^2)' = L^2$ دی سړی کړی شي $\tilde{\Lambda}$ د یوه تابع $g \in L^2$ سره وښوول شي یا په نخښه شي

$$\tilde{\Lambda} f = \int_{\mathbb{R}} f\bar{g}\,.$$

نو د $(FF\varphi)(x) = 2\pi\varphi(-x)$ له امله لاندې باور لري

$$\hat{\Lambda}\varphi = \Lambda\hat{\varphi} = \tilde{\Lambda}WFF\varphi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi}\varphi(-x)w^s(x)\overline{g(x)}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi}w^s(-x)\overline{g(-x)}\right)}_{\hat{\Lambda}(x)}\,dx$$

له دې سره غوښتونی کرکتاری کونه $\hat{\Lambda}w^{-s} \in L^2$ لاس ته راځي، ځکه چې کومپلکس کونجوګیشن او هندارونه په انتیابیلیتي باندې کومه اغیزه نه ري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترانسليشنن اينواريانت اوپراتورونه Translationsinvariante Operatoren

هر محدود کربنيز اوپراتور $L : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ، هغه چې له ترانسليشن سره کومتير دی ،

$$Lf(\cdot - h) = (Lf)(\cdot - h),$$

کيدی شي د يوه تيمپريري ديستريبيوشن Λ سره د محدود فوريي – ترانسليشن سره انځور شي، دا په دې معنا، چې

$$L\varphi = \Lambda \star \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

او

$$\|L\| = \text{ess sup}_{y \in \mathbb{R}^n} |\hat{L}(y)|.$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د جملې يو اړخ د پلانشيرل قضيې حخه لاس ته راځي:

$$\|\Lambda \star \varphi\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|\hat{\Lambda}\hat{\varphi}\|_2 \leq (2\pi)^{n/2} \|L\| \|\hat{\varphi}\|_2 = \|L\| \|\varphi\|_2,$$

د کوم سره چې اټکلونه خورا ښه شونې(ممکنه) ده.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د دفرنشل-اوپراتورونو لپاره بنسټيزه اوبيونه(حل)

د هر دفرنشل اوپراتور

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره د ثابت یا تل همغه ضریب c_α سره یو تیمپریري بنسټیز حل شتون لري، دا په دې معنا، چې یو تیمپریري دیستریبیوشن Λ د لاندې سره شتون لري

$$L\Lambda = \delta \, .$$

د دفرنسیشن او قاتولو قانو سره سم ، د ټوټه دنرنشیشن مساوات یا –برابرون

$$Lu = f \, , \quad f \in \mathcal{D} \, ,$$

یو حل به لاندې بڼه

$$u = \Lambda \star f$$

انځور شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اونیوارینت دفرنشل اوپراتر

$$L = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + 1$$

لپاره تیمبیریري بنسټیز حل $\Lambda = e^{-|x|}/2$ دی، د دې لپاره چې دا وښوول شي، سړی د لاندې برابرونیا مساوات فوریې – ترانسفورمي جوړوي

$$L\Lambda = -\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \Lambda + \Lambda = \delta$$

او لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-(iy)^2\hat{\Lambda} + \hat{\Lambda} = 1\,.$$

د $\hat{\Lambda}$ پسې حلونې پله مخې راکوي

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{1+y^2}\,,$$

کوم چې د $e^{-|x|}/2$ فوريې – ترانسفورمي په ګوته کوي.

نو د دفرنشل مساوات

$$-u'' + u = \sin x$$

يو حل دی

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\sin(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{y}\sin(x-y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x+y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-y}\sin(x-y)\,dy \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \sin x \int_0^\infty e^{-y} \cos y \, dy = \frac{\sin x}{2} \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د لاپلاس - اوپراتور بنسټیزه اوبیونه(حل)

Fundamentallösung des Laplace-Operators

د لاپلاس - اوپراتور

$$\Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_n^2$$

په $\mathbb{R}^n$ کې لاندې بنسټیز حل لري

$$\frac{1}{(2-n)c_n} \, |x|^{2-n} \, , \quad n \geq 3 \, ,$$

د c_n سره د یوونسفر(واحد سفر) د $(n-1)$ - بعدیز ډکې یا حجم.

د $n=2$ لپاره

$$\frac{1}{2\pi} \, \ln |x|$$

یو بنسټیز حل دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د ښوونې لپاره سرې د $\Delta\varphi = \Delta|x|^{2-n}$ له لارې منځ ته راغلی فنکشنال Λ اغیزه په یوه ازماېښت تابع $f \in C_0^\infty$ باندې تر څېړنې لاندې نیسو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Lambda f = \int\limits_{R^n} \varphi \Delta f \,.$$

که د انتیګریشن ورشو د غونډاري پوښ $K_{\varepsilon,R}$ له لارې اپروکسیمي کړو د د دننئ وړانګې ε او دباندنئ وړانګې R سره، نو د ګرین Greenد دویم انتیګرال فورم یا بڼې له مخې باور لري

$$\int\limits_{K_{\varepsilon,R}} \varphi \Delta f = \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} \varphi \partial_\perp f - \int\limits_{\partial K_{\varepsilon,R}} f \partial_\perp \varphi + \int\limits_{K_{\varepsilon,R}} f \Delta \varphi \,,$$

د $\partial_\perp$ د نورمال مشتق سره. له دې سره پهښی اړخخ دریم انتیګرال ورکیږي، ځکه چې $\Delta\varphi = 0$ د $x \neq 0$ لپاره دی. لومړیو دواړو انتیګراله ونو ته فقط دننئ ژی تر څېړنې لاندې نیسو، ځکه چې f محدود وړونکی لري او د پوره لوی R لپاره د خپلو ټولو مشتقونو سره ورکیږي.

که سرې پولار یا قطبي کواوردینات $x = rx^\circ \,,\, r \in [0, \infty) \,,\, x^\circ \in S_n$ وکاروي، د کومو سره چې S_n $(n-1)$ -بعدیز یوونسفر په ګوته کوي، نو دی

$$\int\limits_{K_\varepsilon} \varphi \Delta f dx \; = \qquad -\int\limits_{S_n} \varepsilon^{2-n} (\text{grad}\, f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$+\int\limits_{S_n} f(\varepsilon x^\circ)(2-n)\varepsilon^{1-n} x^\circ \cdot x^\circ \varepsilon^{n-1} dS_n$$

$$= \qquad -\varepsilon \int\limits_{S_n} (\text{grad}\, f)(\varepsilon x^\circ) \cdot x^\circ dS_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$+(2-n)\int_{S_n} f(\varepsilon x^{\circ})dS_n\,.$$

دا لومړی انتیګرال د ε سره د صفر په لور هڅیږي، ځکه چي $\operatorname{grad} f$ محدود دی، اودویم انتیګرال د $n \neq 2$ لپاره ارزښت $(2-n)\operatorname{vol}(S_n)f(0)$ راکوي. له دې سره دی

$$\frac{1}{(2-n)c_n}\Lambda f = f(0) = \delta f\,.$$

د $n = 2$ لپاره کیدی شیپه ورته توګه مخ ته لاړ شو، له دې سره دی

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\ln r) &= \frac{x^{\circ}}{r}\,, \quad r \neq 0\,,\\
\Delta(\ln r) &= 0\,, \quad r \neq 0\,,\\
\lim_{\varepsilon\to 0} \quad \varepsilon\ln\varepsilon &= 0\,.
\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

،،له هر څه ستونځمن یو څه ته نیت اوملا راتړل دي(ژباړی)،،.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمکګچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرئ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور بريښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library