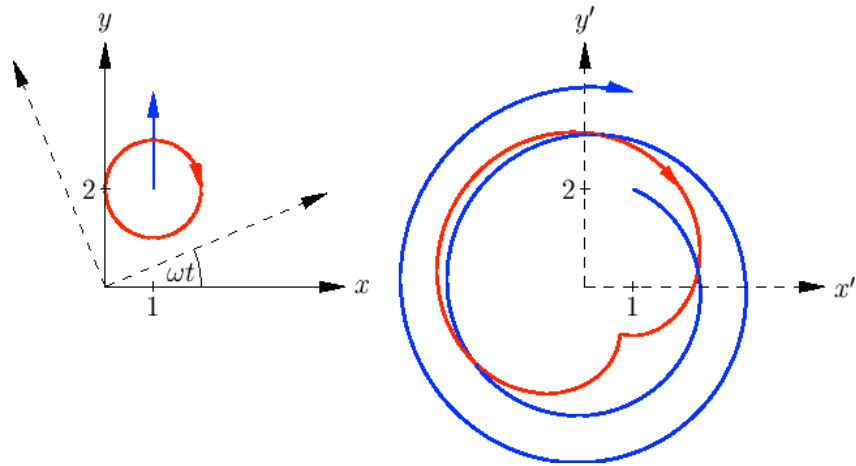


وکتور شمیرنه



Ketabton.com

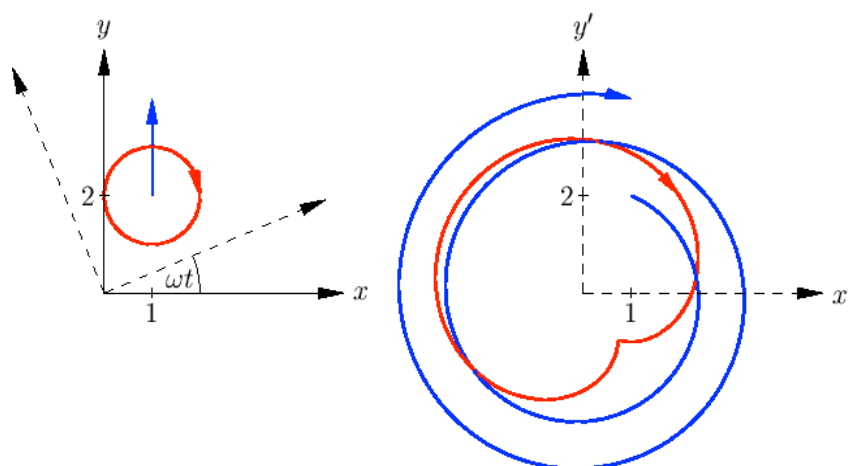
داکتر ماخان شینواری

۱	وکتور شمیرنه
۱	په هواره (سطح) او هوا (فضا) کې
۲	پیکسل – یا د چوځونې کوادینات
۲	د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کوادینات
۴	په کارتيزي کوادینات کې ټکي
۴	د اوږدوالي – او سور درجي
۶	توته – یا استوانه کوادیناتونه
۷	سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ...
۸	ورل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال)
۹	څرخون Rotation
۱۱	څرخنده یا څرخیدونې نسبي سیستم :
۱۳	وکتورونه په فضا کې
۱۴	د وکتورونو جمعه (زیاتون)
۱۶	سکالار ضرب
۱۷	د اړخنیمو غوڅټکي
۱۸	(مطلق) ارزښت
۱۸	درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات
۱۹	د شمیرني قوانین
۱۹	له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...
۲۱	کونج یا زاویه

۲۲	د کوساین جمله
۲۶	اورتوگونال یا یو په بل ولاړ (عمودي) بنسټونه
۳۰	وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب
۳۴	د لورنڅ زور Lorentzkraft
۳۷	د ایپسیلون – تنزور
۳۸	شپات ضرب
۳۹	د یوه څلور سطحیز د ډکي (حجم) شمیرنه
۴۱	د غیر گسطحیز یا نوذنقي خویونه
۴۲	د کواور دیناتونو یا پروت ولاړ
۴۳	ټکي – لور – بڼه
۴۵	دوه – ټکي – بڼه
۴۶	لحضوي – یا سترگورپ بڼه
۴۸	د ټکي – کرني واین
۵۱	د دوه کرني واین
۵۳	د الوتنی لاری
۵۵	د یوې سطحې پارامتریکی انځورونه
۵۷	د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه
۵۸	د یوې سطحې د هیسی -نورمال بڼه
۶۰	د سطحو انځورونو ترمنځ ...
۶۲	د ټکي – سطحې واین

- ۶۵ د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع
- ۶۸ هگی (بیضوي) Ellipse
- ۷۱ د سوزونتيکي وړانگه (شعاع نقطه محراق)
- ۷۲ پارابول Parabe
- ۷۳ د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV
- ۷۴ های پاربول Hyperbel
- ۷۷ ناويگيشن Navigation
- ۷۹ د ډاکتر ماخان شينواري چاپ وي کتابونه
د ليکونکی ژوند ته لنډه کتنه

وکتور شمیرنه



د شمیرپوهنې نړیوال جال څخه په مننه

ژباړی: ډاکتر ماخان شینواری

۱	وکتور شمیرنه
۱	په هواره (سطح) او هوا (فضا) کې
۲	پیکسل – یا د چوځونې کوادینات
۲	د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کوادینات
۴	په کارتيزي کوادینات کې ټکي
۴	د اوږدوالي – او سور درجي
۶	توته – یا استوانه کوادیناتونه
۷	سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ...
۸	ورل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال)
۹	څرخون Rotation
۱۱	څرخنده یا څرخیدونې نسبي سیستم :
۱۳	وکتورونه په فضا کې
۱۴	د وکتورونو جمعه (زیاتون)
۱۶	سکالار ضرب
۱۷	د اړخنیمو غوڅټکي
۱۸	(مطلق) ارزښت
۱۸	درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات
۱۹	د شمیرني قوانین
۱۹	له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ...
۲۱	کونج یا زاویه

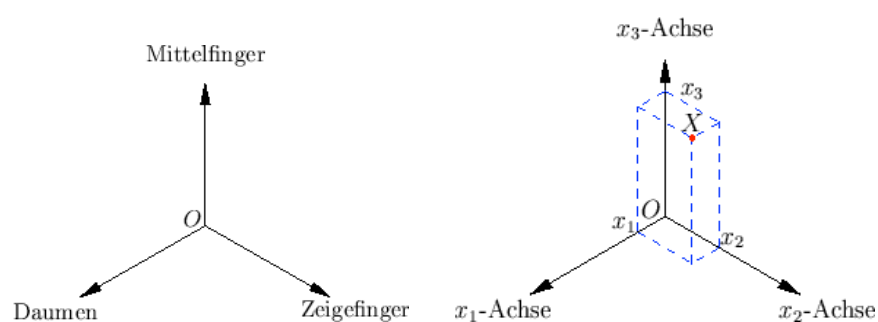
۲۲	د کوساین جمله
۲۶	اورتوگونال یا یو په بل ولاړ (عمودي) بنسټونه
۳۰	وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب
۳۴	د لورنڅ زور Lorentzkraft
۳۷	د ایپسیلون – تنزور
۳۸	شپات ضرب
۳۹	د یوه څلور سطحیز د ټکي (حجم) شمیرنه
۴۱	د غیر گسطحیز یا نوذنقي خویونه
۴۲	د کواور دیناتونو یا پروت ولاړ
۴۳	ټکي – لور – بڼه
۴۵	دوه – ټکي – بڼه
۴۶	لحضوي – یا سترگورپ بڼه
۴۸	د ټکي – کرني واین
۵۱	د دوه کرني واین
۵۳	د الوتنی لاری
۵۵	د یوې سطحې پارامتریکی انځورونه
۵۷	د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه
۵۸	د یوې سطحې د هیسی -نورمال بڼه
۶۰	د سطحو انځورونو ترمنځ ...
۶۲	د ټکي – سطحې واین

۶۵	د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع
۶۸	هگی (بیضوي) Ellipse
۷۱	د سوزونټکي وړانگه (شعاع نقطه محراق)
۷۲	پارابول Parabe
۷۳	د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV
۷۴	های پاربول Hyperbel
۷۷	ناویگیشن Navigation
۷۹	د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

وکتور شمیرنه

په هواره (سطح) او هوا (فضا) کې کارتیزي - یا پروت ولاړسیستم

یو فضایی کواوردیناتسیستم له درې په سرچینییز ټکي O کې یو په بل ولاړو
ګڼونکرنسو (محورونو) څخه جوړ دی، چې لوریزوالی یې د څیرې له مخې، د بني
لاس قاعدې، سره سم ټاکل شوی دی.



یو ټکی X د کواوردیناتو x_i سره په نڅښه شوی په محورونو د پرېوستون ارزښت
سره سم کره کیدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ایندکس یا پیژندنڅښه ونه کارول
شي، نو

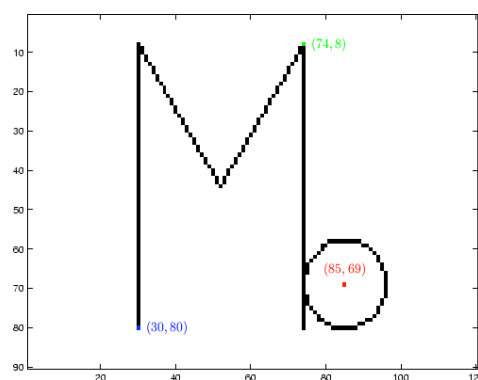
کواردینات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او گڼونمخور د x ، y ، او z - محور په

نڅښه کيږي.

په ورته توگه د هواري کارتيږي کواردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

پیکسل – یا د چوځوني کواردینات Pixelkoordinaten

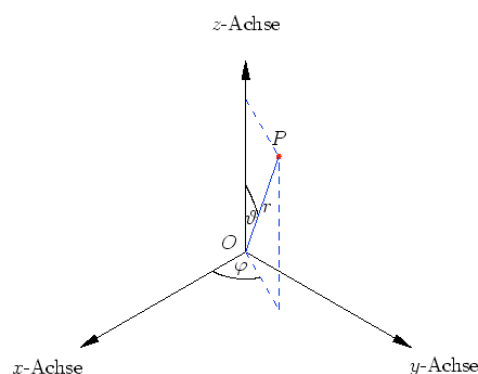
په یوه گرافیکي کرکي کې شیان د پیکسل- چوځونو کواردینات (Pixel خورا کوچني څیره شوي ټکي) له لاري ورکول کيږي.. دا انځور شوی ولاړگودیز یوه کرکي ده د 90×120 چوځونو سره او د رنگه چوځونو کواردینات پروت دی د څيري گود په گوته کوي .



د غونډاري (غونډوسکي) یا کرې کواردینات

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د سرچینې سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پرېوستون \overline{OP} په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د \overline{OP} او z - محور ترمنځ له لاري انځوربدلی شي. کونج φ ټیک تر 2π

زياتخلى پوري تاكلكيدى شي. د ستاندارد په خير په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پرېكړه كيدى شي يا منل كېدى شي. (په لاندې او نورو ځايونو كې: محور = Achse)



باور لري:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad z = r \cos \vartheta$$

همداسي

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د كوم سره چې د x, y او z نيوني سره سم د ارکوستانجنت يوه مناسبه څانگه د ټاکلو وي.

د اصلي څانگې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

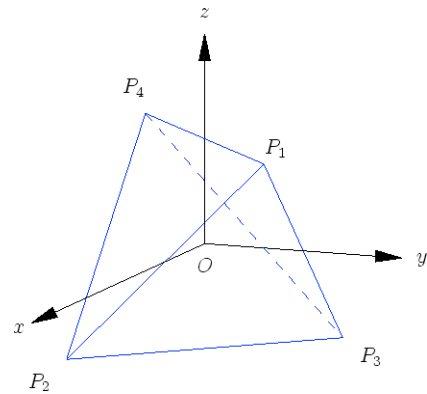
$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \text{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

ليکونکي: اپ، هولیک

په کارتيزي کواوردينات کې ټکي

$$P_1 = (1, 1, 1), \quad P_2 = (1, -1, -1), \quad P_3 = (-1, 1, -1), \quad P_4 = (-1, -1, 1)$$

د منظم ټيټرايډر کونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O کې د دروند ټکي سره



په غونډاري کواوردينات (r, ϑ, φ) کې گوډټکي يا کونج- لاندې کواوردينات لري

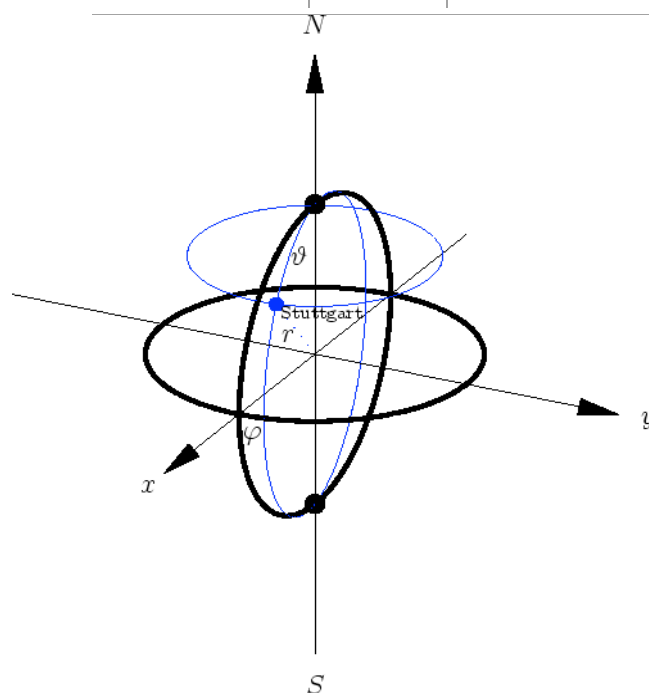
$$\begin{aligned}
 P'_1 &= (\sqrt{3}, \psi, \pi/4), & P'_2 &= (\sqrt{3}, \pi - \psi, -\pi/4), \\
 P'_3 &= (\sqrt{3}, \pi - \psi, 3\pi/4), & P'_4 &= (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4),
 \end{aligned}$$

چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan \sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجي (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمغونډاري (ځمغونډوسکي) يا ځمکي کره باندې د اوږدوالي – او سور درجي د کرې يا غونډاري کواوردينات دي، خو يواځې بل ډول کونجورشو گاڼي (کونجساحې) کارول کيږي:

ختيز اوږدوالی	$180^\circ - 0^\circ$	$\varphi = 0 \dots \pi$
لویديز اوږدوالی	$180^\circ - 0^\circ$	$\varphi = 0 \dots -\pi$
شمالي سور	$90^\circ - 0^\circ$	$\vartheta = \pi/2 \dots 0$
جنوبي سور	$90^\circ - 0^\circ$	$\vartheta = \pi/2 \dots \pi$



په څیره کې اېکواتور (سور 0°) او صفرې اوږدوالی غور کښل شوي دي، شمالي قطب (90° درجي شمالي سور) او جنوبي قطب (90° درجي جنوبي سور) هم په نڅبنه شوي دي. شنه اوږدې - او سورگردی د ستوتگارت (90° درجي ختيزې اوږدوالی، 49° درجي جنوبي سور) تېرېږي

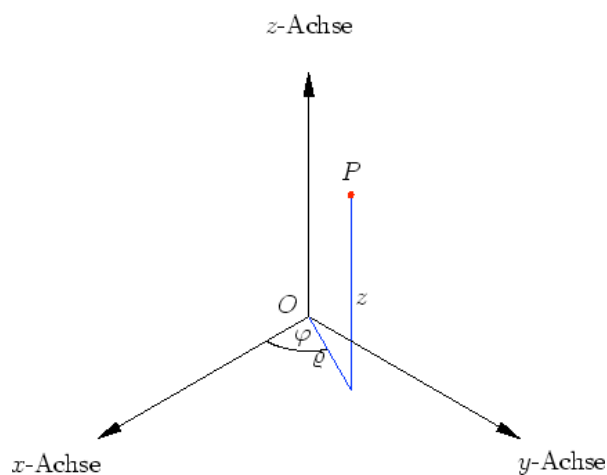
او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختيز نیم غونډاری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لویديز نیمغونډاری په نڅبنه کوي

$$\vartheta = \frac{41}{180}\pi \text{ او}$$

توته – يا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

بو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لاري، چي د x -مخور او د xy -هواره باندي د پریوستون (پروجکشن) \overline{OP} ترمنځ پروت دی، پریوستون د اوږدوالي او د z -کواوردینات له لاري وټاکل شي.

کونج φ ټیک ترد 2π پوري ټاکلی. د ستانداردورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پوري شوي.



باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسي

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z,$$

د کوم سره، چې د x او y د مخخښي پوري اړونده د ارکوسټانجنت يوه څانگه ټاکل کېږي.

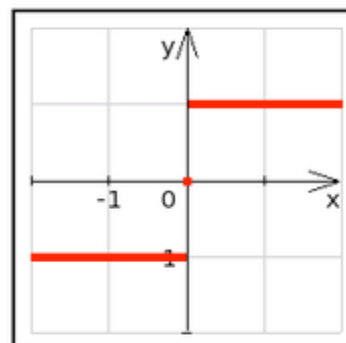
د اصليڅانگي-کونج لري: $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور

په لاندې کې Für د ... لپاره په مانا او sign سگنوم لوستل کېږي

د $x > 0$, لپاره	$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \text{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$
د $x = 0$, لپاره	
د $x < 0 \wedge y \geq 0$, لپاره	
د $x < 0 \wedge y < 0$, لپاره	

سيگنوم (لاتين : Signum نخښه) فنکشن په رييل گڼونکرښه :

د فنکشن د مخخښو گراف

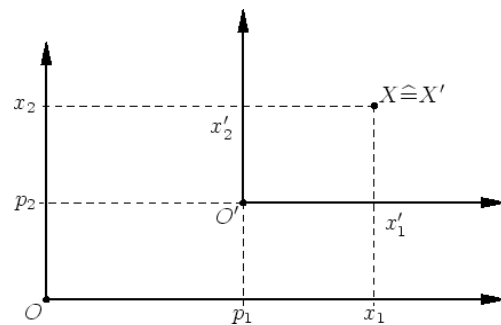


د رييل گڼونو څيره ونه ده په ډېرې $\{-1,0,1\}$ کې

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې O کښولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) .$$



خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

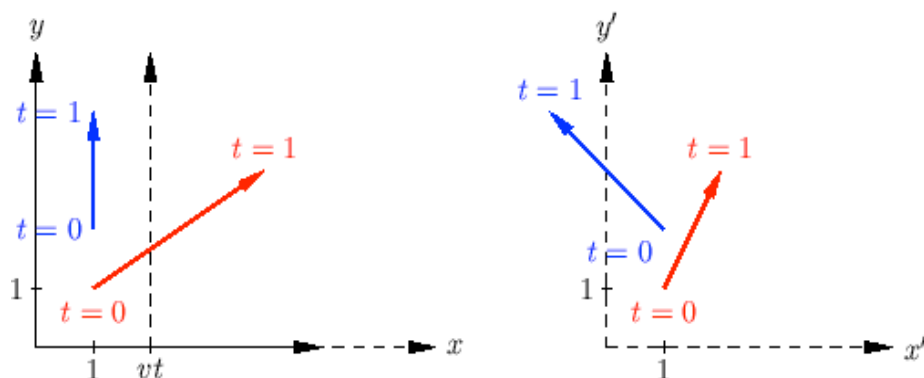
د پوه د x -محور په لور د v چټکتیا سره ځغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابر ډوله خوزښت

$$(x(t), y(t)) = (p + \alpha t, q + \beta t), \quad t \geq 0,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y.$$

کتونکی یوه بله چټکتیا رینتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري



د بیلګې په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چې د یوه وخت په یوون (واحد) کې د $v = 2$ لپاره له ټکي $P = (1, 1)$ و ټکي $Q = (4, 3)$ ته خوزي (سور غشی)

$$P' = (1, 1), \quad Q' = (4 - 2, 3 - 0) = (2, 3).$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4 - 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5};$$

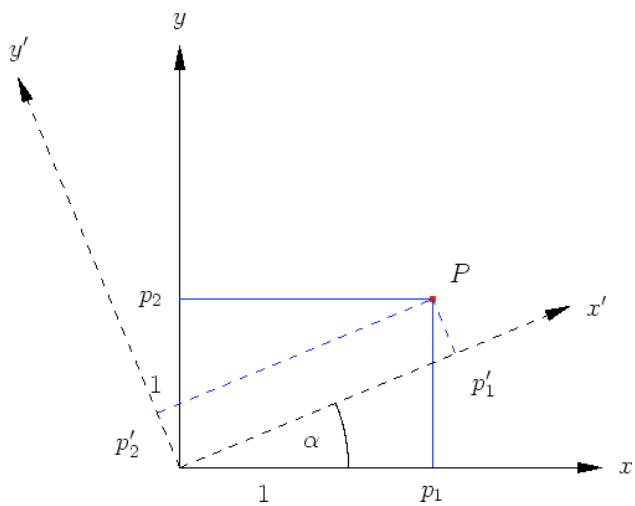
له دې خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی برېښي.

لیکونکي: ایپ، هولیک

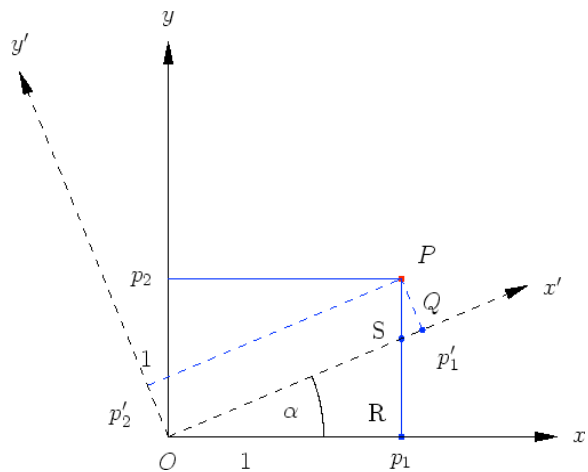
څرخون Rotation

د xy -هوارې یا سطحې څرخون په z -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$ کواوردینات د α کونج سره ترانفورمي کيږي د لاندې سره سم

$$p'_1 = \cos \alpha p_1 + \sin \alpha p_2, \quad p'_2 = -\sin \alpha p_1 + \cos \alpha p_2, \quad p'_3 = p_3.$$



په ورته توگه د yz - او zx - هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي لیکونکي: اېپ، هولیک



لومړی پیژنو، چې

$$\angle(S, P, Q) = \alpha,$$

دایه دې معنا چې ولاړکونجیز درېگودی (مثلث) $\triangle(R, O, S)$ او $\triangle(Q, P, S)$ ورته دي.

په لومړي درېځوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1 / \cos \alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1 \tan \alpha .$$

له دويم درېځوډي لاس ته راځي

$$\begin{aligned} p'_2 &= \cos \alpha |\overline{PS}| = \cos \alpha (p_2 - |\overline{RS}|) \\ &= \cos \alpha p_2 - \sin \alpha p_1 \end{aligned}$$

او

$$\begin{aligned} p'_1 &= |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1 / \cos \alpha + \sin \alpha (p_2 - |\overline{RS}|) \\ &= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} p_1 + \sin \alpha p_2 \end{aligned}$$

ليکونکی: اېپ، هولير

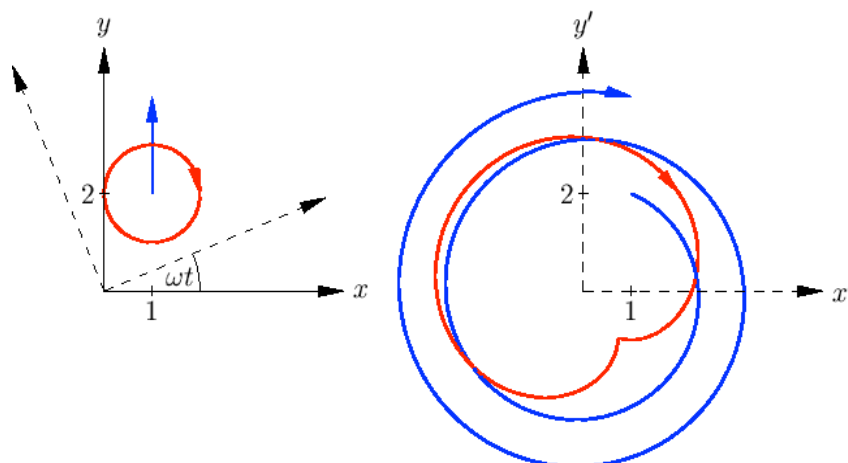
څرخنده يا څرخيدونى نسبي سيستم :

تابع کين د د سيده کرښيز او گردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحنې بنایي:

$$G : (x, y) = (1, 2 + t/(2\pi)),$$

$$K : (x, y) = (1 + \cos(t), 2 - \sin(t)).$$

بني لور ته دواړه منحنی یا کرې دیوهکونج سره څرخیدوني نسبي سیستم انځوروي، دا په دې معنا چې داسې لکه په یوه کاروسل (هغه څرخیدوني شیان دي، چې کسان په کې گرځي) کې یوه کتونکي ته برېښي.



د کواوریناتو ترانفومیشن یا بدلون د سیده کرښیز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t).$$

یوه شپیرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضریب د جگیدونکي t سره لویږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه وخت انتروال $0 \leq t \leq 4\pi$ په گوته کوي. د بدلي شوي کواورینات څخه د $\omega = 1$ سره د دایره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s),$$

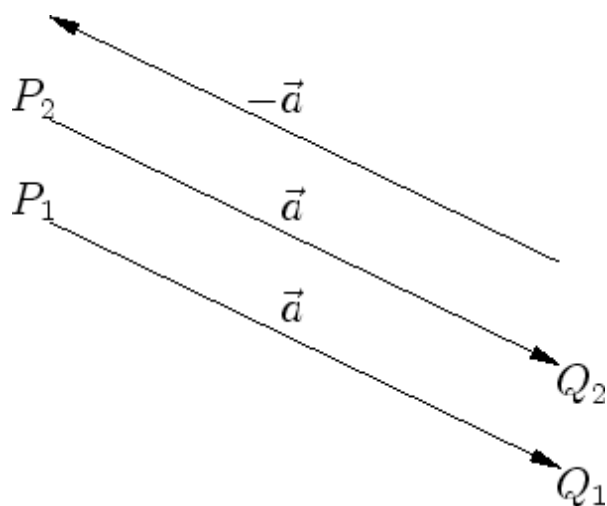
په څرخون سیستم کې د خوزبستمحني بڼه نه پسي ترلې پيژندل کيږي. لکه دا بېلگه چې په گوتنهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغیر شي. کېدی شي چې د کتلو خوزبست منحنی کې گود یا ماتوالی راپیداشي. په څرخي دونکي سیستم کې په یوه داسې زینګولار ټکي کې کتونکي چټکتیا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

یو وکتور یوه لوریزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نڅښه کوي. یا بڼایي. په بدیله توګه کېدی شي وکتور په فضا کې د P -راکښې په توګه افاده شي او له یوه غشي سره په نڅښه شي.



لکه د څیرې څخه چې کتل کيږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه (برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانګې انځورونه نسبت و سرچینې ته ځای وکتور بلل کيږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعریفوي:

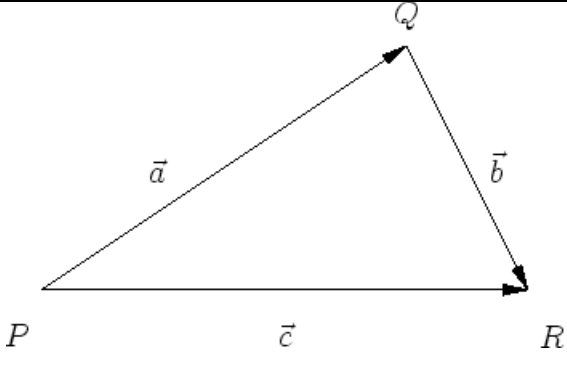
$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

د \vec{a} کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په څېر و شمیرل شي. بالاخره د

$$\vec{OO} = \vec{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نڅېنه کوو.

د وکتورونو جمع (زیاتون):

<p>د دوه وکتورونو جمع د وکتورونو یو وبل ته یا یو بل پسې راکښنه ده</p> $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}.$	
---	---

د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

د

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ يا په خُټ (برعكس) راكښنه $-\vec{a}$ په نڅښه كيږي. په ځانگړې توگه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

(ليكونكي: هوليك، موخ)

<p>د ټکو</p> <p>$P = (1, 1, 1), \quad Q = (4, 2, 7), \quad R = (1, 4, 3)$</p> <p>لپاره وکتورونه</p> <p>$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$</p> <p>او</p> <p>$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + (-\overrightarrow{QR})$</p> <p>شمير لکيږي</p>	
--	--

لکه په څيره کې چې کښل شوي د کواورد پښاتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-\bar{c}}}$$

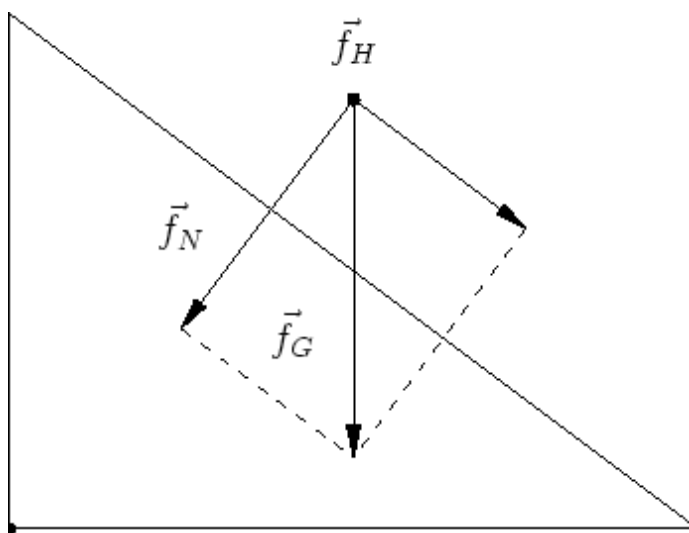
(لیکونکي: هولیک، موخ)

د یوې کبرې سطحې (هواری) لاندې داسې یوه سطحه پوهیږو، چې د پروتوالي لور ته میلان ولري.

لکه څنگه چې په څیره کې لیدل کیږي، کیدی شي د وزن زور \vec{f}_G په دوه یو بل سره ولاړو یا عمود بوخو یا کمپوننتونو ټوټه شي (د زور ټوټه کونه د دوه زور غبرگ اړخیزې (موازی الاضلاع) سره).

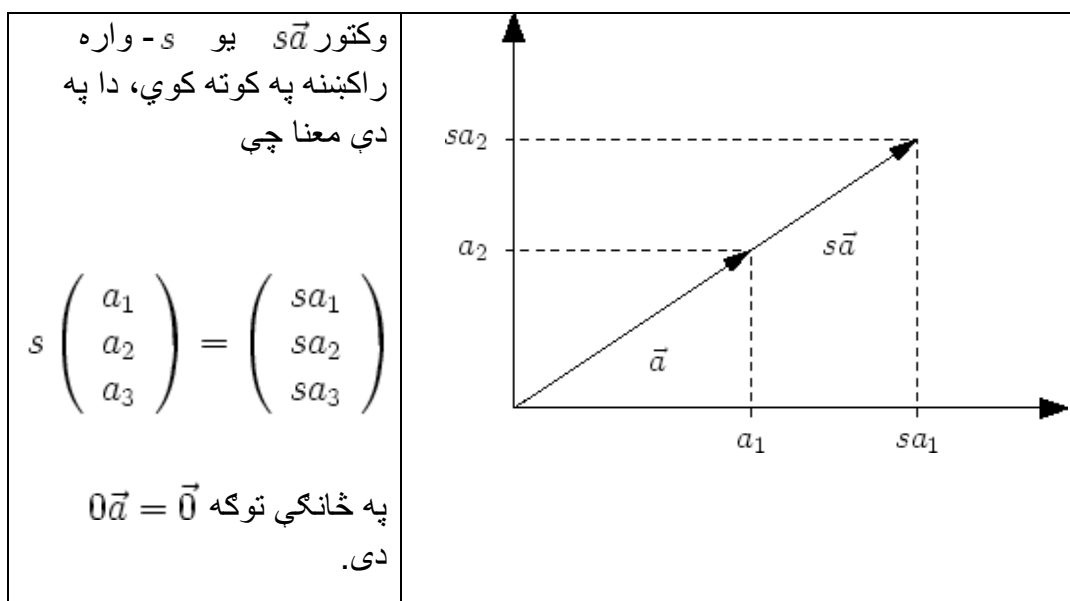
$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H.$$

مایلي سطحې سره عمود عمودي زور (ولاړ زور) اغیزه لري. او مایلي هواری سره غرگ کښته لور ته لوریزه بیره بیزه زورند زور \vec{f}_H اغیزه لري.



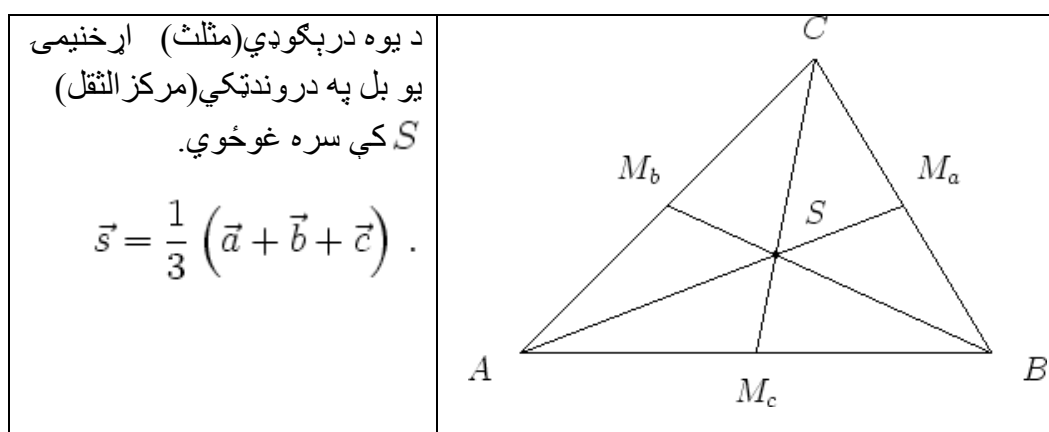
(لیکونکي: هولیک، موخ)

سکالار ضرب:



(لیکونکي هولیګ، موخ)

د اړخنیمو غوڅتګي (نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیمي په ټکولیکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{m}_a - \vec{a}) = \vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right), \quad t \in [0, 1].$$

د لپاره دی، نو دروند ټکی $\overline{AM_a}$ په 1 : 2 نسبت وېشي

په ورته توگه اړخیميو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.

(لیکونکي هوليگ، موخ)

(مطلق) ارزښت

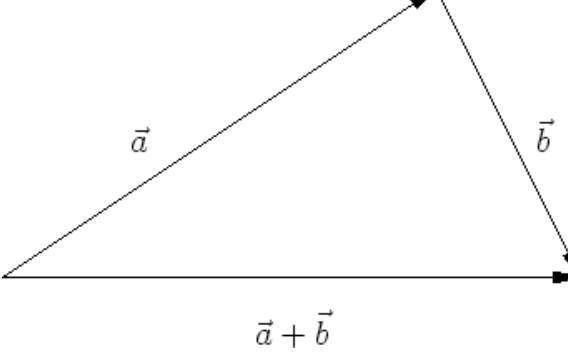
د $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسي له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

په ځانگي توگه $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$ دي.

يو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره يوونوکتور (واحدوکتور) بلل کيږي.

دربگوډيز (مثلثاتي) نامساوات :

<p>د دوه وکتورونو د جمعي (زياتون) لپاره باور لري</p> $ \vec{a} + \vec{b} \leq \vec{a} + \vec{b} $ <p>د برابروالي سره ټيک هلته ، چې \vec{a} او \vec{b} غبرگ (موازي) وي، دا په دې</p>	
---	--

معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.	
---------------------------------	--

(ليكونكي هوليك، موخ)

د شميرني قوانين:

د وكتورونو لپاره لاندي شمېر قوانين باور لري:

• Kommutativgesetz كموتاتيو قانون

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

• Assoziativgesetz اسوخيانيو قانون

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

• Distributivgesetz دېسټريبيوټيو قانون

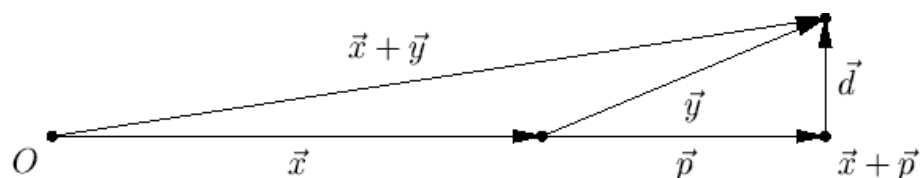
$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

(ليكونكي هوليك، موخ)

(له باد را پيداشوي د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجرياتات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نڅبه کرښ یابونایي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکي چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50 \cos(\pi/8) \\ 50 \sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا بنایي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 800 + 50 \cos(\pi/8) \\ 50 \sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتکي. که له \vec{p} سره په کرښه د \vec{y} عمود یا orthogonale پرېوستون د \vec{x} په لور وښایو، نو ټولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x} + \vec{p} = \begin{pmatrix} 800 + 50 \cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لورته او دریفت څخه

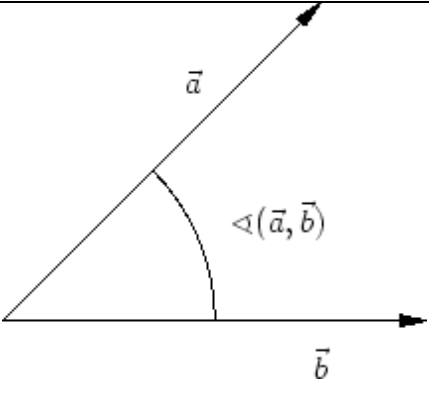
د شمال لورته

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليگ، اېپ)

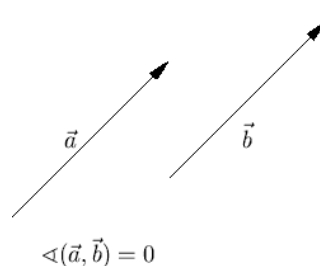
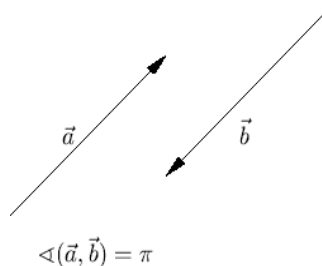
کونج يا زاويه :

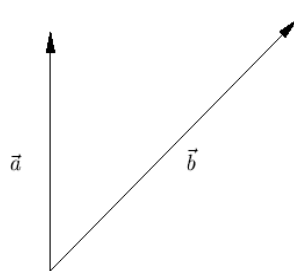
<p>د $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سرى د</p> $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ <p>د دواړو کونجونو کوچنى کونج بنايي، چې د وکتور سره په نخبه شوي غشي سره گډ ککړئ ټکى د رأس نقطه جوړوي.</p>	
---	---

دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره
قرار دادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ درېدلى.

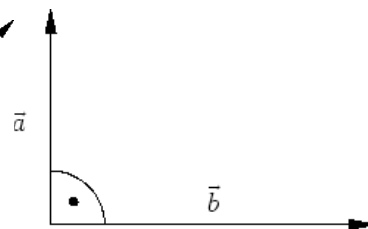
(ليکونکي هوليگ، موخ)

لاندي څيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.

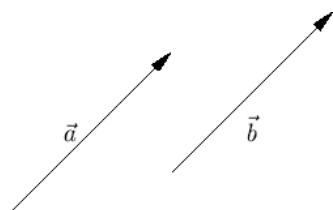




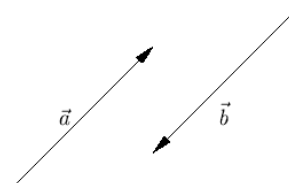
$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$$



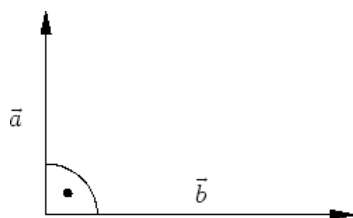
$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$$



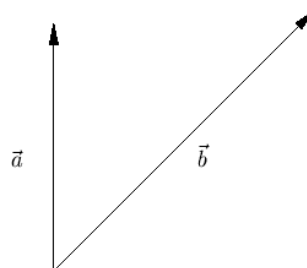
$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$



$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$$



$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$$

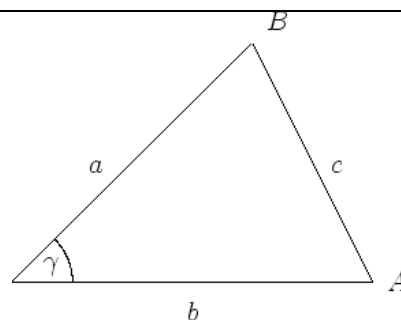


$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$$

د کوساین جمله :

په یوه درې‌ګونې کې په کوم چې د اړخ
 \overline{AB} مخامخ کونج γ پروت دی باور
لري

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$



نوپه ځانگړې توکله لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاگوراس جمله راځي:
 $c^2 = a^2 + b^2$

(لیکونکي هولیک، موخ)

د بنووني لپاره یې د پیتاگوراس له جملې کار اخلو.

<p>باور لري</p> $c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$ <p>همداسې</p> $q = b - p, \quad p = a \cos \gamma.$ <p>له دې سره لاس ته راځي</p> $c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$ $= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$ <p>څه چې د بنوولو وو.</p> <p>(لیکونکي هولیک، موخ)</p>	
--	--

سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار ضرب د کواوردینات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

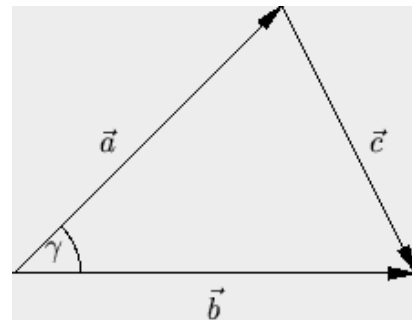
همداسي

$$(s\vec{a} + r\vec{b}) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانین باور لري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

د دواړو ورته والیو انځورونه د کوساین جملې له لارې لاس ته اځي:



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma.$$

که دایره مربع وی کین لور ته راورل شی، نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

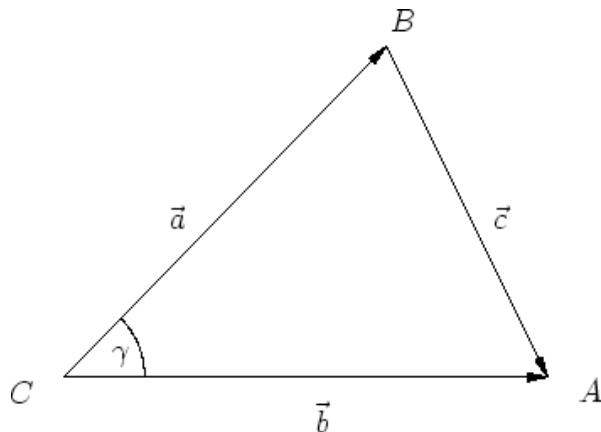
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وی یو بل سره پورته کوي یا سره له منځه ځي، او پاتې گډ ترمونه د (-2) - ځله سکالار ضرب سره یو بل سره سر خوري.

دا څېره شوی مثلث لاندې گوډونه لري

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

$$\cos \gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترلي له کواوردیناتونو څخه د لیدني دي. د دې راورل شوي بېلگې په بنسټ کېدی شي د کوساین جمله هم وشمېرل شي. باور لري

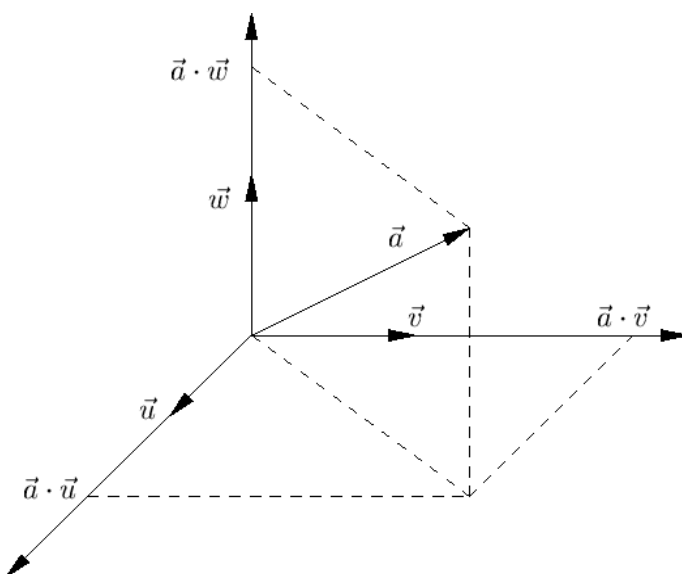
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \gamma = -2(4\sqrt{2})6/\sqrt{2}$ سره توفیق مومي یا سر خوري.

(لیکونکي هوليگ، موخ)

اورتوگونال یا یو په بل ولاړ (عمودي) بنسټونه Orthogonalbasis

اورتوگونال بنسټ له درې جوړه اورتوگونال وکتورونو \vec{w} , \vec{v} , \vec{u} . څخه جوړ دي.



لکه په څیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور \vec{a} د کرښیز کمپینیشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{u})}{|\vec{u}|^2} \vec{u} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{v})}{|\vec{v}|^2} \vec{v} + \frac{(\vec{a} \cdot \vec{w})}{|\vec{w}|^2} \vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زیاتوونو (د جمعې برخو) د بنسټیزو وکتورونو تولید شوی پرېستونونه دي، او د ضریبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a} \cdot \vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2.$$

که وکتورونه \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} نورمي یعنی یو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوگونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_x + a_2 \vec{e}_y + a_3 \vec{e}_z$$

د کارتیزې کواوردینات سیستم د کانونیکي اورتوگونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(لیکونکي هولیک، موخ)

دا چې هر وکتور \vec{a} د کرښیز کمپینیشن

$$\alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

له لاري انځور بدلای شي، هندسي ترلی لیدل کيږي

د ضریبونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړيږي. دا چې

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} = 1, \quad \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} = 0,$$

د سکالار ضرب د کرښيزوالي له لاري لاس ته راځي:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \left(\alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \cdot \vec{u} = \alpha.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصدیقيږي. د ضریبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سړی د لاندې ضربولو له لاري

$$|\vec{a}|^2 = \left(\alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \cdot \left(\alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right).$$

ښوول کيږي.

دا هم په ساده توګه لیدل کيږي، چې پرېستونو ته کمښت وکتورونه

$$\vec{a} - \alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \quad \vec{a} - \beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \quad \vec{a} - \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2},$$

هر یو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود یا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a} - \alpha \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} \right) \cdot \vec{u} = \left(\beta \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2} \right) \cdot \vec{u} = 0.$$

(لیکونکي هوليګ، موخ)

نسبت اورتوگونال بنسبت ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندي ضربونه لري.:

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$	=	$\vec{a} \cdot \vec{u}$
$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$	=	$\vec{a} \cdot \vec{v}$
$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$	=	$\vec{a} \cdot \vec{w}$

له دي سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب:

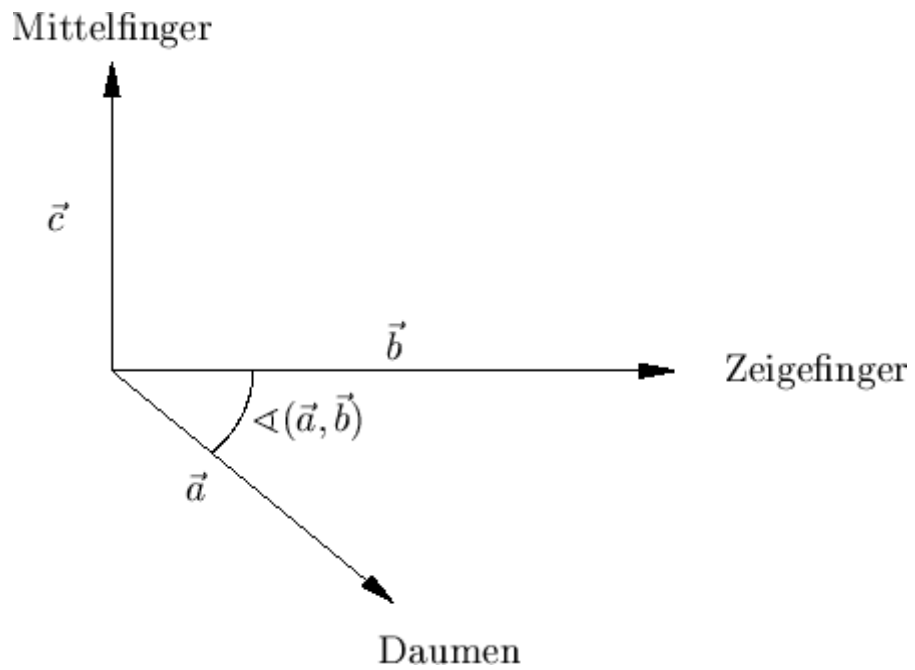
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

\vec{a} او \vec{b} ته اورتوگونال دی، د ،، بني –لاس- قانون، لوریز دی او اوږدوالی

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

لري. (د څیرې د الماني پښتو: منځکوته، کوتلکه، غټه کوته)



شکل کي الماني: پورته: منځگوته، ښي لور ته: نخښ گوته، کښته لور ته غټه گوته

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \quad \vec{a} \parallel \vec{b} \quad \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

په ځانگړي توگه باور لري د لپاره او د لپاره .
 $\vec{a} \perp \vec{b}$ لپاره .

بدیل يي وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعريفوي.

(ليکونکي : هولیگ، اپپ)

<p>د دې لپاره چې د دواړو تعريفونو ورته والی وښايو، لومړی په پام کي نيسو، چې دواړه انځورونې په \vec{a} او \vec{b} کي گربښيزي دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعې سره زعمور دي. د کواورديناټ انځورنې لپاره کيدی شي دا تړلي پسي وشميرل شي. فقط زياتونوالی(جمعه کيدنه) د هندسي تعريف لپاره څرگنده توگه روښانه دی.</p> <p>لومړی ښايو، چې .</p> <div style="background-color: #e0e0e0; padding: 10px; margin-top: 10px;"> $\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$ </div>	
---	--

لکه له څیرې چې لیدل کیږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور \vec{b} په xy -سطحه پرېوتل شي او بیا په کونج $\pi/2$ و څرخول شي. دا چې د پرېوتون اودوالی

$$|\vec{b}| \sin(\angle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانگړي انځوروني څخه په دویمه کمپوننت کې د سیده پسي شمېرنې کرښيزوالی لاس ته راځي، ځکه چې بي د توليز محدودیت څخه د لومړي وکتور لور د \vec{e}_z په حیث ټاکو.

په ورته توگه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسیا کوي، چې د \vec{e}_z ، \vec{e}_y ، \vec{e}_x کانونیکي بنسټ وکتورونو کمپینیشن لپاره وراته والی و ازمايل شي.

(لیکونکي: هولیک، اپپ)

د تعریف یا پیژند د څرگندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب \vec{c} شمیرل کیږي.

یو و \vec{a} او \vec{b} ته اورتونال وکتور دی

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چي همدا اوس ٽيڪ لوريزوالی لري. له

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{9}{3 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راڻي: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. له دي سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسي

$$\vec{c} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بديله توگه په ساده توگه تحلیلي تعريف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اڻي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: کلاوس، هولیک)

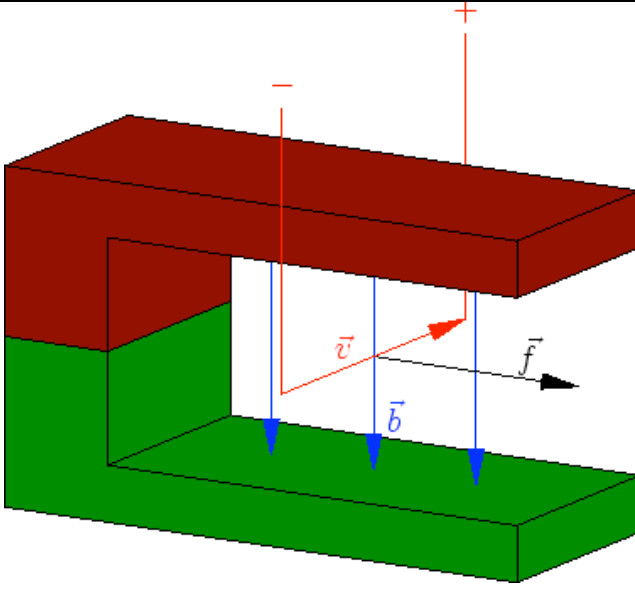
د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_y &= \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_z &= \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_x &= \vec{0}, & \vec{e}_y \times \vec{e}_y &= \vec{0}, & \vec{e}_z \times \vec{e}_z &= \vec{0}. \end{aligned}$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،، بنې-لاس-قانون،، سره سم لوريزي اور توگونال بنسټونو لپاره باور لري.

(ليکونکي : هولیک، اپپ)

د لورنڅ زور Lorentzkraft

<p>په يوه الکترون $-e$ ، چې د \vec{v} وړشو \vec{b} کې خوزي يا حرکت کوي، د لورنڅ زور اغيز لري</p> $\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}.$ <p>دا په دا ځيره شوي ازمايښت نظم د برېښنا جريان تيروني د \vec{f} په لور لوريزه اغيزه لري..</p>	
--	---

(ليکونکي : هولیک، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندي قوانين باور لري:

• Antisymmetrie اسوځياتيو قانون

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

• Linearität کرښيزوالی

$$(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) \times (\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2) = \alpha_1 \beta_1 (\vec{a}_1 \times \vec{b}_1) + \alpha_1 \beta_2 (\vec{a}_1 \times \vec{b}_2) +$$

$$\alpha_2 \beta_1 (\vec{a}_2 \times \vec{b}_1) + \alpha_2 \beta_2 (\vec{a}_2 \times \vec{b}_2)$$

• غیرګارڅیز یا موازی الاطلاع ډ سطحی مساحت، هغه چي له وکتورونو a او b غزېدلې، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.

• د ګراسمن کټمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

• د لاګرانج کټمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اېپ، هولیګ، کیمرلي)

انتیسیومتری او کرښيزوالی د وکتور ضرب د کواورډینات انځورونې څخه تړلی لیدونکی دی.

د کټمتوالي د بنووني لپاره کیدی شي بي له ټوليزو بنديزونو $\vec{a} = \vec{e}_x$ ونيول شي او بايد په \vec{b} کې د کرښيزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b} = \vec{e}_y$ او $\vec{a} = \vec{e}_x$ وڅيرل شي، د $\vec{a} = \vec{b}$ لپاره د کټمتوالي دواړه اوځونه په ساده توگه صفر دي. په لومړي حالت کې د کين اړخ د کاسمن کټمتوالي لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

دا د بني اړخ

$$c_1 \vec{e}_y - c_2 \vec{e}_x$$

سره يوغريز کيږي. په دې راورل شوي ځانگړي حالت ($\vec{b} = \vec{e}_y, \vec{a} = \vec{e}_x$)

کې د لاگرانژ کټمتوالي

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1 ,$$

هم ټيک دی.

په ورته توگه د $\vec{b} = \vec{e}_z$ لپاره هم دليل راورل کيږي.....

کرښيزوالي کیدی شي د غبرگيزوالي لپاره وکارول شي. دا لاندې يې بيلگه ده.

$$\left(3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 5 \begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاگرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توګه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیایي. د بېلګې په توګه دی

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right) \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

او

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \right) \cdot \left(\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \right) = 0 \cdot 6 - 12 \cdot 1 = -12.$$

(لیکونکي: ایپ، هولیګ)

د ایپسیلون - تنزور Epsilon-Tensor

د ε -تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k} \in \{-1, 0, 1\}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\},$$

د دوه برابرې پیژندنې (ایندکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1, \\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1.\end{aligned}$$

نو دا د څيکليکي پرموتيشن (ځای بدلون) لاندې اينوارينانت (تغير نه خوړونکي) دی او د پېژندنځينو يا ايندکسونو د بدلون سره مخنځبه بدلوي.

(ليکونکي: اېپ، هولیک)

د -تنروز په مرسته کیدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه وليکيل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(ليکونکي: اېپ، هولیک)

شپات ضرب

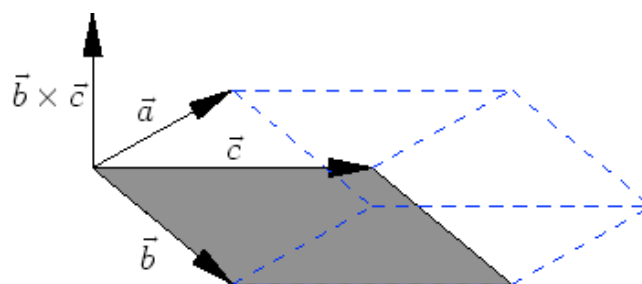
شپات ضرب

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنځيني پوري د له درې وکتورونو $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ څخه غزول شوی شپات ډکي يا حجم سره يو غبريز شي يا برابر شي.

(غبرگ سطحيز)



د ε - تنزور په مرسته کېدی شي د غیرگخواييز يا شپات ضرب په لاندې بڼه هم وليکل شي:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(ليکونکي: اېپ، هولیک)

$$\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

سره

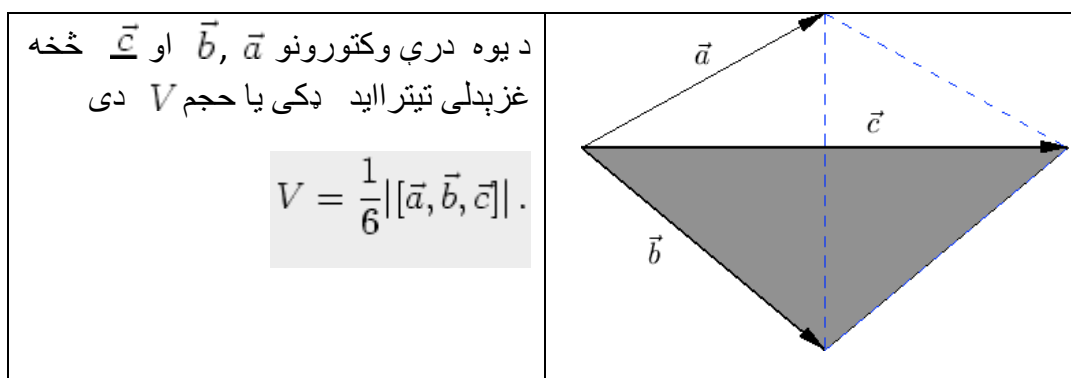
د

$$h = |\vec{a}| \left| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{d})) \right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

د شپات يا غبرگ سطحيز جگوالی دی. دا چې $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$ د کرښيز شوي غبرگ اړخيز د سطحې خونديونه ده، د ډکي يا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left| \vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right) \right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|.$$

د يوه څلور سطحيز (حجم) شميرنه Volumen eines Tetraeders



(لیکونکي: اېپ، هولیک)

د یوه تیترااید (څلور سطحیز) ډکی V داسې شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3} Gh,$$

چیرته چې G بنسټ سطحه ده او h جگوالی په گوته کوي. که په بام کې ونیول شي،
چې G نیم دومره لوی دی، لکه د غبرگسطحیز G_{Spat} سطحه، چې له درې
وکتورونو غزېدلی، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6} G_{\text{Spat}} h = \frac{1}{6} V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

راځي، د غبرگسطحیز V_{Spat} په مرسته .

(لیکونکي: اېپ، هولیک)

د څلور سطحیز V ډکی، چې له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

غزبدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

د غیرکسطحیز یا ذونقې خویونه Eigenschaften des Spatprodukts

د غیرکسطحیز ضرب په هر Argument کې کرښیز دی او سربیره پردې دا لاندې نور خویونه لري

• څیوکلکي – یا تل بیرته راگرځیدونی بدلون : zyklische

Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

• کرښیز بلواکوالی یا تابعیت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c},$$

د لږ ترلږه یوه سکالار α, β, γ سره د 0 سره نابرابر.

• Orientierung: لوريزونه

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$$

د هر بني سيستم لپاره

(ليكونكي: اېپ، هولېگ)

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه \vec{u} , \vec{v} او \vec{w} یو ریښتونی غیرگهواریز (سطحیز) غزوي، نو یو په خوښه وکتور \vec{x} کیدی شي د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

په څیر انځور شي د لاندې ضریبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}]}{[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}]}{[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]}.$$

(ليكونكي اېپ، هولېگ)

د

$$\vec{x} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v} \times \vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \alpha \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

همداسي

$$\alpha = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]},$$

داچي \vec{u} , \vec{v} , او \vec{w} يو ريښتوني غبرگسطحيز غزوي، داښه دي معنا چي $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$ دي. β او γ لپاره سړي په روتنه توگه مخ ته ځي. (ليکونکي اږپ، هولیک)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کربنيز کمبیشن په څير انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = 2$$

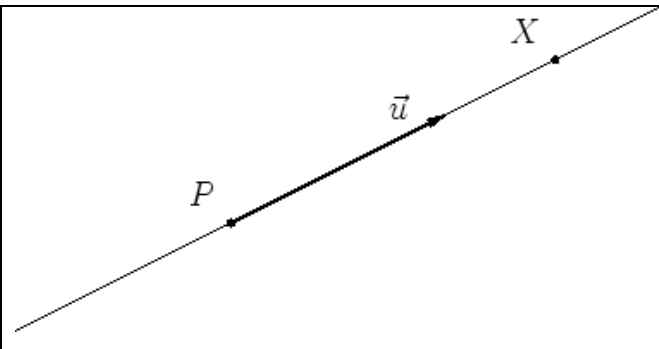
$$[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] = 4, \quad [\vec{x}, \vec{w}, \vec{u}] = -4, \quad [\vec{x}, \vec{u}, \vec{v}] = 8$$

او له دي سره

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w} \\ &= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}. \end{aligned}$$

(ليکونکي اپ، هولیک)

ټکي - لور - بڼه:

<p>په يوه کرښه ټکي X له P د \vec{u} په لور کېدی شي د</p> $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ <p>سره انځور شي.</p>	
---	---

په ورته توگه باور لري

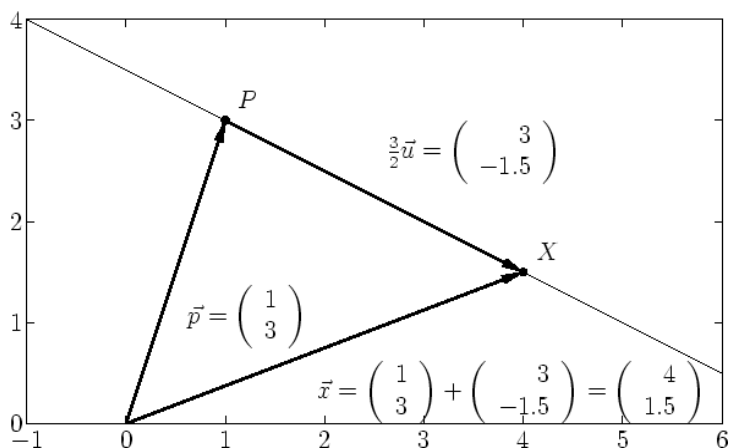
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

د ځای-وکتور \vec{x} کواوردیناتو لپاره.

(ليکونکي، هولیک، هیورنر)

څېره د یوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د لیدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1, 3)$

او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د X ټکي پارامتر $t = 3/2$ لري.



(لیکونکی، هولیک، هیورنر)

دوه - ټکي - بڼه :

<p>په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تیریري کیدی شي په بڼه $\vec{PX} = t\vec{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. پارامتر ارزښت $t \in [0, 1]$ توپه کرښه \overline{PQ} راکوي.</p>	
--	--

په ورته توگه

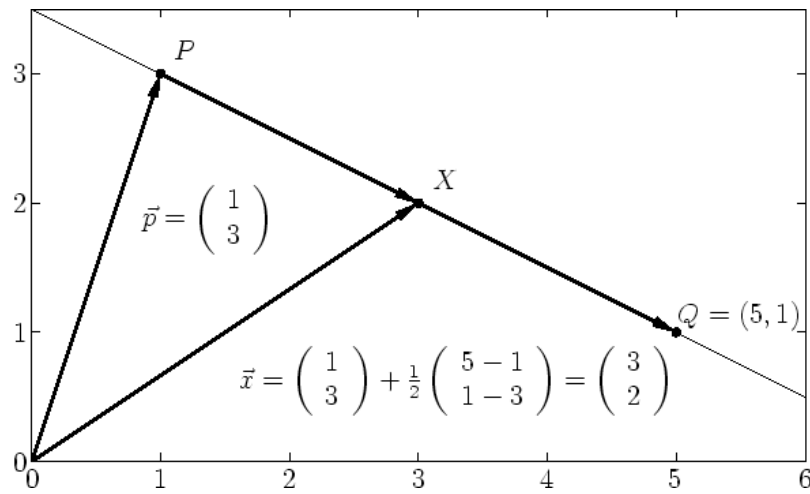
د ځای-وکتور \vec{x} د کواورډینات لپاره باور لري

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

(لیکونکی، هولیک، هیورنر)

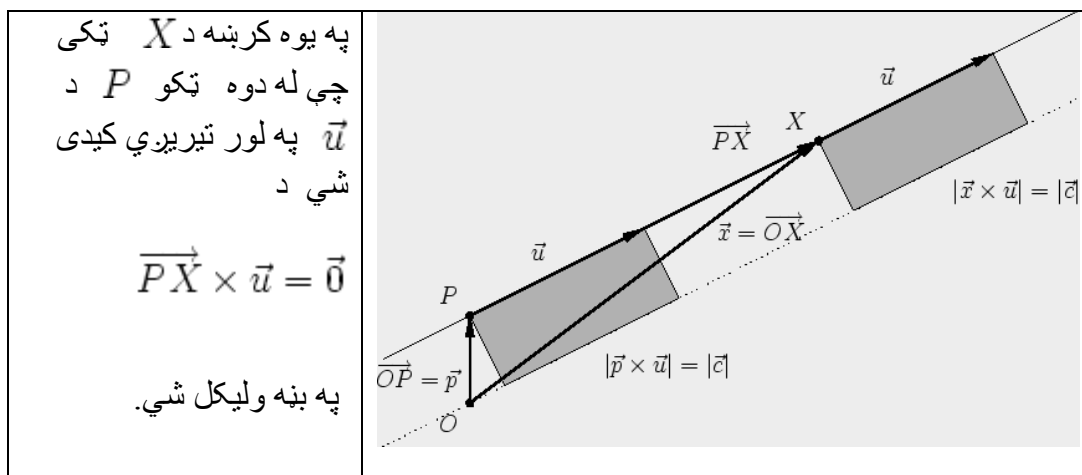
د $t \in [0, 1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه \overline{PQ} په $(1-t)$ نسبت ویشي.

په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



(لیکونکی، هولیک، هیورنر)

لحزوي – یا سترګورپ بڼه Momentenform



په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}.$$

(لیکونکي، هولیک، هیورنر)

د یوې کرښې لحظوی بڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړ شوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې څیره شوی بیلګی لپاره د X_1 ټکی لپاره ورکوي:

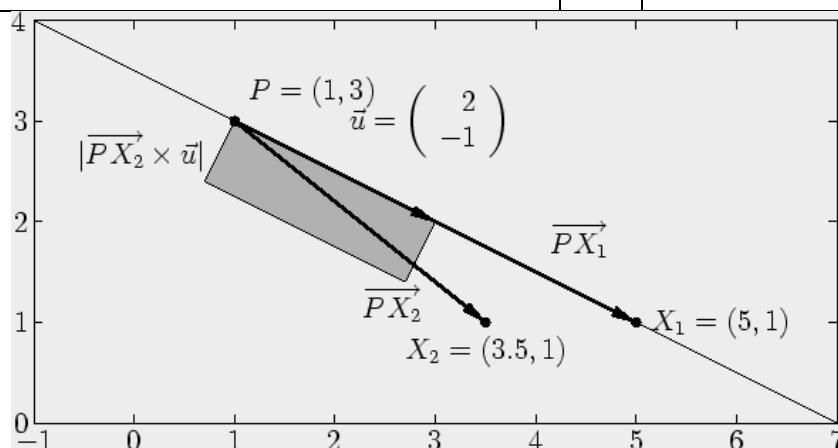
$$\vec{PX}_1 \times \vec{u} = \left(\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

د دې برعکس د X_2 ټکی لپاره لاس ته راځي:

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	=	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$	=	



د ټکي - کرښې واټن:

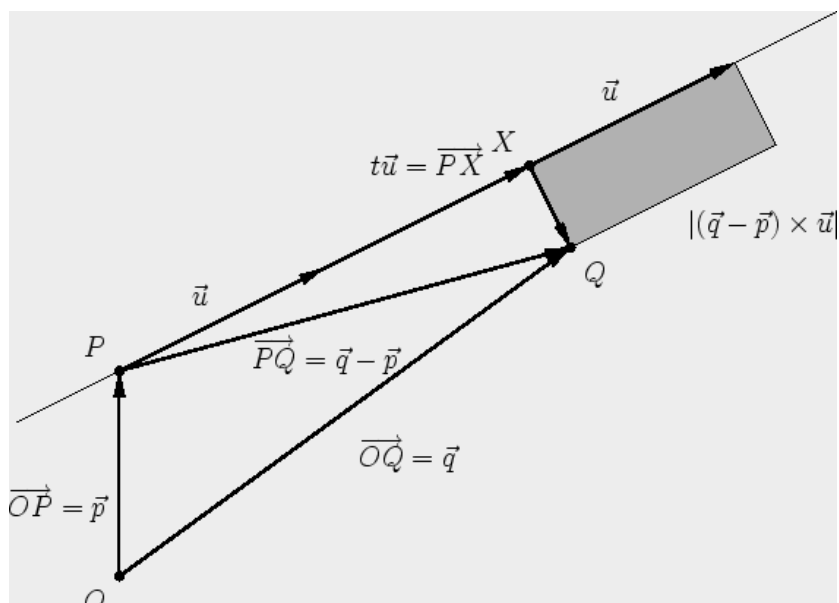
په یوه کرښه د یوه ټکي Q پروجکشن (پروپوسټون) X چې له P تیریري د لور سره لاندې پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حیث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راځي .



(لیکونکي، هولیک، هیورنر)

په کرښه د ټکي Q پرېستون X لپاره وکتور \overrightarrow{XQ} په \bar{u} عمود- یا نیغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \bar{u} =$$

$$\left(\bar{q} - \left(\bar{p} + \frac{(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u}}{|\bar{u}|^2} \bar{u} \right) \right) \cdot \bar{u} = (\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u} - \frac{(\bar{q} - \bar{p}) \cdot \bar{u}}{|\bar{u}|^2} |\bar{u}|^2 = 0.$$

د چلیبیا یا ومتوري ضرب تعریف له مخې باور لري

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin(\angle(\bar{a}, \bar{b}))$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

$$\begin{aligned}
 d &= \left| \overrightarrow{XQ} \right| = \left| \overrightarrow{PQ} \right| \sin \left(\angle \left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u} \right) \right) = \\
 &= \frac{\left| \overrightarrow{PQ} \right| |\vec{u}| \sin \left(\angle \left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u} \right) \right)}{|\vec{u}|} \\
 &= \frac{\left| (\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u} \right|}{|\vec{u}|}.
 \end{aligned}$$

(لیکونکی، هولیک، هیورنر)

که تکی $Q = (3, 3, 3)$ په کرنه پر بیستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حیث د خای وکتور سره تکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \vec{u} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

واتمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$|\overrightarrow{XQ}| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2} .$$

سره يو غريز دی.

(ليکونکي: هولیگ، هیورنر)

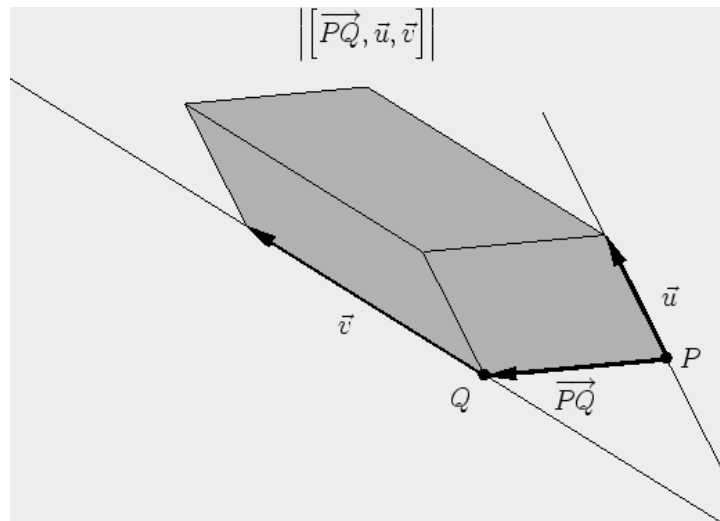
د دوه کرښو واتن :

د دوه کرښو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو \vec{u} ، \vec{v} سره ورکړ شوي دي واتن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} ,$$

که $\vec{u} \parallel \vec{v}$ وي. د غبرگو کرښو پاره باور لري

$$d = \frac{|\vec{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$



دوه کرښې بادمایلي windschief بلل کيږي، که غبرګې نه وي او مثبت (زیاتیز) واټن ولري..

(لیکونکي: هولیک، هیورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\vec{XY} = \vec{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لورو وکتورونو سره عمود یا ولاړ دی، یعن غبرګ وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}.$$

ته.

دا چي د يوه وكتور اوږدوالي د هغه مطلق ارزښت ضرب يوون (واحد) وكتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left| (\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right| = \left| \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right|,$$

او له دې سره غوښتونکي فرمول.

د غبرگو کرښو لپاره هغه د يوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.
(ليکونکي: هولېگ، هيورنر)

کرښې

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| [\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}] \right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{(1 - (-2))^2 + (1 - 1)^2 + ((-2) - 1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليكونكي: هوليك، هيورنر)

د الوتني لاري Flugkorridore

په ساده توگه نيسو، چي الوتکه په سيده لار له الوتنخاي څخه و موخي ته الوزي او د التتار له سيده کربنيتوتو څخه جوړه ده، نو د يوي الوتني لپاره له شتوتگارت (S) Stuttgart څخه و کوينهاگن ته د جگيدني لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

او د يوي الوتني لپاره له فرانکفورت (F) څخه قاهري ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چي الوتکه په سيده لار د د الوتنخاي څخه و موخه خاي ته الوزي او د الوتني لار له سيده کربنيتوتو څخه جوړه ده، نو د شتوتگارت S څخه د کوينهاگن ته د يوي الوتني د جگيدني الوتنلار ده

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0, 8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرنكفورت F څخه و قاهرې ته

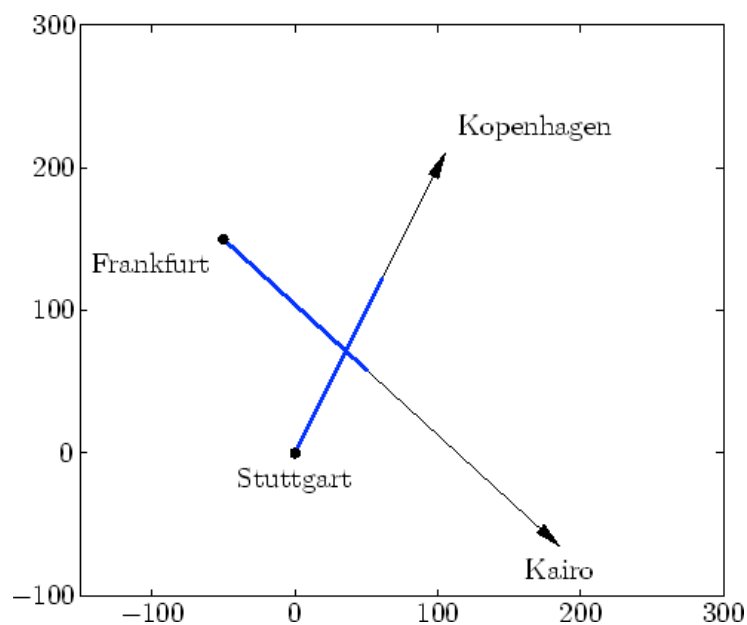
$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 3].$$

که د کواوردینات پیل شتوتگارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کیلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33.$$

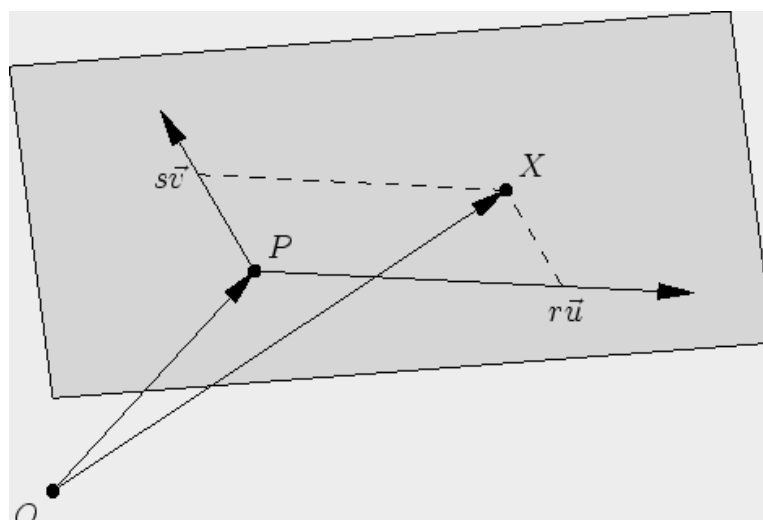


(لیکونکی: هولیگ، هیورنر)

د یوې سطحې پارامتریکې انځورونه Parameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره، چې له دوه نه غبرگو لورو \vec{u} او \vec{v} غزېدلي سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$



په ورته توگه د خای وکتور \vec{x} د کواوډیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

(لیکونکي: هولیگ، وایس)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

یوه سطحه دې د ټکي $P = (1, 2, 3)$ او وکتورونو

سره روکړ شوي وي. نو $X = (1, 1, 2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

له بلې خوا $X = (0, 0, 0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې

دی او د مساوات سیستم

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

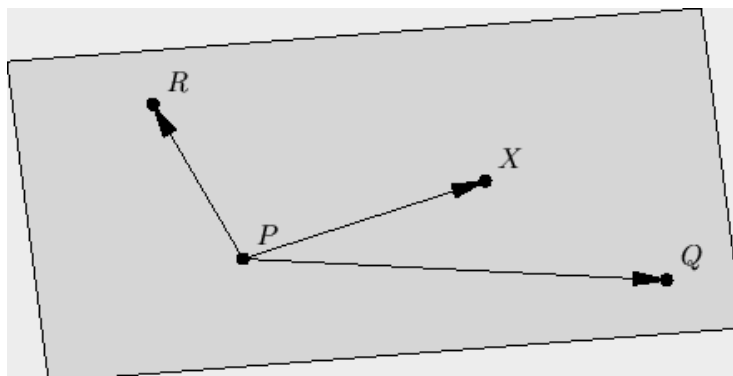
حل نه لري، که لومړی او دویمي ليکي ته وگورو .

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه **Drei-Punkte-Form einer Ebene**

د ټکي X لپاره چې په یوه سطحه پروت دی، کومه چې له ټکو P, Q, R تېرېږي او یو اصلي درې‌گونی جوړوي د غبرگخوایزو ضرب ورکېږي .

$$[\vec{PX}, \vec{PQ}, \vec{PR}] = 0.$$

$$[\vec{PX}, \vec{PQ}, \vec{PR}] = 0.$$



(لیکونکي: هولیگ، وایس)

یوه سطحه دې د ټکو $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 2, 3)$ او $R = (2, 3, 4)$ له لارې ورکړ شوي وي.

نو $X = (1, 1, 2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

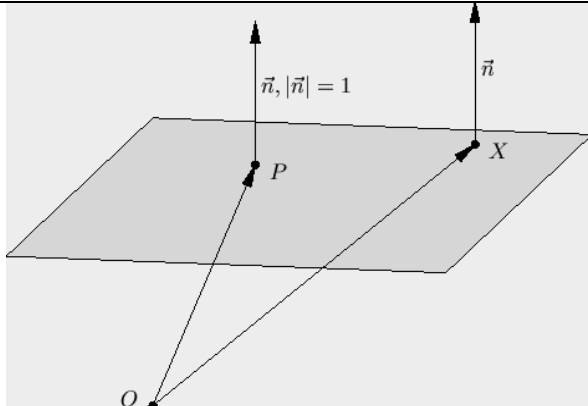
$$[\vec{PX}, \vec{PQ}, \vec{PR}] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

له بلي خوا $X = (0, 0, 0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې باور لري

$$[\vec{PX}, \vec{PQ}, \vec{PR}] = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

(ليکونکي: هولیگ، وایس)

د یوې سطحې د هیسی-نورمال بڼه Hesse-Normalform einer Ebene

<p>په یوه سطحه د یوه ټکي X ځایوکتور \vec{x} په یوه سیخه په P کې اورتوگونال و یوه نورمالوکتور ته پوره کوي</p> $\vec{x} \cdot \vec{n} = d, \quad d = \vec{p} \cdot \vec{n}.$ <p>په نورمال بڼه نیول کیږي چې $\vec{n} = 1$ او $d \geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچینې ته</p>	
--	---

(ليکونکي: هولیگ، وایس)

یوه سطحه E دې ټکي $P = (1, 2, 3)$ نه لاري ورکړشوي وي او نورمي نورمال وکتور

$$\vec{n} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3,$$

دا په دی معناچي سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E : \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3.$$

نو $X = (4, 0, 1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8 + 0 + 1) = d.$$

له بلې خوا $X = (0, 0, 0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d.$$

(لیکونکي: هولیگ، وایس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شمیرني بدلون یا اړول

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرگ وکتورونه \vec{u}, \vec{v} .

سړی نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}$, $\vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$.

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور \vec{n} په \vec{u} او \vec{v} نیغ ولاړ دی یا نیغ عموددی، یعنی $\vec{n} \times \vec{v}$ ته غبرگ دی.

له دې دا نورمي نورمالو وکتور د هېسې-نورمال بني لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|},$$

د له کوم سره چې مخخښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتيز) وي.

دویم: یوه سطحه دې د درې ټکو P, Q, R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی (مثلث) جوړوي.

دوه وکتورونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR}.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې-نومالبنه لاس ته راوړل شي.

دریم: یوه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالو وکتور \vec{n} له لارې ورکړ شوې وي.

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې يوه سطحه داسې و غزول شي پخ کږمه کې چې دوه کرښيز خپلواک وکتورونه چې \vec{n} باندې عمود يا ولاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u},$$

چېرته چې \vec{x} يو په خوښه وکتور $\vec{n} \neq \lambda \vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(ليکونکي: هولیک، وایس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شمېرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسي-نورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شمېرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24 + 20 \\ -16 + 18 \\ 60 - 64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

$$\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{6}.$$

خُكه چي $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ بايد مثبت (زياتيز) وي، له لاندې لاس ته راځي

$$d = \vec{p} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4$$

$\sigma = -1$
او له دې سره

$$\vec{n} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E : \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 4.$$

(ليکونکي: هولیک، کرایخ)

د ټکي - سطحې واټن :

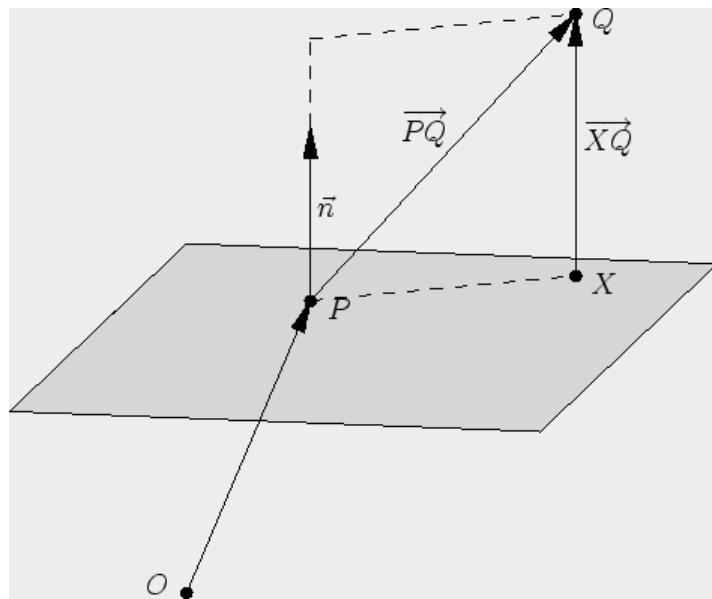
د يوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په يوه سطحه په ټکي P د نورمالوکتور \vec{n} سره دی

$$\vec{XQ} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}.$$

د دي اوږدوالی

$$d = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحی واټندی و ټکي Q ته.



(لیکونکي: هولیک، وایس)

سکالار ضرب

$$\vec{PQ} \cdot \vec{n} = \cos \alpha |\vec{PQ}| |\vec{n}| = \pm d |\vec{n}|$$

څخه دا $|\vec{n}|$ - واره د ټکي Q او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځي، د کوم سره چې \vec{PQ}

مخنځبنه دا راپه گوته کوي، چې ايا په همغه خوا بڼايي، لکه يې چې \vec{n} بڼايي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\vec{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\vec{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}.$$

ليکونکي: هيوليگ، وایس

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

له ټکي $P = (1, 2, 3)$ تېره سطحه د نورمالوکتور سره دی د

$Q = (3, 2, 3)$ ټکي واټن d همداسې په سطحه پرې ولارټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3.$$

له دې سره لاس ته راځي

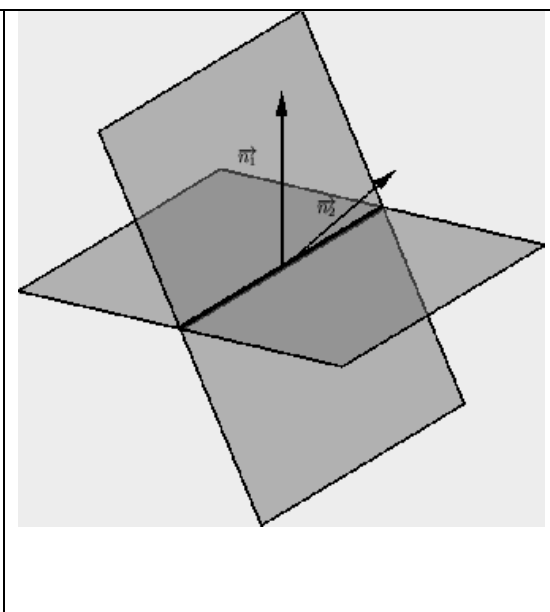
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شميرل کيري

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \\ 19 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: هولیگ، وایس)

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع:

<p>د دوه سطحو د نورمال وکتور \vec{n}_i سره د دواړو کونجونو (زاویو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچني کونج يې د</p> $\cos \varphi = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \vec{n}_2 }$ <p>له لارې يواځنی ټاکلي او</p> $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ <p>د غوڅکړنې لور ده.</p>	
---	---

(ليکونکي: هولیگ، وایس)

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_2 = (0, 1, 3)$, $P_1 = (1, 2, 0)$ او نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکړنې سره جوړ کونج (زاویه) φ دې وټاکل شي.

دی

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکړنې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅتکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

ته اړتيا شته او يو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s} \cdot \vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s} \cdot \vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلگې په توگه $S = (2, 3, 5)$ پيدا کيږي او له دې سره غوڅکړبڼه لاس ته راږو:

$$g : \vec{x} = \vec{s} + t\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ليکونکي: هولېگ، وایس)

د منظم تترايد(څلور سطحيز) د کونج ټکو

$$P_1 = (1, 0, 0), \quad P_2 = (-1, 0, 0),$$

$$P_3 = (0, 1, \sqrt{2}), \quad P_4 = (0, -1, \sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج يا زاويه دې پيدا شي.

مور د بېلگې په توگه د سطحو څخه چه له P_1, P_2, P_3 همداسې له P_1, P_2, P_4 جوړې وي يا تېرېږي کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

همداسی

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دي سره دی:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70, 59^\circ .$$

(لیکونکي: هولیک، وایس)

هگی (بیضوي) Ellipse

<p>په یوې ایلیپسی یا بیضوي د تکو $P = (x, y)$ د دوه سوزونکو F_{\pm} څخه واټن ثابت یا همغه دی:</p> $ \overrightarrow{PF_-} + \overrightarrow{PF_+} = 2a$ <p>د $2a > \overrightarrow{F_-F_+}$ سره .</p>	
---	--

که وي $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د P د قطبي کواوردیناتونو لپاره.

د هگي پارامترې کونه ده

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(لیکونکي: اپ، هولیک)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرني له لاري و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښايو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلوری) کوو

$$\underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

او دي کين مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته نوې مربع کول يا بيا مربع کول راکوي

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2.$$

د بدلون $f^2 = a^2 - b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواورديناټ بڼه راکوي.

د قطبي بڼې پيدا کوني

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

لپاره د مخرج (ماتلاندي) سره ضربولو سره او په پام کې نيسو

$$x^2 = (x^2 + y^2) \cos^2(\varphi).$$

له دې سره لاس ته راځي

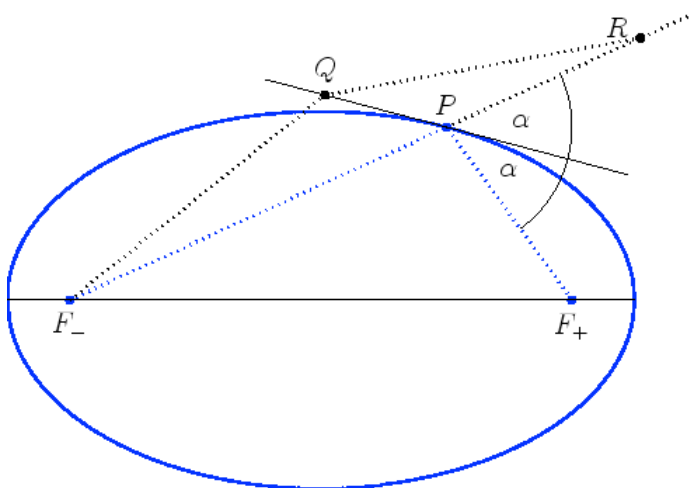
$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 = b^2$$

او د b^2 سره وېش له لارې د کواورديناټ بڼه.

(ليکونکي: اپې، هولیک)

د سوزونتيكي وړانگه (شعاع نقطه محراق):

د سوزونتيكو وړانگي (په سوزونتيكو كي راگرځي (رفلكت كونه يا بيرته راگرځيدنه)



د بنووني لپاره د مرستندوی ټکي په حيث په تانجنټ g د سوزونتيكي F_+ هنداره شوي څيره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکي $Q \neq P$ ټاکو. دا چې Q دهگي يا بيضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}|.$$

که د ټوټه کرښو $\overrightarrow{PF_+}$ او $\overrightarrow{QF_+}$ په ځای يي هنداره شوي څيري کيږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}|,$$

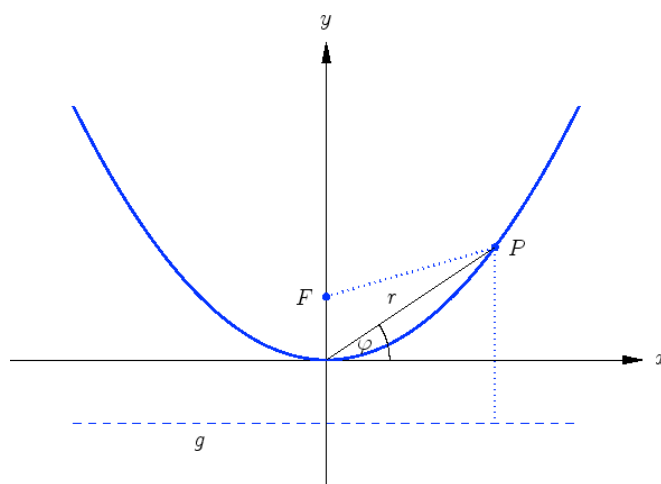
او پسي يا تعقيب بايد F_-, P, R په يوه کرښه پراته وي. له دې سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

دا هندارون خوبونه د پختورگو تیگو توتنه کونې لپاره په کار راځي. په سوزونټکي F^- کې د یوې رادیال (د وړانګې په لور) سرچینې څخه وړانګې کېدې شي د یوه هګۍ ډوله یا بیضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونټکي F^+ کې کوډه شي یعنې سره غوڅ کړي..

(لیکونکي: ایپ، هولیک)

پارابول Parabel

په یوه پارابول د ټکي $P = (x, y)$ د سوزونټکي F او یوې وړونکې کرښې g څخه برابر واټن لري.



که $F = (0, f)$ او $g : y = -f$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

$$r = \frac{4f \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

د ټکي P قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي: اپ، هولیک)

د انځورونې ورته والی یې ترلی څرگند دی. د مربع شوي واټن د برابر ایښوونې له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2 = (\text{dist}(P, g))^2$$

د کواوردینات بڼه لاس ته راځي. د

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

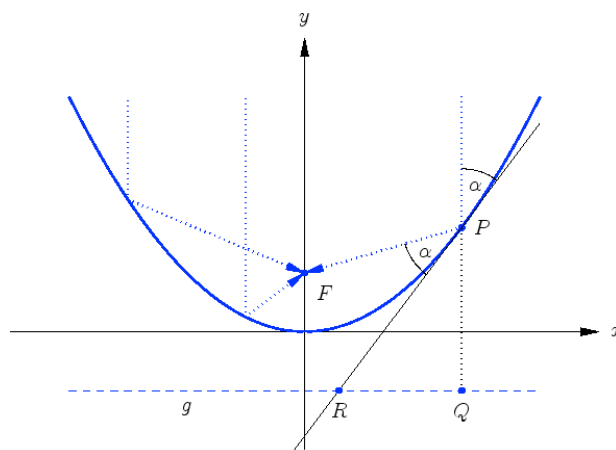
بدلون مو قطبي بڼې ته بیایي.

(لیکونکي: اپ، هولیک)

د ساتلايت تلوېزيون Satelliten-TV

غبرگې کرښې، وړونکریښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکې وړانگې په سوزونټکي کې سره کوده کيږي.

داد د ساتلايت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کيږي، چې پریوتي سیگنالونه قوي کړي.



د بنووني لپاره په بام کې نيسو، چې

$$\vec{FP} + \vec{QP} = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \right) + \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -f \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix}$$

په ټکي P_t ، $\begin{pmatrix} 1 \\ x/(2f) \end{pmatrix}$ کې د تانجنت د لور سره غبگ دی. دا چې

$$|\vec{FP}| = |\vec{QP}|,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F, P, R)$ او $\sphericalangle(R, P, Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم

سره چې R د تانجنت غوڅټکی دی د g سره.

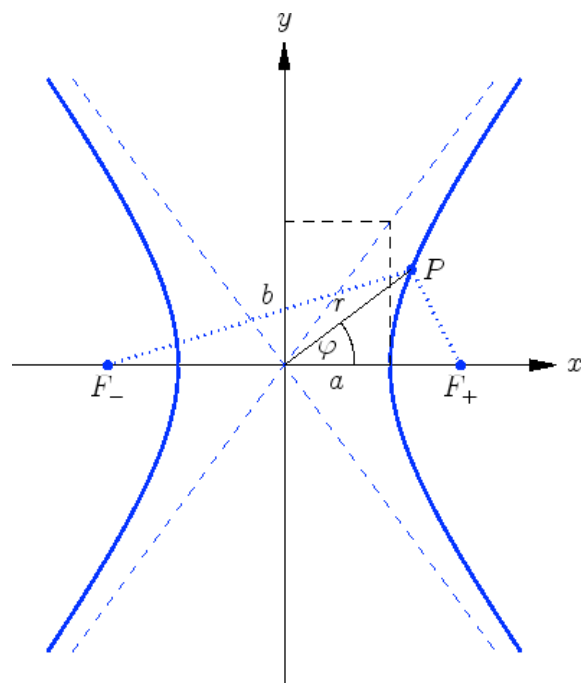
(ليکونکي: اېپ، هولیک)

های پاربول Hyperbel

په یوه های پاربول د یوه ټکي $P = (x, y)$ د سوزون ټکو F_{\pm} سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د P د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسپیتوتي $\pm b/a$ جگوالی لري.

د هایپرابول د بناخونو پارامترې کونه

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(لیکونکي: اپپ، هولیک)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

مربع کوو او دې و کین مساوات ته ورته اړیکې لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = \pm 4a \sqrt{(x+f)^2 + y^2}.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته له نوې مربع کوني څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2.$$

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بڼې بدلون وروسته د کواوډیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نیسو

$$x^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \varphi.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 + b^2}{a^2} x^2 = -b^2$$

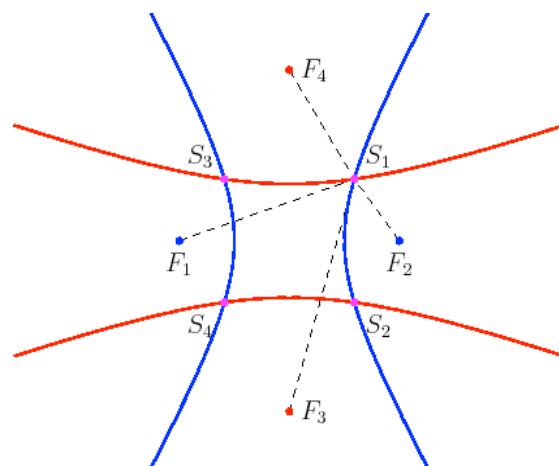
او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواوډیناتونو بڼې راکوي

(لیکونکي: اپ، هولیک)

ناویگیشن Navigation

د یوې کیشټې ځای Position معلومولو P لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د

سینکرون رادیو سیگنالونو د مختلفو خورونکو سټیشنونو F_i څخه سره پرتله کېږي. نو په دې توګه کیدی شي P د هایپرابول د سوزونټکو F_k, F_j سره د غوڅتکي په څیر لاس ته راړل شي.



يوه څرگنده بيلگه کيدی شي

$$F_1 = (-2, 0), F_2 = (2, 0), F_3 = (0, -3), F_4 = (0, 3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هاپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \quad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1,$$

او د څلر غوڅتکو S_i د کواوډيناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څيرې څخه چې ه م ليدل کيږی، څلور اوبيوني (حلونه) لاس ته راځي. د ناوېگيشن لپاره دا بي پرابلمونو دی، ځکه چې يو کفتان بايد وپوهيږي، چې کيښتی نږدې يات قريبا چيرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی يا حل دی.

(ليکونکي: اپپ، هولیک)

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,
at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد
لپاره ، همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ
او دا نوي ليکنه به يې ځنو ځایونو غزېدلې او ځني ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه (هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

، د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواري د ،، د افغانستان روغي او بیا
ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکټر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیري

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم ټوک

۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصایه یا ستاتیستیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت
پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - انالیزی ۱

۷ - انالیزی ۲

۸ - کرینیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل انالیز

۱۲ - وکتور شمیرنه

نوري ژباري

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼوڼپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکني

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهني ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهني برخي برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسي د بنوونکو او زدهکونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کي د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډبري پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ - د شميرپوهني سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهني گډي وډي ليکني

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیگرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیوني یا حلونه یې

۲۳- د شمیرپوهنې انگریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴- د شمیرپوهنې پښتو انگریزي ډکشنري

۲۵- د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶- د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي).

۲۷- د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېښي)

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**