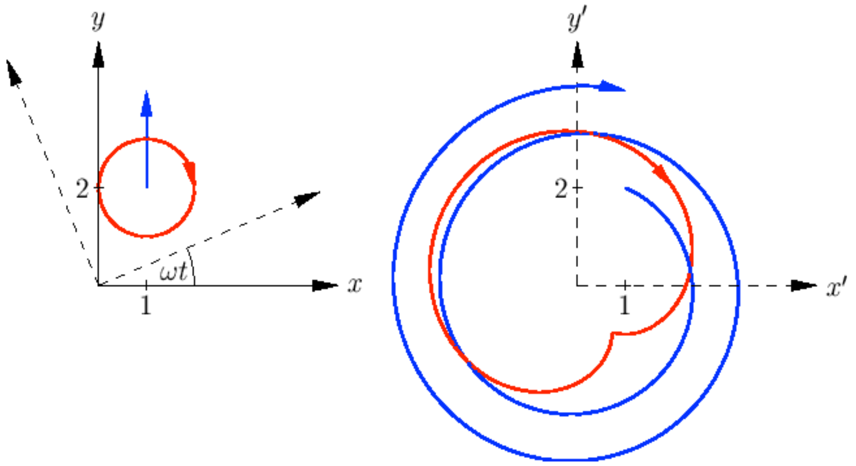
وکتورشمیرنه



Ketabton.com

ډاکتر ماخان شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه ۱

په هواره(سطح) او هوا(فضا) کې ۱

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات ۲

د غونداري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات ۲

په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶

سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) ۸

څرخون Rotation ۹

څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د اړخنیمیو غوځټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

درېګوډيز (مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شمیرنې قوانین ۱۹

له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ... **۱۹**

کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساين جمله ۲۲

اورتوگونال يا يو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶

وکتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب ۳۰

د لورنڅ زور Lorentzkraft ۳۴

د اپيسيلون – تنزور ۳۷

شپات ضرب ۳۸

د يوه څلور سطحيز د ډکي(حجم) شميرنه ۳۹

د غبرگسطحيز يا ذوذنقي خويونه ۴۱

د کواورديناتونو يا پروت ولاړ ۴۲

ټکي – لور – بڼه ۴۳

دوه – ټکي – بڼه ۴۵

لحضوي – يا سترگورپ بڼه ۴۶

د ټکي –کربنې واټن ۴۸

د دوه کربنو واټن ۵۱

د الوتنې لارې ۵۳

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونه ۵۵

د يوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷

د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼه ۵۸

د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰

د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو غوڅی یا تقاطع ۶۵

هګۍ (بیضوي) Ellipse ۶۸

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱

پارابول Parabe ۷۲

د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳

های پاربول Hyperbel ۷۴

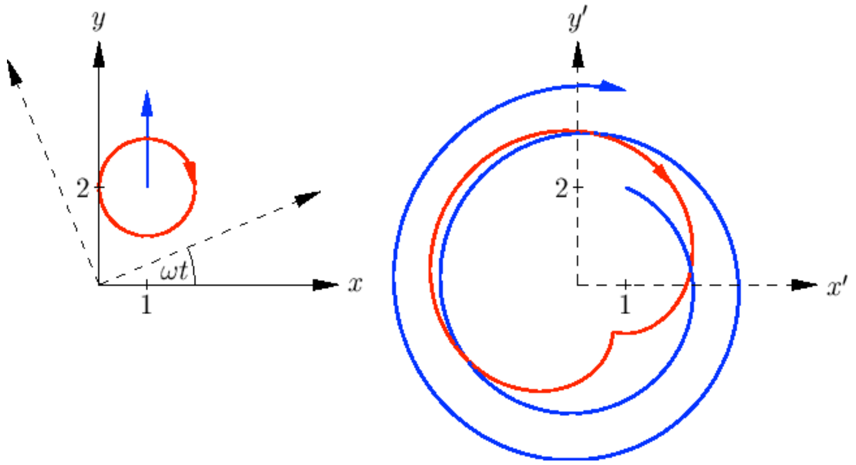
ناویګیشنNavigation ۷۷

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹

د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه



د شمیرپوهنې نړیوال جال ځخه په مننه

ژباړى: ډاکتر ماخان شینوارى

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه ۱

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې ۱

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات ۲

د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات ۲

په کارتیزي کواوردینات کې ټکي ۴

د اوږدوالي – او سور درجې ۴

توته – یا استوانه کواوردیناتونه ۶

سیګنوم (لاتین : Signum نخښه) فنکشن ... ۷

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) ۸

څرخون Rotation ۹

څرخنده یا څرخیدونی نسبي سیستم : ۱۱

وکتورونه په فضا کې ۱۳

د وکتورونو جمعه(زیاتون) ۱۴

سکالار ضرب ۱۶

د اړخنیمیو غوڅټکي ۱۷

(مطلق) ارزښت ۱۸

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات ۱۸

د شمیرنې قوانین ۱۹

له باد را پیداشوې د لویو اوبو یا بحر ... **۱۹**

کونج یا زاویه ۲۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین جمله ۲۲
اورتوګونال يا يو په بل ولاړ(عمودي) بنستونه ۲۶
وکتوري ضرب ، صليبي يا چليپا ضرب ۳۰
د لورنڅ زور Lorentzkraft ۳۴
د ايپسيلون – تنزور ۳۷
شپات ضرب ۳۸
د يوه څلور سطحيز د ډکي(حجم) شميرنه ۳۹
د غبرګسطحيز يا ذوذنقي خويونه ۴۱
د کواورديناتونو يا پروت ولاړ ۴۲
ټکي – لور – بڼه ۴۳
دوه – ټکي – بڼه ۴۵
لحضوي – يا سترګورپ بڼه ۴۶
د ټکي –کرښې واټن ۴۸
د دوه کرښو واټن ۵۱
د الوتنې لارې ۵۳
د يوې سطحې پارامتريکي انځورونه ۵۵
د يوې سطحې درې-ټکي-بڼه ۵۷
د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼه ۵۸
د سطحو انځورونو ترمنځ ... ۶۰
د ټکي – سطحې واټن ۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

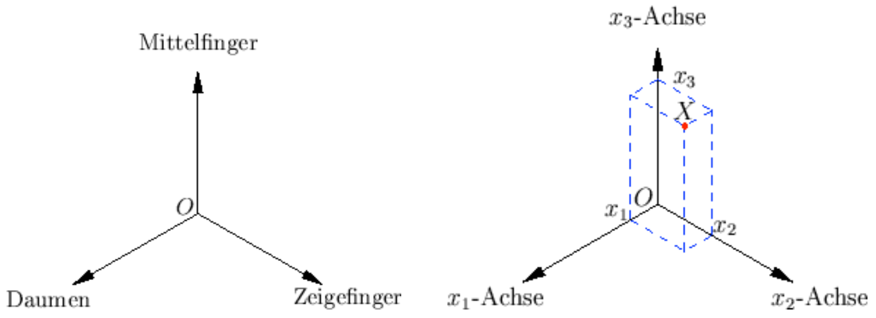
د دوه سطحو غوځی یا تقاطع ۶۵
هګۍ (بيضوي) Ellipse ۶۸
د سوزونڼکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) ۷۱
پارابول Parabe ۷۲
د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV ۷۳
های پاربول Hyperbel ۷۴
ناویګیشنNavigation ۷۷
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ وي کتابونه ۷۹
د لیکونکی ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

په هواره(سطح) اوهوا(فضا) کې کارتيزي - يا پروت ولاړسيستم

يو فضايې کواورديناتسيستم له درې په سرچينييز ټکي O کې يو په بل ولاړو ګڼونکرښو(محورونو) څخه جوړ دی، چې لوريزوالی يې د ښيرې له مخې،، د ښي لاس قاعدې،، سره سم ټاکل شوی دی.



يو ټکی X د کواورديناتو x_i سره په نخښه شوی په محورونو د پرېوستون ارزښت سره سم کره کيدی شي. $X = (x_1, x_2, x_3)$. که ايندکس يا پيژندنخښه ونه کارول شي،نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

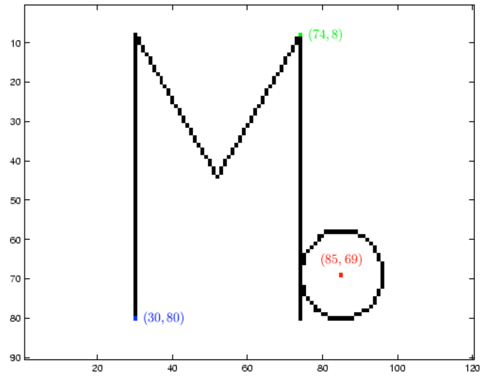
کواوردینات په ورسره بلد ډول د (x, y, z) او ګنونمخور د x ,-y- او z - محور په

نخښه کیږي.

په ورته توګه د هوارې کارتیزي کواوردیناتسیستم پیژنو یا تعریفوو.

پیکسل – یا د چوخوني کواودینات Pixelkoordinaten

په یوه ګرافیکي کړکۍ کې شیان د پیکسل- چوخونوکواودینات (Pixel خورا کوچني ځیره شوي ټکي) له لارې ورکول کیږي.. دا انځور شوی ولاړګوډیز یوه کړکۍ ده د 90×120 چوخونو سره او د رنګه چوخونو کواوردینات پروت دی د ځیرې ګوډ په ګوته کوي .

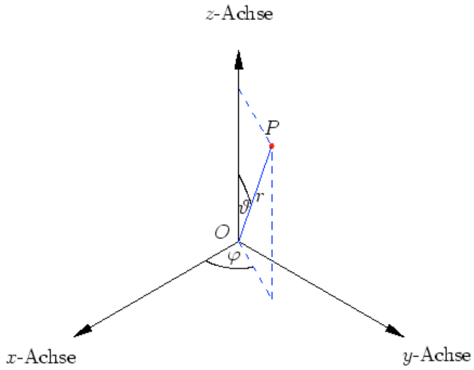


د غونډاري (غونډوسکې) یا کرې کواوردینات

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د سرچیني سره د واټن $r = |\overline{OP}|$ ، د کونج φ د x - محور او د هغه پرېوستون $\overline{OP}$ په xy - هواره او کونج $\vartheta \in [0, \pi]$ د $\overline{OP}$ او z - محور ترمنځ له لارې انځورېدلی شي. کونج φ ټیک تر د 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

زياتځلي پورې ټاکلکيدی شي. د ستاندارد په څير په $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پربېکړه کيدی شي يا منل کېدی شي. (په لاندې او نورو ځايونو کې: محور =Achse)



باور لري:

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = r\cos\vartheta$$

همداسي

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

د کوم سره چې د x, y او z نيوني سره سم د ارکوستانجنت يوه مناسبه څانګه د ټاکلو وي.

د اصلي څانګې- کونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \text{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

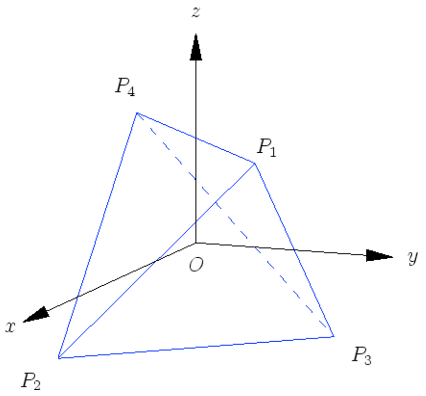
ليکونکي:اپ، هوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

په كارتيزي كواوردينات كې ټكي

$$P_1 = (1,1,1),\quad P_2 = (1,-1,-1),\quad P_3 = (-1,1,-1),\quad P_4 = (-1,-1,1)$$

د منظم تيترااېډر كونجونه جوړوي د اړخ اوږدوالي $2\sqrt{2}$ سره او په O كې د
درونډ ټكي سره



په غونډاري كواوردينات (r, ϑ, φ) كې كوډټكي يا كونج- لاندې كواوردينات لري

$$P'_1 = (\sqrt{3}, \psi, \pi/4),\qquad P'_2 = (\sqrt{3}, \pi-\psi, -\pi/4),$$
$$P'_3 = (\sqrt{3}, \pi-\psi, 3\pi/4),\qquad P'_4 = (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4)\,,$$

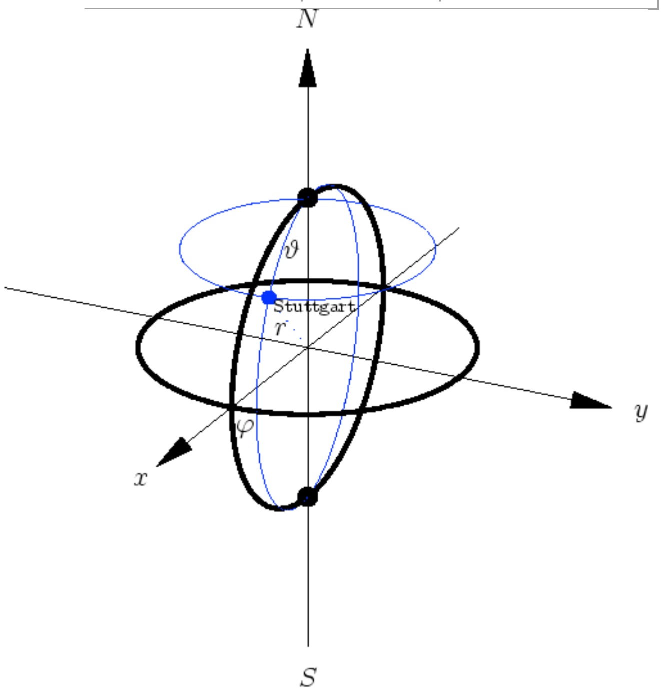
چېرته چې $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$ همداسې $\psi = \arctan\sqrt{2}$ دي

د اوږدوالي – او سور درجې (طول البلد او عرض البلد؟)

په ځمكغونډاري (ځمكغونډوسكې) يا ځمكې كره باندې د اوږدوالي – او سور درجې د
كرې يا غونډاري كواوردينات دي، خو يواځې بل ډول كونجورشو ګاڼي (كونجساحې)
كارول كيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\varphi = 0 \dots \pi$	180°- 0°	ختیز اوږدوالی
$\varphi = 0 \dots -\pi$	180°- 0°	لویدیز اوږدوالی
$\vartheta = \pi/2 \dots 0$	90°- 0°	شمالي سور
$\vartheta = \pi/2 \dots \pi$	90°- 0°	جنوبي سور



په خیره کې ایکواتور(سور 0°) او صفري اوږدوالی غوږ کبنل شوي دي، شمالي قطب (۹۰ درجې شمالي سور) او جنوبي قطب(۹۰ درجې جنوبي سور) هم په نخبنه شوي دي. شنه اوږدې – او سورګردی د ستوتګارت(۹۰ درحې ختیزې اوږدوالی ، ۴۹ درجې جنوبي سور) تېریږي

او $\varphi = \frac{1}{20}\pi$ (ختیز نیم غونداری) او $\varphi = -\frac{19}{20}\pi$ (لویدیز نیمغونداری په نخبنه کوي

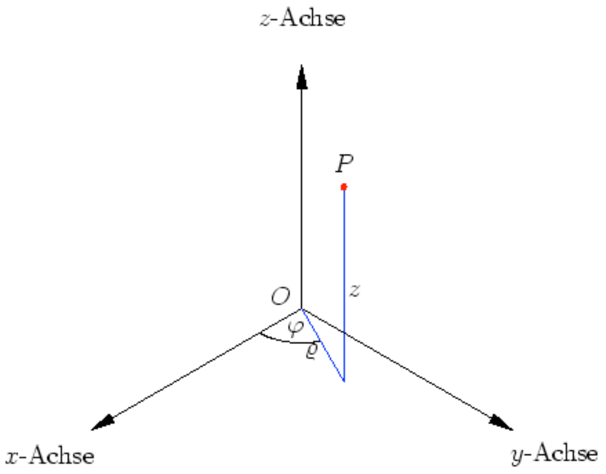
(c) ketabton.com: The Digital Library

او $\vartheta = \frac{41}{180}\pi$

توته – یا استوانه کواوردیناتونه Zylinderkoordinaten

یو ټکی $P = (x, y, z)$ کیدی شي د یوه کونج φ له لارې ، چې د x -مخور او د xy -هواره باندې د پریوستون (پروجکشن) $\overline{OP}$ ترمنځ پروت دی ، پرېوستون د اوږدوالي او د z- کواوردینات له لارې وټاکل شي.

کونج φ تیک تر د 2π پورې ټاکلی. د ستاندارډورشو پرېکړه زیات وخت تر $\varphi \in (-\pi, \pi]$ پورې شوې.



باور لري

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

همداسي

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوم سره،چې د x او y د مخنخبني پورې اړونده د ارکوستانجنت يوه ځانګه ټاکل کېږي.

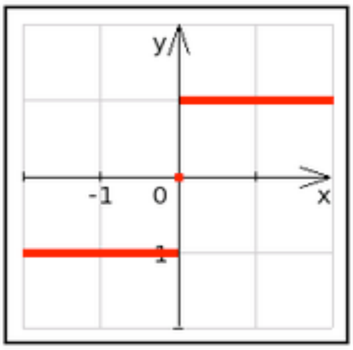
د اصليځانګي ــکونج $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ سره باور لري:

په لاندې کې Für د ... لپاره په مانا او sign سګنوم لوستل کيږي

$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, \\ \mathrm{sign}(y)\pi/2, \\ \varphi_H + \pi, \\ \varphi_H - \pi, \end{cases}$	د $x > 0,$ لپاره د $x = 0$ لپاره د $x < 0 \wedge y \geq 0,$ لپاره د $< 0 \wedge y < 0.$ لپاره

سيګنوم (لاتين : Signum نخبنه) فنکشن په رييل ګنونکربنه :

د فنکشن د مخنخبنو ګراف



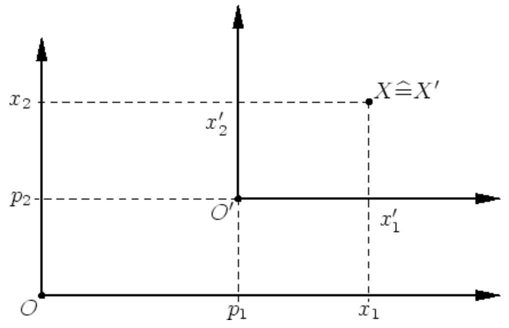
د رييل ګنونو خيره ونه ده په ډېرى {-1,0,1} کي

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړل (سیده یا سم کرښیز خوزښت یا انتقال) Translation

د سرچینې O کشولو سره و $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ته د برابر پاتیکیدونکي لور سره د یوه ټکي $X = (x_1, x_2, x_3)$ کواوردینات په لاندې توګه تغیر خوري

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3) \, .$$



خوزنده یا متحرک نسبي سیستم

د یوه د x -محور په لور د v چټکتیا سره څغلنده ګاډی په هواره (سطحه) برابرډوله خوزښت

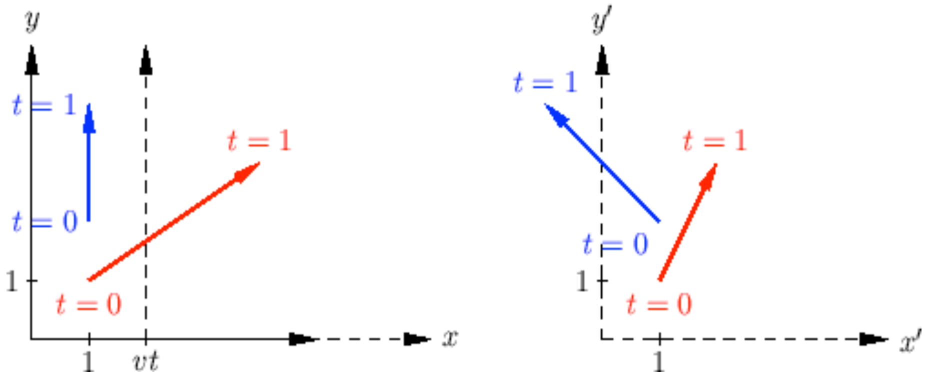
$$(x(t),\, y(t)) = (p + \alpha t,\, q + \beta t), \quad t \geq 0\,,$$

په پام کې نیسو ، نو کواوردینات یې په لاندې ډول تغیر خوري

$$x' = x - vt, \quad y' = y\,.$$

کتونکی یوه بله چټکتیا ریښتوني نیسي یا بله چټکتیا ګوري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بیلګي په توګه د یوه شي لپاره باور لري، چي د یوه وخت په یوون(واحد) کي د $v = 2$
لپاره له ټکي $P = (1,1)$ و ټکي $Q = (4,3)$ ته خوزي(سور غشی)

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3)\,.$$

د ریښتوني او کتونکي چټکتیا لپاره په ورته توګه باور لري

$$v_t = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}, \quad v_b = \sqrt{5}\,;$$

له دي خوزښت څخه خوزښت بتیاوالی برېښي.

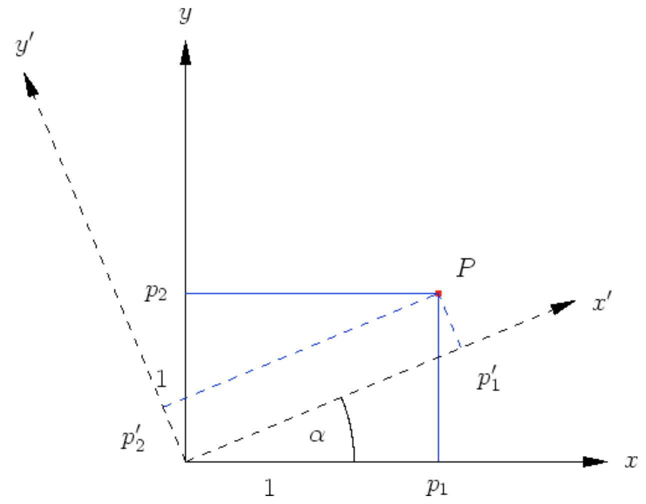
لیکونکي: اپپ، هولیګ

څرخون Rotation

د xy -هوارې یا سطحي څرخون په z -محور د یوه ټکي $P = (p_1, p_2, p_3)$
کواوردینات د α کونج سره ترانفورمي کیږي د لاندې سره سم

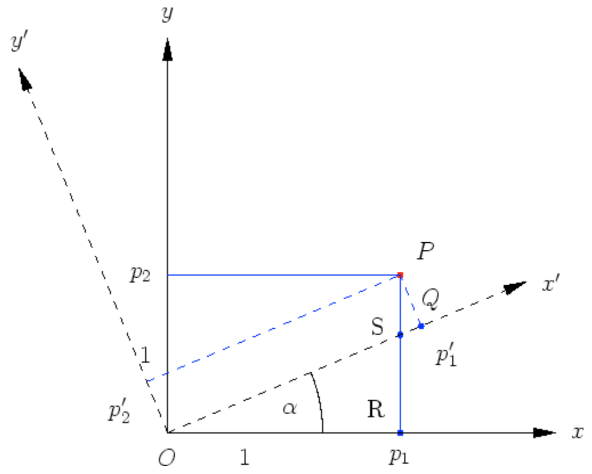
$$p_1' = \cos\alpha\, p_1 + \sin\alpha\, p_2, \quad p_2' = -\sin\alpha\, p_1 + \cos\alpha\, p_2, \quad p_3' = p_3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د yz - او zx -هوارو څرخون لپاره فرمولونه لاس ته راځي

ليکونکي: اپپ، هوليګ



لومړی پيژنو، چي

$$\sphericalangle(S, P, Q) = \alpha\,,$$

داپه دي معنا چي ولاړکونجيز درېګودی(مثلث) $\triangle(R, O, S)$ او $\triangle(Q, P, S)$ ورته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لومړي درېګوډي کې باور لري.

$$|\overline{OS}| = p_1/\cos\alpha$$

او

$$|\overline{RS}| = p_1\tan\alpha\,.$$

له دويم درېګوډي لاس ته راځي

$$p_2' = \cos\alpha\,|\overline{PS}| = \cos\alpha\,(p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \cos\alpha\,p_2 - \sin\alpha\,p_1$$

او

$$p_1' = |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1/\cos\alpha + \sin\alpha\,(p_2 - |\overline{RS}|)$$

$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,p_1 + \sin\alpha\,p_2$$

ليکونکی: اپپ، هولير

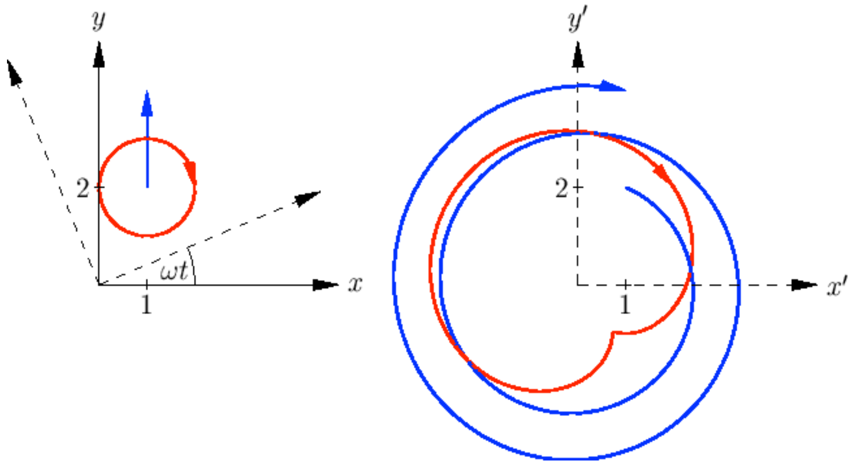
څرخنده يا څرخيدونی نسبي سيستم :

تابع کيږ د د سيده کرښيز او ګردي ډوله خوزښتونو د د خوزښت منحني ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$G: \quad (x,y) = (1,\, 2 + t/(2\pi)),$$
$$K: \quad (x,y) = (1 + \cos(t),\, 2 - \sin(t))\,.$$

ښي لور ته دواړه منحني يا کرې ديوهکونج   سره څرخيدوني نسبي سيستم   انځوروي،
دا په دې معنا چې داسې لکه په يوه کاروسل (هغه څرخيدوني شيان دي، چې کسان په
کې ګرځي) کې يوه کتونکي ته برېښي.



د کواودیناتو ترانفومیشن یا بدلون د سیده کرښیز خوزښت لپاره راکوي:

$$x' = c + (2 + t/(2\pi))s, \quad y' = -s + (2 + t/(2\pi))c$$

د لاندې سره

$$c = \cos(\omega t), \quad s = \sin(\omega t)\,.$$

يوه شپيرال منځ ته راځي، ځکه چې په نوکانو کې ضريب د ځکيدونکي t سره
لويږي.

دا جوړشوي 2 اوړونونه   وخت انتروال $0 \le t \le 4\pi$ په ګوته کوي.
د بدلې شوې کواودينات څخه د $\omega = 1$ سره د دايره ډوله خوزښت لپاره

$$x' = c(1 + c) + s(2 - s), \quad y' = -s(1 + c) + c(2 - s)\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

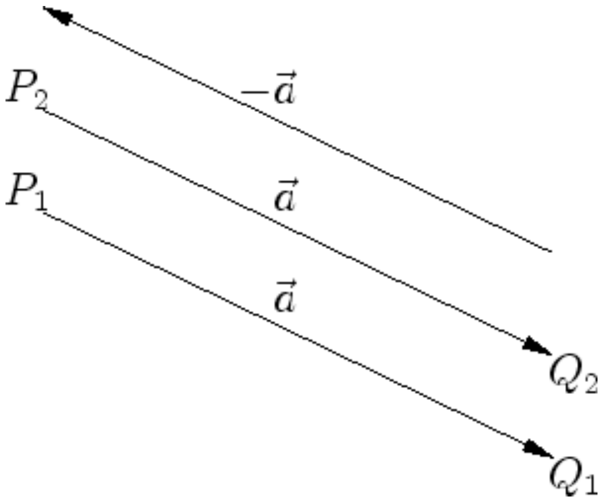
په ځرخون سيستم کې د خوزښتمنحني بڼه نه پسي تړلې پېژندل کيږي. لکه دا بېلګه چې په ګوتهکوي، کېدی شي د کتلو لور سملاسي تغير شي. کېدی شي چې د کتلو خوزښت منحني کې ګوډ يا ماتوالی راپيداشي. په ځرخېدونکي سيستم کې په يوه داسې زينګولار ټکي کې کتونکې چټکتيا صفر ده.

وکتورونه په فضا کې

يو وکتور يوه لوريزه ټوټه کرښه ده:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

دا وکتور له ټکي P څخه و ټکي Q ته په نخښه کوي. يا ښايي. په بديله توګه کيدی شي وکتور په فضا کې د P-راکښنې په توګه افاده شي او له يوه غشي سره په نخښه شي.



لکه د ځيرې څخه چې کتل کيږي برابر اوږده غشي په همغه (برابره) لور همغه(برابر) وکتورونه $\overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{P_2Q_2}$ انځوروي.

ځانکي انځورونه نسبت و سرچيني ته ځای وکتور بلل کيږي او د وکتور کواوردیناتونه داسې تعريفوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

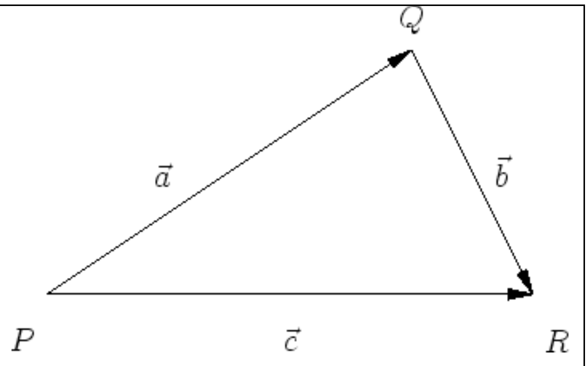
$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} .$$

د $\vec{a}$ کواوردیناتونه هم کیدی شي د د ټکو Q او P کواوردیناتونو په څېر و
شمیرل شي. بالاخره د

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

سره صفروکتور په نخښه کوو.

د وکتورونو جمعه(زیاتون):

د دوه وکتورونو جمعه د وکتورونو یو و بل ته یا یو بل پسي راکښنه ده $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}\,.$	

د کواوردیناتونو یا محورونو لپاره دا دي:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

د

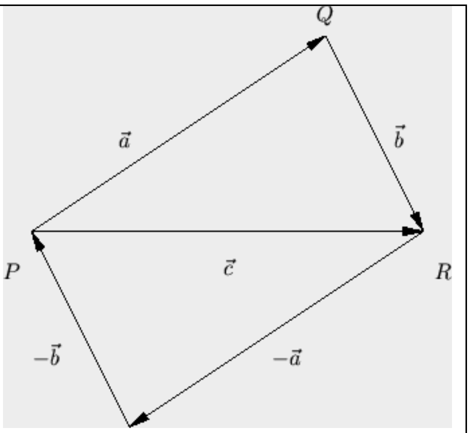
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

سره و $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ته مخامخ يا په ځت(برعکس) راکښنه $-\vec{a}$ په نخښه کيږي. په ځانګړې توګه باور لري

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\,.$$

(ليکونکي: هوليګ، موخ)



د ټکو

$$P = (1,1,1), \quad Q = (4,2,7), \quad R = (1,4,3)$$

لپاره وکتورونه

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

او

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} + \left(-\overrightarrow{QR}\right)$$

شميرلکيږي

لکه په څيره کې چې کښل شوي د کواورد يناتو لپاره باور لري:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 4-2 \\ 3-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-4 \\ 7-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-4 \\ 1-2 \\ 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= \qquad -\vec{c}$

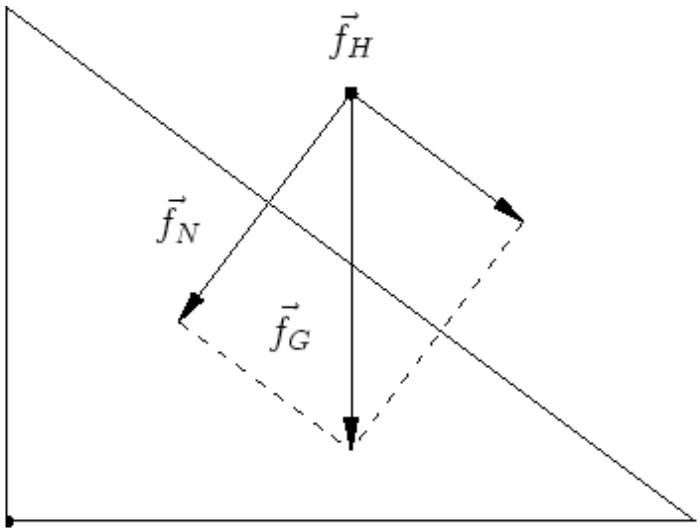
(ليکونکي: هوليګ، موخ)

د يوې کږې سطحې (هوارې) لاندې داسې يوه سطحه پوهيږو، چې د پروتوالي لور ته ميلان ولري.

لکه څنګه چې په څيره کې ليدل کيږي، کيدی شي د وزن زور $\vec{f}_G$ په دوه يو بل سره ولاړو يا عمود بوخو يا کمپوننتونو توټه شي(د زور توټه کونه د د دوه زور غبرګ اړرخيزې(مواز ی الاضلاع) سره) .

$$\vec{f}_G = \vec{f}_N + \vec{f}_H \,.$$

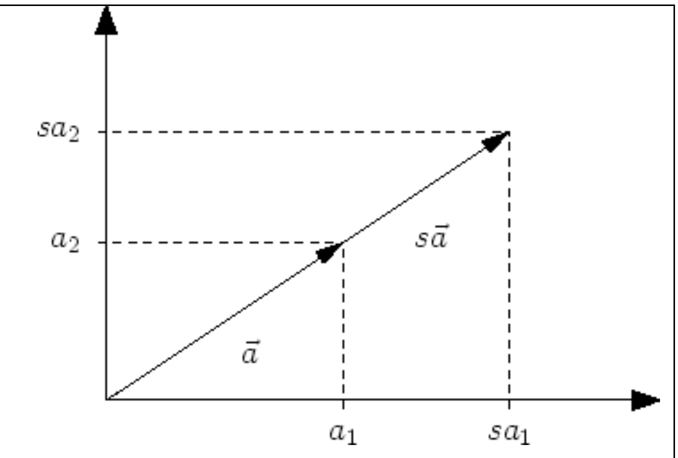
مايلې سطحې سره عمود عمودي زور(ولاړ زور) اغيزه لري. او ميلې هوارې سره غرګ کښته لور ته لوريزه بيره بيزه زوړند زور $\vec{f}_H$ اغيزه لري.



(ليکونکي: هوليګ، موخ)

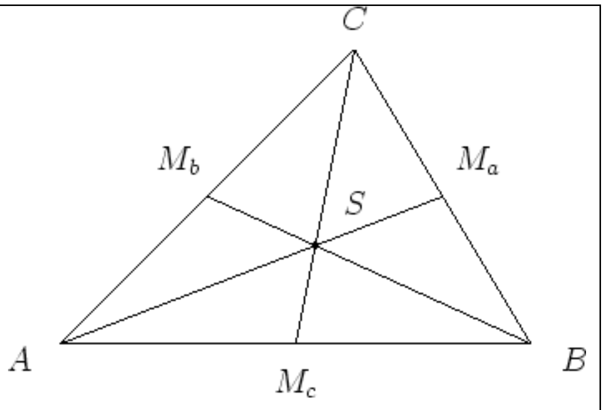
سکالار ضرب :

(c) ketabton.com: The Digital Library

 	وکتور $s\vec{a}$ یو s - واره راکښنه په کوته کوي، دا په دې معنا چې $s\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}sa_1\\sa_2\\sa_3\end{pmatrix}$ په ځانګې توګه $0\vec{a}=\vec{0}$ دی.

(لیکونکي هولیک، موخ)

د اړخنیمیو غوځېکي(نقاط تقاطع ناصف الاضلاع) :

 	د یوه درېګوډي(مثلث) اړخنیمۍ یو بل په دروندټکي(مرکزالثقل) S کې سره غوځوي. $\vec{s}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

د دې د ښوولو لپاره ځای د وکتور د اړخنیمۍ په ټکو لیکو $\overline{AM_a}$ په لاندې بڼه:

$$\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{m}_a-\vec{a})=\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}\right),\quad t\in[0,1]\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{AM_a}$ لپاره دی، نو دروند ټکی په $2:1$ نسبت وېشي

په ورته توګه اړخنیمیو $\overline{BM_b}$ او $\overline{CM_c}$ لپاره باور لري.

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(مطلق) ارزښت

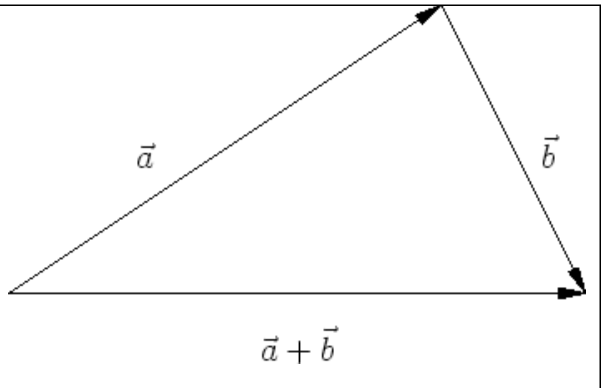
د $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ارزښت له P څخه د Q ته د غشي اوږدوالی دی همداسې له O و A ته، دا په دې معنا چې

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,.$$

په ځانګې توګه $|s\vec{a}| = |s||\vec{a}|$ دي.

یو وکتور د 1 (مطلق) ارزښت سره یوونوکتور (واحدوکتور) بلل کیږي.

درېګوډیز (مثلثاتي) نامساوات :

 	د دوه وکتوونو د جمعې (زیاتون) لپاره باور لري $$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert \le \lvert\vec{a}\rvert + \lvert\vec{b}\rvert$$ د برابروالي سره تیک هلته ، چې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ غبرګ(موازي) وي، داپه دې

(c) ketabton.com: The Digital Library

	معناچي $\vec{a} = s\vec{b}$ دي.

(ليکونکي هوليک، موخ)

د شميرنې قوانين :

د وکتورونو لپاره لاندې شمېرقوانين باور لري:

- Kommutativgesetz کموتاتيو قانون

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

- Assoziativgesetz: اسوشياتيو قانون

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

- Distributivgesetz: دېستريبوتيوقانون

$$s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

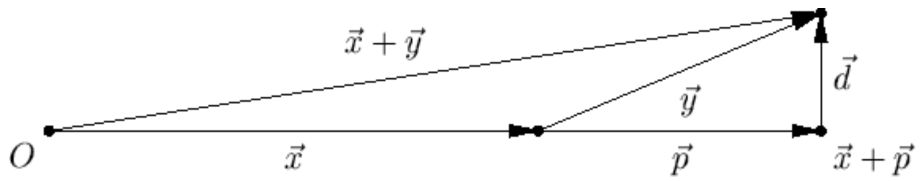
(ليکونکي هوليک، موخ)

(له باد را پيداشوې د لويو اوبو يا بحر په سر) هواجريانات

Drift eines Flugzeugs

يوه الوتکه په 800 km/h چټکتيا ختيز لور ته الوزي د يوه باد 50 km/h چټکتيا سره له WSW .

(c) ketabton.com: The Digital Library



که پروت محور د ختیز سره او ولاړ محور د شمال سره په نخښه کړښ یاوښايي، نو له

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \end{pmatrix}$$

سره د الوتکې چټکتیا او

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix}$$

د باد چټکتیا ښايي.

د یوه ساعت وروسته الوتکه تر

$$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

پورې الوتې. که له $\vec{p}$ سره په کرښه د $\vec{y}$ عمود یا orthogonale پرېوستون د $\vec{x}$ په لور وښايو، نو ټولیزه چټکتیا له کمپوننتو څخه

$$\vec{x}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 800+50\cos(\pi/8) \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 846.19 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د ختیز لور ته   او دریفت څخه

د شمال لورته

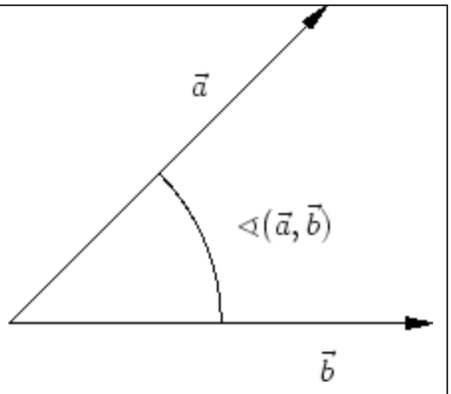
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{d} = \vec{x} + \vec{y} - (\vec{x} + \vec{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\sin(\pi/8) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 19.13 \end{pmatrix}$$

جوړيږي.

(ليکونکي هوليګ، اپپ)

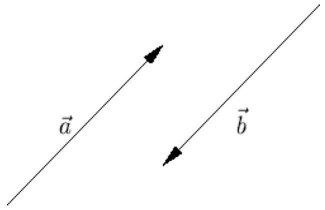
کونج يا زاويه :

	د $\vec{a},\vec{b} \neq \vec{0}$ لپاره سړی د $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$ د دواړو کونجونو کوچنی کونج ښايي، چې د وکتور سره په نخښنه شوي غشي سره ګډ ککرئ ټکی د رأس نقطه جوړوي.

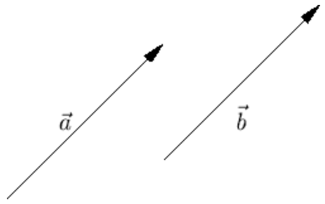
دواړه وکتورونه عمود دي، $\vec{a} \perp \vec{b}$ ، که کونج له $\pi/2$ سره برابر وي. له دې سره قراردادکيږي، چې صفروکتور په هر وکتور عمود يا ولاړ دربېدلی.

(ليکونکي هوليګ، موخ)

لاندې ځيرې يو څو نمونه يي حالتونه د ليد کوي.

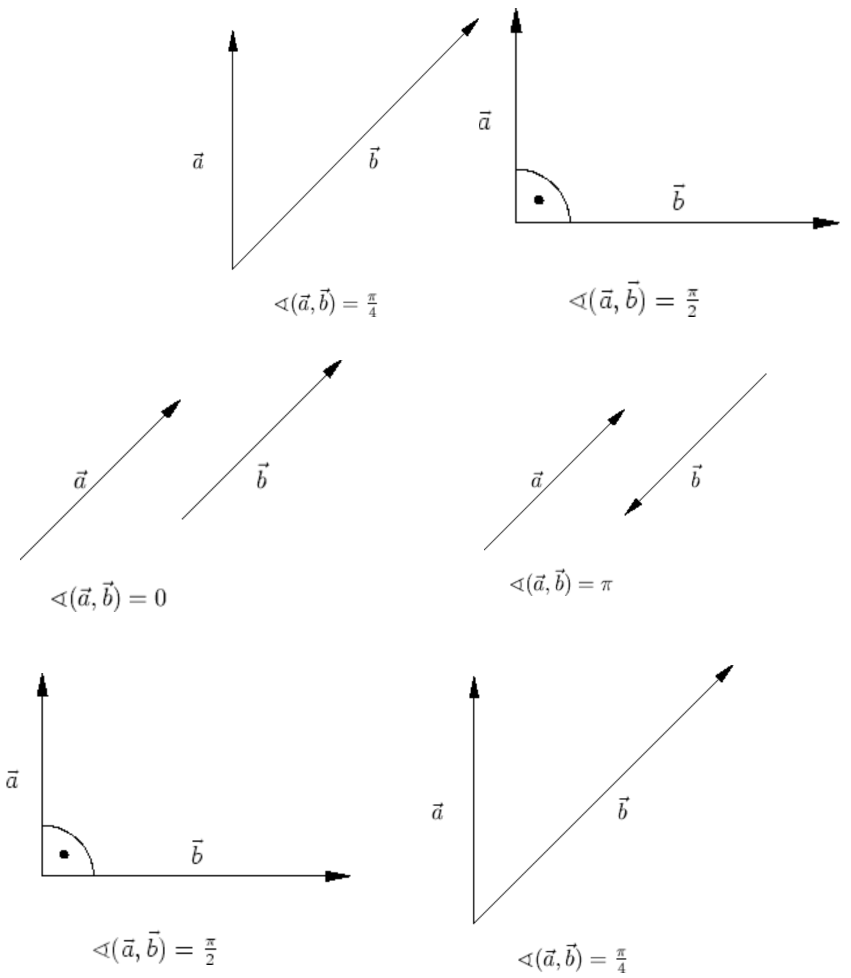


$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi$

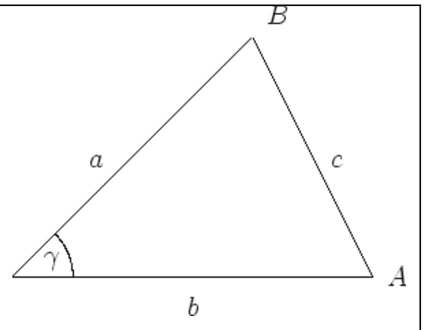


$\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کوساین جمله :

په یوه درېګوړي کې په کوم چې د اړخ $\overline{AB}$ مخامخ کونج γ پروت دی باور لري $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$	

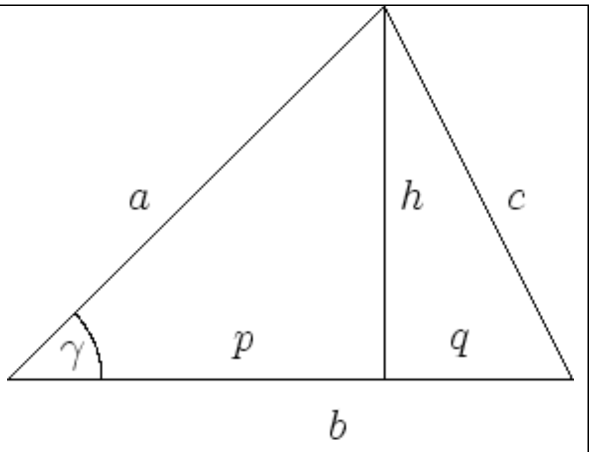
(c) ketabton.com: The Digital Library

نو په ځانګړې توکه لاس ته د $\gamma = \pi/2$ لپاره د پیتاګوراس جمله راځي:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

د ښوونې لپاره یې د پیتاګوراس له جملې کار اخلو.

	باور لري $c^2 = h^2 + q^2, \quad h^2 = a^2 - p^2$ همداسې $q = b - p, \quad p = a\cos\gamma\,.$ له دې سره لاس ته راځي $c^2 = (a^2 - p^2) + (b - p)^2$ $= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,,$ څه چې د ښوولو وو. (لیکونکي هولیګ، موخ)

سکالار ضرب :

د دوه وکتورونو ضرب د

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

د له لارې تعريف دی

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

او

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}.$$

د سکالار ضرب د کواوردينات د انځورولو له لارې لاس ته راځي

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

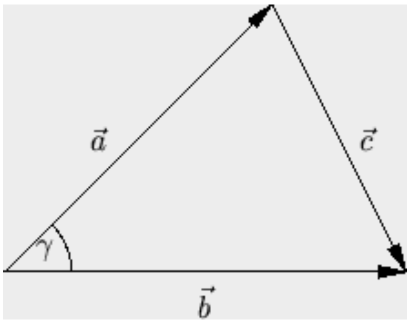
همداسې

$$\left(s\vec{a} + r\vec{b}\right) \cdot \vec{c} = s\vec{a} \cdot \vec{c} + r\vec{b} \cdot \vec{c},$$

دا په دې معناچې د ضرب ورسره بلد قوانين باور لري.

(ليکونکي هوليګ، موخ)

د دواړو ورته واليو انځورونه د کوساين جملې له لارې لاس ته اځي:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma\,.$$

که داړه مربع وې کيڼ لور ته راوړل شي،نولاس ته راځي

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\,.$$

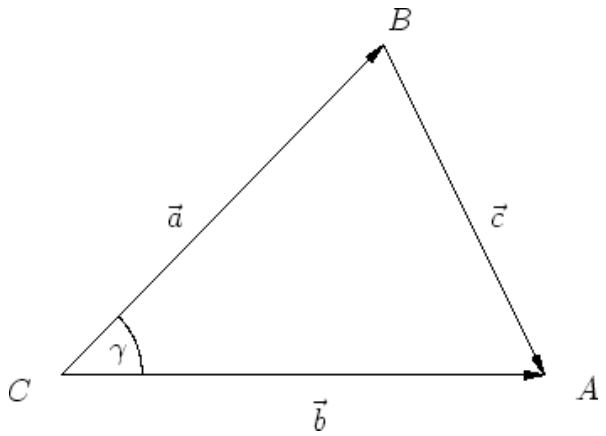
د بدلون $c_i^2 = (b_i - a_i)^2$ څخه وروسته دواړه مربع وې يو بل سره پورته کوي يا سره له منځه ځي، او پاتې ګډ ترمونه د(2-) -ځله سکالار ضرب سره يو بل سره سر خوري.

دا ښېره شوی مثلث لاندې ګوډونه لري

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

او دی

$$\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



د γ کونج د سکالار ضرب په مرسته شمېرل کېدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{6\sqrt{32}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

لاس ته راځي $\gamma = \pi/4$ ، لکه ترڅلې له کواوردیناتونو څخه د لیدنې دي. د دې راوړل شوې بېلګې په بنسټ کېدی شي د کوساین جمله هم وشمېرل شي. باور لري

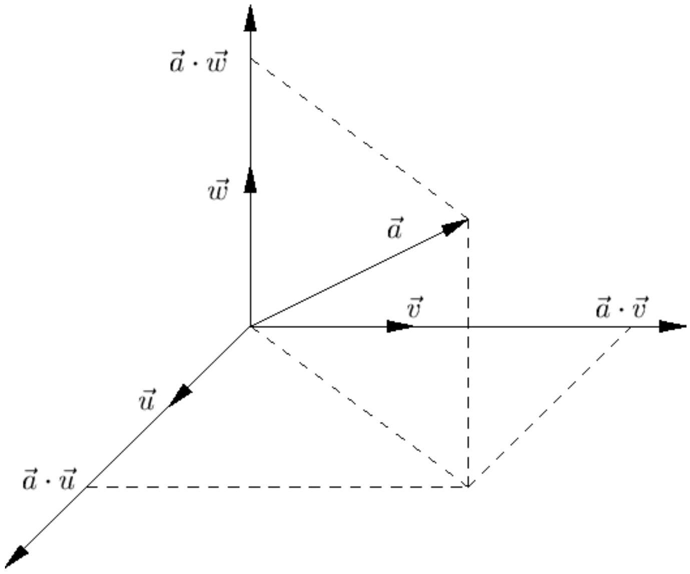
$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48\,,$$

او هم د $-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2}$ سره توفق مومي یا سر خوري.

(لیکونکي هولیک، موخ)

اورتوګونال یا یو په بل ولاړ(عمودي) بنسټونهOrthogonalbasis

اوروتګونال بنسټ له درې جوړه اورتوګونال وکتورونو $\vec{u}$,$\vec{v}$,$\vec{w}$. څخه جوړ دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځیره کې چې کښل شوی دی، کیدی شي هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{a} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{u})}{|\vec{u}|^2}\vec{u} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{v})}{|\vec{v}|^2}\vec{v} + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{w})}{|\vec{w}|^2}\vec{w}$$

له لارې انځور شي. د زیاتوونو (د جمعې برخو) د بنسټیزو وکتورونو تولید شوی پرپوستونونه دي، او د ضریبونو لپاره باور لري

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2} = |\vec{a}|^2 .$$

که وکتورونه $\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}$ نورمي یعنې یو په بل ولاړ (عمود) وي، نو د اورتوګونال بنسټ څخه غږېږو. په ځانګړې توګه لرو:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

د کارتیزي کواوردینات سیتم د کانونیکي اورتوګونال بنسټ

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

لپاره

(لیکونکي هولیګ، موخ)

دا چې هر وکتور $\vec{a}$ د کرښیز کمبینیشن

$$\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2} + \beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2} + \gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې انځورېدلای شي، هندسي تړلی لیدل کیږي

د ضربیونو د ټاکلو لپاره د بنسټ وکتورونو سره سکالار ضرب جوړیږي . دا چې

$$\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}=1, \quad \vec{v}\cdot\vec{u}=\vec{w}\cdot\vec{u}=0\,,$$

د سکالار ضرب د کرښیزوالي له لارې لاس ته راځي :

$$\vec{a}\cdot\vec{u}=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\alpha\,.$$

په ورته توګه د β او γ لپاره ورته فرمول تصدیقیږي. د ضریبونو د مربع جمعې فرمول لپاره سرې د لاندې ضربولو له لارې

$$|\vec{a}|^2=\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\left(\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}+\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right).$$

ښوول کیږي.

دا هم په ساده توګه لیدل کیږي، چې پرېوستونو ته کمښتوکتورونه

$$\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}, \quad \vec{a}-\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}, \quad \vec{a}-\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

هر یو په اړونده بنسټ وکتور باندې عمود یا ولاړ دی:

$$\left(\vec{a}-\alpha\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\right)\cdot\vec{u}=\left(\beta\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|^2}+\gamma\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\right)\cdot\vec{u}=0\,.$$

(لیکونکي هولیګ، موخ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

نسبت اورتوګونال بنسټ ته

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

وکتورونه

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$$

لاندې ضربيونه لري.:

$\vec{a} \cdot \vec{u}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$
$\vec{a} \cdot \vec{v}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \sqrt{3}$
$\vec{a} \cdot \vec{w}$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\sqrt{6}.$

له دې سره انځورونه لاس ته راځي:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v} + \frac{3}{2}\sqrt{6}\vec{w}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب ، صلیبي یا چلیپا ضرب:

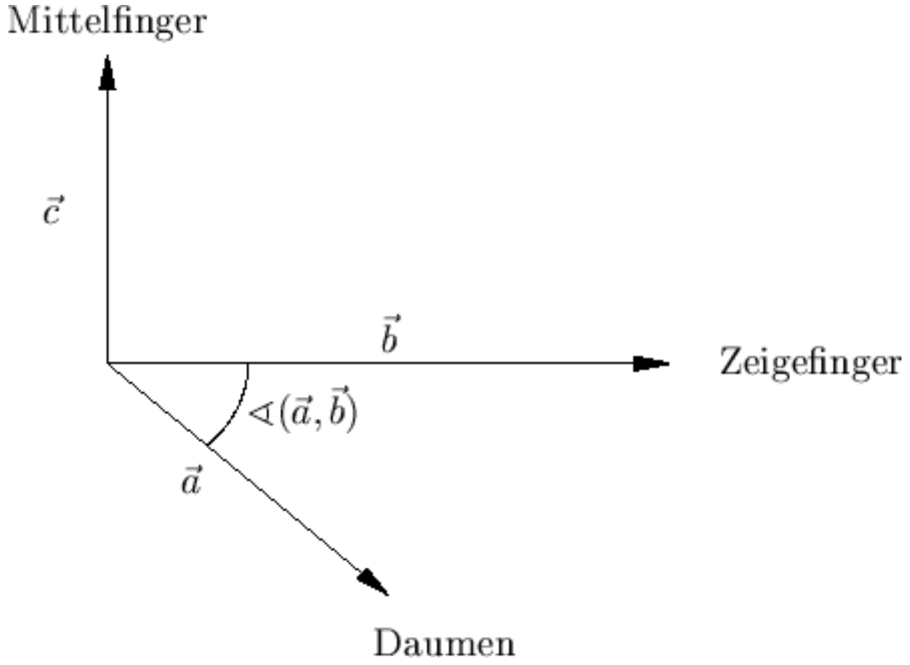
وکتور

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتوګونال دی، د ،، ښي –لاس- قانون،، لوریز دی او اوږدوالی

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}))\,.$$

لري. (د ښیرې د الماني پښتو: منځګوته، ګوتلکه، غټه ګوته)



(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل کي الماني: پورته: منځګوته، ښی لور ته: نخښ ګوته، کښته لور ته غټه ګوته

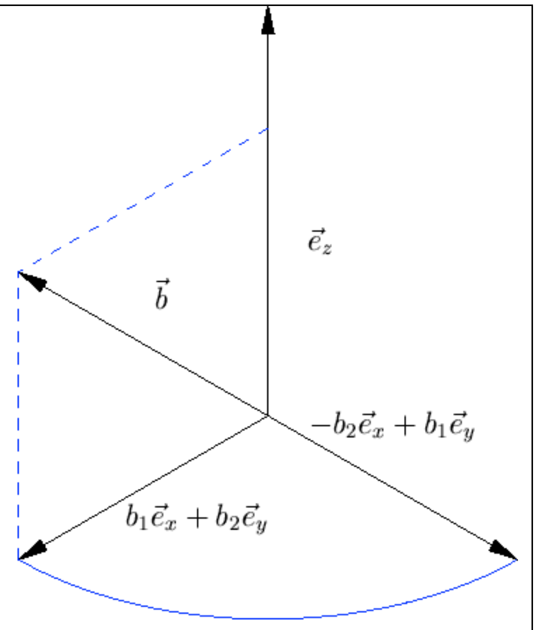
په ځانګړې توګه باور لري $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ د $\vec{a} \| \vec{b}$ لپاره او $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|$ د $\vec{a} \perp \vec{b}$ لپاره .

بدیل یې وکتور د

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

سره تعریفوي.

(لیکونکي : هولیک، ایپ)



د دې لپاره چې د دواړو تعریفونو ورته والی وښایو، لومړی په پام کې نیسو، چې دواړه انځورونې په $\vec{a}$ او $\vec{b}$ کې ګرښیزې دي، دا په دې معنا چې سکالار ضرب او وکتور جمعي سره زعموړ دي. د کواوردینات انځورنې لپاره کیدی شي ادا ترلې پسې وشمیرل شي. فقط زیاتونوالی)حمعه کیدنه) د هندسي تعریف لپاره ځرګنده توګه روښانه دی.

لومړی ښایو، چې .

$$\vec{e}_z \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه له ځیرې چې لیدل کیږي، وکتور ضرب لاس ته راځي، داسې چې که وکتور $\vec{b}$ په xy -سطحه پرېوستل شي او بیا په کونج $\pi/2$ و ځرخول شي. دا چې د پرېوستون اودوالی

$$\left|\vec{b}\right| \sin(\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}))$$

دی، نو پورتنی فرمول لاس ته راځي.

د ځانګړې انځورونې ځخه په دویمه کمپوننت کې د سیده پسې شمېرنې کرښیزوالی لاس ته راځي، ځکه چې بې د ټولیز محدودیت ځخه د لومړي وکتور لور د $\vec{e}_z$ په حیث ټاکو.

په ورته توګه لومړی کمپوننت هم همداسې کاروو.

بسیا کوي، چې د $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ کانونیکي بنسټ وکتورونو کمبینیشن لپاره وراته والی و ازمایل شي.

(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د تعریف یا پیژند د ځرګندونې لپاره د وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ او $$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

وکتوري ضرب $\vec{c}$ شمیرل کیږي.

یو و $\vec{a}$ او $\vec{b}$ ته اورتونال وکتور دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \parallel \vec{c},$$

کوم چې همدا اوس ټیک لوریزوالی لري. له

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

لاس ته راځي : $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$. له دې سره

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

دی او ورپسې

$$\vec{c} = \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

په بدیله توګه په ساده توګه تحلیلي تعریف

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

لاس ته اځي

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 3 \\ 2\cdot 3 - 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 - 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(لیکونکي: کلاوس، هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ستاندارد بنسټ لپاره باور لري

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0}\,.$$

اړونده فرمولونه د په خوښه ، د ،،ښي-لاس-قانون،،سره سم لوریزي اورتوګونال بنسټونو لپاره باور لري.

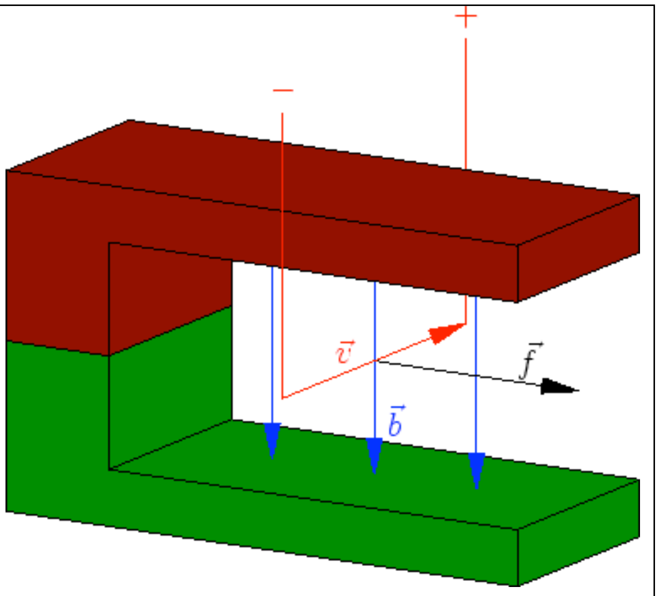
(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د لورنځ زور Lorentzkraft

په یوه الکترون $-e$ ، چي د $\vec{v}$ چټکتیا سره په یوه مقناطیسي ورشو $\vec{b}$ کې خوزي یا حرکت کوي، د لورنځ زور اغیز لري

$$\vec{f} = e\vec{b} \times \vec{v}\,.$$

دا په دا ځیره شوي ازمایښت نظم د بریښنا جریان تیروني د $\vec{f}$ په لور لوریزه اغیزه لري..



(لیکونکي : هولیګ، اپپ)

د وکتور ضرب لپاره قانونونه:

د وکتور ضرب لپاره لاندې قوانین باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- اسوښیاتیو قانون Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)$$

- کرښیزوالی Linearität

$$\left(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2\right) \times \left(\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2\right) = \alpha_1\beta_1\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_1\beta_2\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2\right) +$$

$$\alpha_2\beta_1\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_2\beta_2\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2\right)$$

- غبرګاړخیز یا موازی الاظلاع د سطحي مساحت، هغه چې له وکتورونو a او b غزېدلي، د هغه د ضرب مطلق ارزښت دی، نو $|a \times b|$.
- د ګراسمن کتمتوالی Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- د لاګرانج کتمتوالی Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

(لیکونکي: اپپ،هولیګ،کیمرلي)

انتیسیومتري او کرښیزوالی د وکتورضرب د کواوردینات انځوروني څخه تړلی لیدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کټمټوالي د ښووني لپاره کیدی شي بې له ټولیزو بندیزونو $\vec{a} = \vec{e}_x$ ونیول شي او باید په $\vec{b}$ کې د کرښیزوالي په بنسټ فقط حالتونه $\vec{b} = \vec{e}_y$ او $\vec{a} = \vec{e}_x$ وڅېړل شي، د $\vec{a} = \vec{b}$ لپاره د کټمټوالي دواړه اوخونه په ساده توګه صفر دي.

په لومړي حالت کې د کیڼ اړخ د ګاسمن کټمټوالی لاس ته راځي

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

دا د ښي اړخ

$$c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$$

سره یوغږیز کیږي. په دې راوړل شوي ځانګړي حالت ($\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$) کې د لاګرانژ کټمټوالی

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - c_2 d_1,$$

هم ټیک دی.

په ورته توګه د $\vec{b} = \vec{e}_z$ لپاره هم دلیل راوړل کیږي.........

کرښیزوالی کیدی شي د غبرګیزوالی لپاره وکارول شي. دا لاندې یي بیلګه ده.

$$\left(3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \quad 6\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= \quad 5\begin{pmatrix}0-2\\1-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\5\\0\end{pmatrix}$$

د گراسمن - او لاگرانژ کتوتوالی وکتور ضرب په ساده توگه د شمیرلو سکالار ضرب ته بیرته بیايي. د بېلگې په توگه دی

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

او

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\cdot\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}\right)=0\cdot6-12\cdot1=-12.$$

(لیکونکي: اپپ، هولیگ)

د ایپسیلون - تنزورEpsilon-Tensor

د ε–تنزور

$$\varepsilon_{i,j,k}\in\{-1,0,1\},\quad i,j,k\in\{1,2,3\}\,,$$

د دوه برابرو پیژندنخښو (ایندکسونو) سره صفر دی او دوه جوړه ډوله مختلفو ایندکسونو سره لاندې ارزښت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1\,,\\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1\,.\end{aligned}$$

نو دا د ځيکليکي پرموتيشن (ځای بدلون) لاندې اینواریانت (تغیر نه خوړونکی) دی او د پيژندنخښو يا ايندکسونو د بدلون سره مخنخښه بدلوي.

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د ــتنروز په مرسته کيدی شي د وکتور ضرب $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ په لاندې بڼه وليکيل شي.

$$c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

شپات ضرب

شپات ضرب

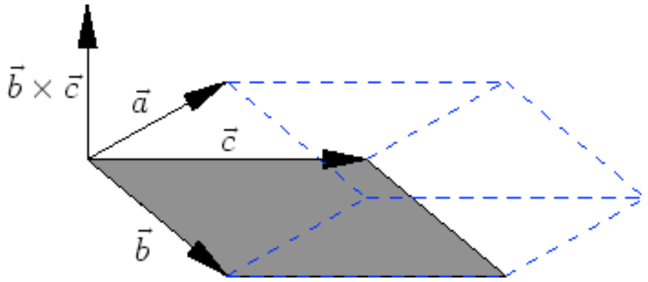
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) =$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

ترمخنخښي پورې د له درې وکتورونو $\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}$ څخه غزول شوی شپات ډکي يا حجم سره يو غبړيز شي يا برابر شي.

(غبرګ سطحيز)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ε– تنزور په مرسته کېدی شي د غبرګخواییز یا شپاټ ضرب په لاندی بڼه هم ولیکل شي:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د $\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$ سره

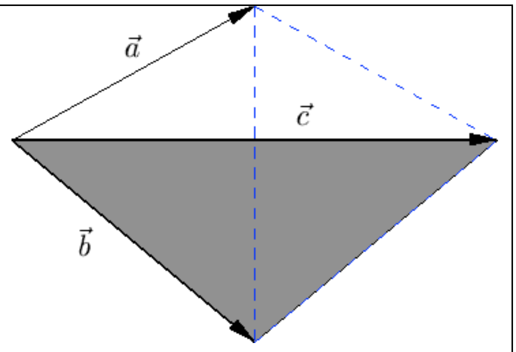
$$h = |\vec{a}| \left| \cos(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{d})) \right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}|$$

د شپاټ یا غبرګ سطحیز جګوالی دی. دا چې $f = |\vec{b} \times \vec{c}|$ د کربنیز شوي غبرګ اړخیز   د سطحې خوندیونه ده، د ډکي یا حجم لپاره لاس ته راځي:

$$hf = \left| \vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right) \right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| \,.$$

د یوه څلور سطحیز (حجم) شمیرنه Volumen eines Tetraeders

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>د یوه درې وکتورونو $\vec{a}$, $\vec{b}$ او $\vec{c}$ څخه غزېدلی تیتراید ډکی یا حجم V دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|\,.$$</td>
</tr>
</table>

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د یوه تیترایدر(څلور سطحیز) ډکی V داسې شمیرل کیږي

$$V = \frac{1}{3}Gh\,,$$

چیرته چې G بنسټ سطحه ده او h جګوالی په ګوته کوي. که په بام کې ونیول شي، چې G نیم دومره لوی دی، لکه د غبرګسطحیز $G_{\rm Spat}$ سطحه، چې له درې وکتورونو غزېدلې ، نو لاس ته

$$V = \frac{1}{6}G_{\rm Spat}h = \frac{1}{6}V_{\rm Spat} = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

راځي، د غبرګطحیز $V_{\rm Spat}$ په مرسته .

(لیکونکي: اپپ، هولیګ)

د څلور سطحیز V ډکی ، چې له وکتورونو

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غزېدلی ، دی

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,.$$

د غبرګسطحیز یا ذوذنقي خویونهEigenschaften des Spatprodukts

د غبرکسطحیز ضرب په هر Argument کي کرښیز دی او سربیره پردي دا لاندې نور خویونه لري

- ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون : zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- کرښیز بلواکوالی یا تابعیت

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c},$$

د لږ ترلږه یوه سکالار α, β, γ سره د 0 سره نابرابر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- لوریزونه Orientierung:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] > 0$$

د هر ښي سيستم لپاره

(ليکونکي: اپپ، هوليګ)

د کواوردیناتونو یا پروت ولاړ ارزښتونو شمیرنه

وکتورونه $\vec{u}$, $\vec{v}$ او $\vec{w}$ یو ریښتونی غبرګهواریز(سطحیز) غزوي، نو یو په خوښه وکتور $\vec{x}$ کیدی شي د کرښیز کمبینیشن

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

په څیر انځور شي د لاندې ضریبونو سره:

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]}, \quad \beta = \frac{[\vec{x},\vec{w},\vec{u}]}{[\vec{v},\vec{w},\vec{u}]}, \quad \gamma = \frac{[\vec{x},\vec{u},\vec{v}]}{[\vec{w},\vec{u},\vec{v}]}.$$

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

د

$$\vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

لپاره سکالار ضرب د $\vec{v}\times\vec{w}$ سره جوړوو، نو لاس ته راځي

$$\vec{x}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) \quad = \alpha\,\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha = \frac{[\vec{x},\vec{v},\vec{w}]}{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]},$$

داچې $\vec{u}$ $\vec{v}$, او $\vec{w}$ يو رينتونى غبرګسطحيز غزوي، داپه دې معنا چې $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$ دي. د β او γ لپاره سړى په روته توګه مخ ته ځي.

(ليکونکي اپپ،هوليګ)

که وکتور

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

د وکتورونو

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

د کرښيز کمبينشن په څير انځورول غواړو، نو لاس ته راځي

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}] = 2$$

$$[\vec{x},\vec{v},\vec{w}] = 4, \quad [\vec{x},\vec{w},\vec{u}] = -4, \quad [\vec{x},\vec{u},\vec{v}] = 8$$

او له دې سره

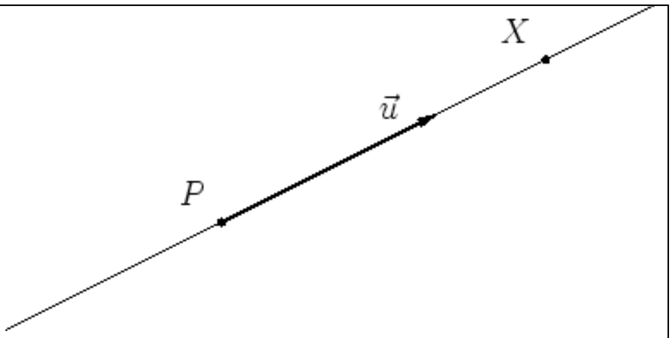
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{x} = \frac{4}{2}\vec{u} - \frac{4}{2}\vec{v} + \frac{8}{2}\vec{w}$$

$$= 2\vec{u} - 2\vec{v} + 4\vec{w}\,.$$

(لیکونکي اپپ،هولیګ)

ټکي – لور – بڼه:

	په یوه کرښه ټکی X له P د $\vec{u}$ په لور کېدی شي د $\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$ سره انځور شي.

په ورته توګه باور لري

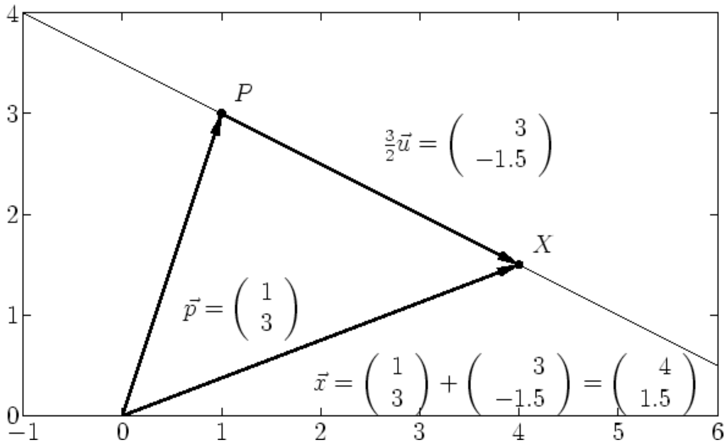
$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1,2,3\,,$$

د ځای-وکتور $\vec{x}$ کواوردیناتو لپاره.

(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

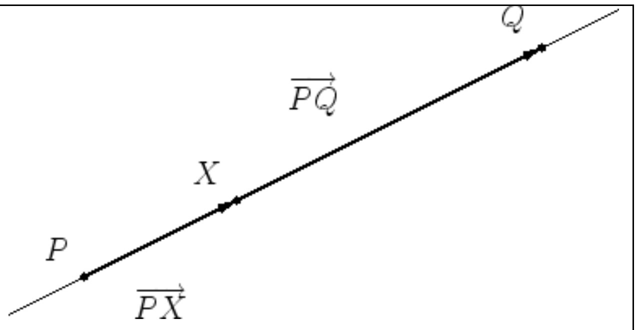
ځېره د یوې کرښې د ټکي-لور-بڼه د لیدلو کوي د په د پاسه ټکي $P = (1,3)$ او $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لور سره. د کرښې د X ټکی پارامتر $t = 3/2$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

دوه – ټکي – بڼه :

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه $P \neq Q$ ټکو تیریږي کیدی شي په بڼه $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$ انځور شي. د $t \in [0,1]$ پارامتر ارزښت ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ راکوي.	

په ورته توګه

د ځای-وکتور $\vec{x}$ د کواوردینات لپاره باور لري

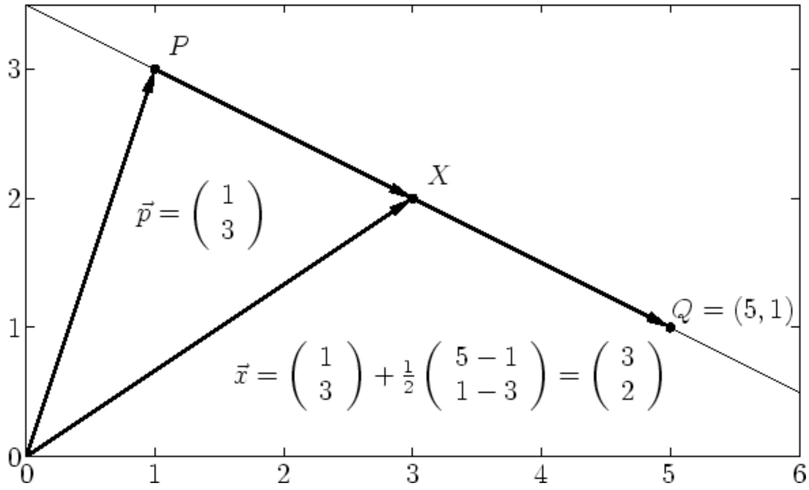
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3\,,$$

(ليكونكي ،هوليګ،هيورنر)

د $t \in [0,1]$ لپاره د دوه-ټکو-بڼې سره ټکی X ټوټه کرښه $\overline{PQ}$ په $t:(1-t)$ نسبت ويشي.

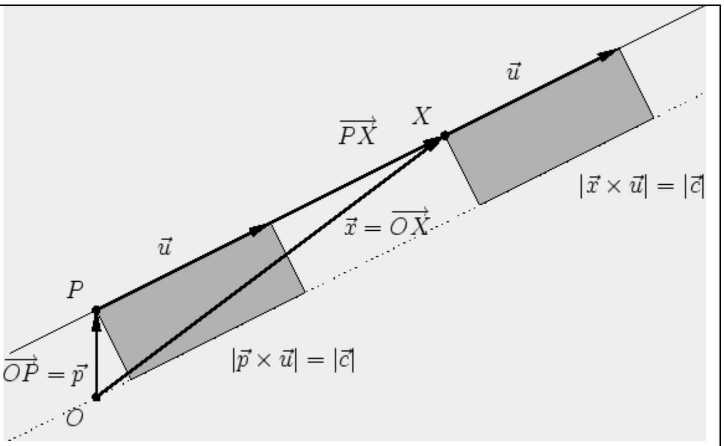
په ځانګړې توګه د P او Q ټکو ترمنځ منځ ټکو پارامتر $t = 1/2$ په ګوته کوي.



(ليكونكي ،هوليګ،هيورنر)

لحضوي – يا سترګورپ بڼهMomentenform

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه کرښه د X ټکی چې له دوه ټکو P د $\vec{u}$ په لور تیریږي کیدی شي د $\overrightarrow{PX}\times\vec{u}=\vec{0}$ په بڼه ولیکل شي.	

په ورته توګه د ځایوکتور لپاره باور لري.

$$\vec{x}\times\vec{u}=\vec{c},\quad \vec{c}=\vec{p}\times\vec{u}\,.$$

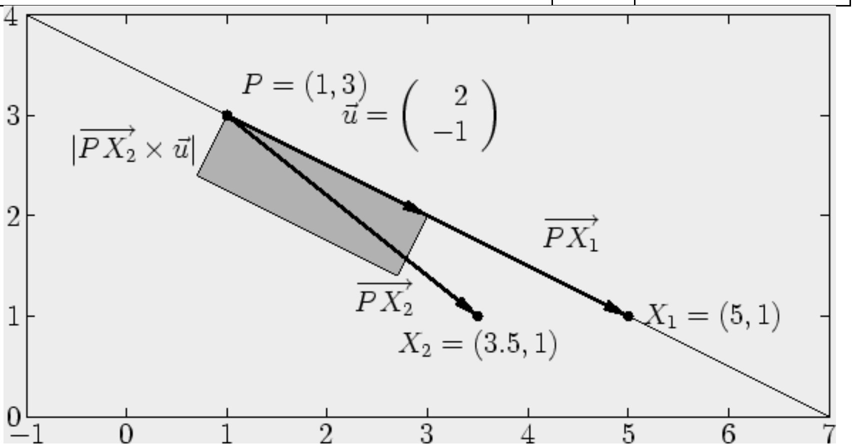
(لیکونکي ،هولیګ،هیورنر)

د یوې کرښې لحظوی ـبڼه کېدی شي استعمال شي، چې ایا یو ورکړشوی ټکی X په یوه کرښه پروت دی. د دې ځیره شوې بیلګې لپاره د X_1 ټکي لپاره ورکوي:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX_1}\times\vec{u} &= \left(\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\4\cdot(-1)-2\cdot(-2)\end{pmatrix}=\vec{0}\,.
\end{aligned}$$

د دې برعکس د X_2 ټکي لپاره لاس ته راځي:

$\begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$=$	$\overrightarrow{PX_2} \times \vec{u}$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$	$=$	



د ټکي ــکرښې واټن:

په يوه کرښه د يوه ټکي Q پروجکشن(پرېوستون) X چې له P تيريږي د لور سره لاندې پوره کوي

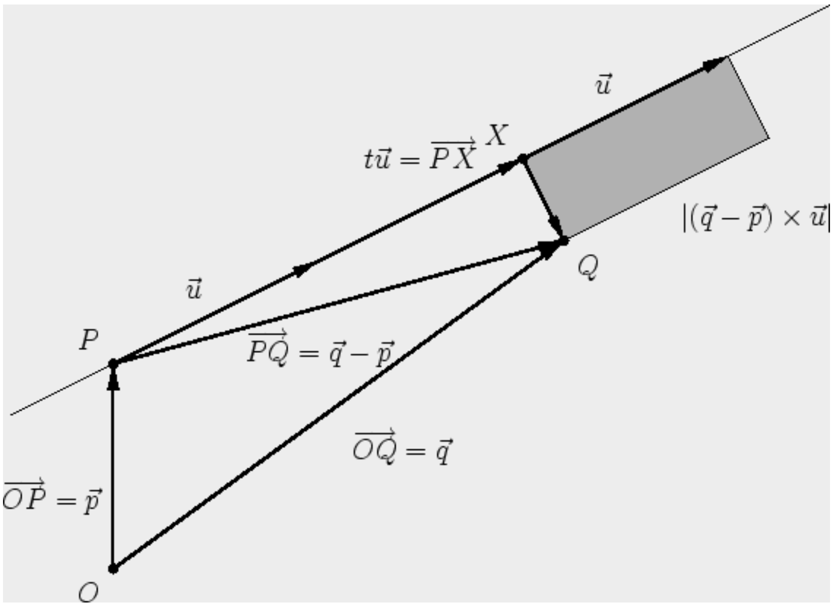
$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t = \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}.$$

له دې څخه د په حيث

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}.$$

واټن لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

په کربنه د ټکي Q پرېوستون X لپاره وکتور $\overrightarrow{XQ}$ په $\vec{u}$ عمود- يا نيغ ولاړ دی.

دا د سکالا ضرب له لارې ازمايل کېدی شي:

$$\overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} =$$

$$\left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right)\cdot\vec{u} = (\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u} - \frac{(\vec{q}-\vec{p})\,\vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0\,.$$

د چليپا يا ومتوري ضرب تعريف له مخې باور لري

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\left(\sphericalangle\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)$$

او له دې سره د واټن d لپاره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \quad \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right) =$$

$$= \frac{\left|\overrightarrow{PQ}\right| \, |\vec{u}| \, \sin\left(\sphericalangle\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{u}\right)\right)}{|\vec{u}|}$$

$$= \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \, .$$

(ليکونکي ،هوليګ،هيورنر)

که ټکی $Q = (3, 3, 3)$ په کرښه پرېيستل شي

$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

نو د پروجکشن په حيث د ځای وکتور سره ټکی لاس ته راوړي

$$\vec{x} = \vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \, \vec{u} \quad =$$

$$= \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 0\cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

واټمن

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{(2+0)^2 + (0-1)^2 + (1-2)^2}{3}} = \sqrt{2},$$

د

$$\left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}.$$

سره یو غږیز دی.

(لیکونکي:هولیګ، هیورنر)

د دوه کربنو واټن :

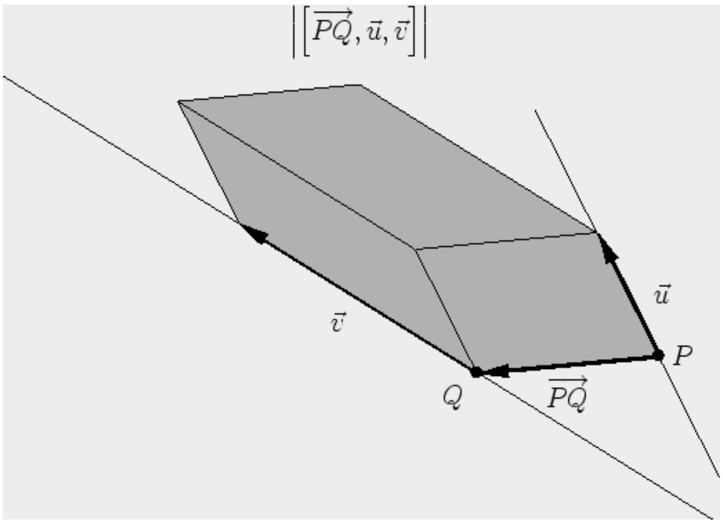
د دوه کربنو ، چې له ټکو P ، Q او د لورو $\vec{u}$, $\vec{v}$ سره ورکړ شوې دي واټن دی

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} ,$$

که $\vec{u} \nparallel \vec{v}$ وي. د غبرګو کربنو پاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}\,.$$



دوه کرښې بادمايلي windschief بلل کيږي، که غبرګې نه وي او مثبتې(زياتيز) واټن ولري..

(ليکونکي:هوليګ، هيورنر)

که

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

د ټکو ځای وکتورونه وي د خورا لنډ واټن سره، نو

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}$$

دواړو لوروکتورونو سره عمود يا ولاړ دی، يعن غبرګ   وه

$$\vec{c} = \vec{u} \times \vec{v}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته.

دا چې د يوه وکتور اوږدوالی د هغه مطلق ارزښت ضرب يوون (واحد)وکتور سره برابر دی لاس ته راځي:

$$d = |\overrightarrow{XY}| = \left|(\overrightarrow{PQ} + t\vec{v} - s\vec{u}) \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| = \left|\overrightarrow{PQ} \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\right| ,$$

او له دې سره غوښتونکی فرمول.

د غبرګو کرښو لپاره هغه د يوه ټکي واټن له کرښې سره فرمول و کاروي.

(ليکونکي:هوليګ، هيورنر)

کرښې

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad h: \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

دا لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{\left|\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(1-(-2))^2+(1-1)^2+((-2)-1)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

(ليكونكي:هوليگ، هيورنر)

د الوتنې لارې Flugkorridore

په ساده توګه نيسو، چې الوتکه په سيده لار له الوتنځای څخه و موخې ته ا لوزي او د التنلار له سيده کربنتوتو څخه جوړه ده، نو د يوې الوتنې لپاره له شتوتګارت (S) Stuttgart څخه و کوپنهاګن ته د ځګيدنې لار

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in [0,8]$$

او د يوې الوتنې لپاره له فرانکفورت (F)څخه قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in [0,3].$$

که د ساده وينا څخه مخ ته لاړشو، چې الوتکه په سيده لار د د الوتځای څخه و موخه ځای ته الوزي او د الوتنې لار له سيده کربنتوتو ځخه جوړه ده، نو د شتوتګارت S څخه د کوپنهاګن ته د يوې الوتنې د ځګيدنې الوتنلار ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g : \overrightarrow{SX} = s \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad s \in [0, 8]$$

او د یوې الوتنې لپاره له فرنکفورت F څخه و قاهرې ته

$$h : \overrightarrow{FX} = t \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad t \in [0, 3] .$$

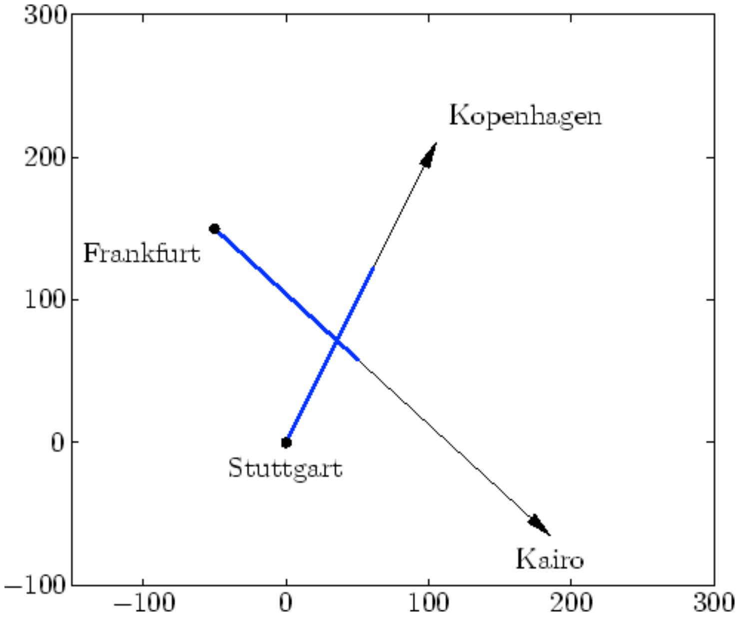
که د کواوردینات پیل شتوتګارت و ټاکل شي، نو کواوردیناتونه $F = (-50, 150, -1/4)$ لرو، په کیلو متر کچ شوي.

دواړه د الوتنلارې لاندې واټن لري:

$$d = \frac{\left| \left(\begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right|}{\left| \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 34 \\ -31 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}$$

$$= \frac{\left| \begin{pmatrix} -50 \\ 150 \\ -1/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 95 \\ 2 \\ -792 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{95^2 + 2^2 + 792^2}} = \frac{4252}{\sqrt{636293}} \approx 5.33 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



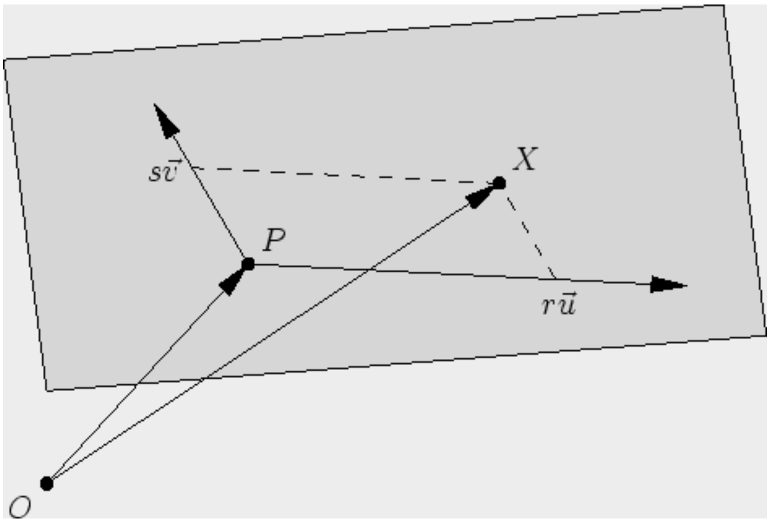
(ليکونکي:هوليک، هيورنر)

د يوې سطحې پارامتريکي انځورونهParameterdarstellung einer Ebene

له ټکي P تېره ، چې له دوه نه غبرګو لورو $\vec{u}$ او $\vec{v}$ غزېدلې سطحه باندې ټکی X پوره کوي

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه د ځای وکتور $\vec{x}$ د کواودیناتو لپاره باور لري

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1,2,3\,.$$

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

یوه سطحه دې د ټکي $P = (1,2,3)$ او وکتورونو $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ سره روکړ شوې وي. نو $X = (1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\vec{u} + (-1)\vec{v}$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه پروت نه دی، ځکه چې $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ دی او د مساوات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

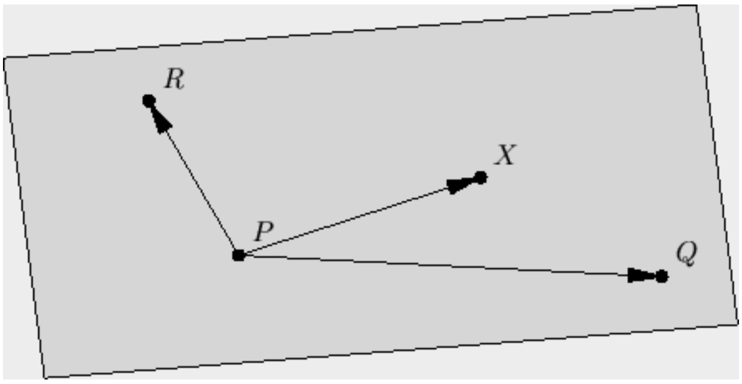
حل نه لري، که لومړۍ او دویمې لیکې ته وګورو .

د یوې سطحې درې-ټکي-بڼه Drei-Punkte-Form einer Ebene

د ټکي X لپاره چې په یوه سطحه پروت دی،کومه چې له ټکو P, Q, R تېرېږي او یو اصلي درېګوډی جوړوي د غبرګخوایزو ضرب ورکیږي .

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=0.$$



(لیکونکي:هولیګ، وایس)

یوه سطحه دې د ټکو $P=(1,2,3)$, $Q=(3,2,3)$ او $R=(2,3,4)$ له لارې ورکړ شوې وي.

نو $X=(1,1,2)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

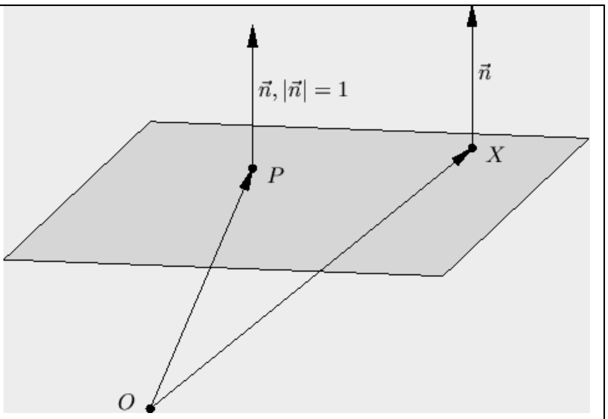
$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = 0$$

له بلې خوا $X = (0,0,0)$ په سطحه نه دی پروت، څکه چې باور لري

$$[\overrightarrow{PX},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left[\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right] = 4-6 = -2 \neq 0$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

د يوې سطحې د هيسې -نورمال بڼهHesse-Normalform einer Ebene

په يوه سطحه د يوه ټکي X ځايوکتور $\vec{x}$ په يوه سيخه په P کې اورتوګونال و يوه نورمالوکتور ته پوره کوي $\vec{x}\cdot\vec{n} = d, \quad d = \vec{p}\cdot\vec{n}\,.$ په نورمال بڼه نيول کيږي چې $\lvert\vec{n}\rvert = 1$ او $d \geq 0$. په دې حالت کې d د سطحې واټن دی و سرچينې ته	 (ليکونکي:هوليګ، وايس)

يوه سطحه E دې د ټکي $P = (1,2,3)$ له لارې ورکړشوې وي او نورمي نورمال وکتور

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\vec{n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

دی

$$d = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} = 3\,,$$

دا په دې معناچې سطحه لاندې نورمال بڼه لري

$$E: \quad \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 3\,.$$

نو $X = (4, 0, 1)$ په سطحه پروت دی، ځکه چې باور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{3}(8 + 0 + 1) = d\,.$$

له بلې خوا $X = (0, 0, 0)$ په سطحه نه دی پروت، ځکه چې پاور لري

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0 \neq d\,.$$

(ليکونکي:هوليګ، وايس)

د سطحو انځورونو ترمنځ د شميرنې بدلون يا اړول

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: یوه سطحه دې د ټکي P له لارې ورکړ شوې وي همداسې دوه نه غبرګ وکتورونه $\vec{u}, \vec{v}$.

سړی نور دوه ټکي Q او R لاس ته راوړي، چې دا هم په سطحه پراته دي او له P سره، د $\vec{q} = \vec{p} + \vec{u}, \quad \vec{r} = \vec{p} + \vec{v}$.

له لارې کرښه نه جوړوي

د نورمالو وکتور $\vec{n}$ په $\vec{u}$ او $\vec{v}$ نیغ ولاړ دی یا نېغ عموددی، یعني $\vec{u} \times \vec{v}$ ته غبرګ دی.

له دې دا نورمي نورمالو کتور د هیسي-نورمال بڼې لپاره دی

$$\vec{n} = \sigma \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \,,$$

د له کوم سره چې مخنځښه $\sigma \in \{-1, 1\}$ داسې باید وټاکل شي، چې $d = \vec{p} \cdot \vec{n}$ مثبت (زاتیز) وي.

دویم : یوه سطحه دې د درې ټکو Q, P او R له لارې ورکړ شوې وي، چې یو اصلي درېګودی(مثلث) جوړوي.

دوه وکترونه لاس ته راځي، چې سطحه غزوي یا جوړوي د لاندې وکتورونو له لارې

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{PR} \,.$$

له دې وکتورو څخه لکه په لومړي کې کېدی شي د هېسې٠نومالبڼه لاس ته راوړل شي.

دریم : یو ه سطحه دې د یوه ټکي او یوه نورمالوکتور $\vec{n}$ له لارې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه وکتورونه لاس ته راځي. چې یوه سطحه داسې و غزول شي پخ کړمه کې چې دوه کرښېز خپلواک وکتورونه   چې $\vec{n}$ باندې عمود یا و لاړ وي، و پلټل شي.

$$\vec{u} = \vec{n} \times \vec{x}, \quad \vec{v} = \vec{n} \times \vec{u}\,,$$

چېرته چې$\vec{x}$ یو په خوښه وکتور $\neq \lambda\vec{n}$ دی.

له دې وکتورونو څخه کېدی شي، لکه په لومړي کې دې-ټکي-بڼه لاس ته راوړای شي.

(لیکونکي:هولیګ، وایس)

لاندې ټکي دې ورکړ شوي وي

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

له دې څخه شمیرو

$$\vec{u} = \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{PR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

د هېسي ــنورمال بڼې لپاره د نورمال وکتور لپاره اوس دالاندې شمیرو

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -24+20 \\ -16+18 \\ 60-64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

او له دې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}{6}\,.$$

ځکه چې $d = \vec{p}\cdot\vec{n}$ باید مثبت (زیاتیز)وی، له لاندې لاس ته راځي

$$d = \vec{p}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -4$$

$\sigma = -1$
او له دې سره

$$\vec{n} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

نو سطحه نورمال بڼه لري

$$E : \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 4\,.$$

(ليکونکي:هوليک، کرايخ)

د ټکي – سطحې واټن :

د یوه ټکي Q ولاړ برېوتلی وکتور په یوه سطحه په ټکي P د نورمالوکتور $\vec{n}$ سره دی

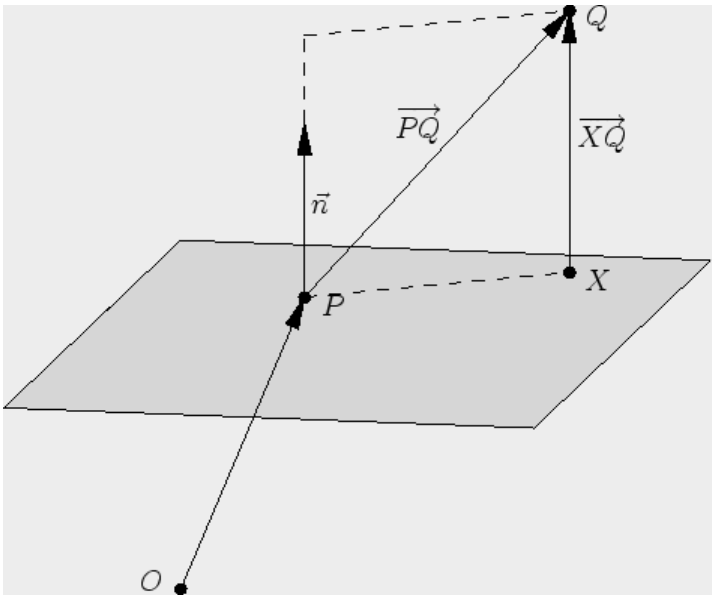
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overrightarrow{XQ} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\, \vec{n}\,.$$

د دې اوږدوالی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

د سطحې واټندی و ټکي Q ته.



(لیکونکي:هولیک، وایس)

سکالار ضرب

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = \cos\alpha |\overrightarrow{PQ}||\vec{n}| = \pm d|\vec{n}|$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه دا $|\vec{n}|$ -واره د ټکي Q او سطحې ترمنځ واټن لاس ته راځی، د کوم سره چې
مخنخښه دا راپه ګوته کوي، چې ایا $\overrightarrow{PQ}$ په همغه خوا ښايي، لکه یې چې $\vec{n}$ ښايي.

له دې سره دی

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

او

$$\overrightarrow{XQ} = \pm d \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2} \vec{n}\,.$$

ليکونکي: هیولیګ، وایس

له ټکي $P = (1, 2, 3)$ تېيره سطحه د نورمالوکتور $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ سره دي د
$Q = (3, 2, 3)$ ټکي واټن d همداسې په سطحه پرې ولاړټکی X وټاکل شي.

لومړی دی

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n} = 4, \quad |\vec{n}| = 3\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

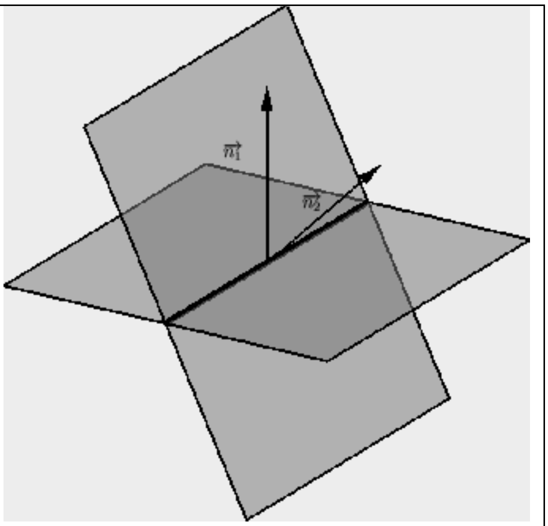
$$\overrightarrow{XQ} = \frac{4}{9}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \quad d = \frac{4}{3}$$

او بالاخره شميرل کيږي

$$\vec{x} = \vec{q} - \overrightarrow{XQ} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}19\\14\\19\end{pmatrix}.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

د دوه سطحو غوڅی يا تقاطع:

	د دوه سطحو د نورمال وکتور $\vec{n}_i$ سره د دواړو کونجونو(زاويو) $\varphi \in [0, \pi/2]$ هغه کوچنې کونج يې د $$\cos\varphi = \frac{\lvert\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}$$ له لارې يواځنی ټاکلې او $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ د غوڅکربنې لور ده.

(ليکونکي:هوليک، وايس)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه هوارو لپاره، چې هره یوه یې له ټکو $P_1 = (1, 2, 0)$, $P_2 = (0, 1, 3)$ او
نورمالوکتورونو

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

سره تعریف دي، د کونج او د دواړو سطحو د غوڅکرښې سره جوړ کونج(زاویه) φ
دې وټاکل شي.

دی

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{1}{2}$$

او له دې سره

$$\varphi = \pi/3\,.$$

پسې هم

$$\vec{r} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

د غوڅکرښې لور ده.

د دې لپاره چې یو غوڅټکی (نقطه تقاطع) وشمیرو، و

$$d_1 = \vec{p}_1 \cdot \vec{n}_1 = -1, \quad d_2 = \vec{p}_2 \cdot \vec{n}_2 = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته اړتيا شته او يو ټکی S ته، چې مساوات

$$\vec{s}\cdot\vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{s}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

پوره کوي. د بېلګې په توګه $S=(2,3,5)$ پيدا کيږي او له دې سره غوڅکرښه لاس ته راځي:

$$g:\vec{x}=\vec{s}+t\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

د منظم تترايد(څلور سطحيز) د کونج ټکو

$$P_1=(1,0,0), \quad P_2=(-1,0,0),$$

$$P_3=(0,1,\sqrt{2}), \quad P_4=(0,-1,\sqrt{2})$$

د دوه سطحو ترمنځ کونج يا زاويه دې پيدا شي.

موږ د بيلګې په توګه د سطحو څخه چه له P_1,P_2,P_3 همداسې له P_1,P_2,P_4 جوړې وي يا تېريږی کار اخلو.

د نورمال وکتورونو لپاره باور لري

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\sqrt{2}\\-2\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسي

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} .$$

له دې سره دی:

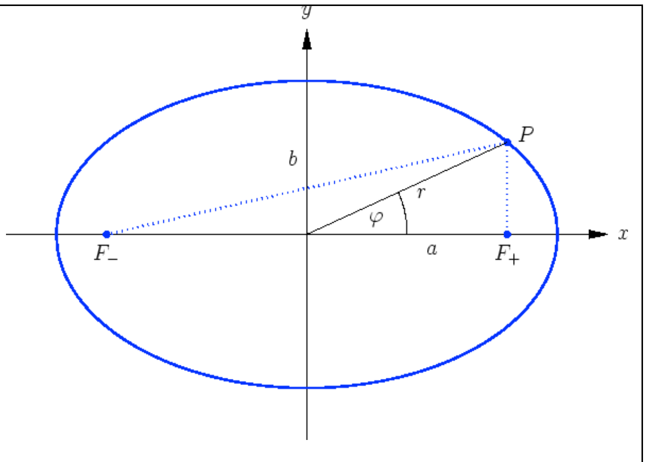
$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

او لاس ته راوړو

$$\varphi \approx 70,59^\circ .$$

(ليکونکي:هوليک، وايس)

هګی (بيضوي) Ellipse

	په يوې ايليپسي يا بيضوي د تکو $P = (x,y)$ د دوه سوزونتيکو $F_\pm$ څخه واټن ثابط يا همغه دی: $\lvert\overrightarrow{PF_-}\rvert + \lvert\overrightarrow{PF_+}\rvert = 2a$ د $2a > \lvert\overrightarrow{F_-F_+}\rvert$ سره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وي $F_{\pm} = (\pm f, 0)$ ، نو د کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2\,,$$

او

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواودیناتونو لپاره.

د هګی پارامتري کونه ده

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

د $t \in [0, 2\pi)$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته والی کیدی شي د سیده پسي شمیرنې له لارې و ازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

مربع (څلورۍ) کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

او دې کېن مساوات ته ورته مساوات لاس ته راوړو

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشنې وروسته نوې مربع کول یا بیا مربع کول راکوي

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

د بدلون $f^2 = a^2 - b^2$ له لارې د بڼې بدلون وروسته د کواوردینات بڼه راکوي.

د قطبي بڼې پیدا کوني

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

لپاره د مخرج(ماتلاندې) سره ضربولو سره او په پام کې نیسو

$$x^2 = (x^2 + y^2)\cos^2(\varphi)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 = b^2$$

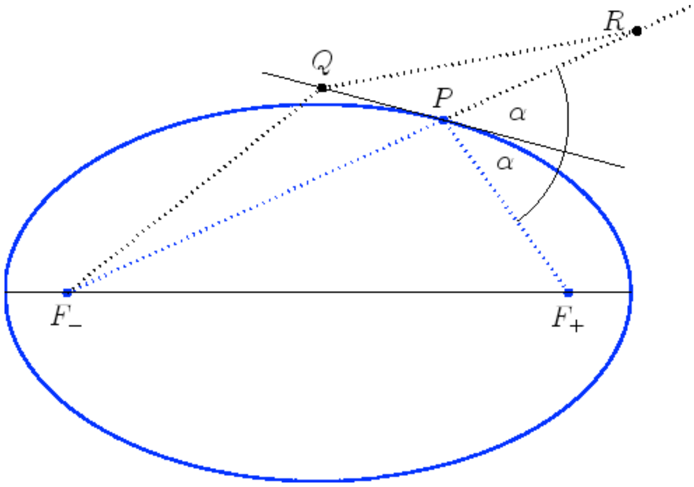
او د b^2 سره وېش له لارې د کواوردینات بڼه.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سوزونټکي وړانګه (شعاع نقطه محراق) :

د سوزونټکو وړانګې (په سوزونټکو کې راګرځي (رفلکت کونه یا بیرته راګرځیدنه)



د ښووني لپاره د مرستندوی ټکي په حیث په تانجنت g د سوزونټکي F_+ هنداره شوي ځیره R ټاکو او په g یو په خوښه ټکی $Q \neq P$ ټاکو . دا چې Q د هګۍ یا بیضوي دباندې پروت دی، نو دی

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}| .$$

که د توټه کرښو $\overline{PF_+}$ او $\overline{QF_+}$ په ځای یې هنداره شوې ځیرې کیږدو، نو لاس ته راځي

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| ,$$

او پسې یا تعقیب باید $R,\ P,\ F_-$ په یوه کرښه پراته وي. له دې سره $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ دی.

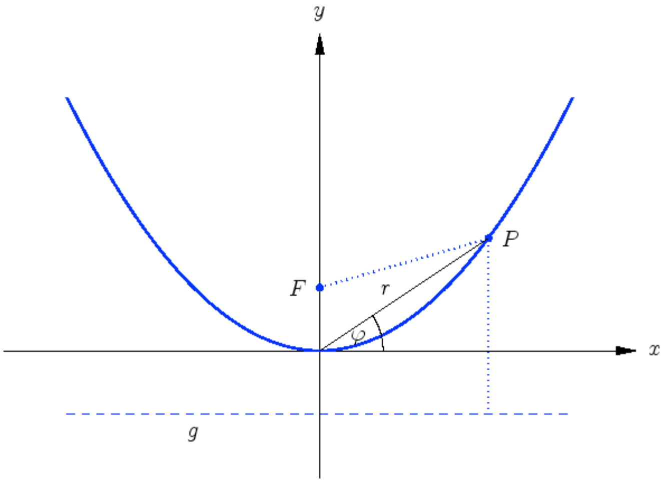
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا هنداروں خويونه د پختورګو تيګو تونه کوني لپاره په کار راځي. په سوزونټکي F_- کې د يوې راديال (د وړانګې په لور) سرچيني څخه وړانګې کېدی شي د يوه هګۍ ډوله يا بيضوي ډوله رفلکتور له لارې په سوزونټکی F_+ کې کوده شي يعني سره غوڅ کړي..

(ليکونکي:ايپ،هوليک)

پارابول Parabel

په يوه پارابول د ټکی $P = (x,y)$ د سوزونټکي F او يوې وړونکي کربښې g څخه برابر واټن لري.



که $F = (0,f)$ او $g : y = -f$ وي، نو کواورديناتونو لپاره باور لري

$$4fy = x^2$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \frac{4f\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

د ټکي P قطبي کواوردیناتونو لپاره

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوروني ورته والی یې ترلی ځرګند دی. د مربع شوي واټن د برابر اینوونې له لارې

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\mathrm{dist}(P,g))^2$$

د کواوردینات بنه لاس ته راځي. د

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

بدلون مو قطبي بڼې ته بیایي.

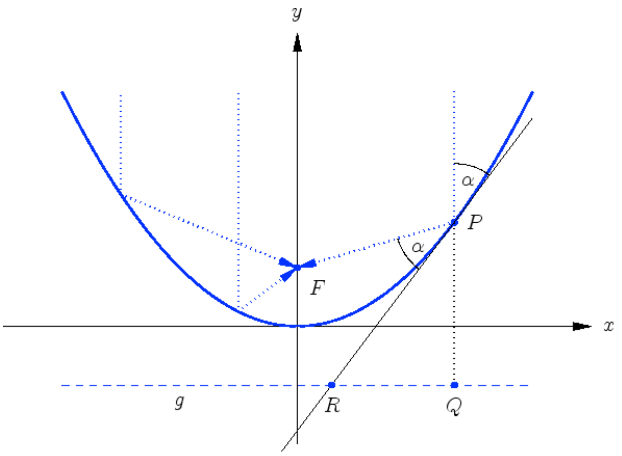
(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د ساتلایت تلوېزیون Satelliten-TV

غبرګې کربښې، وړونکربښو سره ولاړې یا عمود غورځېدونکې وړانګې په سوزونټکې کې سره کوده کیږي.

داد د ساتلایت په کاسه او تېلېسکوپ کې کارول کیږي، چې پریوتي سیګنالونه قوي کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ښووني لپاره په بام کي نیسو، چې

$$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{QP}=\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\f\end{pmatrix}\right)+\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\-f\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x\\2y\end{pmatrix}$$

په ټکي Pt , $\begin{pmatrix}1\\x/(2f)\end{pmatrix}$, کي د تانجنت د لور سره غبګ دی. دا چې

$$|\overrightarrow{FP}|=|\overrightarrow{QP}|,$$

له دې څخه د کونج $\sphericalangle(F,P,R)$ او $\sphericalangle(R,P,Q)$ مساوات لاس ته راځي، د کوم سره چې R د تانجنت غوځټکی دی د g سره.

(لیکونکي:ایپ،هولیګ)

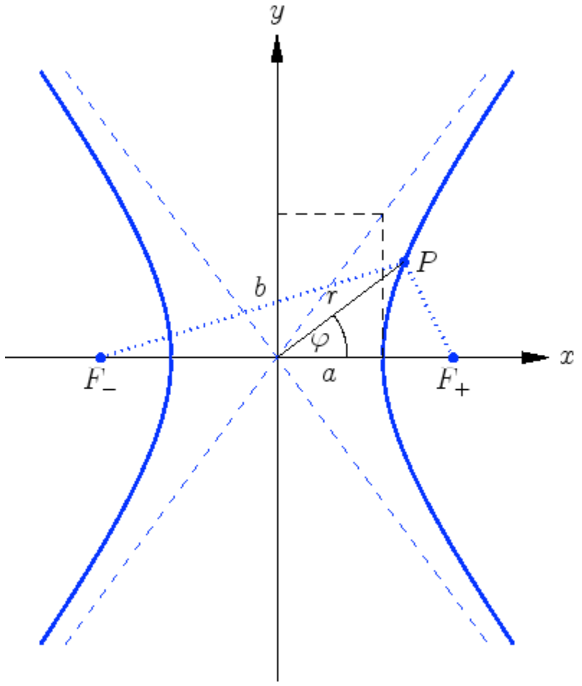
های پاربول Hyperbel

په یوه های پابول د یوه ټکي $P=(x,y)$ د سوزون ټکو $F_\pm$ سره د واټنونو کمښت ثابت دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

د $2a < |\overrightarrow{F_-F_+}|$ سره .



که $F_\pm = (\pm f, 0)$ وي، نو کواوردیناتونو لپاره باور لري

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

او

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

د ټکو P د قطبي کواوردیناتونو لپاره . اسیپتوتي $\pm b/a$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هایپرابول د ښاخونو پارامتري کونه

$$x = \pm a\cosh t, \quad y = b\sinh t$$

ده د $t \in \mathbb{R}$ سره.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

د انځوره ونو ورته کېدی شي سیده یو په بل پسې وازمایل شي.

د دې لپاره چې وښایو ، چې لرو

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

نو

$$\underbrace{\sqrt{(x+f)^2+y^2} \pm 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2+y^2}$$

مربع کوو او دې و کیڼ مساوات ته ورته اړیکي لاس ته راځي

$$\underbrace{4a^2+4xf}_{>0} = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2+y^2}\,.$$

د $4a$ سره وېشني وروسته له نوې مربع کوني څخه لرو

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f^2 = a^2 + b^2$ بدلون سره د بنې بدلون وروسته د کواودیناتونو بڼه لاس ته راځي.

د قطبي بڼ لاس ته راوړلو ته

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

د مخرج سره ضربوو او په بام کې نیسو

$$x^2 = (x^2+y^2)\cos^2\varphi\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

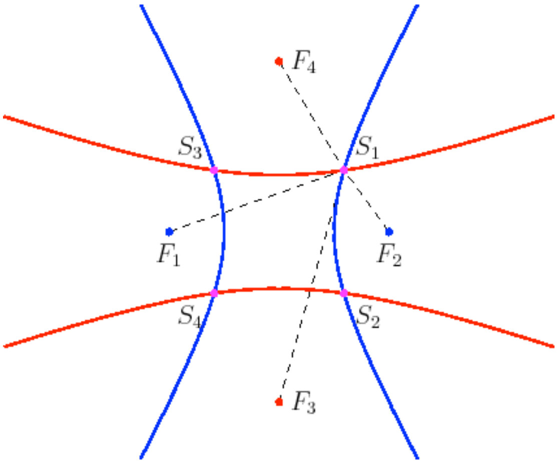
او د $-b^2$ سره ضربولو له لارې د کواودیناتونو بڼ راکوي

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

ناویګیشنNavigation

د یوې کیشتۍ ځای Position معلومولو P لپاره د وخت کمښتونه $2a_{j,k}$ د سینکرون رادیو سیګنالونو د مختلفو خورونکو ستیشنونو F_i څخه سره پرتله کیږي. نو په دې توګه کیدی شي P د هایپرابول د سوزونتکو F_k, F_j سره د غوڅتکي په څیر لاس ته راړل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه څرګنده بیلګه کیدی شي

$$F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,0), \quad F_3 = (0,-3),\ F_4 = (0,3)$$

او $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$ و ټاکل شي. اړونده هاپرابول مساوات دي

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \qquad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1\,,$$

او د څللر غوڅټکو S_i د کواودیناتو لپاره لاس ته راځي

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

لکه د څیرې څخه چې ه م لیدل کیږی، څلور اوبیونې(حلونه) لاس ت ه راځي. د ناوېګیشن لپاره دا بې پرابلمونو دی، ځکه چې یو کفتان باید وپوهیږي، چې کیښتی نږدې یا ت قریباً چیرته پرځای ده، دا په دې معنا چې کوم د منلو اوبی یا حل دی.

(لیکونکي:اپپ،هولیګ)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګریزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنرې، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library