شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

Ketabton.com

لومړی برخه

دویم غځیدلی چاپ

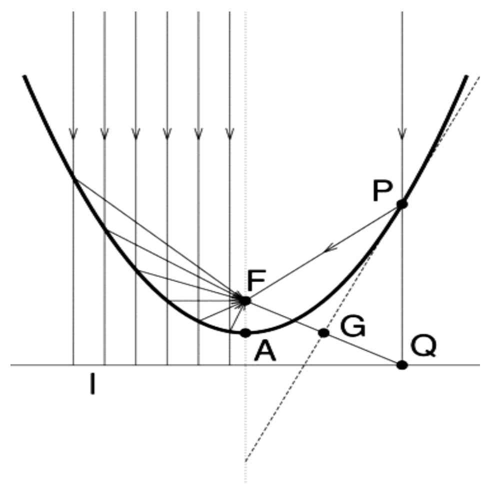
لیکونکی: ډاکتر ماخان (میرې) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

(رياضي)

سترکتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرزي شینواري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوي ښځنتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونده اخستې وي.

کتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب(لومړۍ برخ)

ليکونکی: ډاکتر ماخان،، ميری،، شينواری

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودریږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیې له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کتبه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتوري ودې ټولنه،، جرمني، د غړو، مرستندويانو او په تيره بيا د مشر تابه څخه زياته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه يې د دې ليکنو زياته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کليوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زياته مننه کوم:

د ښاغلي ډيپلوم انجنير ريحان الدين حساس، ښاغلي ډيپلوم انجنير محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترماڼوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بيان، ښاغلي ډيپلوم انجنيرمحمد ايوب بيان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډيپلوم انجنير او ډيپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شينواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسين شينواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له ميرمن ښاپيرۍ څخه ډېره زياته مننه، چې زما د ليکنو- نه دا چې مخه يې نه ده نيولې- پوره ملاتړ کړي.

بيا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شينواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

۰۱ د شمیرپوهنې سم اند یا منطق ۱

۱۰۱ پوهنیزه ژبه او پیدایښت یا طبیعي ژبه ۱

۲۰۱ د شمیرپوهنې سم اند بنسټیزه کلیمې ۳

۱۰۳۰۱ ثابتې ، اووښتونې یا واریابلې ، ترمونه ۳

۲۰۲۰۱ وینا ۵

۳۰۲۰۱ د دوه ارزښتوالي اصول یا پرینځیپ ۷

۰۱ ٤ وینا فورم یا ۰بڼه او کوانتورونه ۱۳

۵۰۱ اړیین او پوره کیدونکي شرطونه ۲۸

۶۰۱ د شمیرکلیمه یا د لغاتو ۳۱

۷۰۱ برابرون او نابرابرون ۳۳

۱ . ۸ تمرینونه ۳۸

۰۲ ډیر ی پوهنه ۳۹

۱۰۲ د ډیرئ پوهنې کلیمه ۴۰

۲ . ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې ۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

	برخدېږی	۴۶
	د یوې ډېرۍ توان یا تواندېږی (توانسټ)	۴۸
۲ ۰ ۳	په ډیری کې کارونې یا عملیې(۱)	۵۰
	غوڅدېږی یا متقاطعدېږی	۵۲
	د یوې ډېرۍ یا سټ کمپلیمنت	۵۷
۲ ۰ ٤	څیرونه	۵۸
	تمرینونه	۶۷
۳ ۰	د رییل ګڼونو سره د شمیرلو بنسټیزې...	۷۰
۳ ۰ ۱	د ګڼونو- یا اعدادو سیستم جوړښت	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱	پیداینتي یا طبیعي ګڼونه	۷۰
۳ ۰ ۱ ۰ الف	د پیداینت یا طبیعي ګڼونو جوړښت	۷۱
۳ ۰ ۱ ۰ ب	د پیداینت ګڼونو انځورونه او شمیرنه	۷۲
۳ ۰ ۱ ۰ پ	د شمیرنې بنسټیز قوان ین	۷۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	ټولګڼونه	۸۴
۳ ۰ ۱ ۰ ۲	الف د ویش تیوري	۸۶
۳ ۰ ۱ ۰ ۲ ب	غټ ګډ پرویشونی(بزګترین مقسوم علیه ...)	۸۸
۳ ۰ ۱ ۰ ۳	راشنلګڼونه	۱۰۶
۳ ۰ ۱ ۰ ٤	رییلګڼونه	۱۰۸
۳ ۰ ۲ ۰ ۱	ماتشمیرنه	۱۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرینونه ۱۳۰

٤ ۰ پوتنځ یا توان ، ریښه یا جذر ۱۴۱

٤ ۰ ۱ توان د ټولګنیز په جګ یا اکسپوننت ۱۴۱

٤ ۰ ۲ ریښه او توان د راشنل اکسپوننت یا جګګن سره ۱۴۴

٤ ۰ ۳ توان د رییلګڼ اکسپوننت یا جګګڼ سره ۱۵۱

٤ ۰ ٤ ټولګه ۱۵۲

٥ ۰ لوګاریتم ۱۵۸

٥ ۰ ۱ د لوګاریتم کلیمه ۱۵۸

٥ ۰ ۳ ټولګه ۱۶۶

٦ ۰ ګونومتري ۱۶۹

٦ ۰ ۱ بنسټیزه څمککچپوهنه یا هندسه ۱۶۹

٦ ۰ ۱ ۰ ۱ ټکی او کرښه ۱۶۹

٦ ۰ ۱ ۰ ۲ کونج ۱۷۱

٦ ۰ ۱ ۰ ۳ درېګوړۍ ۱۷۴

٤ ۰ ۱ ۰ ٤ کونکروانیځ او ورته والی ۱۷۸

۰٦ ۱ ۰ ٥ ولاړکونجیز درېګوړۍ ۱۸۴

٦ ۰ ۲ په ولاړکونجیز درېګوړۍ کې د ... ۱۸۸

٦ ۰ ۳ په یوونګردۍ کې د کونج بلواک .. ۱۹۰

٦ ۰ ٤ د ساین او کوساین جملې ۱۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ٥	تریګنومتریکي کټمتوالی	۲۰۵
۶ ـ ۵	تریګنومتریکي یا کونجکچیز فرمولونه	۲۱۵
٧ ٠	کمپلکس ګڼونه	۲۲۲
٨ ٠	د ښوونې یا ثبوت متودونه	۲۳۵
٨ ٠ ١	سیده ښوونه	۲۳۵
٨ ـ ٢	ناسیده ښوونه	۲۳۷
٨ ٠ ٣	د پوره ایندکشن له لارې ښوونه	۲۳۹
٩	لاینیز برابرون له یوې اوړیدونې یا ...	۲۴۳
٩ ٠ ١	لاینیز برابرون	۲۴۴
١٠	کومبیناترویک، د بینوم جمله	۲۶۶
١٠ ٠ ١	فاکولتیت یا فاکتوریل	۲۶۶
١٠ ٠ ٢	د بینوم ځله ونه	۲۶۷
١٠ ٠ ٣	د بینوم جمله	۲۷۰
١٠ ٠ ٤	کومبیناتوریک	۲۷۴
١٠ ٠ ٤ ٠ ١	پرموتیشن	۲۷۵
١٠ ٠ ٤ ٠ ٢	واریېشن	۲۸۰
١٠ ٠ ٤ ٠ ٣	کمبینیشن	۲۸۶
١٠ ٠ ٤ ٠ ٤	د پرموتیشن، واریېشن او	۲۹۱
١١ ٠	لانیز الجبري برابرونونه	۲۹۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ ۰ ۱ لانيز برابرون له دوه اوړيدونو يا ... ۲۹۶

۱۱ ۰ ۱ ۰ ۳ دويمه درجه ديترمينانت او د کرامر... ۳۰۷

۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤ د ګاوس الګوريتم ۳۱۲

۱۱ ۰ ۱ ۰ ٥ له دوه وو زيات برابرونونه له دوه ... ۳۱۶

۱۱ ۰ ۲ لاينيز برابرونونه له درې ۳۱۷

۱۱ ۰ ۲ ۰ ۱ يو برابرون له درې ناپيژندونو سره ۳۱۷

۱۱ ۰ ۲ ۰ ۲ دوه برابرونونه له درې ... ۳۱۸

۱۱ ۰ ۲ ۰ ۳ دريمه درجه ديترمينانت او د ... ۳۱۹

۱۱ . ۲ .۴ د ګاوس لګوريتم ۳۲۲

۱۱ ۰ ۳ په خوښه ډېر مساوات د په خوښه ... ۳۲۵

۱۱ ۰ ۳ ۰ ۱ د n -م درجې ديترمينانت او د ... ۳۲۶

۱۱ ۰ ۳ ۰ ۲ د ګاوس الګوريتم ۳۲۸

تمرنونه ۳۳۳

۱۲ الجبري برابرونونه ۳۴۰

۱۲ ۰ ۱ نالاينيز برابرونونه ۳۴۰

۱۲ ۰ ۲ څلورئ ئيز يا مربع برابرونونه ۳۴۳

۱۲ ۰ ۲ . ۱ د دوه په جګ برابرونونه ، د وييتا جمله

۱۲ ۰ ۲ ۰ ۲ څلورئ برابرونونه ، چې په نورمال ۳۵۰

۱۲ ۰ ۲ ۰ ۳ د n -م درجې ځانګړي برابرو... ۳۵۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱۲	دریمه درجه برابرونونه	۳۵۷
٤ ۰ ۱۲	د ریښي برابرونونه	
۱۳	ترانسڅیندنت برابرونونه	۳۷۵
۱ ۰ ۱۳	لوګاریتم برابرونونه	۳۷۵
۲ ۰ ۱۳	اکسپوننشل- یا په جګګڼ برابرونونه	۳۸۰
۳ ۰ ۱۳	ګونومتریکي یا کنجکچیز برابرونونه	۳۸۵
۱٤	له نابرابرونونو او مطلقه ارزښت ..	۳۹۶
۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه	۳۹۶
۱ ۰ ۱ ۰ ۱٤	بنسټیزې کلیمې او شمیر قوانین	
۱ ۰ ۱٤ الف	اینتروال	۳۹۷
۲ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له یوې ناپیژندونکی...	۴۰۰
۳ ۰ ۱ ۰ ۱٤	د نابرابرونونو سیستم ...	۴۰۹
٤ ۰ ۱ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له دوه ناپیژندونکو سره	۴۱۱
۲ ۰ ۱٤	برابرونونه او نابرابرونونه	۴۱۴
۱ ۰ ۲ ۰ ۱٤	له مطلقه ارزښت سره شمیرنه	۴۱۴
۲ ۰ ۲ ۰ ۱٤	برابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۱۵
۳ ۰ ۲ ۰ ۱٤	نابرابرونونه له مطلقه ارزښت سره	۴۲۰
۱۵	بلواک یا فنکشنونه یا طابع	۴۳۰
۱ ۰ ۱۵	د بلواک کلیمه او د بلواک انځورونه	۴۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ۱۵ د بلواک خویونه ۴۳۳

د ستر کتاب دویمه برخه

۱٦ د هوارې یا سطحې شننیزه هندسه ... ۴۶۶

۱ ۰ ۱٦ کربنه ۴۶۶

۲ ۰ ۱٦ گردئ ۴۷۵

۳ ۰ ۱٦ ایلیپسې ۴۸۲

٤ ۰ ۱٦ هیوپربول ۴۸۷

۵ ۰ ۱٦ پارابول ۴۹۲

٦ ۰ ۱٦ ټولگه ۴۹۴

۱۷ وکتور شمیرنه ۵۰۲

۱ ۰ ۱۷ د وکتور پیژند یا تعریف، ۵۰۲

په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د وکتور انځورونه ۵۰۲

۲ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو سکالار ځل ۵۰۹

۳ ۰ ۱۷ د دوه وکتورونو وکتوري ځل ۵۱۲

٤ ۰ ۱۷ غبرگهواریز یا موازي الاضلاع ضرب ۵۱۷

۵ ۰ ۱۷ په شننیزه ځمککچ کې د وکتورونو ....

۱ ۰ ۵ ۰ ۱۷ د یوې کربنې وکتوري انځورونه ۵۲۱

۲ ۰ ۵ ۰ ۱۷ د هوارې یا سطحې وکتوري انځورونه ۵۲۴

۵ ۰ ۱۷ د هواربرابرونونو سکالارفورم یا ۰بڼه ۵۲۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸	پرلپسې او پرلپسې لړۍ	۵۳۳
۱۸ ۰ ۱	پیل	۵۳۳
۱۸ ۰ ۲	د ګڼون - عددونوپرلپسې کلیمه	۵۳۴
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۱	مونوتوني پرلپسې	۵۴۲
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۲	اریتمیتیکي پرلپسې	۵۴۵
۱۸ ۰ ۲ ۰ ۳	هندسي پرلپسې	۵۴۷
۱۸ ۰ ۲الف	لړۍ	۵۵۰
۱۸ ۰ ۲ الف ۰ ۱	هندسي لړۍ	۵۵۵
۱۸ ۰ ۲ الف ۲	اریتمیتیکي لړۍ	۵۵۷
۱۸ ۰ ٤	د پرلپسې او لړیو د پولې ...	۵۵۸
۱۹	د فنکشنونو پولې او ناپریکیدنه	۵۷۸
۱۹ ۰ ۱	بنسټیزې کلیمې	
	د پولو یا حدونو خویونه	۵۸۶
	د راشنل، کسري یا نسبتي	۵۹۲
	د مثلثاتي یا درېکوډي کچ توابعو پولې	۵۹۶
	ناپرېکیدنې	۶۰۴
۱۹ ۰ ۲	په پوله ارزښت او ناپریکیدنې څو جملې	
۱۹ ۰ ۳	د ناپریکیدونکو فنکشنونو خویونه	۶۱۰
۱۹ ۰ ٤	د بنسټیزو فنکشنونو ناپریکیدنه	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځپرکي ټولګه ۶۱۶

۲۰ دفرنځیالشمیرنه ۶۲۶

د تابع تغیرمنځ ارزښت(منځنی قیمت) ۶۲۶

په یوه ټکي کې د تابع ګراف ... ۶۲۸

د لحضوی(سترګورپ) تغیر... ۶۳۰

کمښتوېش (تقسیم تفاضل؟) ۶۳۱

دفرنشلوېش یا رابیلیدنه یا مشتق ۶۳۳

کمښتوېش او مشتق یا رابیلیدنه ۶۳۶

د x_o په ځای کې د فنکشن مشتق ۶۴۳

د تانجنت پیژند او خویونه ۶۴۷

د تانجنت او عمود یا ولاړ ټولیز مساوات ۶۵۰

په بیدیا کې جګوالی ۶۵۲

۲۰. ۱ ۰ ۱ الف : د تانجنت یا جګیدنې غوره والی

۲ ۰ ۲۰ د فرنځیال یا رابیلیدنې یا مشتق قاعدې ۶۵۶

د درېګوډېزو یا مثلثاتي ۶۶۲

د اکسپوننشل یا په جګ توابعو.... ۶۷۰

د مشتق استعمال په طبیعي پوهن کې ۶۷۶

د ایمپلیځیت توابعو مشتف ۶۸۳

د بنسټیزو رابیلیدنو(مشتقونو) جدول ۶۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه ۶۸۸

د يوې تابع د مشتق قابليت ۶۹۱

د معکوس- - يا په څټ توابعو مشتق ۶۹۸

۲۰ .۳ د بنسټيزو بلواکو رابيليدنه ۷۰۱

د رول قضيه ۷۱۰

د وايرشتراس قضيه ۷۱۱

۲۰ .٤۰ افراطي ارزښتونه او اوړونټکی

د دفرنشل منځ ارزښت قضيه ۷۱۲

يوعېريزې توابع ۷۱۵

ځای اړوند افراطي ټکي ۷۲۰

د انعطاف – يا اوړونټکی ۷۲۴

د کوې يا منحني بحث يا خبرې ۷۳۳

ناټاکلي حدونه يا پولې ۷۴۶

د برنولي او د لو پيتال ۷۵۰

۲۰ ۰ ۵ د غټو ګټو پرابلم ۷۵۷

تمرينونه ۷۶۷

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ۷۷۸

۲۱ انټيګرالشميرنه ۷۸۷

پيلراوړنه ۷۸۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۱	انتیګرالشمیرنه	۷۸۹
	د ریمن(ناټاکلی) انتیګرال	۷۹۰
	بنستیزه یا لومړنی تابع	۷۹۴
	سطحه او لومړنی تابع	۷۹۶
	ناټاکلی انتیګرال	۷۹۹
	د ټاکلي انتیګرال شمیرنه	۸۱۲
	تکمیلیدونکي بنسټونه	۸۱۴
	د ټاکلي انتیګرال څخه و ټاکلي ...	۸۱۵
	د انتیګرالوني قاعدې	۸۱۷
	د اکسپوننشل توابعو انتیګرال	۸۱۹
	د لوګاریتمي توابعو انتیګرال	۸۱۹
	بدلون قانون	۸۲۱
	توابع، چې بې د بدلون له لارې...	۸۲۷
	ټوټه انتیګرالونه	۸۳۲
	د ټوټه انتیګرالوني لار	۸۳۴
	د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال	۸۳۸
	ناپای(مبهم) انتیګرال	۸۴۱
	د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې	۸۵۲
	د انتیګرالشمیرنې استعمال	۸۶۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړې یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مهربان او بخښونکي خدای(ج) په نامه

سریزه

ګرانو هیوادوالو !
یو څه چي پیل لري نو پای هم باید ولري، د داسی یوه کار پیل او پای ته څما هم لوړه او تنده دومره زیاته ده، چی مړښت یی زما لپاره هم ناشونی دی.

د هیواد په هرارخیزه بدبختیو یو سړی هلته نور هم پوره پوهیدلی شي، چی په یوه کار پیل وکړي، څکه چی سملاسی ورته څرګندیږي، چی په هیڅ شي کی څموږ په هیواد کی لاتراوسه څه نه دي شوي په جوړښتیزه لور، په وراني کی مو د نړۍ سرکښي ځانته ګټلی.
موږ ګورو چی په مسلکي چارو کی له پیل دا ستونځي موجود دي، چی تراوسه حتی هغه بنستیز مسلکي نومونه مو له خپلی ژبی نه دي را اخستلي، چی مسلك ته اسانتیاوې پیښوي. له کومه ځاي چی ماته روښانه ده، تر نن ورځی په دې هکله چا په شمیرپوهنه د ستونځوبیو لپاره کومی هڅي هم نه دي کړي او ستتونځي يي نه دي ګاللي، چی دلته طبعاَ افراد ملامت نه دي، بلکه څموږ دهیواد دتاریخ په اوږدو کی دولتني جوړښت، دپوهنی او همدا ډول د کلتور او ژبي د ودې دنده د حکومتونو ده، چی څموږ په هیواد کی څموږ حکومتونو خپل ځانونه د دې کار جوګه نه دي ګڼلي، کیدی شي چی ووایو چي په ریښتیني يي ددې کار مخه هم نیولی ده، چی په افغاني ژزبه دې څه کار وشي.
ګرانو لوستونکو !
داکار څکه په افغانی او په ولسی افغاني لیکل شوی، چی زه په مسلکي اړخ کی یواځی، په علمي توګه په الماني ژبه پوهیږم، د انګلیسی سره هم بلد یم، نو دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

نومونه چې له دې دباندنیو ژبو را اړووم ، داچې په ښوونځي کې څما لیك لوست په افغاني ژبه وو، په افغاني ژبه په ولسي پوهنیزه توګه اړولی شم. ماته دا کلیمې په مروجه افغاني ژبه نه دي معلومې او یا کومې چې ماته معلومې دي او زه ورسره بلد یم هغه همغه وخت ماته د پوهیدلو له امله د ستونځو ډکې ښکاریدلې .

شمیر پوهنه هم، د نورو پوهنو په څیر، یوه پراخه پوهنه ده او زیاتې څانګې لري. دا چې څما په فکر دا متآسفانه نه یواځې زما لمړی کار دی، بلکه دا د افغاني ژبې په دې توګه یو لمړی علمي اثر دی، چې په دې بنسټیزه توګه په درسي او تمریني ډول سرته رسیږي.

نن نړۍ او د انسانانو فکر دومره پر مختګ کړی او دا نور هم په خورا چټکتیاوده کوي، چې پخپله انسان ورته د تعجب په سترګه ګوري، مګر موږ لا تراوسه په هغه بنسټیزو ستوځوبیو (د ستونځو حل باندې) پیل نه دی کړی ، که دا په هره څانګه کې هم وي. څموږ پرابلمونه هراړخیز دي او هراخیزو هڅو ته مو ضرورت شته.

شمیرپوهنه څه شی دی ؟

شمیرپوهنه یو مرستندویه پوهنه ده، چې په ټولو پوهنو کې تغبنتي یا په بل عبارت : په ټولو پوهنو کې د پوهیدلو بنسټیزه ریښه جوړه وي، که دا پوهنې اجتماعي وي او که طبعي (پیدایښتی) یعنې که ساپوهنه وي که اقتصاد او که کیمیا وي یا فزیك، بیله شمیر پوهنې یې وده او په پوهیدنه ناشونې ده. شمیرپوهنه له بلې خوا یواځې خپلواکه پوهنه هم ده. شمیر پوهنه بل څه ته اړ نه ده.

ددې کتاب لیکلو زما زیات وخت په بر کې ونیوه او لیکل یې د پوره ستونځو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول کار زما په غاړه وو او بل چا را سره متأسفانه چې مرسته هم نه شوه کولی.

د داسې یوه کتاب لیکنې مسئولیت باید د دولت په غاړه وي او مسلکي باید د داسې لیکنې شخه خپل ژوند تآمین کړای شي. د همدې هدف لپاره د مسلك زدکړه کیږي. ما په دې کرښه غوښتل، چې څموږ د هیواد ستنځي نوزې هم ګوته لك کړم.

زه غواړم چې خپلې د سر خبرې په لاندې توګه رالنډې کړم
- د لیکونکې راهځونې دلیلونه یا د شوق رابیدارول
- د داسې کتاب لیکنه په هغه وخت کې شوني کیږي، چې د لیکونکي اقتصادي ژوند تآمین وي، زه د ټولنیزو مرستو پیسو شخه ژوند کوم، یعنې د نورو خلکو د مالیا پیسو باندې. کار نه پیداکیږي او اجازه یې هم نه لرم چې پیسې وګټم.

- وخت باید پوره موجود وي او داهم ما پوره لروده، چې له دې د مخه مې په سیاسي هلو ځلو دا وخت تیر کړی او دا اوس مې خپل مسلك ته رامخه شوه.

- ددې کتاب لیکلو لپاره باید یو لیکونکی د خپلې ټولنې او د خپلې ټولنې د خلکو سره مینه ولری او په همدې ډول، د خپلې ټولنې او د ټولنې د خلکو او د ټولو څخه د مخه د خپل ځان لپاره هم خوبونه ولري، خیالونه ولري، چې یواځې د خوبونو ریښتیا کولو لپاره په داسې کار بریالی کیدی شي. ما ددې کار ستونځې په پوره مینه په غاړ واخستلې او دا کار مې په پوره مینه سر ته ورساوه.
- په دې برسیره لیکونکی دې وظیفې ته هم باید شعوري وي، چې دی ددې کار لپاره د ملت په پیسو تربیه شوی او د ملت پور هم باید ادا شي، د داسې لږ پور اداکولو هم ما ته پوره خوښي راو بخښله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کور کی هم باید تر یوې ممکنه اندازې پورې یو تفاهم موجود وي یعنی یو غېروالی باید په کورنی کی وي، که داسی هم نه وي ، خو د داسی کار مخه باید ونه نیول شي ، د نورو ستونځوبیو (ستونځو حل) په خاطر، چی موږ افغانان یی په ځانګړې توګه اقتصادی اړخ کی پوره لرو، چی نه یواځي د ځان لپاره بلکه د خپلوانو لپاره هم باید پام وي، مګر ما دا توان په خپل ځان کی ددې امله نه کوته چی امکانات یې ځما لپاره نه وو.

دوم : د کتاب د لیکنو ستونځی:

د داسی کتاب لیکنه د پوره ستونځو سره مل ده، چی زه دې ستونځو ته په لاندې توګه ګوته نیسم.

۱ – دا کتاب په داسی ژبه لیکل کیږي چی له مری څخه نیول شوې، زیندی شوې، خپه شوي، خو د مرګ څخه بچ ده، له ښارونو شړل شوې، او یواځی په غرو او رغو کی ژوندی پاتی شوې.

دې ته باید ګوته ونیسم، چی دا کرښی دا مطلب نه لري، چی ګوندې زه به، خدای (ج) دې ونه کړي، د بلی ژبی په خلاف یم. دا زما کار نه دی او نه دا حق ځان ته ورکوم، خو دا حق لرم چی خپلی ژبی، د خپل ولس ژبی ته ، چی کړیدلی او وروسته پاتی ساتل شوې، ګوته ونیسم. موږ افغانانود افرادو په توګه هم افغاني ژبه پرېښوولی چی ولس یعنی د یوه هیواد د ژبی دپرېښوولو حق څوك نه لري، نه دولت او نه افراد . دا کار متاسفانه د افغاني ژبی په ضد او بیا د ټولو په سر کی پخپله د افغانانو څخه شوی دی، د بل ځا څخه څوك باید ګیله من نه وي.

افغاني ژبه، که څه هم پوهانو او د لیك لوست خاوندانو په زیات شمیر، نه ټولو، د لاسه ورکړې، خو بیا هم دا ژبه دا استعداد، د نورو ژبو په څیر لري، چی یوه پوهنیزه لیکنه ورباندې وشی یا بهتره پوهنیزه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژبه یواځی د پوهولو او پوهیدلو اله نه ده، بلکه د ولس پوهنیزه وده کی پوره غوره رول لري او د کلتوري ودې لاربنودې او بنسټ دی، په دې برسیره د پوهی د اسانوولو خورا غوره اله ده. د یوه ولس د پرمختګ او د ژبی پرمخوده یو بل باندې سیده او په څټ اغیز من دي، چی ولس وروسته پاتی وي، ژبه یی وروسته پاتی ده او که یوه ژبه وروسته پاتی وي، نو هغه ولس د نورو ولسونو سره په پوهه کې سیالي نه شي کولی او د ولس خلك د نورو ولسونو د خلکو سره د سیالی کولو استعداد خان کی نه شي روزلی، که څه هم استعدادونه به موجود وي.

ما کوښښ کړی چی کم له کمه بنسټیزې کلیمی په افغاني واړوم، چی دا کار می په پوره بریالیتوب، د پوره ستونځو سره سره سرته رسولی او په دې هکله می زیات فکر هم په کار اچولی چی مسلکي بنسټیزې کلیمي په روانه افغاني راوړل شي. هغه نومونه چی ټاکل شوي، داسی نومونه دي، چی د هغه شي ماهیت په کی روښانه دی. دا کا د هرڅه لمړی ددې لپاره باید وشي، چی په پوهنیزو شیانو او نومونو پوهیدل باید ساده شي.

په پوهنه کی له بلی ژبی تیریدنه ناشونی ده او یا په بل عبارت په بله ژبه صرف نظر نه شي کیدی. دلته هم هدف دا نه دی چی افغاني ژبه دې د نورو ژبو د لغاتو څخه پاکه شي، دا کار یواځي هلته کیږي، چی یوه ژبه له پوهنی وروسته پاتی وي.

د پوهنیزې ودې سره ژبی ته د نورو ژبو لغات راننوځي او ضرور هم دي. ما کوښښ کړی چی که د کوم لغات لپاره د پښتو نوم یا نه وي او یا مناسب نه وي، هغه په جهانی مروجه لغاتو ولیکم.

دا چی افغاني د افغانستان ژبه او بیا هم زیندی شوې ژبه ده، دا د دولت کار وو او افغاني ژبی ته د تنفس ورکولو یا بهتره د افغاني ژبی د زیندی څخه خلاسون یا د افغاني ژبی څخه د لعنت د کړی لرې کولو دنده هم د دولت ده، خو ترهغي باید موږ هم دې ته پام ولرو او دا پاملرنه خپله دنده وګرځوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ولس په ژبنیو ستونځو هلته پوهیدل ممکن کیږي، چې څوك د ژبې سره په پوهنیزه توګه مخامخ شي. په افغاني ژبه دلمړي ځل لپاره داسې یوه لیکنه د ستونځو سره مل ده، مګر ناشونې نه ده.
دلته غواړم چې دې ته هم ګوته ونیسم، چې د نومونو په ټاکلو کې ما کله کله دوه نومونو کارولی، چې هغه مې په ټول کتاب کې شاید اصلاح کړې نه وي، خو په دې باور لرم چې په هدف کې ستونځې نه پیښوي لکه د بیلګې په توګه: ما لمړی ګڼپوهنه لکیلی وه، چې وروسته مې شمیر پوهنې بانډې واړوله، شاید په ټولو ځایونو کې مې نه وي شمیرپوهنه کړې. دربګوډي ما لمړی دریکونجی لیکلی وو، چې دا هم شاید د کتاب په اوږدوکې نه وي اصلاح شوی، داسې نور څه به هم وي، خو دې ته بیا ګوته نیسم، چې د پوهیدلو لپاره دا کومې ستونځې ه پیښوي.

۲ – تخنیکي ستونځې:
د ګرانو لوستونکو پام به دې ته راوګرځې، چې څمور لپاره د داسې کتاب لیکلوپه لار کې تخنیکي ستونځې هم خورا زیاتې دي. ما په کمپیوتر د شمیرپوهنې د فرمولونو لیکلو سره ستونځې لرودي، نو له دې امله مې د نورو کتابونو دکاپیو څخه بیاتې کړې او دلته مې سریښ کړې، چې کله کبږې هم سریښ شوې دي او په دې هم پوهیږم، چې دا یو غیر قانوني کار هم دی، خو هیله ده چې د رااخستلشووکتابونو لیکونکي او چاپوونکي به دې ته تفاهم ولري او زه له دوي د هرڅه له مخه د دوي له دې تفاهم څخه د خوښې څرګندونه کوم.

غواړم د ګرانو لوستونکو دې ته هم پام راوګرځوم چې املایي غلطۍ به شوي وي، ، خو په پوهیدلو کې به ستونځې پیښې نه کړي، د هغې بخښنه غواړم، زه نور دا کار نه شم څنډولی، ځکه چې ډیر ورسره ستړی شوم.
ما هیڅ دا فکر نه کاوه، چې زه دې داسې یو کار سر ته ورسوم، خو خدای(ج) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

حرکت کی برکت ایښوولی دی.
لنډه دا، چی ددې کتاب د چاب پورې چمتووالي کار ټول زما په غاړه وو، چی زه ورسره همدومره ستړی شوی هم یم او نورې سهوې او د غلطیئو سمولو لپاره می نور د زړه زور ختلی، که څه هم په دې اخرو ورځو کی د ملګرو په فشار ما ، ځما په فکر ټولی سهوې لرې کړی.

دریم – کتاب د کومو لوستونکو لپاره دی؟

ګران لوستونکی به د را اخستلشوو کتابونو څخه دې ته پام راوګرځولی شي، چی دا کتاب د نوو څه ډول لیکنو څخه راټول شوی. ددې کتاب لوستونکی د پوهنتون د شمیرپوهنی، پیدایښتي پوهنو، اقتصاد او همداسی د نورو پوهنو زدکړي دي.
دا کتاب په ښوونځي کی هم کارول کیدی شي، خو ښوونکی باید دې ته پام وکړي، چي هغه څه، چی د کتاب په پیل کی هم دي، په پیل کی نه شي لوستل کیدی.
ځنی څه په همدې لمړی برخه کی راغلي، چی نابلدو زدکوونکو ته به ستونځي پیدا کړي، خو دې ته د لږ پام وروسته، پام راګرځیدلی شي.

څلورم – دلوستلو وړاندیز

ما لږ ستونځي لرودې، چی دا کتاب په خپله خوښه ترتیب کړم. زه مجبور شوم چي یو کتاب د بنستیز کتاب په توګه ونیسم او د نورو کتابونو رااخستنی بیا په کی ځاي کړم.
ما د بنستیز کتاب په څیر د شیفر–جورج–تریپلر کتاب ونیوه. نو له دې امله می برخه ویش هم په همغه ډول کړی. ما غوښتل، چی د کتاب پیل په سمسوح یا بهتره سم اند (لنډ سمند) یعني منطق وکړم، خو هغه په اوومه برخه کي ځیړل شوی.
ځما وړاندیز دادی، چی اوومه– اتمه او نهمه برخه دې د هرڅه لمړی ولوستل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اومه اتمه او نهمه برخه څمور په هیواد کې زما په فکر ، چې نا اشنا وي. په هر صورت د اوومې برخې سریزه خو دي د هرڅه له مخه ولوستل شي او همداسې د ډیرې پوهې سره اشناییته هم خورا ضرور ده

شپیږم . مننه

ددې کتاب لیکلو کې ، که څما د دوستانو لخوا دې کار ته راهڅول نه وی، نو دا کار سرته نه شو رسیدلی، په تیره بیا په المان کې د « افغانستان کلتوري
ودې ټولنې »دوستانو. زه له دې د ټولو د زړه له کومې خوښنه کوم. د دې ټولنې د غړو او پلویانو زیاته خوښتنه، چې ددې کتاب چاپ یې د ټولنې په چوکاټ کې په غاړه اخستې.

ډیر محترم پوهاند مجاوراحمد زیار څخه زیاته مننه، چې د لغاتو د نظر څخه تیریدنه او همدا ډول په ټولو ماناوو کې ماته خوراګټوره مشوره هم راکړې.

زما میرمن زما د ستونځو شاهده وه. په زړه ناروغه، خو په پراخه او لوی زړه او پوره حوسیله یې زما د دې لیکنې ملاتړ کاوه، چې بې ددې له ملاتړ به دا کار هم سرته نه وی رسیدلی، که څه هم دا به یې کله کله ویل، چې ګوندې پیسې مې باید ګټلې وی ، خو په دې پوهیږي، چې ددې چانس نه شته، کله کله به، چې به تنګه شوه نو ویل به یې چې نور دا د چرګانو ټونګې باید بس کړم. له دې امله زما دمیرمن ښاپیرۍ څخه هم د زړه له کومې خوښنه کوم او دا پراخه سینه او دا ناروغه زړه یې همداسې ښه تکړه ورته د لوی خدای(ج) څخه غواړم، چې زما د داسې کارونوملاتړ نور هم وکړي.

راتلونکې کارونه: د همدې کتاب سره سم ما یو د هندسې کتاب ژباړلی، چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

الماں د پنځم ټولګی ځخه هندسه په کی راغلی د څه نونورو شمیرپوهنیزو مضوعاتو سره. دا به هم په دې کتاب پسی تړلی چاپ ته ورکړي شي.
زه یو بل خوب هم لرم، چی همدا اوس دې د یوه بل الجبر کتاب لیکلو باندې پیل وکړم. موضوعات می په سر کی راګرځي.
که چیرې نور دوستان او شمیرپوهان د شمیر پوهنی په څانګه کی څه لیکل غواړي او په دې هکله ستونځي لري، او ستوځوبیو وړاندیزونه لري نو زه به ورسره وعده وکړم، چی دلته افغانان و ملاتړ ته راوهڅوم. د هغو دوستانو سره چي د شمیر پوهنی کوم کتاب ته یی د ژباړنی نیت وي او په افغانستان او پاکستان کی ژوند کوي نود هغو سره به وعده وکړم چی دلته ورته په دې ټولنه کی او یا د ټولنی دباندې د مرستی هلی ځلی وکړم. ځما هدف دادی، چی موږ باید داسی کارونو ته ملا راوتړو. له ما ځخه لټ بل څوک نه شته، دا چی ما دا کار سرته رسولی ، باور وکړي، چی هر بل افغان یی هم سرته رسولی شي،

په مینه ستاسو ماخان

افغاني ، يوناني او الماني الف بی

ا	ب	پ	ت	ټ	ث	ج	چ
څ	ځ	ځ	ح	خ	د	ډ	ذ
ر	ړ	ز	ژ	ږ	ص	ض	ط
ظ	ع	غ	ف	ك	ګ	ق	ل
م	ن	و	ه	ي	ی	ې	ئ ۍ

يوناني الف بی

Α α	*Α α*	Alpha
Β β	*Β β*	Beta
Γ γ	*Γ γ*	Gamma
Δ δ	*Δ δ*	Delta
Ε ε	*Ε ε*	Epsilon
Ζ ζ	*Ζ ζ*	Zeta
Η η	*Η η*	Eta
Θ ϑ	*Θ ϑ*	Theta
Ι ι	*Ι ι*	Iota
Κ κ	*Κ ϰ*	Kappa
Λ λ	*Λ λ*	Lambda
Μ μ	*Μ μ*	My
Ν ν	*Ν ν*	Ny
Ξ ξ	*Ξ ξ*	Xi
Ο ο	*Ο ο*	Omikron
Π π	*Π π*	Pi
Ρ ρ	*Ρ ϱ*	Rho
Σ σ	*Σ σ*	Sigma
Τ τ	*Τ τ*	Tau
Υ υ	*Υ υ*	Ypsilon
Φ φ	*Φ φ*	Phi
Χ χ	*Χ χ*	Chi
Ψ ψ	*Ψ ψ*	Psi
Ω ω	*Ω ω*	Omega

الماني الف بي

A a	*A a*	𝔄 𝔞
B b	*B b*	𝔅 𝔟
C c	*C c*	ℭ 𝔠
D d	*D d*	𝔇 𝔡
E e	*E e*	𝔈 𝔢
F f	*F f*	𝔉 𝔣
G g	*G g*	𝔊 𝔤
H h	*H h*	ℌ 𝔥
I i	*I i*	ℑ 𝔦
J j	*J j*	𝔍 𝔧
K k	*K k*	𝔎 𝔨
L l	*L l*	𝔏 𝔩
M m	*M m*	𝔐 𝔪
N n	*N n*	𝔑 𝔫
O o	*O o*	𝔒 𝔬
P p	*P p*	𝔓 𝔭
Q q	*Q q*	𝔔 𝔮
R r	*R r*	ℜ 𝔯
S s	*S s*	𝔖 𝔰
T t	*T t*	𝔗 𝔱
U u	*U u*	𝔘 𝔲
V v	*V v*	𝔙 𝔳
W w	*W w*	𝔚 𝔴
X x	*X x*	𝔛 𝔵
Y y	*Y y*	𝔜 𝔶
Z z	*Z z*	ℨ 𝔷

شمیرپوهنیزې نخښې

مساوي .... $=$

نامساوي (نوروکتابونو کې) $\neq$ ($=$)

کوچنی له .... $<$

لوي له.............. $>$

کوچنی یا مساوي له .... $\leq$

لوي یا مساوي له .... $\geq$

ډېر کوچني .... $\ll$

ډېر لوي .... $\gg$

ورته یا متناسب............ $\sim$

کونګروانیخ .... $\cong$

همداسی یا ښایي یا په ګوره کوي

کتیمټ.................. $\equiv$

غبرګ .... $\parallel$

ناغبرګ................. $\nparallel$

ولاړ په .... $\perp$

دریګوډی .... $\triangle$

ګردی .... $\bigcirc$

نیمی یا قطر............. $\oslash$

کونج .... $\angle$

د دوه کرښو g او h ترمنځ کونج $\angle(g,h)$

کرښه، له A و B ته .... $\overline{AB}$

له A و B ته لوریزه کرښه..... $\overrightarrow{AB}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیندہ...................... AB

مطلقه ارزښت د .... |a|

ایماجینار یوون (واحد)....... i

د اویلرګڼ = ...2,7182818 e

پي د لودولف ګڼ π = ...3, 14149

د په لور هڅیږي یا کونورجنت کیږي ->

ناپای..................... œ

د x فنکشن یا په واك چی بلواك مو بللی f(x)

(لوستل یي (f د x یا د f, x لنډ : fx)

د x ځیرونه په f(x) : لیکو: f(x) → x   f : x →

دلته h د x فنکشن، g د x فنکشن h(x); g(x)

لیمس یا پوله............... lim

ساین .... sin

تریګونومتریکي کوساین .... cos

بلواك تانجنت .... tan

کوتنجنت........... cot

ارکوس ساین......... arc sin

ځیکلومتریکي ارکوس کوساین ...... arc cos

بلواك ارکوس تانجنت .... arc tan

ارکوس کوتانجنت..... arc cot

لوګاریتم و بنسټ a ته $\log_a$

لوګاریتم و بنسټ ۱۰ ته $\lg_{10}$

دیکادیکي لوګاریتم.....

لوګاریتم و بنسټ e ته ln

طبعي یا پیدا ایښتي لوګاریتم

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس گڼونه........... $\mathbb{C}$

ریيلگڼونه .... $\mathbb{R}$

ټولگڼونه .... $\mathbb{Z}$

نامنفي ټولگڼونه یا

طبعي گڼونه د صفر سره $\mathbb{N}^*$

طبعي گڼونه .... $\mathbb{N}$

تعریفډیرى .... $\mathbb{D}$

ارزښتډیری........... $\mathbb{W}$

حلډیرى .... $\mathbb{L}$

د ډیري A پوتنځډیرى $P(A)$

ډیري.............. M,N,A,B

تشډیرى .... $\emptyset$

برخه ډیرى............

پورته یا لویډیرى (چې بل ډیرى خوندي لري)

ټولنډیرى............ $\cup$

غوځډیرى .... $\cap$

د A کومپلیمنت ..... CA, A'

د ډیریو ورته والی ...... $A \sim B$

د ډیریو ځل.......... $A \times B$

لوستل B اتیران A یا - ځل -

توپیرډیرى : A بي له B ده $A \backslash B$

دلته: a د b پرویشونی ده یاa b ویشي $a \mid b$

د a او b غټ گډ په ویشونی(لنډ: غ گ و) $ggt(a,b)$

د a او b کوچني گډ زیاتځله(لنډ: ك گ ځ) $kgv(a,b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته : a د M توکی دی .... $a \in M$

او a د M توکی نه دی .... $a \notin M$

ټولنخښه (د ټولو x لپاره باور لري) $\forall$

د موجودیت نخښه: یو x موجود دی $\exists$

کونیونکشن A او B لیکو $A \wedge B$

دیسینکشن A یا B لیکو $A \vee B$

(کله کله الترناتیو)

ایمپلیکاشن: له A څخه B لاس ته راځي $A \Rightarrow B$

نیګیشن یا نه والی $\neg$

د A او B وېناو ورته والی یا اکویوالنت $A \Leftrightarrow B$

له A څخه B لاس ته راځ او له B څخه A لاس ته راځي.

ماتریکس......... A نورو کتابونو کي $\|A\|$

دیترمینانت $|A|$

د a څخه n–امه ریښه $\sqrt[n]{a}$

د x اکسپونتشلبلواك

د n – فاکولتیت یعنی $n!=1.2.3....n$ $n!$

بینومخلوونی $\binom{n}{p}$

لوستل: n په p باندې

له a تر b واز اینتروال $]a,b[$

$= \{ x \mid a < x < b \}$

له a تر b بند اینتروال $[a,b]$

$= \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

کیڼ واز اینتروال $]a,b]$

$= \{ x \mid a < x \leq b \}$

ښی واز اینتروال $[a,b[$

$= \{ x \mid a \leq x < b \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتون نخښه (سيګما) $\sum_{i=1}^{n}$

که د زياتوننخښه داسې وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

څلنخښه (پي) $\prod_{i=1}^{n}$

که داسې ليکل شوي وي

لوستل: له $i=1$ تر n پورې

پرموتيشن يا بدلون

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ ۰ د شمیرپوهنې سم اند (د ریاضیاتو منطق (logic))

سم اند (سماند) یا منطق (logic یونانی کلمه ده، چې اند(فکر) یا وی(لغات) ته وایی).

د وینا د ټیک یا کره فرمولولو لپاره د سم اند(منطق) څخه کاراخستل کیږي د فورمال سم اند، د سم اند پوهنی بنسټ، د فکر ډول او فکر کولوقوانینو په څیر یې څیړنه د اریستو تلس(۳۸٤ تر ۳۲۲ ز ۰ ک۰ ا)) له خوا کیښول شوې۰

د ریاضیاتو منطق(د شمیرپوهنی سم اند) د شمیر پوهنې د یوې برخی په څیر پرمختګ یا وده وکړه۰ سم اند د شمیرپوهنی بنسټ دئ او د شمیر پوهنی په ټولو څانګو کی ننوتی۰

یادونه : سم اند په خپله ختّه کې په فلسفه پورې تړلی مسلک دئ نو له دې امله دا لیکنه د ټولو مینه والولپاره په زړه پورې خوندیونې(متن) لرودئ شي۰ هیله ده، چې ګڼ هیوادوال به یې وګوری او کمي به یې راپوره کړي، دلته او یا په ځانله لیکنه کی۰

۱ .۰۱ پوهنیزه ژبه او پیداینټي- یا طبیعي ژبه

اند (فکر) او ژبه یو له بل سره داسې تړلي، چې بیلیدنه یې ناشونې ده. په ورځني ژوند کی انسانان خپل اند یا فکر په طبیعي ژبه څرګندوي، مګر دا د مسلکي ژبی په څیر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوهنی(علم) لپاره بسیا نه کوي، ځکه چی د ځنو لغاتو مانا کره یا ټینګه نه ده ټاکل شوی، دا په دې مانا، چی په طبیعي ژبه کی یو لغات بیلی بیلې ماناوي لري لکه لور(د ریبلو لور) او لور(په کومه لور) او یا څو لغاتونه ، لکه شلغم، ټیپر او منګړیتې، چی همغه یو څه یا شی په ګوته کوي.

په مسلکی نومونو کې یو څوترمینولوجي(Terminology لاتین، یونانی): په یوه مسلک کی شته(موجود دي) د مسلکي لغاتونو ټولګه او په همدې توګه د هغوي ښوونه ، منځ ته راوړل کیږي، چې د کلمو موخور(هدفمند) کره یاکلک ایښوولو (ځای پرځاي کولو) د نورمي ویناو استعمال او د هغوي او د ورځنی ژبی ویناود څخه ګټه اخلي٠

په دې ډول په شمیرپوهنه یا ریاضیاتو کی هم یوه پوهنیزه ژبه منځ ته راغلې، چی له پیدایښتي یا طبیعي ژبې او یوې ځانګړی ترمینولوجي سره یوځاي شوې یا په بل ډول : د پوهنیزې ژبی او یوې ځانګړي ترمینولوژي ټولګه ده٠

له دې امله شمیرپوهنه په یوه لوړه کچه ټیکوالی(Exaktheit) ، په یوه لنډ، روښانه ، څرګند او له دې امله یو لیدوړ « وینا ډول» درلودی شي٠

شمیرپوهنه او سم اند یا منطق دواړه دیوې سمبولیک ژبی څخه د کارونی یا استعمال کار اخستی شي. د لغاتو په ځاي نخښی ایښوول کیږي، چی مصنوعي منځ ته راغلي او په ځانګړو ماناو سمبال دي٠

د شمیرپوهنی پوهنیزه ژبه کې غوښتنه داده، چې باید په کلکه او روښانه توګه د ریښتونو (Realität واقعیتونو) شیانوObjects ، د هغو شمیرنیزو څیرو او د دې لپاره پیدا یا منځ ته راغلو نخښو ترمنځ توپیر وکړي. شیان له انسانانو احساسیږي، د یوه ذهنیت (Abstruction ابسترکشن) له لارې په یوه کلیمه څیره (متصور؟) کیږي. او شته والی یې د یوې نخښې جوړښت construction ممکنوي. څیره کوونه یې د شمیرنې شیان دی او یوه «نخښونه» غوره کوي، چې دیوه نوم اوزیات وخت د یوې نخښې په څیر ځان نیسي، د بیلګې په توګه : لکه هر طبیعي ګڼ(عدد) د یوې نخښې داسې په نامه د عددنخښې (ګڼنخښې) له لارې انځوریږي. دا نخښه څیفر Ziffer یا ګڼنخښه(عددنخښه)، چې عربې همغهٔ صفر دی, بلل کیږي. داسې نخښونې دبنسټیزو نخښو څخه منځ ته راغلي. په درسي ځاي سیستم کې بنسټیز څیفرونه یا ګڼنخښې په لاندی ډول دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ .

۱ ۰ ۲ د شمیر پوهنی سم اند بنسټیزې کلمي

۱ ۰ ۲ ۰ ۱ ثابتی، متحولې او ترومونه(۱)

Constants, variables, terms

په شمیرپوهنه کې شیان ، د شیانو ترمنځ اړیکي او د شیانو تړني په نخښو(سومبولونو) انځوریږي.

۱ – شمیرپوهنیزې نخښې

- د ثابتو(تل همغو) لپاره نخښې (علامې): دا د یوه کره ټاکلي مانا لپاره نخښې دي یانې تغیر نه خوري، لکه ۷ ، ۱۲ ، π ،e, او داسې نور

- د اووښتونو یا واریابلو(متحولو) لپاره نخښې: دا د یوې ورکړ شوې ډیرۍ یا سټ (په ډیرۍ پوهنه کی روښانه کیږي) داسې په زړه پورې توکی لپاره یوه نخښه ده، کومه چې د اووښتونویا متحولو بنسټسټ یا-ډیرۍ بلل کیږي، دا په لاتین تورو په نخښه کیږي او کله کله په اندکس(ز۰ایندکسونو) یا پیژندنخښه index (ز۰ پیژندنخښې Indices) چې ایندکس د تورو پښو ته راځي په نخښه کیږي۰

لکه: $a_1; a_2; b_i; i = 1,2,3 \ldots$

- اړیکنخښې : دا د شیانو اوګڼونو یا اعدادو ترمنځ د اړیکو نخښې دي لکه $<\ ,\ >$، $=$ $,\ \leq,\ \geq,$

- د نښلونو،کارونو، تړنو یا عملیونخښې : لکه زیاتون-(جمعه)، کمون-تفریق-) ، ځل-(ضرب-)، او ویش -یا تقسیم نخښې: / ، : +, -, *

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تخنیکي نخښې : لکه سیمیکولوم („ „)، نوکان ( ) او نور ډولونه يې او کوما ،

د نخښو لړۍ : که نوکان، واريابلی(اووښتوني), ثابتی او د هغوي يوځاي اینبودل د اړیکو- ، نښلونو- ، او تخنیکی نخښو يوځاي اینبوول موخه ور یا هدفمند یو په بل زیات شي، نو یوه د نخښو لړی ترې منځ ته راځی٠

(۱) ثابتي((تل) همغه یا تل همغه، همغه ارزښتیزې) ،

متحولې :اوښتونی یا اوړیدونی یا واريابلې او ترمونه

بیلګه :

الف : د 3.(1 + 2a) – a + 144 یوه د نخښو لړی (ترادف) ده

ب : 11x =6 – 3a).(b – 12) ، دا د نخښو لړی نه ده، ځکه چې د نخښو لړۍ موخه وره یا هدفمنده نه ده اینبوول شوې، د برابرنخښې پسې نوک نه شته، دا په دې مانا، چې له دې څخه څه نه پوهیږو.

۲ - ترمونه terms, Termen : که په یوه لړۍ کې، یوازې ثابتې (همغه)، اووښتونې(متحولې، واريابلې) نښلونې او تخنیکي نخښې کارول شوې وي، یانې اړیکې نه وي کارول شوي، نو دې ته ترم ویل کیږي. هر یو ترم پورې که واريابلی ولرې پیژندډیرۍ یا تعریفسټ هم اړه لري، دا د داسې اووښتونو یا متحولو اصلی بنسټسټ یوه برخډیرۍ او یا هغې سره برابر برخه سټ یا - ډیرۍ ده، په کوم کې چې د ترم ارزښت بیرته د بنسټډیرۍ توکی دی. د ترم ارزښت شمیرل کیدی شي، که د مخه ټاکلشوې نارونې یا عملیې اجرا شي، که چیړې اووښتوني یا واريابلې د پيژندډیرۍ د توکو نخښونه غوره کړي. دا په لویو لاتین تورو(اکه: $(T, T_1, T_2$ په نخښه کیږي. که ترمونه اووښتوني ولري، نو د اووښتونو یوه ورزاته نخښه په نوکانو کې نیولکیږي، لکه :

T(x); T(x,y)

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : ترم 3/4 + 126 ، چې اووښتونې یا متحولې نه لري په Tسره په نخښه کوو او

لیکو: T=126 + 3/4 یا $T = 126 + \frac{3}{4}$

ب : ترم 2x + 10 چې اووښتونې یا متحولې x لري یانې T(x) = 10 + 2x ۰ د اووښتونو بنستېدیرئ یا –ډېرئ دې یا د طبیعي اعدادو ډیرئ°Nوي

تعریفډیرئ د بنستېدیرئ سره برابره ده، که په ترم کې د اووښتونې یا واریابلی x پهٔ ځاي

یو پیدایښتې ګڼ یا طبیعي عدد 2 کیږدو، نو د ترم ارزښت دئ : T(2) = 14

پ : (x+2y)/x یا $\frac{x+2y}{x}$

ترم دئ چې دوه متحولې لري او په T(x,y) سره یې په نخښه کوو۰ د اووښتونو یا متحولو بنستېدیرئ دې د پیدایښتې یا طبیعي اعدادو سټN وي, نو د x لپاره تعریفډیرئ °N ده۰ د y لپاره N (پیدایښتی ګڼوندیرئ°N تعریفډیرئ لپاره ترم نه دئ تعریف یاپیژند نه لري)

د x = 0 لپاره ترم نه دئ تعریف یا پیژند ند لري

د ترم T(x,2y) = (x,y) /x یا $T(x,2y) = \frac{x+2y}{x}$

ارزښتشمیرنه د x=2 او y= 3 لپاره په دې ډول ده :4 = T(2,3) = (2+6) / 2

یادونه: د ګڼونو لپاره دې دریمه او څلورمه برخه وکتل شي، چې هلته ګڼوندیرئ ورکړ شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې انسان د خپل چاپیریال د ټولو شیانو او پیداېښتونو سره لاس په ګریوان دئ، نو پوښتنې او هیلې رامنځ ته کیږي،غوښتنې لري او ویناوې کوي، په کومو ویناو کې،

چې شیان او ریښتونی(واقعیتونه) بیرته هنداره (منعکس) کیږي یا په یوه څه یا شي، چې وینا کیږي، نو موخه ترې د هغه څه ریښتون حالت یا ځاننیونه ده۰ یوه وینا په واقعیت کې ټیک هلته ریښتیا ده، کله، چې په هغې کې شي حالت یا بهتره شي ځاننیونه په ریښتونې شته یا موجود وي، په بل حالت کې دا وینا ناریښتیا (غلطه) ده. موږ نیسو، چې دا څه دې په شمیرپوهنه کې کره ټاکلې وي او پریکړه دې پرې کیدی شي۰

پژند(تعریف) ۱ ۰ ۱ :

وینا د یوه شی ، څرنګوالي (چې څنګه دئ)، د هغهٔ بیرته هندارونه یا منعکسونه ده۰ (دا په دې مانا، چې وینا یو شی په وینا کې همهغسی ښایي لکه څنګه چې دئ له دې امله شي هندارونه یامنعکسونه)، چې د ژبی له لارې وړاندې کیږي یا په همدې ډول په نخښه کیږي۰

یا په بل عبارت وینا د کلیمو داسې هدفمند یوځایوالی یا یوځاي ایښوول دي، چی د یوه شی حالت (ځاننیونه) یا شکل او د شیانو ریښتونې اړیکی بیرته هنداره یا منعکسوي او موخه وردئ، چې د هغه دریښتیاوالي پوښتنه رامنځ ته کړای شي۰

یا په بل ډول :

د وینا لاندې سړی یو ژبنی یوون، یا یووالی (واحد unit ,Einheit)پوهیږي، کوم چې د شي اړیکی (د شي څرنګوالی) بیانوي۰ دلته دا مهمه نه ده، چې دا وینا په کومه ژبه، په پیداېښتي (طبیعي) او که په مصنوعي ژبه ویل شوې (افاده شوي) دا هم غوره نه ده، چې دا وینا د طبیعي پوهنو لپاره ده، د هوا حالاتو لپاره او که د بازار د نرخ لپاره ده۰

په بل او ورځني ډول: یوه وینا یوه جمله ده یا فرمول دئ، چې یا ریښتیا او یا ناریښتیا ده۰ داسې هم ویل کیږي، چې وینا یو «ریښتیاارزښت » ،، ریښتیا یا نا ریښتیا ،، لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني : د شمیرپوهنې سم اند لپاره پریکړی د وینا « رېښتیا ارزښت»(رښښتیا یا نارښتیا) دئ۰ نور خویونه په راتلونکی کې نه څېړل کیږي۰

ویناوې د لاتین په لویو تورو A , A* په نخښه کوو او داسې نور۰

۱ ۰ ۲ ۰ ۳ د دوه ارزښتوالی اصول یا پرینځیپ جمله

هره وینا یواځی یو ممکن « رېښتیا ارزښت» لرودی شي، دا په دې نامه، چی وینا یا رېښتیا

ده او یا نارېښتیا. (د دریم نه والی اصول یا پرینځیپ)۰

دا په دې ماناو چې ددې دوه ارزښتونو تر منځ بل ارزښت ناشونی دی. دوه ارزښتوالی او د

دریم نه والی باید سره بدل نه شي.

که یوه ژبنی افاده یا وېینه د وینا په څېر ترتیبوو، دا بیا دلته ارزښتناکه ده، چی د ویناارزښت حتمآ باید څرګند یا معلوم نه وي۰ که بالاخره ټوله پوهنه د رښتیا لور غوره کړي وي، بیاهم موږ څرګند ژبنیو موادو ته اړ یو، چی د هغه شي حالت (ځانښیونه) افاده کړاي شو یا وویلی شو، د کومو په شته والی یا نه شته والی، چی پریکړه وشي۰

ټولې ویناوې له دې امله په دوه ټولګیو یا کلاسو ویشل کیږي، د رښتیا ویناو ټولګی او د

نارښتیا ویناو ټولګی یا کلاس(صنف)۰

که وینا رېښتیا وي، نو رېښتیا ارزښت یې رېښتیادی او په w سره یې ښایو، که وینا رېښتیا

ارزښت نارېښتیا ولري ، نو په f یا،، نه،، یې ښایواو وایو، چې د وینا رېښتیا ارزښت

نارېښتیا دئ

تکرار : هره جمله، چی « رېښتیا ارزښت» (رېښتیا یا نا رېښتیا) ولري، وینا بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنیز سم اند(منطق) د ویناو سره سر او کار لري..

بیلګې:

غونډاله (جمله)

الف : » د کابل سین د کونړ له سین سره ګډیږي«رښتیا وینا ده۰

ب : $3 + 4 = 7$ رښتیا وینا ده

پ : » ٦ لومړنی ګڼ دی« دا ناریښتیا- یا ناتیک وینا ده۰(د اعدادو په برخه کې لومړني اعداد یاګڼونه کتلکیدی شي)

پوښتنجملی : » ته د څو کالو یې ؟ « نه شي کیدی یو ریښتیا ارزښت باندې تنظیم شي۰ له دې امله وینا نه ده۰

نورې بیلګې :

ویناوې دي:

(دپیتاګوراس (فیثاغورس) جمله۰

د کاتیتونو یا د یو بل سره ولاړو یا عمودو اړخونو یا ضلعو مربعګانو (څلوریو) زیاتون(جمعه) د هیپوتینوزې(اوږده اړخ قایمې زاویې ته مخامخ ضلعه یا قطر) د څلورۍ یا مربع سره برابر دئ.

نورې بیلګې :

سرک لوند دئ

ټول سپي خطرناک دي

$3 > 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې که یو کاربن له دوه اکسیجنه سره یوځاي یا زیات شي، نو کاربن دوه اکسیډ CO_2 وښايي

د دي پرخېړ یا مخامخ یا پر خلاف یا برعکس : ویناوې نه دي:

د کابل ښار;NaCl ; لمده کوڅه

د افغانستان د خلکو ژوند په دیرش کلن جنګ کې

لاندې ویناوې

کیمیا یوه طبیعي یا پیدایښتي پوهنه (علم) ده

۷ پر دریو بی له پاتې (باقي) نه ویشل کيږي

د وینا «ریښتیا ارزښت » ریښتیا لري

لاندې ویناوې

برلین یو کوچنی ښار دی

3 < 5 پنځه له دریو کوچنی دی

ټول لومړني اعداد یاګنونه ناجوړه (طاق) دي

کابل د کونړ پر سین پروت دی

هره یوه له دې ویناو « ریښتیا ارزښت » نا ریښتیا لري

نومه ونې: پورته مې د جفت لپاره، چې ورسره بلد یو جوړه ولیکه، نو طاق ته ناجوړه وایو.

په لاندې کې به وڅیرو، چې ویناوې شته، چې نورې ویناوې د خپلې برخی په څیر په ځان کې خوندي(لنډ : خوندي) لري. داسې ویناوو ته یوځاېشوې یا یوځای ایښول شوې یا ځنځیري ویناوې وایو او که غواړی ! مرکبې ویناوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بيلګه راوړو » کۀ د کوم ګڼ(عدد)a پروت زياتون يا پرته جمعه په 3 ويشوړ وي، نو داعدد يا ګڼ په 3 ويشوړ دی، يانی که عدد 1521 ولرو ، نو د دې عدد پرته جمعه 1+5+2+1=9 په 3 ويشوړ ده له دې لاس ته راځي، چی پخپله ۱۵۲۱ هم په 3 ويشوړ دی۰

که کومه وينا په داسې ويناوو ويشوړ يا ټوټه کيدونکې نه وي، نو دې ته بيا ساده وينا ويل کيږي۰

لکه : سپين غر يوه خورا جګه څوکه لري

يوه بله بيلګه د يوځای شوې(ځنځيري) وينا لپاره

سپينغر خورا خواريکښ دی، هغه په دې پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي۰

څرګنده ده، چی دواړه ساده جملې د برخويناو په څير يوځاي شوي ويناوې دي: » سپينغر خورا خواريکښ دی« همدا ډول » هغه (سپيغر) پوهيږي، چی نور کارته وهڅوي«۰

دا ويناوې کيدی شي په نورو ډولونو هم يو له بل سره داسې وتړل شي، چې رښتياارزښت يې همغه پاتې شي۰

د بيلګي په توګه:

۱ - سپينغرخورا خواريکښ دی۰ يا هغه پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي

۲ - ځکه، چی هغه پوهيږي، نو کار ته وهڅوي، نو سپينغر خورا خواريکښ دی۰

۳ - دا چی سپينغر پوهيږي، چی نور کار ته وهڅوي ، نو سپيغر خورا خواريکښ دی۰

٤ – سره له دې، چی هغه پوهيږي، نور کار ته وهڅوي، هغه خورا خواريکښ دی۰

ګورو، چی په دې ډول يو له بل توپيريدونکی تړلې يا ځنځيري، يا يوځاي شوی ويناوې جوړيږي، چی په خپله رښتياارزښت کی يو له بل توپير کيدی نه شي۰ د دوي توپير د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوي يو له بل سره تړلو ځرنګوالي له لارې مخ ته پروت دئ يا رامنځ ته شوی دئ٠
په لاندې کې به ممکنه« ويناتړنه» (يا نورهم ښه: ويناځنځيرونه) تر ځيړنې لاندې ونيول شي.

پيژند ۱ ۰ ۲ :

يوه «ويناتړنه» يا يو «ويناتړاو» (نوره هم ښه: «زنځيرونه») داسې ژبنۍ ويينې(افادې) دي، چې د هغوي په مرسته له يوې يا ډيرو ويناو ځخه نوې ويناوې جوړيدی شي.

مور د سم اند يا منطق ستيرينځيپ په لاس ته راوړنو سره ځانونه په داسې ويناو رابندوو، کومې چې داسې جوړې وي، چې ريښتيا ارزښت يې يواځې او يواځې د «برخويناو» ريښتيا ارزښت په واک کې وي٠

بيلګی

الف: سپين ډير خواريکښ دئ، هغه په دی پوهيږي، چې نور کار ته وهځوي٠

ب : سپين يا راځی او يا لوبه نه کيږي٠

پ – د فوټبال په لوبه کې نه دباندې رفري او نه دننه رفري فاول يا ناسمي وليد٠

۱ ۰ ۲ ۰ ٤ ويناتړنه يا وينابلواک (- فنکشن يا – تابع)

د ويناتړنو (عمليو)په هکله مو پورته بيلګو کې وليدل، چې که ځوک د تړنو لپاره « او » او يا « سره له دې» ونيسي تل يوه يوځاي شوې وينا منځ ته راځي. دا وينا هلته او فقط هلته ريښتيا ده، چې دواړه «برخويناوې» ريښتيا وي. دلته د خبرو پرځاي غواړو «ريښتيا فنکشن يا رښتيا تابع» وپيژنو. مور پريکړه کوو، چې د په زړه پورې ويناوو (ويناواريابلو يا وينا اووښتونو(وينا متحولو)) لپاره سومبولونه p,q,r,... او يا ا ، ب پ، وکارول شي يا استعمال شي. مور دا غواړو ساده پيل کړو، يانی د يوه يو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاینیونکی(یوځائیز یا یوګوني) بلواک یا فنکشن او که همغه پخوانی ډول تابع مو ښه راځي، له تابع څخه٠

یادونه: د بلواک یا تابع کلمه وروسته ځیړل کیږي، دلته د بلواک یا فنکشن پرځاي ویناترنه یا عملیه بسیا کوي. دا ځنی ویونه(لغات) ستونځی لري، چی د ښونځي زده کوونکي یې هغه ساده ډول فکر ته رابولم او د لوړو زده کړو خاوندانو ته دا کومې ستونځی نه لري.

نه والی(نفی)Negation

د وینا تړاو یا ویناترنی(عملیې) «نه والی»: دیوی ویناP نه والی هغه وینا ده، چې هلته او یواځی هلته د ریښتیا ارزښت ناریښتیا لري، چیP   ریښتیا ارزښت ریښتیا ولري٠

موږ د وینا P نه والی نفی په Pنه سره ښایو ، شمیرپوهنیزه نخښونه یې په لاندې توګه ده ¬p په یوه جدول کې ریښتیا فنکشن یا ریښتیابلواک کې داسی څرګند وو(دا چې زه کله کله هغه شمیرپوهنیز سومبول د نه p   لپاره ¬p نه شم لیکلی، نو دا به   همغسې p نه   ولیکم.

P	نه یا ¬pP
w	F
f	w

د یوې وینا P تکرار نه والي یا بیا نه والي لاس ته راوړنه، لکه چې لاندې یې ګورو، هم خورا څرګنده ده .

p	p¬	p¬ ¬
w	f	w
f	w	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه واره نه والی د همغي لومړنی وینا رښتیاارزښت لري

په پیدایښتي ژبه کی نه والی په«نه» یا « نا » خپل رښتینوالی مومي٠ «اباسین هغه خپل ټاکلی وخت ته را نه غی٠ دا د اباسین خپل ټاکلي وخت ته راغی « نه والی» دی٠

نه والی ته بیلګه : د وینا ¬A نه والی : "3 < 7" وینا نهA ده: دا چی A رښتیا ده، نو ¬A نارښتیا ده٠

ترنه(عملیه) یا کنجنکشن Conjunction (لاتین: ترنه، دلته د « او (and)» ترنه یا تړاو):

وینافورم یا – بڼه:

د وینا په څېر یا - مخامخ یا - برعکس وینا بڼه رښتیا ارزښت نه لري، د وینافورم یا – بڼې لپاره بیلګی دي لکه پوښتني، امرونه او نظرونه یاعقیدې:

١ – هوا څنګه ده ؟

٢ - کورته لاړ شه

٣ – شین یو ښه رنګ دی٠

که په ترمونو کې، چې واریابلی یا اوښتونې لري، اړیکنخښی ولیکل شي، یوه وینابڼه منځ ته راځي٠ یوه د نخښو لړی کم له کمه د یوې اووښتونې یا متحولې د بیلګي په توګه

3 + x <5 د بنسټیزورشو N کې نه ریښتیا ده او نه ناریښتیا٠ دا له دې امله وینا نه ده٠ که چیرې د واریابلې یا اووښتونې یا متحولې پر ځای ٠ او ١ ولیکل شي، نو بیا یوه رښتیا وینا ترې منځ ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چيرې په ځاي يې نور د پيدايښتي ګڼونو توکی ځاي په ځاي شي، نو بيا ناريښتيا ويناوې منځ ته ترې راځي۰

دا چی اووښتونې يا متحولې د بنسټديرۍ يا بنسټ سټ ځخه په خوښه توکی اخستلی شي، نو له دې امله دا اووښتوني د خپلواک يا ازاده اووښتونی(متحولې) په نامه يادېږي۰

پيژند :

يوه وينابڼه د نخښو لړی ده، چې کم له کمه يوه خپلواکه اوښتونې(متحوله) لري او د

- د دې اووښتونې په ځاي د بنسټيزې ورشو يا ساحې او يا
- د دې اووښتونې تړلو ځخه د کوانتيفيکاتورونو(کوانتورونو) په مرسته يوه وينا جوړيدی شي.

يادونه :

که په لاندې کې د تړاو يا تړنې کلمه منځ ته راځي، نو موخه ترې د « او » تړنه ياکنجنکشن conjunction دی۰ له ګرامر سره په توپير، چې هلته تړنه يا تړاو يو « تړونتکی، تړاولغات» ښايي په سم اند کې تړنه يو ځرګند(دوه ځايلرونکی يا دوه ځاييزيا نوره هم ښه دوه ګونی) جملې تړل يا په بل عبارت دوه ځاينيونکې (نوره هم ښه : دوه ييز يا دوه- ګونی) فنکشن يا تابع(بلواک) تعريفوي يا پيژنی۰

د « او» تړنه او نخښه يې $\wedge$

پيژند ۱ ۰ ۳ :

$p \wedge q$ دوه ويناوې p او q يانې د «او » يوځايوالیp او q يواځې او يواځې هلته يو رښتيا ارزښت رښتيا لري، چې p اوq دواړه رښتيا ارزښت رښتيا ولري۰ که له دې ځخه يوه وينا هم نارښتيا وي، نو بيا د « او » تړنه نارښتيا ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تړنې نخښنه ددوه ویناو qاو p ترمنځ لیکل کیږي p/\q او ویل کیږي p او p

موږ د « او » تړنه په لاندې جدول کې روښانه کوو یا انځوروو:

یادونه: په لاندې کې w رښتیا او f نارښتیا په معنا دي

p	q	p/\q
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

د « او » تړنې ته بیلګه :

د دوه رښتینو ویناو د A وینا : ,, 7 < 3 ,, او د B وینا : 3 یو لومړنی ګڼ دی رښتیا وینا A /\ B ده « ۳ له ۷ کوچنی او لومړنی ګڼ هم دی»۰

یادونه: موږ ګران لوستونکي به سره یوځاي فکر وکړو، چې دا پریمګنونه لومړي او که لومړني ګنونه وبولو۰ زه فکر کوم، چې لومړي ګنونه لومړني نه دي۰ دا ځکه لومړي ګنونه دي، چې له دوي له زیاتون او یا کمون څخه لومړی ګنونه جوړیږي۰ موږ به یې زیاتون په پام کې راولو، چې : 3+5=8

د دوه ویناو دا تړنه یا کنجنکشن، چې مختلف رښتیاارزښتونه ولري یانې د A وینا: 3 ,, 7 < ,, (رښتیا او د B وینا: « ۳ یو جوړه ګڼ دی (نارښتیا)، نو A/\B وینا : چې ۳ له ۷ کوچنی دی او جوړه ګڼ دی « (نارښتیا) ده۰ دا ویناتړنه ویناارزښت نارښتیا لري۰

د دوه ویناو د « او» تړنه دA وینا: 7 < 3 او د B وینا « ۳ یو جوړه ګڼ یا جفتعدددی» یوه نارښتیا وینا ده : ۳ یو لومړنی ګڼ دی او له ۷ لوي دی۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ومو لیدل، چی د « او » ترنه او یا کنجنکشن په ورسره بلده (عادي) توګه هلته جوړیږي، چې دوه ویناجملې په «او» سره وتړل شي:

غوټی «پټیدځاي» پیداکړ او دا پټیدنه یې پټه وساتله»۰ کیدی شي له «مګر» « سره له دې هم» « په همدې ډول » ترنه وویله – یا افاده شي۰

پورته ډول ، د بیلګی په توګه: په پټپټکي کې « که سپین پټ شي او هوسۍ د هغه د پټیدو ځاي پیدا کړي او دا چاته ونه ښایي»، نو داسې وایو « او » یا « هم »

هوسۍ د سپین د پټیدو ځاي پیدا کړ« او » دا پټیدځاي یې پټ واسته۰

۱) هلمند موږ(بډا) شو او هیواد یې پریښود ۰

۲) سره له دې، چی برلین کوچنیښار دیهلته د منی د المپیک لوبې کیږي

۳) ۱۵ ګڼ جوړه دی، د هغه پروت زیاتن په ۳ ویشونیدی

په ټولیزه توګه د « او » ترنه هلته رښتیا ارزښت رښتیا لري، چی د جملی ټولی برخې رښتیاارزښت ریښتیا ولري، اړین نه ده، چې نظم په پام کی ونیول شي۰ په وینا ترنه کې کیدی شي زیاتې وینابرخی سره په ترنه « او » وتړل شي لکه « هغه راغی، ویې لیدل او بری یې په برخه شو»

پیژند ۱ ۰ ٤ :

د« یا(or)» ترنه یا دیسجنکشن Disjunction (لاتین: ټاکنه یا پریکړه) Alternative الترناتیو یا د » یا « ترنه» دا په « یا » بیرته ورکړ شوې «جمله ترنه» تل ژوروالی ته راهڅوي: باید جوته شي، چی ترې تیریدنه یا صرف نظر په نه کیدونکی اوکه ترې نه تیریدونکی « یا » موخه ده۰ د دیسجنکشن یا د «یا»ترنی پیژند یا تعریف یواځنی دی او دا $\vee$ د یا ترننخښه ده.

د دیسجنکشن نخښه د دوه ویناو p اوq ترمنځ ځایول کیږي $p \vee q$ او ویل کیږي p یا q او

په لاندې ډول ځرګندیږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	Q	p∨q
w	W	w
w	f	W
f	w	w
f	f	f

له دې پورته جدول څخه پوره جوتېږي، چې دیسجنکشن یا د « یا » تړنه p∨q یو داسې رښتیاتابع (-بلواک یا- فنکشن) دی، کوم چې هلته او هلته رښتیا فنکشن رښتیا اخلي، کله چې کم له کمه د « یا » تړنې یو غړی د رښتیا ارزښت رښتیا ولري یا واخلي٠ که د دیسجنکشن دواړه غړي نارښتیا وي نو p∨q هم نا رښتیا دی٠ دا د رښتیا فنکشن کې د ځایونې « یا» څخه بل څه نه دي٠ یوه د «نه خوندیکونې» یا « نه ځایونې» یا « په برکې نه نیونې» د « یا » وییینه یا افاده ده، چې دا په نورو ژبو کې په بل ډول مګر په پښتو کې « یا٠٠٠ او یا ٠٠٠» لیکل کیږي٠

بیلګه (د « یا » تړنې ته):

د دوه رېښتینو ویناو د « یا» تړنه د A وینا: „ 7 < 3„ اود B وینا: « ۳ د ٦ پرویشونی دی» یوه رښتیا وینا A∨B ده : «۳ له ۷ کوچنی دی او د ٦ پرویشونی هم دی»٠

د دوه ویناو تړنه، چې مختلف ارزښتونه لري.

د A وینا „ 7 < 3 „ رښتیا او د B وینا: „ 7 =3 „ (نارښتیا) ، نو A ∨ B ده، چې 7 < 3 یا 7 = 3 دا وینا تړنه د رښتیا ارزښت رښتیا w لري٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه نارښتیا ویناو د « یا »(" Or") ترړنه:

د A وینا : "7 > 3 " او د B وینا: ۳ یو جوړه ګڼ (جفتت عدد)دئ یوه نارښتیا وینا A∨B ده:

« ۳ له ۷ لوي او نا جوړه ګڼ (طاق عدد)دی»

الترناتیوAltenative یا انتیوالنځ Antivalenz ویناوې : دا د » یا « ویناترړنه باید د « یا ... او یا سره بدله نه شي، ځکه چې دا هلته هم نارښتیا ده، که چیرې دواړه ویناوی رښتیا وي٠

بیلګه : (دوه الترناتیو ویناو ته ، چې رښتیا وي)

د وینا 7 > 3 او« ۳ یو لومړی ګڼ دئ» د الترناتیو په نامه داسې دئ « ۳ یا له ۷ کوچنئ دئ او یا یو لومړی ګڼ دئ» نارښتیا دئ٠

بیلګی : (نه والي، کنجنکشن، دیسجنکشن ته)

یادونه: په لاندې (Wahr) w د رښتیا او(Falsch)f د نارښتیا لپاره کارول شوي.:

ویناترړاو

A	π پي ټولګڼ دئ	f
B	π ایراشنل ګڼ دی	W
C	صفر له پيπ کوچنی دئ	W
D	π پي له دری کوچنی دئ	f

(c) ketabton.com: The Digital Library

A	π ټولګڼ نه دی	W
C	π کوچنی برابر له صفر	F
A∨C	π ټولګڼ او له صفر لوي دی	f
B∧C	π ايراشنل او له صفر لوي دی	W
A∨C	π پي ټولګڼ يا له صفر لوي دی	W
A∨D	π ټولګڼ يا له ٣ کوچنی دی	f

بيلګه : له دې بيلګی دمخه هغۀ فرمول دی

یا کتاب لولم او یا فلم ګورم۰ په دې بيلګه کی الترناتيو يا بديل شته دی، یانې د » او یا « امکان شته۰ دا د » او یا « کارونه یا استعمال د خرڅلاو شيانو باندې بايد بند وي۰ یانې دوه نرخونه بايد ورنه کړای شي۰

دا لاندې فزيکي بېلګه ده، چې ګران لوستونکي دې پخپله هم ورته پام وکړي او ځيره دې يې په پام کې راولی۰ په شالت يا سرکټ الجبر کې د کجنکشن يا د »او« ترنې« ريښتينوالی لپاره دوه پرلپسی(لړی) شالتونه ترل شوي دي،

Bild 7.1

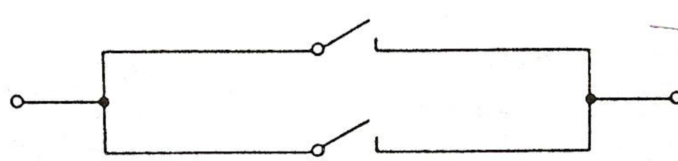


Bild 7.2

(c) ketabton.com: The Digital Library

کمپلکس ربنتیابلواک یا – فنکشنونه

دا وروستۍبیلګه په ګوته کوي، چې داسی یوځاي شوې ویناوې جوړیدۍ شي، په کومو کې چې له یو زیات تړوني موجود وي٠

که دا ساده وینا که چې «په تیاتر کې نن لوبه کیږي» په p پس له دې جملی کمپلکس جوړخت دا نه تری تیریدونکی (ربنتیا - بلواک یا ربنتیا فنکشن » نهp p\/ دیٔ٠ د دې لپاره هم د ربنتیاارزښت فنکشن ورکول کیږي٠ د ربنتیا ارزښت لپاره p له دې څخه نهp یا p نه (دا دواړه دې برابر ومنل شي) او بیا هم نهp\/p جوړیږي، چې جدول یې په لاندې ډول ورکړ شوی دیٔ

د یوې وینا نه والی

p	نهP	نهp\/p
w	f	W
f	w	w

لاس ته راوړنه یا نتیجه هکیک کوونکي نه ده یوه وینا نهp\/p تل ربنتیا ده، بی له ځانګړي حالت او له دې خپلواک، چې p کوم ربنتیاارزښت غوره کوي .

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغې ربنتیابلواک کتمټ یا identisch(identic) ربنتیا دیٔ(دا په دې مانا، چی که د ویناؤوښتونکې یا واریابلې ته هر ربنتیاارزښت ورکړ شي یانې ربنتیا یا نارښتیا تل د ربنتیا ارزښت ربنتیاغوره کوي)، وینا سم اندیزه قوانین بلل کیږي، یا ورته تاوتولوژي Tautologien

ویناسم اندیزې وییني یا افادې، چې د هغو ربنتیاارزښت بلواک کتمټ نارښتیا دیٔ (دا په دې مانا چې د متحولې یا اووښتونې په هره وینا ارزښت وینا نارښتیا ارزښت غوره کوي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونترا-ديکتوريکي وينا بلل کيږي٠ورته ويناوې کونتراديکشنونه contradiction (د دوه ويناوو مخامخوالی يا – تضاد)

بيلګه :

رښتياارزښت دې د ويينې يا افادې نه(p\/q) لپاره وشميرل شي په همدې وخت کې دې د نه p\/q رښتياارزښت هم وشميرل شي او له بل سره دې پرتله شي.

جمله : ښايو، چې $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$p...q....p \vee q....\neg(p \vee q)......\neg p...\neg q...\neg p \wedge \neg q$$
$$w...w......w.........f.............f.....f.........f$$
$$w...f.......w.........f.............f......w.........f$$
$$f...w........w.........f............w.......f.........f$$
$$f...f........f.........w............w........w.........w$$

داچې د مخ ته پراته جدول څلورم او اوم درځ يو په بل پريوځي يا يو د بل سره برابر دي، نو ويئنې يا افادې $\neg(p \vee q)$ او $\neg p \wedge \neg q$ په څرګند ډول همغه رښتيا بلواک يا – قنکشنونه دي. دا په دې معنا چې ،، جملې: دا نارښتيا ده، چې p يا q ،، او ،، نه q او نه p ،، همغه رښتيا - (او په دې ډول همغه نارښتيا-) شرايط لري، که د p او q په ځای بلې يوې ليدونکې جملې ځای نيولی وي. دا ډول دوه وينا تړاو -وينا تړنه) او تل همغه ارزښت ورکوي.

که په دې عمليو کې نوکان ځا په ځای شي، نو د عمليې ارزښت طبعاً همغه نه پاتيږي، لکه

د بې نوکانو عمليې.

ايمپليکيشن implication (لاتين: ورراګډول، خورول):

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دوه ویناوې د خپل تړاو له لارې« که۰۰۰، نو سره تنظیم یا ترتیب شي ایپلیکیشن سومبول<= چې دا سومبول د دواړو ویناو Aاو B ترمنځ ولاړ دی: او دا مانا لري:

که A نو B یا په همدیډول «له A څخه B لاس ته راځي» وینا A ته پریمیس Prämisse (لاتین نیونه (فرضیه) وایي او وینا B ته کونکلوزیون Konklusion (لاتین: پاي لاس ته راوړنه) وایي۰ د دوه ویناو ایمپلیکیشن تیک هلته نارښتیا دی، چې پریمیسس رښتیا او کونکلوزیون نارښتیا وي۰ په بل ډول رښتیا دی۰

د دوه ویناو لاس ته راوړنه یا تعقیب د لاندې جدول له لارې یواځنی څرګندیدی شي

د لاس ته راوړنې یا ایمپلیکیشن یا پسې راتلنی، په ځان پسې لرنې سومبول <=

P	q	p=> q
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

دلته داسی یوه تړنه لرو، چې له دوه برخه ویناو A او B تیک هلته یو نارښتیا یوځای شوې ویناچې په q</=pسره ښایو)۰

کله چې لومړبرخه وینارښتیا او دومه برخه وینا نارښتیا وي په کمپیوتري یا پروګام ژبه کې داسی ویل کیږي: If….., then…..

کومې ژبنۍ افادې یا ویینې په دې رښتیا فنکشن بیرته اړول کیږي. بیرته یا په څټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځيدلی شي. په ښکاره ډول د بيلګې په توګه جمله: که پسرلی لوبه وګټي، نو ماښام د تلويزيون کتلو ته کورته راځي.

ناريښتيا ده، که د جملې لومړئ برخه ريښتياوي او دويمه نارښتيا. که په جدول کې برخه جملو ارزښتونه لکه د بيلګې په توګه د جدول لومړئ همداسې څلورمه کرښه سره يو د بل پرتله شي(که دواړه برخه جملې رښتيا همداسې نا رښتيا وي) پرابلمونه نه پيښوي، په دې حالت کې ټوله وينا رښتيا ده، که لومړئ برخه وينا نارښتيا او معکوس دويمه برخه رښتياوي، نو په دې حالت کې به د بيلګې په توګه جمله نارښتيا ونه ليدل شي(که پسرلی لوبه ونه ګټي او سره له دې هم تلويزيون ليدلو ته راشي)، نو بيا د دوه ارزښتوالي پرينځيپ له مخې يواځې دا ارزښت ،، رښتيا،، باقي پاتې کيږي. د پورته فنکشني پوره والي له مخې په ګوته کوو، چې هم $\neg p \vee q$ او هم $\neg (p \vee \neg q)$ ټيک بيرته بيا(بيرته) د ايمپليکيشن د رښتيا فنکشنونه ورکوي.

په بل ډول افادې يې: q که p، او يا هم p ، د q لپاره پوره کيدونکی شرط دی(په بل ډول يې: qد p لپاره اړيين شرط دی)

ورته والی :يوارزښتوالی(برابرارزښتوالی) Äquivalent

که دوه ويناوې qاو p خپله ترنه په » ټيک هلته ، که » په هم دې ډول « هلته او هلته، که» تنظيم کړي، دې ته ورته والی يا ايکويوالنت وايي۰ د ايکويوالنت سومبول دی $\approx$ د دواړو ويناو pاوq ترمنځ دا سومبول پروت دی p $\approx$q په دې مانا، چې p ټيک هلته که q ۰ ايکويوالنت سومبول يې په دواړو خواو ايمپليکيشن لري: له p څخه q لاس ته راځي او له qڅخه p

د دوه ويناو ايکويوالنت ټيک هلته رښتيا دی، که دواړه ويناوې رښتيا يا دواړه ويناوې نارښتيا وي۰

دا شي څرنګوالی يا شي حالت په لاندې جدول کې روښانوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

p	q	P⇔q
w	w	W
w	f	F
f	w	F
f	f	W

سیده او مخامخ یا په ځښ دي په دې مانا وي، چې له p څخه q لاس ته راځی او په ځښ، یا نی له q څخه p لاس ته راځی۰

۱ ۰ ۳ د وینابلواکو یا ـفنکشنونو ترمنځ اړیکې

د دوه وېناو ترنه سم اندیزه یا منطقي برابرارزښته بلل کیږي، که د وېناو رښتیاارزښت د ترنویناارزښت سره یو په بل وخوري یا یو بل سره برابر شي۰ دا د یو وینا‌ارزښت جدول له لارې څرګندیدی شي۰ ومو لیدل، چې ایکویوالنت په دواړو لورو لاس ته راوړنه یا ایمپلیکیشن دی۰ په لاندې جدول کی به وګورو، چې دریم او شپږم درځونه، متې یا ستنی څنګه یو بل سره ځان نیسی یا ګورو، چې سره یوارزښته دي۰

p	q	p ⇔ q	p=>q	q ⇒ p	(p ⇒ q) (q ⇒ p)
W	w	w	w	w	..........W
w	*f*	f	f	*w*	.........*f*
F	*w*	*f*	*w*	*f*	.........F
f	*f*	w	w	*w*	.........*w*

ورته والی اړیکی د ورته والی یا ایکویوالنت سومبول باندې هم ښوول کیږي

$$(p <=> q) <=> (p => q)(q => p)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا ورته والي ویناتړنه موږ ته دا اجازه راکوي، چې یو بل سره بدل کړو یانی د یوه ځای د بل سره بدل کړو٠ له دې څخه پیچلو تړنو کې لکه د شالت الجبر کې کار اخستل کیږي٠

د دې ورته والی ویناتړنې غوره بیلګه د،،دي مورګان،، قاعده ده De Morgansche Regel

$$(1)......\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$$
$$(2)......\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$$

د کنجنکشن او دیسجنکشن لپاره دیستریبوتیو قانون:

(3) [p/\(q\/r)] □ [(p/\q) \/ (p/\r)]

(4) [p\/(q/\r)] □ [(p\/q) /\ (p\/r)]

١ ٠ ٤ وینافورم یا - بڼه او کوانتورونه

وینا سم اند په لاندې ډول ساده تولیز کیدی شي٠ د بیلګي په توګه که مختلف شیان همغه خویونه ولري، نو ضرور ده، چې دا فورمال وویلي - - یا افاده کړای شو: دلته د ویناو پر ځای د وینافورم څخه خبري دي، یا غږیږو٠ دا داسی ژبنی ویینې یا افادې دي، چې د شیانو لپاره واریابلی یا اووښتوني لري او لومړی د مناسب انفرادې ځای پرځای وروسته یوه وینا شي٠ بیلګي یی په لاندی ډول دي

لومړی : xپر دوه ویشونی دئ »

دویم : » z یو هوار څلورګوډی(ځلورضلعي) » دئ٠

دریم : «u له v څخه لوي » دئ او داسی نور

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترهر ځاي پرځاي کولو وروسته رښتيا یا نارښتيا وینا لاس ته راځي۰ که په دويم کی دz پرځاي «ډیرګوډی» (کثیرالاضلاع) ځاي پرځاي شي، نو یوه رښتيا وینا لاس ته راځي۰

که په لومړي کیx د7 پرځاي ځاي پرځاي شي، نو یوه نارښتيا وینا لاس ته راځی۰ دریم یوه اړیکه(ریلیشن(ده، چې هلته د انفرادیو د ایښولو ترتیب هم یو رول لري۰ دلته که د تورو پر ځاي ګڼونه ږدو، نو هلته دا رښتيا وینا ده که د لومړي توري پرځاي ستر ګڼ ځاي پرځاي شي۰د فورمال سم اند په ژبه د پریدیکات په شکل۰(له دې امله دې د سم اند برخی ته د پري دیکات first-order logic سم اند یا منطق وايي۰

بیرته داسی لیکو P(x), Q(z), R(u,v)

یوه بله کارونه یا عملیه شته، چې له وینا بڼې څخه وینا جوړوي۰ چې کوانتيفيکيشن Quantifikationبلل کیږي۰ دا ویناهغه وخت منځ ته راځي، چې ټول د وینا بڼی افراد همغه خویونه ولري، چې ټولوینا (Allaussage) ورته وايو۰یاچې په پوښتل شوي چاپریال کې داسي افراد شته وي، چې همغه خویونه ولري، دې ډول وینا ته موږ د شتون یا موجودیت وینا یا Existenzaussage وايو۰ زموږ په بیلګه کې يی استعمال لاندې را په ګوته وکي

ځلورم : (پیداینتی یا طبیعي) ګڼونه یا اعداد شته، چې په دوه ویشل کیږي

پنځم : ټولې ځلورۍ (مربع) هوارې ډیرګوډۍ یا کثیرالاضلاع دي۰

د ټولکوانتور یا ټولوینا لپاره نخښه∀

د شتون- یا موجودیتکوانتور یا شتونوینا لپاره نخښه ∃

یادونه : د ټولکوانتور لپاره نخښه د سرچپه A په څیر ده او د شته والي کوانتور لپاره نخښه د په څټ E په څیر ده په پام کې دې وي، چی د کوانتورونو ورکونې وروسته اووښتونې (ویاریابلی یا مجهولی) ورکول کیږي۰

ځلور ۱ : $\exists x \in P(x)$

داسی یي لولو، چی یوx په P(x) کې شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځه ۱ : $\forall z \in Q(x)$

دا داسی لولو: د ټولوz لپاره ، چې په Q(x) کې پروت دئ (یا د ټولو۰۰ له ۰۰۰ څخه)

دا سومبول $\exists$ دا مانا لري،چې« کم له کمه یو ۰۰۰ شته»د وینابنی او په دې پورې اړوند واریابلو یا اووبنتونو ډیریو جوړه، د دې سومبول سره یوه د« شتون- یا موجودیت وینا» ورکوي، په نامه د اووبنتونو ساحه یا ډیرئ کې، په کوم کې چې کم له کمه یوه داسې اووبنتونې ځاې په ځایونه شته وي کومه چې وینابنه رښتیا وینا کوي۰

بیلګی (د رښتیا شتون - موجودیت ویناوي)

اول - $\exists x \in R: x+1=0$

(لوستل : یو داسی رییل ګڼ یا عدد x له(په) R (کې) شته ،د کوم لپاره چې$x+1=0$ باور لري) دلته x دا مانا لري، چې x د رییلګڼډیرئ یا ریل ا عدادو سټ R توکی دئ او $\in$ په دې مانا دی، چې توګي له ۰۰۰ دی۰

دویم : $\exists x \in R:$

$$x^2 + 4x = 0$$

(لوستل: یو x له(په) R څخه(کې) شته د کوم لپاره ، چې $x^2+4x=0$ باور لري)

دریم : $\exists x \in R: \quad x^2 - 4 = 0$

(په دې جمله کې حتی دوه رییلګنونه شته دی، چې د هغې لپاره $x^2-4=0$ باور لري

: (2، -2)

جمله (د یوې شتونوینا یا موجودیتوینا نه والی یا نفی)

$$\exists x \notin R: x^2+1=0$$

لوستل: داسې رییلګڼ x نه شته، د کوم لپاره چې برابرون $x^2+1=0$ باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې ويناښی هم شته، د کومو لپاره، چې د اووښتونډيری یا واريابلډيری ټولو توکو لپاره رښتيا وينا شي٠

بيلګه: ويناښه « x په 2 ويشونی دئ » د جوړه ګڼونو هريوه لپاره رښتيا ارزښت لري په

دا سومبول $\forall$ په دې مانا دی، چې « د ټولو x لپاره» د ويناښې او په همدې پورې اړوند د وينا متحولو ډېرئ يا سټ (وينااووښتونډيری یا واريابلډيری) ترنه له دې سومبول سره يوه Universalaussage يونيورزالوينا يا ټولوينا منځ ته راځي٠ په دې مانا چې د دې متحولو ډېرئ(اووښتونډيری) هر توکی لپاره د ويناښې څخه يوه رښتيا وينا جوړيږي٠

جمله : (دUniversalaussage يونيورزال- يا ټوليزې وينا يا ټولوينا لپاره

$$(1)........\forall x \in G : 2 \mid x$$

(د ټولو جوړه ګڼونو (جفت اعدادو)لپاره باور لري، چې x په ۲ ويشونی دئ)

$$(2).......\forall \in R, x^2 > x$$

(د ټولو رييلاعدادو x لپاره, کوم چې له يوه لوي وي باور لري $x^2 > x$)

جمله : (د نارښتيا ټوليزې وينا لپاره)

$$\forall x \in R : x^2 > x$$

دا وينا نارښتيا ده، ځکه چې دا د $1 \le x \le 0$ لپاره باور نه لري، پس دا وينا د ټولو ريل عددونو لپاره باور نه لري٠

۱ ٠ ۵ اړين – یا ضروري- او پوره کيدونکي شرطونه

د ايمپليکيکشن سومبولA=>B (« کهA نو B » « له A څخه Bلاس ته راځي»)يا په بل ډول : که A باور ولري، نو B هم باور لري»

(c) ketabton.com: The Digital Library

پە شمیرپوهنه کې ځانګړي فرمولونه شته٠

الف) « A د B لپاره پوره کیدونکی شرط دی»

ب) « B د A لپاره یو اړیین یا ضروري شرط دی»

فرمولونه الف) وایي، چې د A رښتینوالی د B رښتینوالی ځان پسی لري یانی له آ څخه ب پوره کیږي یا له یوه څخه وبل ته رسیږو یا د A شرطونه د B د شرطونو پوره کیدنو لپاره نیونه(فرضیه) ده او ب شرط پوره کیدنه اړیینه یا ضرور ده، چې آ پوره شي٠

بیا : وینا باور لري٠

د B وینا د باور لرلو لپاره دا پوره دی یا پوره کیدونکی دی یا بسیا کوي، که د A وینا باور ولري

بیلګي د پوره کیدونکو شرطونو لپاره:

۱ – ویناA : « ګڼ n پر ٦ ویشونی دی»

وینا B : « ګڼ n پر ۳ ویشونی دی»

A => B

د دې لپاره پوره کیدونکی شرط دی یا بسیا کوي، چې یو رییل ګڼ n پر ۳ ویشونی دی، که دا پر ٦ ویشونی وي٠
که n پر ٦ ویشونی وي، نو پر ۳هم ویشونی دی ٠ دا نو تراوسه دا مانا نه لري، چې ضرور دې ګڼ n که پر ۳ ویشونی وي، پر ٦ دې هم ویشونی وي٠ د بیلګي پە توګه ګڼ ۹ پر ۳ ویشونی دی ، مګر پە ٦ نه دی ویشونی٠

۲ - وینا A : "n > 7„

وینا B :وي دې: n > 6

A => B

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دا پوره کيدونکی دی، چې يو رييلګڼ ن له ٦ څخه لوي دی٠ که اړيکې، چې ن له ٦ لو دی، باور ولري

داسې رييلګڼونه هم شته، چې له ٦ څخه لوي دي، مګر له۷ څخه لوي نه دي٠ د بيلګې په توګه ٥ ،٦، يا شپږ.نيم

د ب) فرمولبندي وايي، چې وينا ب باورلرل غوښتونکی يا اړيين يا ضرور دی، د دې لپاره، چی وينا A باور ولري٠

که وينا B باور ونه لري نو وينا A هم باور نه لري ٠

بيلګی د اړيين(ضروري) شرطونو لپاره:

۱ – د دې لپاره، چې يوګڼ n پر 6 وويشل شي، اړين(ضرور) ده، چې دا ګڼ پر3 ويشونی وي٠ يو ګڼ، چې پر3 نه وي ويشونی، نو پر ٦هم ويشونی نه دی٠

۲ - ويناA : » څلور ګوډی يوه څلوری يا مربع ده«

وينا B : » څلور ګوډی څلور ولاړ کونجونه لري« A => B

د دې لپاره ضرور، چې يوه څلورګوډی يوه مربع(څلوری) ده دا خويونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه ولري، که ټول ګونجونه يې ولاړ نه وي، نو مربع يا څلوری نه ده که يوه څلورګډی څلور ولاړکونجونه ولري اړين نه ده، چې څلوری يا مربع دې وي٠

د برابروالي يا برابرارزښتي (ايکويوالنت) سومبول«

A<=> B

(په دواړو لورو ايمپليکيشن) لپاره په شميرپوهنه کې هم فرمولبندي شته: دا وايي، چې A دB لپاره يو ضروري او پوره کيدونکی شرط دی٠ « دا وايي، چېA ټيک هلته باور لري، کله چې B باور ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگی : د پوره کیدونکی او ضروري شرطونو لپاره

۱ – ویناA : « ګڼ یا عدد   n   پر ٦ ویشونی دئ»

وینا B : « عدد n   پر ۳ او ۲ ویشونی دئ»

A <=> B

د دې لپاره ضرور او پوره کیدونکې دی، چې: n پر ٦ ویشونکی دئ، که دا عدد پر ۳ او ۲ ویشونکي وي٠

۲ – وینا A : » څلورګوډی یا څلورضلعي یوه څلوری یا مربع ده«

ویناB : « څلورګوډی څلور ولاړ کونجونه لري او څلو برابر اوږده اړخونه یا ضلعي»

A<=>B

ددې لپاره، چې څلورګوډی یو مربع دئ ضرور او پوره کیدونکی دا خویونه دي، چې څلور ولاړ کونجونه او څلو برابر اوږده اړخونه(ضلعې) ولري٠

۱ ٠ ٦ د شمیرکلمو یا ویو(لغاتونو) شمیرنیز مفهوم(ترې پوهیدنه)

پیژند (تعریف) څه شی دئ؟

د کلیمی ټاکنه ده، چې تیک ټاکلي او له مخامخوالی(تضاد) ازاده وي٠ په عامو خبرو کی کله که کلیمی راځي ، چې په مختلفو اشکالو ترې ځانګړي ماناوي اخستل کیږي، خوپه شمیرپوهنه کي داسي نه ده٠

د شمیرنی ټاکنی یا پیژندونه (تعریفونه)د تیک څرګندې پوهنې یوه نه پرېښوونکی سمبال اله ده، یانې ترې تیریدل نه شي کیدای٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله څه شی دی ؟

ټولې ربښتوني ويناوې په شميرپوهنه کې جملې بلل کيږي، چې د پيژندني لپاره ښووني يا ثبوت ته اړتيا لري ۰

اکسیوم Axium څه شی دئ؟

بې ثبوته ربښتينې وينا ته اکسيوم وايي

شميرپوهنيزې يا د رياضي جملې زياتې نيونې(فرضيې) او ثابتول(غوښتنه،جوته ونه يا ښوونه) په بر کې- يا خوندي لري۰

که دا وينا داسې وي، نو پس داسې به هم وي۰ دلته که دا وينا داسې وي نيونه يا فرضيه ده او نو داسې هم ده۰ دا غوښتنه ده، چې بايد ثبوت يا وښوول شي۰

اکسيوم : ۱ طبيعي عدد دئ (پيانو Peano)

: ټکی هغه دئ، چې پر ويشونی نه وي يانې په ټکی ويشل بند دي۰ (Euklid)

: حتمي پيښنه د پيښي امکان ۱ درجه لري۰

جمله: که درېګوډی ولاړکونجيز وي، نو(پس) د پيتا ګوراس (pythagoras) درسي جمله باور لري

: يو لومړی ګڼ، چې له دوه لوي وي، بايد ناجوړه(طاق) وي

: په اخره جمله کې نيونه(فرضيه) ده (که يو پريم عدد له ۲ لوي وي۰۰۰) او ثبوت يې (هر له دوه لوي عدد په دوه ويشل کيږي پس لومړی ګڼ نه شي کيدی، نو دا ټل ناجوړه ياطاق دئ)په څټوالي يا تضاد کې پيژندل کيږي۰
ټل داسې نه ده، چې د جملې د ربښتينوالی څخه دې د جملې په څټوالی يا تضاد هم ربښتيا وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه:

جمله: که ٦٪ پس ۲٪ هم (ربښتیا)

جمله: که ۲ ٪ پس ٦٪ هم (نارښتیا)

۰۰۰۰۰تیک هلته ، چۀ که۰۰۰۰یوځاي راوړي

بیلګه : که چیرې غبرګ اړخیز کې هر دننی کونج ۹۰ درجی وي، نو دا ولاړکونجیز(قام الزاویه) دی۰

په ځټ : که غبرګ اړخیز ولاړ کونجیز وي، نو دننی کونجونه ۹۰ درجی لوي دي۰

یوځایراوړل :

یو غبرګ اړخیزتیک هلته(هلته او هلته یا بیا او بیا یا یواځنې او یواځنې ټاکلی یا یواځنی ټاکلی او په ځټ) ولاړکونجیز دی، کله چې دنني کونجونه ۹۰ درجی لوي وي۰

۱ ۰ ۷ برابرونونه او نابرابرونونه (مساوات او نامساوات)

پیلبیلګه:

لمسی ، پلار او نیکه په ګډه ۱۱۳ کلن دي۰ پلار د ځوي د عمر یوکال کم اوه ځله عمر لري او نیکه د پلار د عمر له دوه برابره څخه ٦ کاله نور هم زیات عمر لري۰

پوښتنه : له دوي څخه هر یو څو کلن دئ؟

د ځوي عمر په x سره ښایو، نو د پلار عمر 7 x-1 دئ او د نیکه عمر 2(7x-1)+6 کاله کیږي، چی د دې ټولو زړښت وختونو زیاتون یا جمع بیا ۱۱۳ کاله دئ یانی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x+7x-1+2(7x-1)+6 = 113$$

یو ډول ترمونه رامنځ ته کیږي او ساده کیږي:

$$x+7x-1+14x-2+6= 113 \;\; \vee \;\; 22x +3 = 113$$

په کینې ۲۲ ځله د x ارزښت چې ۳ په ورزیات شوي او دا له ۱۱۳ سره برابر دی

نو دا ګڼې ۲۲ ځله x بیا ۱۱۰ کیږي: $22x = 110$ او د x ساده ارزښت ۲۲ – مه برخه د ۱۱۰ ده یانې: په دې لاس ته راوړنې سره زوي ۵ کلن پلار ۳٤ کلن او نیکه ۷٤ کلن دی.

که ترمونه $T^{\wedge}$ اوT° د برابروننخښی = باندې یو له بل سره وتړل شي، نولاندې برابرون پیداکیږي: $T^{\wedge} = T^{\circ}$.

که چیرې ترمونه په دې نخښو $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ او(نابرابروننخښه =|) یو له بل سره وتړل شي یو نابراون منځ ته راځي.

برابرونونه او نابرابرونونه چې ناټاکلي یا مجهولو سره یوځاي شي، هغې ته د ویناڤورم یا نوره هم ښه وینا بڼه ویل کیږي.

دا یا رښتیا یا نارښتیا وینا کیدی شي. که ناټاکلي، چې اوښتوني یې هم بولو(د بیلګې په توګه z , x , y) پر ځاي د بنسټیډیری ګنونه ولیکل شي. په برابرونپوهنه کې له پیژند – یا تعریفډیری څخه هغه ګڼونه غوره دي، چې د ورکړ شوي فورم یا بڼې یو برابرون یا نابرابرون رښتیا وینا کړي.

د یو برابرون یا نابرابرون (مساوات یا نامساوات) هر عدد ځاي پرځاي کول، چې وینابڼه پیژند - یا تعریفډیری پورې اړوند وي او دا وینا ریښتینې کوي، اوبیډیری یا حلډیری L کې پروت دی یا د برابرون یا نابرابرون په ډکوونکو (پوره کوونکو) ډیریو پورې تړلی برابرون ته ، چې د ټولو ځاي پرځاي کولو لپاره ریښتونې وینا ورکوي کټمټ یا (identisch, identic) وینا وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګې :

الف) $5x= 4$ د $x = 0,8 = 4/5$ لپاره رښتیا وینا ته ځی : یانې

$5.0,8=4$ نو $L=\{0,8\}$

ب) $3x^2 = 48$ د $x = 4$ لپاره او $x = -4$ لپاره رښتیا وینا ته ځې

یانی $3.(-4)^2 = 48$ څخه لاس ته راځی او په ښت $3.4 = 48$ پس- $L = \{ -4;4\}$

۲ – نابرابرون الف) $2x > 1 \Rightarrow L= \{x \mid x> -1/2 \}$

ب) $x < 3 \Rightarrow L = \{ x \mid x > -3 \}$

۳ – کتمتوالی : الف) $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

ب) $(a+b)^2 = a^2+b^2 +2ab$

دوه برابرونونه یا نابرابرونونه، چې په خپل پیژندډیرئکې سره برابر وي(یا یو پربل وخوري،

یانې یو د بل پرځاي ایښول کیدی شي) او همغه اوبی- یا حلډیرئ ولري ایکویوالنت (Equivalent) یا «ځاي پرځاي کول برابر» یا ورته بلل کیږي۰

یادونه : دا لاندې د جدول په ډول دی، له پورته له ښي و کیڼ لور ته په درځ یانې ولاړ درځ لوستل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نابرابرون	براون
۱) وینافورم کې کیدی شي،چې خواوې سره بدلې شي	$T^{\circ} < T^{\wedge}$ $T^{\wedge} > T^{\circ}$ $2x < 6$ $6 > 2x$	$T^{\circ}=T^{\wedge}$ $T^{\wedge} = T^{\circ}$ $3x=5y$ $5y = 3x$
۲) که وینافورم په دواړو خواوو همغه ترم زیات یا کم شي او د یوې ورزیات ترم پیژندډیری خوندې وساتل شي یا ځاي کړي	$T^{\wedge} < T^{\circ} \Rightarrow$ $T^{\wedge} \pm T^{\circ} < T^{\circ} \pm T^{\wedge}$	$T^{\wedge} = T^{\circ} \Rightarrow$ $T^{\wedge} \pm T^{\circ} = T^{\circ} \pm T^{\wedge}$
یا تغیر ونه خوري۰ مخامخ یا کینې لوربیلګه کې تفریفډیری تغیر خوړلی	$3y < 4x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4y \pm 2x < 4x \pm 2x$	$2z = 8 \Rightarrow$ $2z \pm 3 = 8 \pm 3$

پر ښت بیلګه

$2z=8 \mid\Rightarrow 2z+3-z=8+3-z$

دا چې $z=4$ دې نوي ورزیات شوي

ترم $3-z$ نه دی تعریف یا پیژندنه

لري، ځکه چې $3 - z$ یو پیدایښتي یا طبیعي ګڼ نه دی

۳) د وینافورم دواړه $T^{\wedge}=T^{\circ} \Leftrightarrow T^{\wedge}.T > T^{\circ}.T$ $\Leftrightarrow T^{\wedge} < T^{\circ}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه کیدی شي چې	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
له همغه مثبت ترم سره	$T^\wedge:T > T^\circ:T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$
ځل او یا په همغه ترم	$T > 0$ که	که $T > 0$ وي
وویشل شي	$3y - 12 < 30z - 90$	$4x+2 = 10x-6$
	$\Leftrightarrow y - 4 < 10z - 30$	$\Leftrightarrow 2x + 1 = 5x - 3$
	$\Leftrightarrow 4y - 16 < 40z - 120$	$\Leftrightarrow 2xc + 10 = 50x - 30$
٤) د یوه برابرون	$T^\wedge < T^\circ \Leftrightarrow T^\wedge.T > T^\circ.T$	$T^\wedge = T^\circ \Leftrightarrow$
دواړه خواوې کیدی شي،	$T^\wedge < T^\circ$	$T^\wedge.T = T^\circ.T$
چې له یوه منفی ترم سره	$\Leftrightarrow T^\wedge:T = T^\circ : T$	$\Leftrightarrow T^\wedge:T > T^\circ:T$
ځل شي یا دواړه خواوې په	$T < 0$	$T < 0$
همغه ترم وویشل شي٠	$-2y < -4$	$3x = 12$
که په دې فورم کې	$\Leftrightarrow y > 2$	$\Leftrightarrow -9x = -36$
نابرابرونونه وي نو د	$\Leftrightarrow 10y > 20$	$\Leftrightarrow x = 4$

برابرون لورې بدلیږي، یا نخښه بدلیږي

یادونه :

په ټولیزه، چې په کتابونو کې لیکل شوي، ترمونه Tیو او T دوه په لاندۀ توګه د ایندکس سره په نخښه کوي: T_1, T_2

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . تمرنونه:

۱ – په ۱ . ۳ –مه برخه کې د رښتیا ارزښت ورتو الی له (۱) څخه تر (۴) پورې وښایاست.

۲ – د رښتیا ارزښت جدول له لارې وښایاست، چې لاندط ویناتړاو منطقي مساوي ارزښت دی.

الف - (A⇔B) او (B⇔A)

ب- (A=>B) او(AvB)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ ۰ ډیرۍ پوهنه Die Mengenlehre, the set theory

ډیرۍ پوهنې یا سټ تیوري باید خپل ځاي په شمیرپوهنه او همدا ډول په نورو پیداینیتي- یا طبیعی پوهنو کې نیولي وي، نو له دې امله د لنډ تیر وخت را په دې خوا په پرمختللو هیوادونو او اوس هم په افغانستان کې د ښوونځیو په لیکلوست کې پیل شوه، ځکه چې بې له ډیرپیوهنې یا سټ تیوري شمیرپوهنه بې مفهومه ده او ناشونې۰ دا به له دې لیکنې څخه همدا اوس څرګنده شي، چې پیداینیتي یا طبیعي ګڼونه یا - اعداد او هرڅه د ګڼونو په څیره کې ، چې موږ ته څرګند وي هغه ټولې ډیرۍ یا سټ دي او بل څه نه دي۰

ډیري پوهنې (سټ تیوري)په پرمختللو هیوادونو کې هم د شلمې پیړۍ په دویه نیمه کې د میندو او پلرونو لپاره ستونځې پیدا کړې، ځکه، چې دوي د ډیرۍ پوهنې سره بلد نه وو او د خپلو کوچنیانو سره یې مرسته نه شوه کولی۰

د ډیرۍ کلمه له عدددونو یا ګڼونو پخوانی ده، که څه هم پخوا انسانانو په خپله خوښه نه ښوو له لکه اوس۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تراوس ورسره بلد ډول هم سټ يا ډېرۍ پيژندل کيږي، لکه د ښوونځی نجونې او هلکان، يا په يوه ټولگی کې ميزونه او چوکی، يا لکه هغه نيزوړي، چې نيز راوړي او د سپين په پتې کې يې ډيرۍ ډيرۍ اچولي يا د هسکې مينې د ښوونځي په لسم ټولگی کې د زده کوونکو، کتابونو، کتابچو پنسلونو، څوکيو او ميزونو سټ يا ډيرۍ۰

د ډېرۍ پوهنې کلمه: موږ په افغانستان کې هم د ډيرۍ له کليمې سره اوس بلد شوي يو که څه هم تربيلو بيلو پرديو نومونو لاندې، چی زما په اند به زده کوونکو او ښوونکو ته يوائې ذهني غوره والي لري، زه غواړم، چی د ډيرۍ څو مختلف پيژندونه يا تعريفونه ورکړم، چې ښه مو ورته پام راوګرځي، دا له دې امله هم، چی د ډيري پوهنې (سټ تيوري) غوره والی ته مو نور هم پام راوگرځي۰

ډيرۍ پوهنه د شميرپوهنې سټه جوړوي او د شميرپوهنې ټولې څانگې په ډيرۍ پوهنه ودانې دي۰ نن شميرپوهنه بې له ډيرۍ پوهنې داسې وده نه شي کولی او سټه يې وزي۰

پيژند ۲ ۰ ۱

الف : ډيرۍ يا سټ د ټاکلو شيانو يا کلمو ټولگه (يوځايوالی، مجموعه) ده، چې پخپله خوښه د يوې ټاکلې بنسټډيرۍ يا بنسټ سټ څخه ، چې د پيژندلشويو اصولو يا کرکتريين له مخې ټاکل شوې وي

ب : د الماني شميرپوه کانتور(George Cantor 1845 – 1918) پيژند:

زموږ د خيال يا ليد څرگند ټاکلو ، ټيک يو له بل توپيرکيدونکو شيانو ټولگې (يوځايټولولو يا مجموعې) ته ډيرۍ وايي او هر شي ته، چې ډيرۍ يې جوړه کړې يا ډيرۍ ترې جوړه شوې وي، د ډيرۍ – يا سټ توکی وايی۰

(Set and elements of set ډيرۍ او د ډيرۍ توکی)

پ : د مختلفو شيانو ټولگې يوه يوون يا يووالی (واحد Einheit, unite) ته په

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه کې ډیرۍ وایی

یادونه : د واحد لپاره، چې تراوسه ورسره بلد یو یوون یا یووالی ښه نومه ونې دي۰ دا که څو واره وویل شي، نو باورلرم، چې ورسره بلدیږو۰

ت : څرګند شیان د ګډو نخښو پربنسټ، چې تر څیړنې لاندې نیول کیږي او د دې نخښو له امله یوځای ټولیږي یا ټولګه جوړوي، ډیرۍ یا سټ تشکیلوي۰ ګډې نخښې کیدی شي ښکلا، کوچنیوالی او داسې نور وي۰

یادونه: د ګرانو لوستونکو دې دې ته پام وي، چې په پورته پیژندونو کې یې غوره او د پام وړ پیژند یاتعریف د جورج کانتور پیژند دی.

بیلګه :

ګڼونه یا عددونه، نومونه، او توري کیدی شي د ډیریو بیلګو په توګه راوړل شي۰

ګورو، چې د ډیرۍ یا سټ کلمه په شمیرپوهنه کې بل ډول ده لکه په ولسي ژبه کې، چې دلته ډیرۍ د څنو شیانو زیات یوځای کول موخه ده، د ځانګړو شرایطو لاندې.

په شمیرپوهنه کې ډیرۍ په لویو لاتین تورو لیکل کیږي لکه ..A,B او یا ,M,N ....X,Y د ډیریو توکي د لاتین په کوچنیو تورو لیکل کیږي، لکه ...a,b,c او ...m,n,x,v

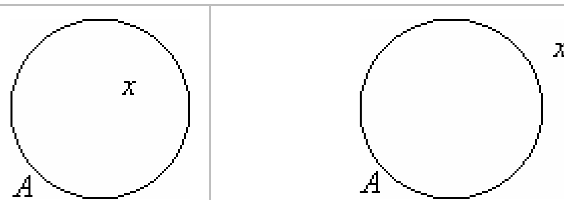
د دې لپاره، چې وپوهیږو، چې ایا توکی a د ډیرۍ A توکی دی که نه نو لیکو: $a \in A$

په پورته کې توکی a د ډیرۍ A توکی دی.

که a د A توکی نه وي ، نو لیکو: $a \notin A$ دلته a د ډیرۍ A توکی نه دی

دا پورته لینکدود له ښی وکیڼ لور ته هم لیکلی شو، چې پرلپسی لړۍ یې ساتلې پاتې شي۰ زه یې په څټ لیکنو سره لیکنیزې ستونځی لرم۰دا لاندې یې دیاګرام دی، خو توکي یې بل ډول لیکل شوي دي، چې ګرانو ستونکو ته به د پوهیدلو ستونځ پیدا نه کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$a \in A$ (a د A توکی نه دی)	$a \notin A$ (a د A توکی دی)

ډيرۍ A دې له a,b,c,d,e,f,g,h, توکو جوړه وي، چې په لاندې توګه يې ليکو

$$A = \{ a,b,c,d,e,f,g,h\}$$

ګورو، چې { } د ډيرۍ يا سټ نخښه ده

يادونه : دا د ډيرۍ کلمه موږ په افغانستان کې سټ set بولو ، چې انګريزي ده، په فارسي کې يې مجموعه بولي، چې ډيرۍ د شيانو مجموعه يا ټولګه ده او په الماني کې ورته مينګې Die Mengeوايي٠ هغه بنسټيزه خبره يې په پيژند يا تعريف کې ده، که موږ يې چې هرڅنګه وبولو، خو د يو بل څخه کره توپيرکيدونکو شيانو ټولګی ته ٠٠٠ وايو. د ټکو پر ځاي ، چی هر څه ليکی، خو موږ ګورو، چې په پښتو يې هغۀ مناسبه نوموه ونه ډيرۍ ده، دا د کوټې کوټې څخه يا راپنډ او داسې نورو څخه ماته ښه ښکاريږي او زموږ ولس د دې نامه سره بلد دی، چې په پوهنه او لا نور ښه په شميرپوهنه کې بايد وکارول شي٠ زه بيا په دې ټينګار کوم، چې دا خپل ، چې ما ټاکلی يا بل څوک يې که بل ډول بولی د انګريزي يا الماني يا بل پردي نوم څخه ښه او پوهوړ دی٠ د سټ مانا که په ډکشنري کی وګورۍ ،نو پوه به شو، چې له دې نوم څخه مو خپل د پښتو نوم ښه او مناسب دی. ګوروچې دا نوم اوس ژورنالستان هم زيات کاروي او وايي، چې ډېرى يا ډېرۍ خلکو.... وکتل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ ۰ ۱

الف) M_1 (لوستل Mایندکس ۱ دا به په لاندې نخښونه کې روښانه شي پام دې وي، چې (index(indeces ایندکش پیژند نخښې ته وايي) دې د لومړیو ګڼونو ډیر ی (اعدادو سټ) وي، نو باور لري: $7 \in M_1, 8 \notin M_1$

ب) M_2 دې د لاندې برابرونونو یا مساواتو د اوبیونو(حلونو) ډیرۍ وي

(x+1)(x-2) = 0

نو باور لري : $-1 \in M_2, 2 \in M_2, 1 \notin M_2$

بیلګه ۲ ۰ ۲ :

الف) د مساوات (x+1)(x-2) = 0 حل ډیرۍ M_2 ده $M_2 = \{-1, 2\}$

ب) د جوړه (جفت) عددونو یاګڼونو ډیرۍ M_3 ده $M_3 = \{0, 2, -2, 4, -4, ...\}$

ډیرۍ لکه، چې ومو ویل د توکو د خویونو له لارې هم څرګندیدی شي یا ورکول کیدی شي۰

M = { x | سره ۰۰۰ د خوویونو x}

(لوستل: M د ټولو x ډیرۍ ده له خویونو ۰۰۰۰۰ سره)

بیلګه ۲ ۰ ۳

الف) { د ټولوx سټ ، چې هلته x یو لومړنی عدد یا ګڼ دی| M = { x

b) M = { x | (x+1)(x-2) = 0 }

$c)..........M = \{x \mid x \in R, 0 \le x \le 1\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تشدیری: ډیری، چې کوم توکی ونه لري تشدیری یا خالي سټ بلل کیږي او داسی یې لیکو: θ یا $\{\} = \emptyset$

دا دې د یوې ډیری یا سټ سره، چې یوائی له صفر څخه جوړه ده، نه بدلیږي یانې

$$\{0\} \neq \{\} = \emptyset$$

بیلګه ۲ ۰ ٤

$$\{x \mid x \in Z, x^2 + x - \frac{3}{4} = 0\} = \theta$$

ځکه، چې د برابرون یا مساوات $x^2+x-3/4 = 0$ حلډیری

$$\{x|x^2+x-/4= 0\} = \{1/2, -3/2\}$$

کوم ټولګڼ یا تام عدد خوندي نه لري۰

ټولګیونو پیژند ته دې پام وي، چې د راشنلګنونو برخډیری ده۰دریمه برخه دې وکتلشي

بیلګه ۲ ۰ ٥ : د ز ۰ کال د دویمې نیمایي میاشتو سټ یا ډیری په Ju , aug sep , ok,no, de سره ښایو او لیکو: A= { jul,aug,sep.ok,no,de}

نو داسې لرو یا نوره هم ښه داسی لیکلی شو: $jul \in A, jun \notin A$

دا په دې مانا، چې جولای د A توکی دی او جون د A توکی نه دئ

بیلګه ۲ ۰ ٦ : ټول مندیزي، چې نن مازیګر لمانځه ته د غارخلي لمنځتون یا جماعت ته راغلي۰

بیلګه ۲ ۰ ۷ : د هغو میرو ، غواوو او وزو ډېرئ، چې نن په نخاس کې خرڅې شوې.

بیلګه ۲ : ۸ د ټولو هغۆ ګڼونو ډیری(عددونو سټ) M، چې ۳۰ ویشي یانې

۱ ، ۲ ، ۳ ، ٥ ، ٦ ، ۱۰ ، ۱٥ ، ۳۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

داسې یې لیکو : $M = \{ 1,2,3,5,6,10,15,30\}$

دا سټ پاي سټ ده داسې وایو، چې ډیرۍ یا سټ M د ټولو هغو توکوx - لکه پورته - جوړ شوې، چې ۳۰ ویشي او داسې یې لیکو: $M =\{ x \mid x$ د ۳۰ پرویشونی ګڼ$\}$

د ټولو پیداینېټې یا طبیعي ګڼونو ډیرۍ(اعدادو سټ) N ټاکو او داسې یې لیکو:

$$N = \{ 1,2,3,4\ldots.\}$$

دا نه پای لرونکی یا لایتناهي ډیرۍ(سټ) ده ، چې په لاندې ډول یې نخښنه ده یا په لاندې ډول په نخښنه کیږي: ∞

ګورو، چې په شمیرپوهنه کی موږ پر پای ګڼونو برسیره ناپای عددونو سره هم مخامخ یو.

۲ ۰ ۲ د ډیریو ترمنځ اړیکې relation between sets

د سټونو ترمنځ غوره اړیکی د برابروالی او خوندیونې یا خوندي لرنې (مساویوالی او یو په بل کې ځاي لرلو) اړیکې دي.

پیژند ۲ ۰ ۲ دوه ډیري یا سټونه M_1 او M_2 یو د بل سره برابرې دي، یانې

$$M_1 = M_2$$

که چیرې د ډیرۍ یا سټ M_1 هر توکی د ډیرۍ یا سټ M_2 توکی هم وي او پر ځټ یا برعکس هر د M_2 توکی د M_1 توکی هم وي.

برابرې ډیرۍ برابر توکي هم لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګی په توګه

$$M_1 = \{x \mid (x+1)(x-2)(x+3) = 0\}$$
$$M_2 = \{-1, 2, -3\}$$
$$\Leftrightarrow M_1 = M_2$$

ګورو، چې M_1 د M_2 سره برابر دئ

برخډیرۍ(سبسټ subset)

پیژند ۲ ۰ ۳ :

یوه سټ M_1 د سټ یا ډېرۍ M_2 برخډیرۍ (لاندې ډیرۍ، خوندي ډیرۍ یا سب سټ) بلل کیږي یا M_1 په M_2 کې ځای ده یا نوره هم ښه M_1 په M_2 کې خوندي ده، لیکندود یا لیکنډول:

$M_1 \subseteq M_2$ که د ډیرۍ M_1 هر توکی دسټ یا ډېرۍ M_2 توکی هم وي۰

کیدی شي، چې M_1 د M_2 سره برابر هم وي، که برابروالی یا مساوات نا شوني وي نو بیا د اصلي برخډیرۍ یا اصلي سب سټ څخه غږیږو۰

پیژند ۲ ۰ ٤ :

یوه ډیرۍ یا سټ M_1 د M_2 اصلي برخډیرۍ ده او داسې یې لیکو: $M_1 \subset M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

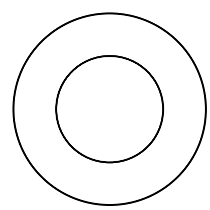
که $M_1 \subseteq M_2$ باور ولري او کم له کمه د M_2 يو توکی د M_1 توکی نه وي۰

بيلګې:

الف) که ولرو $M_1 = \{-1,1\}, M_2 = \{-1,0,1\}$ نو M_1 په M_2 کې اصلی خوندي دئ

ب) د ټولو څلوريو (مربعو) ډيرئ د ټولوڅلورګوډيو(څلور اضلاعو) اصلي برخډيرئ ده۰

پ) څيره ۱ ۰ ۱ په هواره يا سطحه کې ټکوډيرئ ښايي، د کومو لپاره چې باور لري، که M_1 او M_2 د ټکو ډيرئ يا-سټ وي $M_1 \subset M_2$



که په پورته څيره کې وګورو، نو يوه ګردئ (دايره) M_1 په بله لويه M_2 ګردئ کې خوندي ده۰

تشډيرئ په هره ډيرئ کې خوندي ده۰ هره ډيرئ په خپل ځان کې د نااصلي برخډيرئ په څير خوندي ده۰

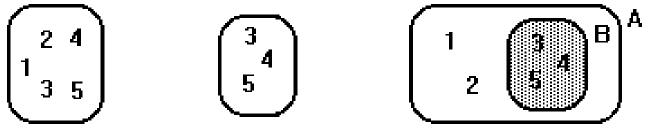
يا دا پيژند :

A⊆B که باور ولري : $x \in A \Rightarrow x \in B$

بيلګه:

A⊆A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند ۲ ۰ ۵ :

هغه ډيرئ، چې هيڅ توکی ونه لري تشډيرئ بلل کيږي او داسې يې ليکو: $M=\theta=\{\}$

يادونه : پام دې وي، چې صفر ډيرئ او تشډيرئ سره بدلې نه شي يانې لاندې ته:
$\{\}=\theta\neq\{0\}$

د يوې ډېرئ توان يا تواندېرئ (توانسټ)

پيژند ۲ ۰ ٦ :

د يوې ډيرئ M د ټولو برخډيريو ډيرئ پوتنځډيرئ يا په تواندېرئ(-سټ) بلل کيږي او داسې يې ليکو:P(M) په تواندېرئ توکي لري، چې هر يو يې بيا خپله ډيرئ ده۰

بيلګه : د M = { a,b.c} ډيرئ دا لاندې په تواندېرئ لري

$$P(M) = \{ \{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$$

هره ډيرئ چې د توکو څخه جوړه وي هغه ټيک n جګ 2n توکی لري يانی : n^{2n}

دا پورته د جملې په څير د پوره ايندکشن له لارې اوبی (حل-) کيدی شي(لومړئ برخه دې وکتل شي)۰ دا دنده د ګرانو لوستونکو د خوښې کار دی، که کوي يي۰

پيژند ۲ ۰ ۷ : د ډيرئM زور |M| لاندې د ډيرئ د توکو تعداد ياګڼون پوهيږو۰ که دوه ډيرئ M اوN همغه زور ولري هغه ته يوزوريزه – يا برابرزوريزه ډيرئ وايو او داسې يې ليکو: |M| = |N|

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرونونو یا مساواتو او خونديې ساتنو خويونه

الف) رفلکسيو- يا د انعکاس(هنداررونيزې) اړيکيreflexivity

هغه اړيکي، چې د هغه او د هغه دخپل ځان ترمنځ ریښتوني وینااوې ورکړ شوي وي رفليکسيويا انعکاسي اړيکي بلل کيږي لکه: $M = M, M \subseteq M$

خوندي لرل اړيکي رفلکسيو نه دي $M \not\subset M$

دا په دې مانا، چې هيڅ ډيرۍ د خپل ځان اصلي برخډيرۍ يا برخسټ نه شي کيدی٠

ب) سيومتريکې اړيکې Symetric relation

هغه اړيکې سيومتريک بلل کيږي، چې د شيانو ترمنځ چې کارول کيږي يا استعماليږي يو له بل سره بدليدلی شي٠

لکه $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_2 = M_1$

خوندي لرل سيومتريکې اړيکې نه دي:

که وي $M_1 \subseteq M_2$ نو اړيکی $M_2 \subset M_1$ نارښتيا يا ناټيک دي

دا هلته چې وي: $M_1 \neq M_2$

پ) ترانزيتيويتي Transitivity يا وړون اړيکې

ترانزيتيويتي هغه اړيکې دي، چې له يوه نه وبل ته يي د وړلو امکان شته يا موجود وي٠

له L = M او M = N څخه لاس ته راځي L = N

او

$$M_1 \subseteq M_2 \wedge M_2 \subseteq M_3 \Rightarrow M_1 \subseteq M_3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته داسې لولو: که M_1 د M_2 برخډیرۍ او M_2 د M_3 برخډیرۍ وي، نوله دې څخه لاس ته راځی، چې M_1 د M_3 برخډیرۍ ده

برابونونه یا مساوات او په بل کې ځایه ونه یا خوندي ساتنه ترانزیتیو اړیکې یا خویونه دي

۲ ۰ ۲ په ډیرۍ کې کارونې یا عملیې

ټولنډیرۍ (د اتحاد سټ)

پیژند۲ ۰ ۸ :

د دوه ډیریو M_1 او M_2 ټولنډیرۍ(unionاتحاد سټ)، چې د ډیریو ټولنه ورته وایو ده:

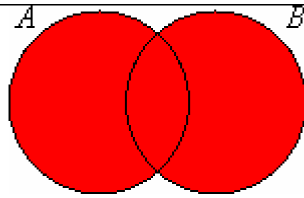
$$M = M_1 \cup M_2$$

دلته داسې پوهیږو، چې M د ټولو هغو توکو څخه جوړه شوې ډیرۍ یا سټ ده، چې لږ تر لږه د M_1 او M_2 توکې هم خوندي ولري.

د ټولنې $M = M_1 \cup M_2$ هر توکی د M_1 یا M_2 توکی هم دئ (پرتله ۱ ــمه برخه د یا سره پرتله) یاني دا د ټولنډیرۍ توکی د M_1 یا M_2 او یا د دواړو توکي دي.

یا لاندې دیاګرام

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A ? B$ $A \cup B$ (B تولنه A)) x د A سره B اړیکې لري	

بیلګې

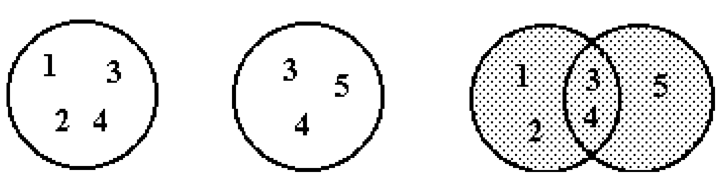
الف) M_1 دې د ځوانانو ډیرۍ وي، چې بکلوریا لري او M_2 دې د هغو ځوانانو ډیرۍ وي، چې مسلکي شهادتنامې لري، نو $M = M_1 \cup M_2$ د ټولو هغو ځوانانو ډیرۍ ده، چې بکلوریا او مسلکي شهادتنامې ولري او یا دواړه شهادتنامې ولري .

ب)

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\}$$
$$M_1 \cup M_2 = \{k, a, r, u, s, e, l\}$$

یا په لاندې توګه پیژند او بیلګه: A او B دې دوه ډیرۍ وي د دې ډیریو تولنه داسې لیکو

B} ∈x∨A ∈B = {x | x∪A
∪A={1,2,3,4}   B={3,4,5}   A
B={1,2,3,4,5}



تل په ټکو ټکي شوې ټکیدیرۍ تولندیرۍ په ګوته کوي .

پ – څیره ۲ ۰ ۲ دوه په هواره کې ټکیدیرۍ په ګوته کوي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) ټکيپردۍ دي٠ ب) ګډ ټکی لري٠

پ) اړیکې $M_1 \subset M_2$ پوره کوي:

د دې لپاره څيرې په لاندې کې په بیلګو کې راغلې دي٠

د ټولني لپاره کموتاتیو قانون باور لري» $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$ دا په دې مانا، چې د لړۍپرلپسي دلته(لنډ: لړۍ) د ډيريو په ټولنه کی رول نه لوبوي

یادونه : که ګڼونه ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ٠٠٠ ولرو، نو دا پرلپسې بولو او که بیا دا سره جمعه کړو لکۀ

1 , 1+2,1+2+3,1+2+3+4+,1+2+3+4++..+….

نو دا لړپيرلپسې یا لنډ: لړۍ بولو(پرلپسی برخه کې دې وکتل شي) دا په دې مانا، چې له دوو څخه د زیاتو ډيريو ټولنه لړۍپرلپسی(لنډ: لړۍ) رول نه لري٠

اسوڅیاتیو قانون باور لري٠

$$(M_1 \cup M_2) \cup M \;= M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

غوڅډيرۍ (د ډيريو غوڅی یا –متقاطع سټ) intersection

یادونه : دا کړی شو، چې د ډيرو ګډغوڅی وبولو(دا د ګرانو لوستونکو خوښه ده،کوم ناټيکوالی په کې نه شته)

پيژند:

ډيرۍ M د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M_2 غوڅډيرۍ یا د تقاطع سټ ده(لوستل: M_1

غوڅ(پرې)په M_2 (لنډ: غوڅی): $M = M_1 \cap M_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د ډیرۍ M ټول توکي د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکی وي۰

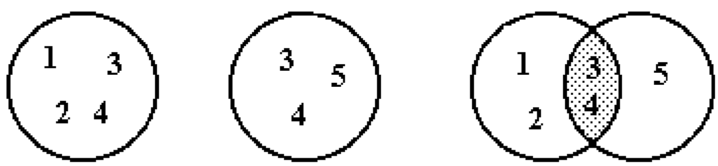
د غوڅډیرۍ $M = M_1 \cap M_2$ هرتوکی د ډیرۍ M_1 او ډیرۍ M_2 توکي دي (د ۱ ـمې برۍ د هم او هم په مانا یا د «او» په مانا)

یا دا پیژند :

د ډیریو A او B غوڅی $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

بیلګه:

A = { 1,2,3,4}, B = { 3,4,5} => $A \cap B = \{3, 4\}$



یادونه: دې پورته ډول دیاګرام ته د ون دیاګرام Venn-Diagram یا د Euler-Venn- Diagram وایی

بیلګې :

لومړۍ : یوه ډله زده کوونکي له ننګرهار او پکتیا څخه راځي، چې په M_1 یې په نخښنه کوو۰ یوه بله ډله ، چې په M_2 یې په نخښنه کوود کندهار او همغه د پکتیا زده کوونکي، چې په M سره یې ښایو، دي۰ د دې دواړو ډلو غوڅډیرۍ

$$M = M_1 \cap M_2$$

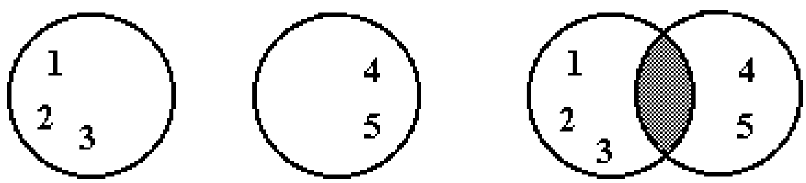
د پکتیا زده کوونکي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

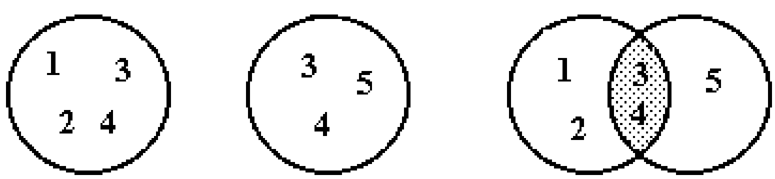
دويم:

$$M_1 = \{k, a, r\}, M_2 = \{u, r, s, e, l\},$$
$$M = M_1 \cap M \;= \{r, l\}$$

دریم څیره ۲ ۰ ۳ په هواره یا سطحه کې ښایي، چې الف) ګنون پردي دي



ب) یو بل سره ګډ ټکی لري



پ) اړيکی

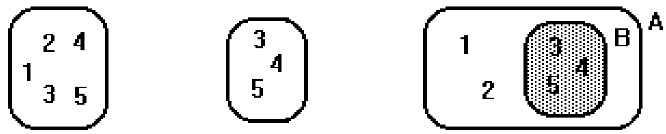
$$M_1 \subset M_2$$

پوره کوي

بیلګه:

A⊆ A={1,2,3,4,5} B={3,4,5} B

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه ټکو باندې ټکي شوې ډېرۍ اصلي برخډېرۍ ده

دوه ډېرۍ، چې غوځډېرۍ یې تشډېرۍ وي

$$M_1 \cap M_2 = \theta$$

لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله پردۍ بلل کیږي

د غوځډېرۍ لپاره ، لکه څنګه د ټولنډېرۍ لپاره کموتاتیو قانون باور لري

$$M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$$

او اسوځیاتیو قانون

$$(M_1 \cap M_2) \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = M_1 \cap M_2 \cap M_3$$

ددواړو د ډېرۍکارونو یا ډېرۍ عملیو یانی ټولنډېرۍ او غوځډېرۍ لپاره دواړه دیستریبوتیو قانونونه پوره کیږي یا باور لري

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

(د ګڼونو د شمیرکارونو یا عملیو لپاره یواځې یو دستریبوتیو قانون شته والی لري:

$$a_1.(a_2 + a_3) = a_1.a_2 + a_1.a_3$$

مګر په ټولیزه توګه باور نه لري

$$a_1 + (a_2.a_3) = (a_1 + a_2).(a_1 + a_3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند :

کمونډيرۍ يا تفريق سټ M_2 د ډيرۍ M_1 او ډيرۍ M کموالی يا فرق دۍ او

داسې يې ليکو: $M_2 = M / M_1 = \{x \mid x \in M \wedge x \notin M_1\}$

له M څخه د M_1 ډيرۍ کمه شوې

يا کله چې د M_2 توکي د M هغه توکي وي، چې هغه د ډيرۍ M_1 توکي نه وي٠

ليکندود ياليکنډول :

$A / B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

لوستل : د A اوB توپيرډيرۍ ياکمونډيرۍ يا تفريقډيرۍ له ټولو هغو توکوx جوړه ده، د کومو لپاره، چې باور لري : x د A توکی دی او x د B توکی نه دۍ

بيلګې :

لومړۍ : په يوه ټولګي کې د ټولو نارينه وو زده کړو ډيرۍ ده او M_2 دټولو زده کړو ډيرۍ (د نارينه وو او ښځينه وو) ، چې په شميرپوهنه کې لس نمرې وړي٠

M_1 / M_2

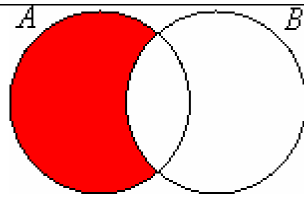
د هغو زده کړو ډيرۍ ده، چې ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦، ٧ ، ٨ ، ٩، نمرې وړي او ټول د هغو نجونو ډيرۍ ده، چې په شميرپوهنه کې يې لس نمرې وړي٠

که په ټولګي کې يواځې نارينه زده کړي وي، نو باور لري

$M_1 / M_2 = \theta$

يا دا لاندې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$A\backslash B$ (A بې له B) (x له A سره B اړیکې لري)

دویم :

$$M_1 = \{k,r,a,i\}, M_2 = u,r,s,e,l\}$$
$$M_1 / M_2 = \{k,a\}, M_2 / M_1 = \{u,s,a\}$$

لکه څنګه، چې د کمون یا تفریق پیژند او بیلګې را په ګوته کوي په ټولیزه توګه باور نه لري:

$$M_1 / M_2 \neq M_2 / M_1$$

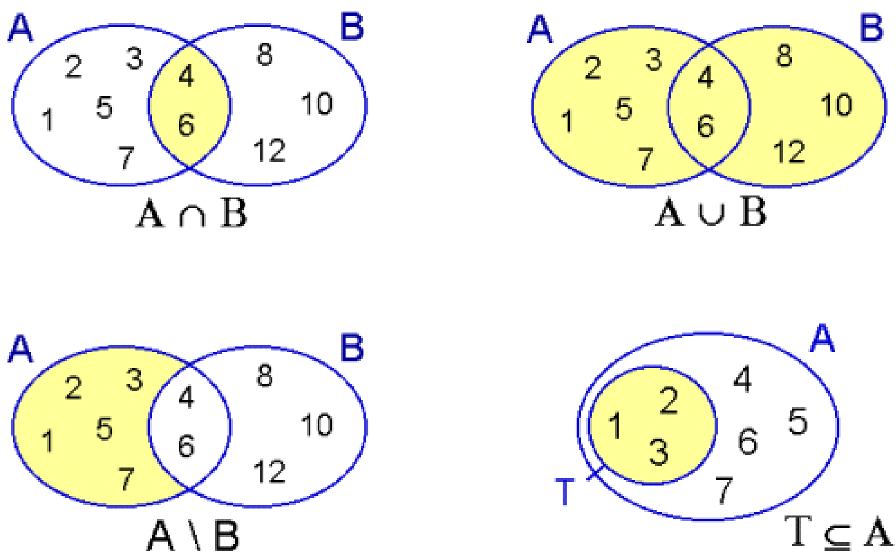
د یوې ډیرۍ یا سټ کمپلمنت یا پوره کوونکی :

دا کارونه یا عملیه د نورو کارونو څخه توپیر لري، چې په ډیرۍ کی مو څیړلي۰ دا یوه یوځاییزه کارونه ده او دا نورې دوه ځایزې کارونی یا عملیې دي۰

مورږ بنسټډیرۍ په U او د ټولو هغو توکو ډیرۍ، چې U کې پراته دي یانې د U توکي دي او هغه په M کې نه دي پراته یانې د M توکي نه دي پوره ډیرۍ یا کمپلیمنت بولو او د $\bar{M}$ سره یې په نخښه کوو۰

په لاندې څیره کې بیا د ډیرۍ غوڅې، - ټولنه او – کمون او برخډیرۍ ته د ګرانو لوستونکو لا زیات پام را اړوو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيژند:

پوره كوونكی- یا تكمیلډیرۍ (یا د یوې ډیرۍ كمپلیمنت) د یوې ډیرۍ M پوره كوونكې ډیرۍ $\bar{M}$ تیک هغه توكي لري(د بنسټډیرۍ U څخه) ، كوم چې د M توكي نه وي٠

دوه ځله كمپلیمنتډیرۍ جوړول خپلې لومړنی وینا ته ځي ، یانې $\bar{\bar{M}} = M$

دلته یواځې یوه ساده بیلګه راوړو: په یوه كلي كې دوه كورنی د توپیر او برګ كورنی اوسیږي٠ كه دا دوه كورنی یو له بل سره خپلوي ونه لري، نو دوي یو له بل سره پوره ډیرۍ یا تكمیلډیرۍ بلل كیږي یانې دا كلی پوره كوي٠

۲ . ٤ څیرونه mapping یا اړیكې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : پام دې وي، چې دا هغه ورسره بلد تابع کلمه نه ده، چې وروسته به ورسره بلد شو۰

په دې برخه کې لومړی د ډيرۍ ضرب کلمه پيژنو يا تعريفوو او بيا د ضرب کلمې کارونه څيړو۰

پيژند ۲ ۰ ۹ : د دواړو ډيريو M يو او M 2 ډيريضرب(اتيرانضرب) هم ورته وايي، يانې په x سره څليزي يا ضربيزي

$$M = M_2 \times M_2$$

د ټولو تنظيم يا ترتيب شويو توکو

$$x \in M_1, y \in M_2$$

جوړو (x,y) ډيرۍ ده۰

بيلګې

$$M_1 = (a,b\}, M_2 = \{1,2,3\}$$
$$M_1 \times M_2 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

د جوړو د غوښتل شوي تنظيم له مخې څل په ډيريو کې کموتاتيو نه دی دا په دې مانا، چې

په ټوليزه توګه باور نه لري: $M_1 \times M_2 \neq M_2 \times M_1$

۲ – R دې د ټولو رييلګڼونو ډيرۍ وي۰ په هندسي مانا د کرښې د ټولو ټکو ډيرۍ۰ RxR د ټولو رييلګڼونو جوړو ډيرۍ ده، په هندسي مانا د هوارې يا سطحې د ټولو ټکو ډيرۍ ده۰

پيژند ۲ ۰ ۱۰ :

د څيړونې F لاندې د دوه ډيريو د ضربډيرۍ $M_2 \times M_2$ برخډيرۍ پوهيږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس د جوړه تنظيم شوو توکو ډيرۍ، چې $x \in M_1$ له یوه يا ډيرو توکو $y \in M_2$ سره تنظيم يا بهتره په باندې ځيره شي۰

داسې هم ويلی شو: د1 M توکي د2 M په یوه يا ډيرو توکو تنظيميږي يا ځېړه کيږي۰

که $(x.y) \in F \subseteq M_1 \times M_2$ وي، نو x اوريجنل يا اصلي توکی او y ځيره توکی بلل کيږي۰

د ټولو اصلي توکو ډيرۍ پيژندورشو يا تعريفورشو يا پيژنددېرۍ يا تعريفډيرۍ بلل کيږي او د ټولو ځېړه توکو ډيرۍ د ځېروني ډېرۍ، ارزښتورشو يا ارزښتډيرۍ بلل کيږي۰

بيلګې

$$M_1 = \{a,b,c,d\}, M_2 = \{1,2,3,4\}$$

د جدول په توګه دM يو توکو ځېرونه ونه يا ځېړه کوونه د M دوه په توکو

ځېړه توکی اصلي توکه يا ځيره کوونکی توکی

a -----------------------→ 1 , 2 ,5

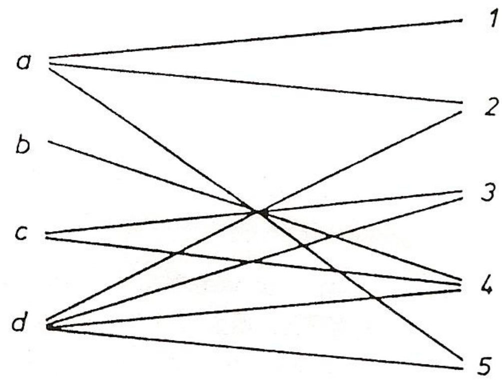
b -----------------------→ 4

c -----------------------→ 3,4

d -----------------------→ 2,3,4,5

يا دا لاندې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



څیرونه:

$$F = \{ (a,1),(a,2),(a,5),(b,4),(c,3),(c,4),(d,2),(d,3),(d,4),(d,5)\}$$

(د M یو او M دوه ډیریو د ټولو توکو جوړو ډیرۍ)

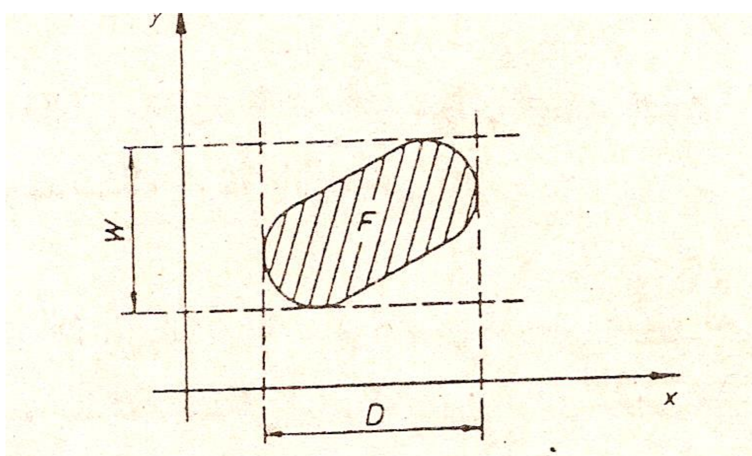


Bild 9.6 څیره

دریم : هر پیدایښتي یا طبیعي ګڼ a د هغه په دوه ځله b=2a باندې څیره کیږي۰ داسې پیژند شوې یا تعریف شوې څیره ونه په لاندې بڼه هم انځوریدلی شي۰

$$F = \{(a,b) \mid a \in N, b = 2a\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هم N د پيداينښتي يا طبيعي ګڼونو ډيرۍ· پيژندډيرۍ يا تعريف- د ټولو پيداينښتي ګڼونوډيرۍ ده او ارزښتډيرۍ د ټولو جوړه ګڼونو ډيرۍ ده·

څلورم : که M يو په يوه ښوونځي کې د ښوونکو ډيرۍ وي او M دوه په ښوونځي کې د ځانګړو ټولګيو ډيرۍ وي نو ښوونکي، چې په ټولګيو کې درس ورکوي دا يوه څېرونه ده· د ښوونکو ډيرۍ د ځانګړو ټولګيو په ډيرۍ کې

موږ د څېره ونې څلور حالتونه توپيروو:

پيژندونه(دې ته دې ګران لوستونکي ښه پام وکړي):

لکه په لومړۍ بيلګه کې په څيره ونه F کې د1 M ، چې تعريفډيرۍ D سره برابر دۍ او M2 ، چې له څيره ډيرۍ , W سره برابر دۍ ، توکي مو مخ ته پراته دي·

له يوې څيرونې Fغږيږو د1 M په M2 باندې· دلته دې « د » او « په » ته پام وي)

وي دې: $D \subset M_1, W \subset M_2$

لکه په دويمه بيلګه کې ، نو د يوې څيره ونې F غږيږو له M1 په M2 کې (دلته دې

« په » او ,په کې » ته پام ور واړول شي)

وي دې : $D = M_1 \wedge W \subset M_2$

دلته د يوې څيره ونې غږيږو د1 M په M2 کې دلته دې دريمه بيلګه په پام کې راوړل شي·

وي دې: $D \subset M_1 \wedge W = M_2$

نو د يوې څيره ونې غږيږو له M1 په M2 باندې· دلته څلورمه بيلګه د بيلګي په توګه راوړو· د دې نيونې لاندې چې ټول ښوونکی ځانګړي ټولګيو ته درس ورکوي·

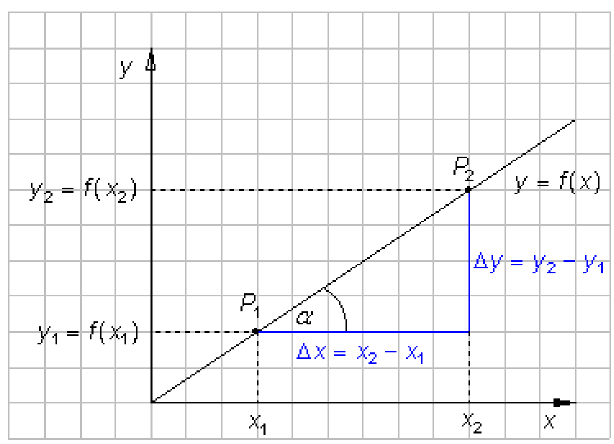
(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه : دا لاندې برخه دې ګران لوستونکي وګوري، خو د دې اوس وخت لپاره لږ ستونځمنه ده او شايد ځيرې هم رانه شي، خو که لږ د شميرپوهنې سره بلد شو، بيا پرې پوهيدل ساده دي. زه مخ ته لرم، چي په دې هکله ليکلى کتاب، چې چاپ شوى نه دى دلته پر ليکه کړم، چې هلته بيا دا موضوع لږ غزيدلې ده.

بيلګه ۲ . ۵ : موږ په هواره يا سطحه کې ځرګند شوي کړى د ډيريځل RxR په ځير د برابرونونو له لارې رانيسو(R د رييلګنونو ډيرى د ګنګربنې ټکي دي(ګنونه دې وکتل شي)).

الف) $y = 2x$ يوه ځيره ونه ده د R په R باندې ، ځکه چې باور لري

$$D=W=R$$



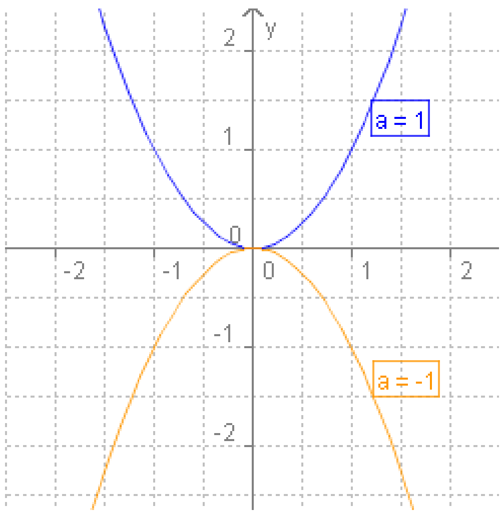
يادونه : په پورته ځيره کې برابرون $y = ax+b$ دى.

ب) $y = x^2$

يوه ځيره ونه ده د R په R کې ، ځکه چې باور لري

$$D = R ,\ W = [0, \infty]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



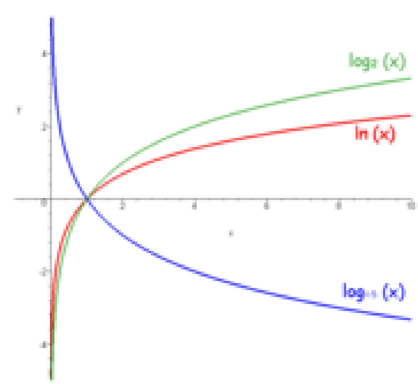
يادونه :

پوته بلواک د $x \mapsto ax^2 + bx + c$ دول دی، چې b = 0 , c = 0 او a = 1 , a = -1 اينبول شوي دي.

پ) y = log x

يوه خيره ونه ده له R په R باندې » ځکه چې باور لري.

$$D = (0,\infty) \wedge W = R$$

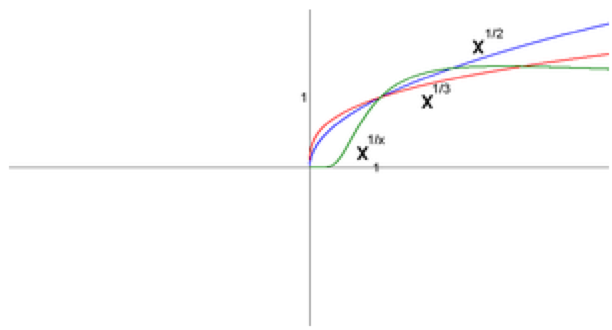


(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) $y = +\sqrt{x}$

یوه ځیرونه ده له R په R ، ځکه چې باور لري

$D = W[0, \infty]$



یادونه : پورته د دوېي ،دریمې او په x -مې ریښې په مانا دی

ځیرې له ویکي څخه په مننه راکښته شوي دي٠

پیژند ۲ ٠

یوه ځیره ونه E یواځنی بلل کیږي٠ که هر $x \in D$ په ټیک یوه $y \in W$

باندې ځیره شي٠ دا په دې مانا، چې هر $x \in D$ ټیک یووار په $y \in W$

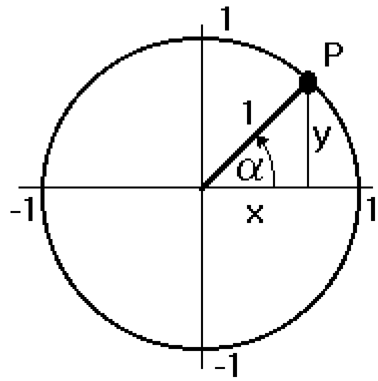
تنظیمدیری یا جوړه ډیری کې رامنځ ته کیږي٠ یوه یواځنی ځیره ونه فنکشن

یا« بلواک» بلل کیږي او یا لکه تراوسه ورسره بلد یو یوه تابع بلل کیږي٠

پام:

دا دې دلته کره په ګوته شوې وي، چې زه « یوازنی ځیره ونه » بلواک یا فنکشن بولم٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۲ ۰ ٦ : په بیلګه ۲ ۰ ۵ کې له الف تر ت پورې ټولې څیروني فنکشنونه یا بلواک دی۰ د دې پر ځښت لاندې برابرون (یوونګردۍ یاني ګردی، چې وړانګه یې یو یوون یایووالی یا واحد وي څیره ۰) انځور شوې څیره ونه له R په R کې (D=W ([-1,1] فنکشن یا بلواک نه دی ، ځکه چې اصل دوه څیرې لري یاني که په تنظیمجوړه کې د څیره ونې لړي پرلپسې(لنډ:لړی) بدله شي، نو یوې پرځښت څیره ونې ته راځو:

پیژند ۲ : څیره ونې F ته پرځښت څیرونه F^{-1} د ټولو جوړو (x,y) ډیری ده له $(x,y)\in F$ سره ۰

پیژند ۳ ۰ یوه څیره ونه یویواځنی بلل کیږي، که یواځنیF او F^{-1} یوازنۍ څیروه ونې وي، دا په دې مانا، چې که هر $x\in D$ او $y\in W$ ټیک یو ځل په تنظیم کې منځ ته راشي۰

یادونه : د څیروني نوم څخه باید ونه ډار شو دا څیره ونې څیرې کووني (که څوک یو کالی یا رخت څیرېکوي)او څیره کووني توپیر، ځکه سره کیدی شي، چې هغه منځپانګه یې یو له بل توپیر لري۰ موږ پښتو کې نږدې یو ډول لیکونکي ویونه (لغات) لرو، خو دا هغې منځپانګې له مخې توپیریږي۰

ډیری پوهنه د شمیرپوهنې ستېه ده، نو په راتلونکې کې به یې نوره هم ژوره وڅیړو او همدا اوس هم نور ګران هیوادوال دې ته رابولم، چې له ما سره ګډ کار یا خپلواک دې کار ته ملا راوتړي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ما دا برخه غزولې، چې په خپل شووني وخت کې به ګرانو لوستونکو ته په ځانله توګه د یوه کتاب په څیر هم وړاندې شي.

۲ . ۵ تمرینونه

۱ – د لاندې ډېرۍ یا سټ توکي د شمیرنې له لارې انځور کړۍ

الف {x لومړی عدد او $20 > x$ | x } (لوستل: د ټولو عددونو x ډېرۍ یا سټ، چې x لومړنی عدد او $20 > x$ دی).

ب- $\{x|x^2+x-6=0\}$

پ- $\{x|\ x>0$ او $x^2+x-6=0\}$ دا په نوکانوکې ټول له کیڼ ښي لور ته لولو

ت) { x | x ریښلګن او $x^2 + 1 = 0$ } دا ټول له ښي و کیڼې لور ته ولولی

۲ – د توکو x , y , z اړلرونوالی و ډیري M ته وڅیړی !

الف) M د لمړنیو ګڼونو ډیری

$x = 4 , y = 5 , z = 6$

ب) M د لاندې مساواتو حلډیری (اوبیلډیری)

$x^3 + x^2 - 6x = 0$

$x = 0 , y = 2 , z = 3$

پ) M د ریښنلګڼونو ډیری چې په اینتروال [3 ,3-] کی پراته دي

$x = -2 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 1/3$

ت) M د ریښلګڼونو ډیری چی په اینتروال] 3 ,3- [کي پراته دي

$x = -4 , \quad y = \sqrt{2} , \quad z = 3$

۳ – د لاندې ډیریو ترمنځ کومی اسپکی پرتی دي

الف) M_1 د ټول جفت ګڼونو ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

او M_2 د ټولو ټولګنونو ډیرۍ

ب) د ټولو مساواتو $x^2 + 2x - 3 = 0$, حلونو (اوبیو) ډیرۍ

$M_2 = \{ -3 , 1 \}$

پ) M_1 د ټولو ګنو ډیرۍ چي پر ۶ ویشل کیږي.

او M_2 د ټولو ګنونو ډیرۍ چي په ۳ ویشل کیږي !

او M_3 د ټولو ګنو ډیرۍ چي په ۱۲ ویشل کیږي !

۴ – د ډیرۍ $\{ a,u,t,o \}$ ټول برخډیري ورکړی !

۵ – د لاندي ډیریو څخه ټولنډیرۍ ، غوڅډیري او دواړه ثوډیري جوړ کړی !

الف) $M_1 = \{ k,a,m,e,l \}$, $M_2 = \{ m,a,u,l,t,i,e,r \}$

ب) $M_1 = \{ 2,4,6,.. \}$, $M_2 = \{ 3,6,9,.... \}$

پ) $M_1 = \{ x \mid x^2 + x +- 2 = 0 \}$, $M_2 = \{ x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \}$

۶ – د یوه ډیرۍ M او د تشډیري $\emptyset$ ټولنډیرۍ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړی !

۷ – د یوه ډیرۍ M او خپل همدي ډیرۍ ټولنډیرۍ ، غوڅډیرۍ او توپیرډیرۍ جوړ کړی !

۸ – وي دي $M_1 = \{ 4 , 8 , 12 \}$ $M_2 = \{ 3 , 6 , 8 \}$

$M_3 = \{ 0 , 2 , 4 , 6 \}$, $M_4 = \{ 6 , 12 , 18 \}$

جوړ کړی : $M = [(M_1 \cup M_2) \cap M_3] \setminus M_4$!

۹ – جوړ کړی

الف) $M_1 \cup (M_1 \cap M_2)$ پ) $M \setminus \emptyset$

پ) $M_1 \cap (M_1 \cup M_2)$ ت) $\emptyset \setminus M$

۱۰ – وي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$M_1 \cup M_2 = \{1,2,3,4,5\},$$
$$M_1 \cap M_2 = 71,3,5\}$$
$$M_1 \setminus M_2 = \{2,4\}, M_1 \setminus M_2 = \varnothing$$

له دې پورته څخه M_1 او M_2 وټاکی !

۱۱ – وي دې

الف) $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ ب) $M_1 \subset M_2$,

وټاکی: $M_1 \setminus M_2$!

۱۲ – وي دی M_1 , M_2 (د نیمواز) اینتروال ټکي ډيري:

$$M_1 = \{-3, 3\}, M_2 = [1, 7]$$

وټاکی

الف) $M_1 \cup M_2$ ب) $M_1 \cap M_2$ پ) $M_1 \setminus M_2$

ت) $M_2 \setminus M_1$ ټ) $M_1 \times M_2$

۱۳ – وي دې $M_1 = \{1, 2, 3\}$, $M_2 = \{\{a, b\}$

الف) د $M_1 \times M_2$ ځل جوړ کړی

ددې لاندې ب) تر ت) برخی تمرین لپاره دې ۹ الف برخه وکتل شي.

ب) دا لاندې کوم ډول ځیرونی دي

$$F_1 = \{(1,a),(1,b)\}$$
$$F_2 = \{(1,a),(3,a)\},$$
$$F_3 = \{(1,a),(2,b),(3,b)\},$$
$$F_4 = \{(1,a),(2,a),3,a)\},$$
$$F_5 = \{(1,a),(2b)\}$$

په ټولو حلنونو (اوبیو) کی F_1 تر F_5 ورکړی .

پ) په ځټ ځیرونه ورکړی

ت) د ځیرونو F_1 څخه تر F_5 پورې، کوم یواځنی او کوم حتی یویواځني دي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . دحقيقي اعدادو (-ګڼونو) سره د شميرلو بنسټيزې نښلونې

(ترنی، کارونی یا عملیي)

۳ ۰ ۱ د اعدادو د سيستم جوړښت

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ طبيعی اعداد يا -ګڼونه natürliche Zahlen

انسانانو له پخوا څخه اعدادو ته اړتيا درلوده۰ له دې امله يې پرمخ ودېينه کې هڅې وکړې، چی له ډيری (سيټ) (د ليکنې په دننه کې ډيری پو هنه هم څيړلشوې)) سره داسې لارغوره کړي، چی دا ډيری تشريح کړای شي او د انسانانو او چاپيريال(طبيعت) د پرلپسې اخ او ډب په نتيجه کې د ګڼ يا عدد وی(کلمه یا لغات) راپيداشوی، چې د عدد يا ګڼ کليمې پربنسټ د ريښتينو شيانو څرګند څومره والي (کميت)Quantitative ترلاسه کړي۰ د طبيعی اعداد و څخه په ګڼلو يا که غواړې شميرلو کې ګټه اخستل کيږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۱ ۰ الف د طبيعي عددونو (پيدايښتي ګڼونو) جوړښت

پيژند (تعريف)۳ ۰ ۱:

الف) ټول طبيعي اعداد د ډیرۍ په څير يوه ټولګه جوړوي او د طبيعي اعدادو ډیرۍ يا سټ په نامه يادېږي يا يې طبيعي اعداد بولو او په N او همداسې N° سره يې په نخښه کوو۰

ډير پاى طبيعي اعداد شته ، ځکه چې په هر طبيعي عدد پسې راتلونکى طبيعي عدد هم شته دئ (يعنى په هرڅومره لوي طبيعي عدد پسې راتلونکى طبيعي عدد شته دئ، چې دا وروسته روښانه کيږي)۰

ب) دطبيعي ګڼونو(اعدادو) اکسيوماتيکيAxiomatic جوړښت

اکسيوم جمله ده، چې اوبيونه (حل) نه غواړي او همداسې منل کيږي۰ دا چې جمله ، اکسيوم څه دي په لومړۍ برخه يانې سم اند (منطق) کې دې وکتل شي۰

طبيعي عدد کلمه د جيوسيپې پيانو(Giuseppe Peano له ۱۸۵۸ – ۱۹۲ ز۰کال) اکسيومونو پر بنسټ لاندې پيژند لري يا په لاندې توګه تعريف کيږي:

۱ – د صفر ګڼ يو پيدايښتي ګڼ دئ

۲ - د هرطبيعي عدد يا ګڼ m لپاره يو يواځنى ټاکلى طبيعي عدد n شته، چې سملاسي(ترلى) د m پسى ګڼ دئ، د کوم لپاره چې لرو: $m+1 = n = m^\wedge$

دلته $m^\wedge$ د m پسې سملاسې يا ترلى ګڼ يا عدد په ګوته کوي۰

۳ – هرطبيعي عدد زيات له زياته په يوه طبيعي عدد پسى سملاسي راتلونکى ګڼ دئ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ – هیڅ طبیعي عدد نه شته، چې پسی راتلونکی پیداینبي عدد یې صفر وي۰

٥ – که طبیعي عددو ډیرئ M صفر د توکي په څیر ولري او که له هر طبیعي عدد m سره د هغه پسی تړلی راتلونکی عدد یا ګڼ `m هم د M توکی وي، نو M ټول

طبیعي عددونه خوندي لري یا په بل ډول » ټول طبیعي اعداد په کې ځاي دي۰

یادونه: ځنې ادبیاتو کې، د پیانو سیستم کې، د صفر په ځای ۱ لیکل شوی. په دې حالت کې بیا صفر ته د طبیعي عدد یا ګڼ په څیر نه کتل کیږي. که بیا صفر ورسره مل کړو، نو د صفر سره طبیعي ا عدادو ډیرئ یا –سټ یې د صفر سره بولو.

۱ . ۱ ب : د طبیعی اعدادو یا ګنونو انځورونه او سیستمونه:

طبیعي اعداد په نخښو (دې ته په الماني کې Zifferوایي، چه همغه د صفر په معنا دی، خو دلته ترې مطلب، چې دا څیرو، دی) انځوریږي. د دې لپاره چې دا لړ ځای ونیسي، نو د لویو او وړو اعدادو لپاره نخښې له کوچنیو سره یوځای کینبول شوې دي. دا چې څرنګه یوه د عدد یا ګن نخښه له بل توپیریږي، په لاندې ډول یې د زیاتون یا جمعي سیستم او ځای سیستم کې ښایو.

په زیاتون سیستم کې هر بنسټیز ،،ځای،، یو ،، ځای ارزښت،، لري. د څیفرونو زیاتون د یو په بل کې د ورزیاتشوي بنسټیز څیفر پخپله هغه عدد یا ګڼ ورکوي. بیلګه یې په رومي ګڼونو کې راړو. دا له بنسټیزو څیفرونو جوړ شوی(ترې لاندې لسیز د اعدادو سیستم دی). زه دلته د ضرورت په بنسټ ټول ضروري څیفرونه چې موخه ترې عددونه دي، له پیل راوړم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

رومي عددونه:	M	D	C	L	X	V	I
عربي عددونه:	1000	500	100	50	10	5	1

طبیعي عدونه له دې امله یو د بل ترڅنګ لیکو چې کم ځای ونیسي لکه د بیلګې په توګه: CXX په دې معنا چې C+X+X

په رومي ګڼونو کې، که بنسټیز کوچني ګڼنخښې لکه C , V , I د لوي ګڼنخښې و کیڼ لور ته ولیکل شي نو دا مانا لري چې دا کوچنی ګڼ له لوي ګڼ څخه کم شوی. د بیلګې په توګه: XC = C - X .

بیلګې: الف: MMDCCLXVIII په دې مانادی 2768

ب : MCMXXIX په دې مانا دی 1929

پ : CCCIV په دې مانا دی 304

ځایسیستم: په ځاي سیستم کې هره بنسټیزه نخښه یو «ځاي ارزښت نخښه ارزښت» لري.

لکه : g– ئیز ځاي سیستم(پوزیشن سیستم ((Positionssystem)): د طبعي ګڼ n انځورونه په g– ئیزځای سیستم کې په دې ډول ده چې د یوه ورکړشوي ستې په بنسټ($g \in N$) $g \geq 2$ هر طبعي ګڼ n په لاندې ځانګړي ډول انځوریدلی شي:

$$n = a_k g^k + a_{k-1} g^{k-1} + \dots + a_1 g + a_0$$

دلته بنسټیزې ګڼنخښې a_i، g د $i = 0,1,2,\dots,k$ او $k \geq 0$ د $0 \leq a_i \leq g-1$ چې $a_k \neq 0$ وي په کار راځي یا اړتیا ورته شته.

لیکلی شو :

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$$

که د بدلیدلو (د بل څه سره) امکانات رامنځ ته کیږي، نو بهتره به وي چې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ډول ولیکل شي

$$n = [a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0]_g$$

نن په ټوله نړۍ کي ګڼل په لسیز سیستم (ګڼځای ارزښت) باندې کیږي، چې تل داسې نه وه، لکه په افغانستان کي چې دا اوس هم د ډوډۍ پور لپاره په لرګي کرښه را کاږي، چې څو ډوډۍ واخستل شوې.

په لسیز سیستم کې ګڼځای «ارزښت» لري چې انځور شي، مګر په لرګی کی ځای ارزښت نه لري چې کرښه چیرته کښل شوې، هلته د پور کرښو له ګڼون یا تعداد څخه پور څرګندیږي.

بل د ګڼلو سیستم ، لکه د مخه مو چې تر پام لاندې ونیوه، د ګڼلو رومي سیستم دی چې نن هم د ارزښت وړ دی او همدارنګه د مفهوم ډك، زیاتونسیستم(جمعی -) څرګندیږي.

بیا هم غواړو چی دا په لاندې ډول ځانګړی کړو:

۱ - هره لاندې نخښه I, X, C کړای شي چې زیات ترزیاته ۳ ځله(۳ واری) په یو ګڼ کی پرله پسی یا څنګ تر څنګ راشی

۲ - هره، د ګڼ نخښه V, L, M خورا زیاته یو ځل څنګ تر څنګ په یوه ګڼ کی راتلی شي.

۳ - که بنسټیز نخښه I, X او یا ....__-- ددې نخښو د ارزښت نه لوړو ارزښت نخښو V, X, L, C, D یا M CXI تر مخ ځای په ځای شوې یا انځوروي نو د لوي ارزښت څخه کمیږي .

زیاتون او کمون (جمعه او منفي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – په هرګڼ انځورونه(Zahlendarstellung) کې کیدی شي چې یواځې یو بستیز ګڼ تر مخ ځای په ځای یا انځور شي لکه: MXCVII = 1098 مګر نه IMIC
۵ – د یو ګڼ لپاره د امکان په حال باید کمې نخښې په کار واچول شي.

عربي ګڼونه : دا ګڼونه، چې موږ ورسره بلد یو، د لسیز سیستم ګڼونه دي، چې عربي ګڼونه بلل کیږي. دا د ګڼلو لسیز سیستم عربو د هند څخه راوړی چې په دولسمه پیړۍ کې یې اروپا ته یو وړ. دا اصلي ګڼونه له صفر (۰) تر ۹ پورې دي یا له 0 تر9 پورې، چې

خیفر ورته واي (همغه عربي صفر دی) چې دلته ترې بنستیز ګڼونه پوهیدل کیږي.

لکه چې ګوته مو ورته ونیوه، زیاتونسیستم نور ارزښت نه لري، څکه چې د یو ګڼ ارزښت د ګڼ نخښې زیاتون باندې انځور کیږي. د ځای سیستم سره د ګڼونو انځورول ساده دي.

تعریف ۱ . ۱ ب : په یو «ځای ارزښت سیستم» کې همغه ګڼ لوی دی چې زیات ځایونه ولري، که چیرې د ګڼ د ځایونو شمیر سره برابر وي(مساوي وي) نو همغه ګڼ ستر دی چې له کیڼې لورې یې نخښه لویه وي.

لسیز – یا لسګونی سیستم: لسیز سیستم همغه ځای ارزښت سیستم دی چې له انځورونې یې څرګندیږي. په لسیز سیستم کې د ګڼ انځورولو نخښې، لکه د مخه مو چې انځور کړې، ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ دي. ۱۰ ګڼ د لسیز سیستم بنستیزه نخښه ده. دا چې نور ګڼونه نه انځوریږي، نو ځای هلته ډك دی چې پرله پسې (ترتیب یانظم) د ۰ تر ۹ یعنې له 0 تر 9 ګڼونو پورې په ځای شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پە دې ډول د پسی جګ ځای یوون (واحد) د په کار اچول شووګڼڅخنبو ګڼون (تعداد یا شمیر) دی، ځمور په حالت کی ۱۰ .

لکه چی د مخه مو ګوته ورته ونیوله، د پای (نه لایتناهی) ډیري (set , die Menge) غږو ګڼلو لپاره لاندې ګڼونه کفایت کوي: ۱، ۲، ۳، ۴، او ۹ –امه برخه دې وکتل شي)) داسی نور. تولودې ګڼونو ته چی دصفرګڼ ورسره مل شي د طبعي ګڼونو ډیری N ویل کیږي. ددې لپاره لیکو :

$$N = \{ 0, 1, 2, . 3 . 4 , 5 , 6,....\} ; \qquad N^* = \{ 1, 2, 3, 4, ...\}$$

مور ګڼونه په کوچنیو لاتینی ټکو یا حروفو ښایو لکه a ,b,c, ... n . دا رینبتوني

(رینبتینوالی یا واقعیت) چی n دې یو طبعي ګڼ وي، داسی لیکل کیږي $n \in N$ یا $n \in N^*$ (ویل کیږي چی: n د طبعي ګڼونوډیري N یا*N توکی دی(لنډ n د N یا *N ځخه دی)) په دې ځای کی دې دګڼ او ګڼځای (ځیفر) توپیر ته پام وي.

مور دګڼونو ټاکلو لپاره بلد یا اشنا د نخنبډیري لسیز سیستم په کار اچوو (استعمالوو)

$$N_{10} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

د ګڼونو د نخنبو $a_i \in N_{10}$ پرله پسی، لکه د مخه مو چی په ګوته کړل، په لاندې ډول یو طبعي ګڼ انځوروي:

$$a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1 a_0 = a_n.10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}\,.10^{n-2} + ..+ a_2\,.10^2 + a_1.10 + a_0\, 10^0$$
$$a_i \in N.$$

ګڼونه په نورو ځیفرونو ډیري هم انځوریدی شي. د بیلګي په توګه په اینفورماتیك (Infrormatik) کی، چی د دوالسیستم (Dualsystem) (دوئیز سیستم) ځخه کار اخستل کیږي. ددې لپاره دوه ګڼنخنبي (ځیفرونه) لیکل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$N = \{ 0,1 \}$

په لاندې جدول کې دلسيز او دوه ئيز سيستمونو لمړني ګڼونه يو د بل ترڅنګ کښل شوي:

لسيز سيستم	دوه ئيز سيستم
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100

په ټوليزه توګه(عمومي توګه) دلته يو څيفر پرلبسې(د عددون ترادف) $a_i \in N_2$ يو طبيعي عدد په لاندې ډول انځوروي،

$$a_n a_{n-1} \ldots\ldots a_2 a_1 a_0 = a_n.2^n + a_{n-1}.2^{n-1} + \ldots\ldots + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0.2^0 , \ a_i \in N$$

بيلګه ۱ . ۱ :

$$59 = 1.32 + 1.16 + 1.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1$$

$$= 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 111011$$

يا دونه :: څه لنډ لنډيزونه

د طبيعي اعدادو ډيرئ يا سټ داسې په نخښنه کوو:

د پيدايښتي يا طبيعی ګڼونو ډيرئ $N = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

دپيدايښتي ګڼونو ډيرئ د صفر سره $N^\circ = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ه کتابونو کی دا د صفر نخښه په لاندې برخه کی راځي۰

۳ ۰ ۱ ۰ ب د طبیعي اعدادو یا ګڼونو انځورونه:

طبیعي اعداد په نخښو انځوریږي۰ دا عددونه یا ګڼونه د ځان لپاره یو سیستم لري، چی هغه زیات یې موږ نه څیرو۰ زموږ لپاره غوره هغۀ عربی اعداد یا ګڼونه دی۰

یا په بل ډول : دا عددونه چی موږ ورسره بلد یو د لسیز ځایستسم عددونه دي، چی دا مو د مخه په ګوته کړل۰ دا کورونه (خوني یا خانې) لري او په هر کور کی له صفر تر ۹ ځاي نیوی شي او بیا یې هر ځاي یو ارزښت لري، له دې امله دا » ځاي ارزښت سیستم« دی۰ لومړي کور ته یویز، دوم ته لسیز، دریم ته سلیز او همداسی ، چی دا مو د مخه لږ روښانه کړي۰

انځورونه یا څیفرونه یې دي : ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ۷ ، ۸ ، ۹ دا د بنسټیز ګڼونو نخښی دي، نور یې په کورونو یا ځایسیستم باندې روښانه کیدی شي۰

پیژند ۳ ۰ ۱ ۰ ب :

په یو» ځاي ارزښت سیستم « کې هغه ګڼ لوي دی، چی ډیر ځایونه ولري۰ که چیرې د ګڼ د ځایونو یا کورونو ګڼون (تعداد) سره برابر وي۰ نو بیا هغۀ ګڼ لوي دی، چی کینې لور یې ګڼنخښه لویه وي۰

۳ ۰ ۱ ۰ پ : طبیعي اعدادو کي د شمیرنې بنسټیز قوانین

اوس په لاندې ډول د پیداینت ګڼونو، په ټولیزه توګه د رییل ګڼونو لپاره او وروسته د کمپلکسو ګڼونو لپاره هم باوري(معتبر) بنسټیز د شمیرنې قوانین وړاندې کوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف : د انډول (نظم يا ترتيب يا لوي واړه ترتيب(Anordnung) بنسټيز قوانين:

که > ولړو، نو دې ننوتي کونج کی يا د نخښی خوله کی عدد يا ګڼ لوي دی او د وتلی کونج يا لوي کونج >که نخښنه يا داسی کونجکی يا څټ يا ککره کې ليکل شوی عدد کوچنی دی۰ که ګڼونه يا اعداد ۱۵ او ۲۳ ولرو نو د لويواړه اړيکی داسی ليکو، ياني که 23 > 15 ولرو نو ترې څرګنديږي، چی عدد۱۵ له عدد ۲۳ کوچنی دی .

د دوه طبيعي اعدادو a اوb ترمنځ له لاندې اړيکو څخه ټيک يوه اړيکه باور لري»

$a < b \quad , a = b \quad , a > b$

۲ ـ ۲۱ =۲۱ که د ۲۱ په ځاي توری وليکو هم a = a به وي اينه ونه يا هندارونه يا منعکسونه (ريفليکسيويتي Reflexivity)

۳ – له a = b <= (لاس ته راځي) b = a (سيومتري، انډول، ورته وابي (Symmetry

د انعکاسي (ايينه ونيز – يا هندارونيز) برابروالی يانی که چيري دا عددونه ورابنه يا هنداره يا انعکاس شي، نو دواړه عددونه په دا بل لور بيرته سره برابر دي يا برابريږي۰ که انعکاسي(اينه ونيز)برابر نوم ورته کيږدو، نو هم مناسب به وي، خو موږ به يې همغه سيومتري وبولو۰

٤ ـ له a = b او b = c <= (لاس ته راځی) a = c(ترانزيتيوTransitivity)

ترانزيتيو ګورو، چی يو له بل اړوند مانا ته نزدی دی، څکه چی دا ګڼونه يو د بل سره په واکوالي تړلي يا له يو څخه وبل ته ځی يا وړل کيږي۰

۵ – له a < b اوb < c <= (لاس ته راځی) يا a < c يا $a<b, b<c \Rightarrow a<c$

وړانديز : که چيری دا پورته وي يا لغاتونه يا نومه ونی په همغه لاتين نومونو وليکو ښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به وي، خو له شمیرپوهنی پرته مانا باندی یې هم پوهیدنه ښه او اړیینه ده۰

ب : د زیاتون (جمع) .Addition n بنسټیز قوانین

که چیرې له طبیعي اعدادو څخه یو ، دوه یا څو ګڼونه یو په بل زیات شي، نو یو پیدایښتي ګڼ ترې لاس ته راځی او دا کارونه(عملیه) «زیاتون یت جمعه » بولو، ځکه، چی ګڼونه یو په بل زیاتیږي۰

پیژند: د همغه ډول شیانو یا یو څه یو په بل زیاتیدلو ته زیاتون (جمع) وایو

که عدد ۱۰ په عدد ۱۸ ورزیات کړو نوعدد ۲۸ ترې لاس ته راځی یا

$$۲۸ = ۱۸ + ۱۰$$

په پورته کې ۱۰ او ۱۸ یو پر بل زیاتیږي، نو له دې امله یې «زیاتېدونی» (ما تراوسه زیاتووني بللي، خو فکر کوم،چې زیاتیدوني یې ښه نومه ونه ده) بولي، ۱۰ + ۱۸ جمعه او ۲۸ « جمع ارزښت» بلل کیږي ۰ چی په هغه پخوانی نوم مو ورته حاصل جمع وایه ۰ + زیاتوننخښه ده او = برابروننخښه (مساوات علامه) بولو

دجمعې یا زیاتون بنسټیز قوانین

۱ - د دوه طبیعي اعدادو a او b لپاره تل یو زیاتون (جمع) a + b شته دی

۲ - یواځنوالی : له a' = a او b' = b څخه لاس ته راځي: a'+b' = a + b

۳ - COMMUTATIVE LAW کموتاتیو- یا بدلون قانون دی:a + b = b +a

۴ - assotiative law اسوشیاتیو - سره ګډېدنې قانون. لرو
(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c

۵ - Monotony law مونوتوني – یا همغږیزوالي قانون :

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $a<b$ څخه لاس ته راځي $a+c<b+c$

يادونه : په $a+b=c$ کې a او b زياتېدوني $a+b$ زياتون او c زياتون ارزښت بلل کيږي

يادونه : په زياتون کې لاندی زياتونقوانين هم باوري دي:

ناپيلی توکی: په $N°$ کی يو توکی شته، چی که د هرپيدايښتي توکی سره په زياتون يا جمعه کی ور زيات شي همغه توکي ورکوي۰ دا توکی صفر دی: $a+0=a$

ناپيلی توکی کړی شو نالوريز وبولو،ځکه،چې د کومې لور ګڼ باندې يې په زياتون کې بدلون نه راولی يا د زياتون ارزښت همغه پاتيږي، همداسې نااړونده او که بل څه مو په خوښه وي همغسې يې وبولی۰

پ : د کمون (تفريق)Subtraction بنسټيز قوانين

پيژند:د پيدايښتي ګڼونو a او b لپاره، چې $a>b$ وي، يواځی يو x شته دی، د کوم لپاره ، چې باور لري: $a - b = x$

که $x= a -b$ شته وي، نو ټيک يواځني شته دي(موخه x دی)

نومه ونې: b کميدونی يا مفروق (تراوسه مې کمونی بللی) a ترې کمونی يا مفروق منه $a +b$ کمون او x کمون- يا تفريق ارزښت بلل کيږي يا بولو :

موږ پورته د لاتين تورو لپاره طبيعي اعدادونخښی ليکو، چی ساده يې ونومو:

$20 - 10 = 10$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کی موږ له ۲۰ لس کم کړل، چی لاس ته راوړنه یې ۱۰ ده، نو له دی امله یې داسی نوموو:

تر مخ یادونه: په لاندې کې ع . د عربي په معنا دی

۲۰ «ترې کمونی »، ځکه، چی ترې کمیږي(ع۰ مفروق منه)، ۱۰ «کمموونی« یا کمیدونی(ع۰ مفروق) دا بل لس یې «کمون ارزښت» یا د کمون لاس ته راوړنه(لنډ: لاس ته راوړنه یا کمون) (ع ۰ حاصل تفریق) ، – کموننخښه او = برابروننخښه ده۰

ت : د ځل (ضرب)Multiplication بنسټیز قوانین:

۱ - د دوه پیداښتي ګڼونو a او b لپاره د پیداښتي ګڼونو په ډیری کې تل یو ځل a.b شته دی. د a.b لپاره داسي هم لیکو ab په پورته کې a او b ځلووني (ضریبونه) او ab=x « ځل ارزښت » یا ځل(حاصل ضرب) دی۰

وایي چی ضرب وهلو ته وایې او د جمع (که جمعي) لنډه طریقه، چی۰۰۰۰وي یا د زیاتون لنډه لار ده۰ ګورو، چی دا پیژند، چی وهل او دربول دي زموږ لپاره دومره موخور نه دی او ځل د پښتو ښه نوم دی، چی له دربولو مو ځانونه راویستلي وي۰

که ووایو، چی : د کابل او جلالاباد ترمنځ لار ۱۵۰ کیلو متره ده۰ زمری له کابل څخه جلال اباد ته ۸ ځله لاړ، نو زمري به جلال اباد ته د تګ ټوله څومره لار وهلی وي؟

لیکو: ۱۵۰ × ۸ = ۱۲۰۰ ، نو زمري به ټوله ۱۲۰۰ کیلو متره لار وهلي وي۰ ګورو، چی د ځل نومونه د ضرب لپاره ښه او اسانه ده، ځکه چی پښتو ده او له ضریبونو څخه به هم ځلوونی اسان وي، به ۰۰۰وي نه، بلکی اسان دي۰

۲ - له $a = a'$ او $b = b'$ څخه لاس ته راځي $a'b' = ab$ (یواځیتوب)

۳ - لرو $ab = ba$ کموتاتیو – یا د بدلون قانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ - لرو $(ab)c = a(bc)$ د ګډولو- اسوشیاتیو قانون

٥ – لرو $(a+b)c = ac + bc$ د ویشونې- یا دیستریبوتیو قانون
Distributive law

٦ - له $a < b$ او $c > 0$ لاسته راځي $ac < bc$

جګټیتوالي یا یوغړیزوالي قانونMonotony

ټ – د ویش بنسټیز قانون Division

پیژند۳ ۰ ۲ :

که د دوه طبیعي عددونو a اوb لپاره، چې $a \neq b$ او $a \neq 0$ وي یانی صفر نه وي یو طبیعي عددx شته، چی برابرون (مساوات) $ax = b$ پوره کړي، نو

$x = \frac{b}{a}$ یا b/a د b او a ویش (تقسیم) بلل کیږي، چې ماتګې(کسر) یې هم بولو

۱ – که $a / b = x$ یا $x = \frac{a}{b} = a/b$ شته یا موجود وي ، نو یواځنی شته دی(یواځني په دې مانا، چې بل ګڼ x نه شته او یواځې همدا ګڼ x دی)

نومه ونې : په پورته برابرون کې a/b وېش x ویش ارزښت، b ویشونی یا ویشه وونی دی، ځکه چی په یوځه ویشل کیږي او a پرویشونی بلل کیږي، ځکه، چی څه پر ویشل کیږي یا مقسوم، مقسوم علیه یا قاسم ، حاصل تقسیم ۰

ګورو چی له قاسم یا مقسوم او همداسی د مقسوم علیه او حاصل تقسیم څخه مو دا د پښتو نومه ونی پر- یا پرې ویشونی ، ویشه ونی اوویش ارزښت یا لاس ته راوړنه ساده او زر پوهېږ دي، خو په خواشینی به وه وایم، چی تراوسه په شمیرپوهنه کی ورسره نابلد یو ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ۱۲ کتابچې پر څلورو زده کوونکو وویشو، نو هر یوه ته درې کتابچې رسيږي٠ گورو، چې ۱۲ په یو څه ویشلکيږي، نو ويشونی يې ښه نوم دی٠ دا ۱۲ په څلور ويشل کيږي پر ۰۰۰ ويشل کيږي، نو له دې امله څلور پر ويشونی بولو، درې يې لاس ته راوړنه ده لکه چې تراوسه مو ورته حاصل تقسيم وايه، له دې امله ورته ويش ارزښت وايو او دا کارونه يا عمليه خو ويش بلل شوی٠

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ تېولگڼونه يا تام اعداد INTEGERs

د دووو طبيعي عددونو a او bکمون يا تفريق (x= b-a) تيک او تيک هلته يا هلته او هلته د طبيعي عددونو ډيری يا سټ کی شته، چې وي : $a \leq b$

د شميرپوهنې نخښو باندې داسې ليکل کيږي:

$$x = b - a \Leftrightarrow a \leq b$$

انگريزي يې if and only if تيک او تيک هلته يا هلته او هلته(دا شننه يا وينه پورته د شميرپوهنې نخښې ته ده)٠

که هغی نخښی ته وگورو، نو هم لاندې ترې څرگنديږي، له ښی لور کيڼ لاس ته راځی او په څټ(برعکس) له کيڼ لور ښی لاس ته راځی٠ يا که۰۰۰ وي، نو ۰۰۰ لاس ته راځی او په څټ٠

تېولگڼونه يا تام اعداد هم د انسانانو د اړتياو پر بنسټ منځ ته راغلي ، يا منځ ته راوړل شوي٠که چيرې سپين د خړ ۱۰۰ افغانیپوروړی وي او سپين ورته اتيا افغانی ورکړي، نو سپين بيا هم شل افغانی پوروړی پاتيږي، دا په دی ما، چې ۸۰ + ۱۰۰ - = ۲۰ - ۰ گورو، چی ۲۰ – يو پيداينتي گڼ يا طبيعي عدد نه دی٠يا 20- = 100 – 80

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هغه حالت کی، چی کموونی (مفروق) له ترېکموني(مفروق منه) څخه لوي وي، نو لاس ته راوړنه يې طبيعي عدد نه دی٠ اوس یوه د اعدادو بلې ډیری پیژند ته اړ کیږو، چی هغه د ټولګنونوډیری ده او دا د طبيعي عددونو او د طبيعي عددونو کمي(منفي) او صفر سره یوځاي کوو، چی ټولنه جوړوي(په ډیری کۀ به روښانه شي)، هغه څه، چې له دې ټولنې لاس ته راځي هغه د ټولګنونو ډیری ده او داسې یې لیکو:

$$Z = N \cup -N \cup 0$$
$$Z = \{....-3,-2,-1,0,1,2,3....\}$$

د دې لپاره، چې ترې کمونی د کمېدونی کوچنی وي ، نو پیداینیتي ګنونه په کمګنونو غزوو یا پراخوو، دا په دې مانا، چی د پیداینیتي ګنونو مخنخښه په کموننخښه یا منفي نخښه باندې سنبالوويانې (کیدی شي زموږ هیوادوال د ځټ نخښی په نامه ورسره بلدوي، خو هره نخښه، چې د ګڼ زياتی یا کمی ښايي د ګڼ کيڼ لور ته لیکل کیږي، چې دا ما مخنخښه لیکلې او بللی

هغه په برخه ۳ ۰ ۱ ۰ ۱ کې ورکړ شوي شمیرقوانین په Z کې هم باور لري

د ټولګنونوډیری

$$Z = \{ .... -3, -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , ... \}$$

د مخه مو شمیرقوانین، چې د پیداینیتي ګنونو لپاره ورکړل، هغۀ د ټولګنونو لپاره هم باور لري

د کمون یا تفریق بنسټقوانین (پسی یا دوام):

۲ - د هرو دوو ټولګنونو یا تام اعدادو a او b لپاره یو ټولګڼ x=b-a شته، د کوم لپاره، چیa+x=b برابرون باوري دی

د ویش تیوري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۱ ۰ ۲ الف د ويش قاعدې ، لارې يا خويونه

د طبيعي عددونولپاره د نورو قاعدو ترځنګ ، چې د لومړنيو ګڼونو د ټوټه ونې يا تجز يې لپاره خورا ګټور دی باور لري

الف) يو ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦) ويشونی دی، که د اخر ځيفر يا کور (له اخره(موخه تری ښی لور دی) دوه ، درې ، څلور ۰۰۰ بنسټيزو ځيفرونو) څخه جوړ ګڼ په ۲ (٤ ، ۸ ، ١٦ ۰۰۰ويشونی وي) په دوه ويشونی ګڼ جوړه (جفت) نوميږي او بل ډول يی ناجوړه(طاق) بلل کيږي۰ ګورو، چی دلته هم په جوړې او ناجوړه ښه پوهيدلی شو

ب) يو ګڼ په ٥ (٢٥ ، ١٢٥ ، ٦٢٥ ، ۰۰) ويشونی دی، که د اخر(له ښي لور) بنسټيز ځيفر (د اخر دوه، درې ، څلور ، ۰۰۰ بنسټيز ځيفرونو) جوړ ګڼونه په ٥ (٢٥، ١٢٥ ، ٦٢٥ ۰۰۰) ويشوني وي

يادونه : په لاتين کی هغه، چی ښي لور ته وي هغه ته اخر وايي او موږ يې شايد لومړی وبولو۰ زه کوښښ کوم، چې دا پوهوړ وليکم، خو بيا دې هم ګران لوستونکی تری ټيک ناپوهيدنه ماته وبخښي او مشوری دې راکړي۰

پ) يو ګڼ په ۳ همداسی ۹ ويشونی دی ، که د ګڼ پروت زياتون پر دې ګڼونو ويشونی وي۰

د يوه ګڼ پروت زياتون لاندې د هغه ګڼ بنسټيز ه ګڼونخښو(ځيفرونو) زياتون پوهيږو، بی له دې، چې د هغه ځاي ارزښت په پام کې ونيول شي۰

بيلګۀ : د 126 پروت زياتون يا پرته جمعه ده: 9=1+2+6

ت) يو ګڼ په 11 ويشونی دی که د هغه ګڼ الترنيري(نخښه بدلونکی) پروت زياتون۰ پر 11 ويشونی وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

الترنیري پروت زیاتون، چې پروت کمون هم ورته وایی له بنستیزو څیفرونو ۱ ، ۳ ، ۵ زیاتون څخه د ۲ ، ٤ ، ٦ ،۰۰۰ زیاتون کمون پوهیږو ، بی له دې، چې ځاي ارزښت یې په پام کی ونیول شي یا په بل ډول، که د ناجوړه کور زیاتون څخه د جوړه د زیاتون کم کړو۰

بیلګه: ۱۷۳۸ په ۱۱ ویشوني دي، ځکه، چې : ۱۵= ۸+ ۷ او ٤ - = ۳ – ۱ -، چې الترنیري زیاتون یانی ۱۱ = ٤ – ۱۵ یې په ۱۱ ویشونی دی۰

ټ) یو ګڼ پ ه ۳۷ وېشوړ دی که (د ګڼ له اخر څخه جرړشوي) د درېګوني ګڼونو زیاتون پر ۳۷ وېشونی وي.

بیلګه:

37|(448+352+216+20)⇔ 37|1036 ځکه چې 37| 20216352448

ث) یو ګڼ په ۷ همداسې په ۱۳ ویشوړ دی، که د هغه (د ګڼ له لخ څخه جوړ) درېګونی الترنیري زیاتون پر ۷ همداسې پر ۱۳ وېشونی وي.

بیلګې : 37604 | 7 ځکه چې 567 | 7 ⇔(604-37)|7

13| (889-293+709-96) ⇔ 13|1209 ځکه ، چې 13 | 9679293889

ج) یو ګڼ په ۱۰۱ وېشونی دی، که (د ګڼ له اخر څخه جړشوی) دوهګونی الترنیري زیاتون په ۱۰۱ وېشونی وي.

بیلګه:

101|(69-06+63-03+79)⇔ 101|202 ځکه چې 101|7930630669

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : که پیداښتي ګڼونه a او b ولرواو ولرو a : b ، نو a پر b وېشو، که وېش

ارزښت یې هر ګڼ وي او که پېداښتي ګڼونه a او b ولرو او ولرو b|a ، نو دا په دې مانه، چې ګڼ b ګڼ a ویشي بې له پاتي یانې ګڼ a په ګڼ b وېشوړ دی.

۳ . ۱ . ۲ب) خوراغټ ګډ پرویشونی او خورا کوچنی ګډ زیاتځله

یا بزرګترین قاسم مشترک و کوچکترین مضرب مشترک(ذو الاضعافالاقل)

Great common divisor and small common multiple

ددې لپاره، چې دا په سرلیک کې ورکړ شوي څه ښه و پېژندلی شو ، داسې مخ ته ځو:

لاندې ګڼونه دې ورکړ شوي وي، سملاسي یې په لومړنیو ګڼونو ټوټه کوو

$$260 = 2.130=2.2.65=2.2.5.13 = 2^2.5.13$$

$$468=2.234=2.2.117=2.2.3.39=2.2.3.3.13=2^2.3^2.13$$

له پورته دواړو ګڼونو د لومړنیوګڼونو ځله وونو هر یوه څخه هغه لومړنی ګڼ رانیسو او سره ځله وو بې، چې په دواړو ګڼونو کې ګډ وي او توان(په خپل ځای کې دې وکتل شي) یا جګګڼ بې ټیټ یا کم وي . یانې

$$22.13 = 2.26 = 52$$

دا پورته لاس ته راوړی ګڼ یانې ۵۲ پورته دواړه ګڼونه وېشي یانې د دواړو ګڼونو پرووېشونی

دی او خورا غټ پرووېشونی هم دی. یانې ۵۲ خورا غټ او ددواړو ګډ پرووېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ : ۵۲ د یورته ګڼونو خورا غټ ګډ پروېشونی دئ.

داسې ګڼ ، خوراغټ ګډ پروېشونی، بولو (لنډ ونه یې : غ ګ و)

هغه ګڼ، چې د دوه یا ډېرو ګڼونو ګډ پروشونی او خورا غټ هم وي، نو دې ګڼ ته خورا ,,

غټ ګډ پروېشونی ,, (لنډونه: غ ګ و) وایو. یا

(بزرګترین عامل (مقسوم علیه) مشترک)Greatest commom divisor(g c d)

اوس بیا داسې مخ ته ځو:

په پورته کې هغه د دواړو ګڼونو لومړني ځله ووني، له هر څخه یو چې په جګ توان وي

یانې خورا غټ جګګڼ ولري ، هغه د جګ توان رابېلوو او بیا یې سره خله وو، چې لاس ته

ترې راځي: $2^2.3^2.5.13=2340$

دا پورته ګڼ یانې ۲۳۴۰ د دواړو ورکړ شوو ګڼونو ګډ زیاتځله دئ (یانې ګډ په دواړو

وېشل کیږي) او دا خورا کوچنی ګڼ هم دئ. دا په دې مانا،چې له دې ګڼ بل کوچنی ګڼ نه

شته، چې د پورته ګڼونو دواړو ګډ زیاتځله(څو برابره) وي.:

لنډ : خورا کوچنی ګڼ دی. د دواړوګڼونو (یانې ګډ) زیاتځله (ګډ څو واره) دئ

لنډ یې : خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډونه یې: خ ګ ځ) یا
(کوچکترین مضرب مشترک یا ذوالاضعاف الاقل)Least common multiple(l.c.m.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران هيوادوال دې ورته پام وکړي، چې کوم نوم به زموږ لپاره زر يا بيخي پوهوړ او ساده وي.

ورپسي داسې مخ ته ځو:

دا چې موږ په پيدايښت يا طبيعي ګڼونو کې له شميرلو سره بلد شو ، نو په لاندې ډول پيژند ورکوو:

پيژند(تعريف)۳ ۰ ۳ :

a او b دې ټولګڼونه وي۰ وايو چې « ګڼ a ګڼ bويشي» (او يا هم a د bپرويشونې دئ او يا همa د b څو برابره (زياتځله) دئ) که يو ټولګڼ u شته يا موجود وي او دا باوري کړيau=b ددې لپاره ليکوa|b (وايو، چې ګڼ aګڼ b ويشي ، خو اړيين يا ضرور نه ده، چې کلمه ګڼ ورسره وويل شي۰

که a د bپرويشونی نه وي، نو د دې لپاره ليکوa|/b(دا نخښنه /| دې د نه ويشونی لپاره ومنل شي)

بيا ليکو، چې : پيدايښتي ګڼونه، چې په ۲ ويشل کيږي جوړه (جفت) ګڼونه بلل کيږي او که نه نو ناجوړه (طاق) ګڼونه بلل کيږي۰ د صفر ګڼ د پيدايښتي ګڼونو په ډيرئ کې يو ځانګړی حالت لري۰

په لاندې جمله کې بې له ښوونې يا اوبيونې د دې ويشکلمی لپاره يو څو ساده شميرقاعدې را يوځاې کوو، چې په راتلونکې کې ترې کار اخستل کيږي۰

جمله ۳ ۰ ۱ :

د په خوښه يا زړه پورې ټولګڼونو a,b,c,d لپاره باوري دي:

(۱) ± 1 او $\pm a$ ويش (دا په نامه « ساده» پرويشوني دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۲) د ۱ پرویشونی ۱ او ۱ - دي

(۳) تل باور لري، چې 0 | a او a | 0 یواځی په هغه حالت کې باور لري، چې a = 0 وي

(٤) له a|b او b|c <= a|c

(٥) له a|b لاس ته راځي: ac|bc ٠که c |= 0 وي ، نو د دې په څېر هم باوري

دي٠ دا په دې مانا چې، که ac|bc وي، نوa|b هم باور لري٠د ګڼونو

ليکدود له مخې، که نړيوالجال ته پورته شو داسې ليکو، که نه دا پورته بسيا

کوي: $c \neq 0, a \mid b \Rightarrow ac \mid bc$

(٦) لهa|b او c|d څخه لاس ته راځي او په څېر ac| bd لنده ليکنه يې(که نړيوالجال ته پورته شوه): $a \mid b, c \mid d \Leftrightarrow ac \mid bd$

(۷) له a | b او b| a لاس ته راځي a = ± b

(۸) له a |b اوa|c څخه لاس ته راځي a|(bx+cy) د ټولو ټولګڼونو x او y لپار

(۹) ټيک هلته a|b کله چی وي|b| | |a|،

(۱۰) که a | b او b = 0 نه وي نو باوري دي |b| > a > |b| -

حل (اوبی) : (۱) له a1 = (-a)(-1) = a لاس ته راځي

(۲) له a0 = 0 لرو a | 0 . که وي a | 0 , نو یو ټولګڼ u شته د کوم لپاره چی وي 0u = a

او له کومی چی لاس ته راځي a = 0 .

(۳) ساده دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۴) که $a \mid b$ او $b \mid c$, نو تهولګنېونه u او v د $au = b, bv = c$ سره موجود دی . له دي لاس ته راځی $c = bv = a(uv)$ ، پس $a \mid c$.

(۵) که $a|b$ ، پس يو تهولګنۍ u د $au = b$ سره موجود دی، او هم د $(ac)u = bc$) سره، د کوم څخه چی لاس ته راځي $ac \mid bc$. د $c \,|\!= 0$ لپاره دا اخرنتخير په ښتۍ کيدی هم شي.

(۶) د $a|b$, $c|d$ او (۵) څخه لاس ته راځي چی $ac|bc$ او $bc|bd$ ، د (۴) له مخی $ac \mid bd$.

(۷) د $a \mid b$ اود $b \mid a$ څخه د تهولګنېونو u او v موجوديت لاس ته راځي د $au = b$ او $bv = a$ سره . برسيره پر دې لاس ته راځي $a(uv) = a$, پس $a=0$ يا $u=v=\pm 1$. په لمړي حالت کی د $a \mid b$ له امله $b = 0$, پس $a = b$. په دوم حالت کی $a =\pm b$ دی.

(۸) د تهولګنېونو u , v لپاره دي $au = b$ او $av = c$ ، نو له دې $a(ux+vy)=bx+cy$ لاس ته راځی، پس $a \mid (bx+cy)$ د تهولو تهولګنېونو x او y لپاره.

(۹) وي دې $a|b$. له $a \mid b$ ، $a| \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه او د (۴) څو واره استعمال څخه لاس ته راځي، چی $|a| \mid |b|$. په ښتۍ: که $|a| \mid |b|$ باورلری، نو د $|b| \mid |a|$ ، $a \mid |a|$ او $|b| \mid b$ څخه په ورته ډول لاس ته راځي $a \mid b$.

(۱۰) دی $a \mid b$ ، پس د (۹) هم $|a| \mid |b|$. که $b \,|\!= 0$ وي ، پس يو طبعي ګڼ u لاس ته راځي د $|a|u = |b|$ سره، له کوم چی $|a| \leq |b|$ لاس ته راځي.

که $b|a$ د تهولګنېونوa,b لپاره د $b \,|\!=0$ سره، نو يو يواځنی معلوم ګڼ q شته (د a او همداسی د b «کومپليمنت پرويشونی» بلل کيږي)، چی لرو $a = bq$.

په تهوليزه توګه لاندې جمله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۳ ۰ ۲ (د ویش الګوریتم): a او b دې تولګنونه وي٠ د $b \neq 0$ سره ٠ نو یواځني ټاکلي، په پای پلونو(قدمونو) کی شمیرلکیدونکي تولګنونه q او r (چې د a پر b ویش

څخه لاس ته راځي او «ویش» په همدې ډول « پاتی بلل کیږي، شته دی،د کومو لپاره چی باور لري: $a = bq + r \;\wedge\; |0| \leq r < b$

هر یو تولګڼ کم له کمه ساده پرویشونی لري یعنی ± 1 او پخپله د دې تولګڼ زیاتیز(مثبت) او کمیز(منفي)٠ دې پرویشؤنو ته «سادهٔ پرویشونی» وایو٠

پیژند ۳ ۰ ب :

هر یو تولګڼ، چې یواځی او یواځې ساده پرویشونی ولري مونږ ورته لومړنی ګنونه وایو او دا لومړنی یا پریم ګنونه Primzahlen په p سره په نخښه کوو، چې دا پریم یا لومړی ګڼ د پیداېښتي ګنونوتوکی دی٠

هریو تولګڼ، چی لومړنی ګڼ نه وي د لومړنیو ګنونو په څلونو(څله وونو)(ضریبونو) ټوټه یا تجزیه کیدی شي٠

بیلګی :

$240 = 24 \,.\, 10 = 3 \,.\, 8 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^4 \cdot 3 \,.\, 5$ - 1

$2310 = 2 \,.\, 1155 = 2 \,.\, 3 \,.\, 385 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 77 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 11$ -2

$3750 = 25 \,.\, 15 \,.\, 10 = 5 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 2 \,.\, 5 = 2 \,.\, 3 \,.\, 5^4$

که پورته بیلګو ته په ځیر شو نو په ۱ او ۳ راغلو ګنونو کی ګڼ ۲ د دواړو پر ویشونی دی او همدا ډول ۳ هم د دواړوګنونو پرویشونی دی یانی $2.3 = 6$ برسیره پردې ګڼ ۵ هم نو $2.3.5 = 30$ دواړه ګنونه ویشي او شاید په دې ګنونو کی یو خورا غټ ګډ پرویشونی هم وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته درېواړو بيلګو کې ۲ ، ۳ ، ۵ د ځلوونو په څير خوندي دي يانې دا ګنونه ويش، چې له دې امله ګڼ ۳۰ د درجواړو ګنونو غ۰ګ۰پ دئ

پيژند ۳ ۰ پ :

a اوb دې ټولګنونه وي او d دې يو مثبت يا زياتونی ټولګڼ وي، د کومو لپاره، چې باور لري:

$$(1) d \mid a \wedge d \mid b$$
$$(2) t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow t \mid d$$

پس d د a اوb خورا غټ ګډ پرويشونی(غ۰ګ۰پ) بلل کيږي d لپاره داسی ليکو:

$$d = (a,b)$$

نو d خورا غټ ګډ پرويشونی(لنډ: غ۰ګ۰پ) بلل کيږي۰

که باوري وي: $(a,b) = 1$ نو a اوb پروېش پردي بلل کيږي يانې له ۱ پرته بل داسې ګڼ نه شته، چې دواړه ګڼونه پر ووېشل شي.

يادونه : په زياتو ادبياتو کې لنډونه په درېتورو کيږي، خو که غواړی دا خورا غټ ګډ پرويشونی داسې رالنډوو : خ غ ګ پ

يادونه: ما د خورا غټ ګډ پرويشونی لپاره دا پورته درې توکي غوره کړي، که ګران لوستونکي بل وړانديز لري، نو زه يې ضرور په پام کی په پوره خوښی نيسم۰ دې دوه کلمو ته په فارسي ادبياتو کي بزرګترين قاسم مشترک او کوچکتريب مضرب مشترک وايي او ذوالاضعاف الاقل يې هم بولي۰

يادونه : که چيرېd او *d دواړه دa اوb غ ګ پ وي، نو له پورته پيژند څخه لاس ته راځي

چی $d \mid d^*$ او $d^* \mid d$ ، نو د $d \geq 0$, d^* له امله لرو $d^* = d$

لاندې جمله به وښايي ، چې داسې غ ګ و تل شته دی

جمله ۳ ۰ ۳ :
په خوښه تولګنونو a اوb لپاره دې غ ګ پ d شته وي، نو تولګنونه x او y شته د کومو لپار، چې لرو: $d = ax + by$

حل(اوبي): که $a = b = 0$ وي ، نو 0 د a او b غ ګ و دی، نور ساده دی. د a او b د ممکنه بدلون (په پام کی دې وي چی د (a , b) تعریف په a او b کی سیومتریك دی) له امله اجازه لرو چی $b \neq 0$ ونیسو.
مونږ اوس رکورسیف (rekursiv (دا په دې مانا چی د مخه غړي څخه وروستی یعني وریسی غړی لاس ته راوړلکیږي)
تولګنونه......,r_{-1}, r_0, r_1, r_2 او .... q_1, q_2 په لاندې ډول تعریفوو: وي دې , $r_{-1} = a$ $r_0 = b$ د $i \geq 1$ او $r_{i-1} \neq 0$ لپاره تولګنونه r_i , q_i داسی تعینوو چی $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$

او $o \leq r_i < |r_{i-1}|$ کوم چی له جملی (۱ . ۳) څخه ممکن کیدی شي . باید یو نه منفی ګڼ n ورکړ شوی وي، د کوم لپاره چی لرو $r_n \neq 0$ مګر $r_{n+1} = 0$, چی بی له دې بیا یوه نه پای د طبعي ګڼونو لویدونکی یا کمیدونکی پرلپسی لاس ته راځي، کوم چی ناشونی(ناممکن) دی. دامو اوس ددې لاندې مساواتو شیما ته لارښودوي

$$a = q_1 b + r_1$$

$$b = q_2 r_1 + r_2$$

....

....

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا مساوات د شکته پورته وويل شي، نو په ترتيب (يو په بل پسی) لاس ته راځي:

$$r_n \mid r_{n-1} , r_n \mid r_{n-2} , \dots r_n \mid b , r_n \mid a$$

دا په دې مانا چی r_n د a او b يو غ گ و دی. t دې د a او b يو بل غ گ و وي، نو په دې حالت کی که دا پورته مساوات له پورته ښکته ولولو، نو يو په بل پسی لرو

$$t \mid r_0 , t \mid r_1 , t \mid r_2 ,\dots, t \mid r_{n-1} , t \mid r_n$$

دا په دې مانا چی |r| د a او b غ گ و دی.

هر د دې گڼونو r_i د ($-1 \leq i \leq n$) سره، په ځانگړي ډول r_n او ددې سره (a , b) يو د a او b لايني کمبينيشن دی ، په لاندې ډول au + bv , چی u او v تولگڼونه دي.

$r_{-1} = a$ د

او $r_0 = b$ لپاره ساده دی. که د يوه i لپاره د $1 \leq i \leq n$ سره، که يو د a او b يو لايني کمبينشن ښوونه د r_{i-1} او r_{i-2} لپاره همدا سم د لاسه پيداشوي وي، نوله $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ څخه د يوې داسی r_i د ځاي په ځاي کولو له لارې هم ، چی په دې ډول د ايندکشن له لاری غوښتنه لاس ته راځي. (پای)

يادونه : د غ گ پ د ښوونې متود ، چی پورته او په لاندې بيلگه کې راوړل شي د اويکليد الگوريتم"Euklid Algorithmus,, د يوې گڼيزې دندې يا کارونی (عمليې) شيماتيکي اوبيونې(حل) متود په نامه يادېږي، نو له دې سره x او y هم له a څخه

d = ax + by اکسپليځيت Explizit (لاتين: څرگند، واضح، روښانه) شميرل کيدی شي٠

بيلگه:

غوښتنه (2124 , 1764) = d ٠ د اويکليد الگوريتم کارونی له لارې لرو:

$$2124 = 1 . 1764 + 360$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1764 = 4.360 + 323$$

$$360 = 1.324 + 36$$

$$324 = 9.36$$

$$\Rightarrow d=36$$

که پورته وګورو نو غ ک پ $d = 36$ دی

د دې لپاره ، چېd لهx اوy سره په $d = ax+by$ ډول انځور کړی شو، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$36 = 360 - 1.324 = 360 - 1(1764 - 4.360) = (-1).1764 + 5.360$$

$$= (-1) . 1764 + 5.(2124 - 1764) = 2124 . 5 + 1764.(-6)$$

د پورته څخه دa اوb لپاره لاندې مهمه پېژند نخښه یا نخښونه لاس ته راځي

یادونه : ماته دا لاندې جملې ښه ښکارېږي، چې ګرانو لوستونکو ته یې بی له اوبیونې

وړاندې کړم، دا جملې په خته کې د ګڼونوتیوري دنده ده، چې په ګڼونتیوري کې بیا د ښوونې سره ښوول کیږي۰

جمله۳ ۰ ۹ :

a او b دې ټولګڼونه وي. د a او b یو ګډ پرویشونی $t \geq 0$ هلته او هلته د a او b ګ غ پ دی کله چې دا شکل $t = ax + by$ د a او b ټولګڼونو سره انځور کړای شو۰ په ځانګړې ډول a او b هلته او هلته ویشپردې دي، که ټولګڼونه x او y شته وي د کومو لپاره چې باور لر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$ax + by = 1$$

اوبیونه : د شرایطو ضرورت سم د لاسه له ۳ بړ ۶ څخه لاس ته راځي. دا چې شرایط پوره کېدونکي هم دي، له دې لاس ته راځي، چې هر د او پروېشوني د پروېشوني هم دي..

څو جملې په لاندې کې روړو، ګنونتېري پورې اړه لر او دلته یې نه ښایو.

جمله : ۱۰ . ۳

a او b دې ټولګنونه وي۰ د a اوb هر ګډ پرویشونی $t \geq 0$ لپاره باور لري:

$$(a/t,b/t) = (a,b) / t$$

په ځانګړي توګه t د a او b یو ګډ پرویشونی هلته اوهلته غ ګ پ دئ چې باور ولري

$$(a/t,b/t) = 1$$

لیما۳ ۰ ۱۱(جمله ګئ)(اویکلید): په خوښه ټولګنونو aاوb اوc لپاره باور لري

له $a|bc$ او $(a,b) = 1$ لاس ته راځي $a|c$

تعریف ۲ ت : $a_1 , a_2 , ... a_n$ دې ټولګنونه وي $(n \geq 1)$, او d دې یو نه منفي ټولګن وي د کوم لپاره چې باور لري :

لمړی : $d \mid a_i$ د ټولو n ,....,$i = 1$ لپاره

ب : له $t \mid a_i$ څخه د ټولو $i = 1 ,...., n$ لپاره لاس ته راځي $t \mid d$.

نو d د $a_1,...., a_n$ غ ګ و بلل کیږي او د d لپاره هم داسې لیکو $(a_1 , ... , a_n)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a_n , ... , a_1 لپاره د داسې غ ګ و يواځنتوب په ۳ . ۵ کې کتل کيدی شي او د موجوديت لپاره يې لرو :

جمله ۳ . ۱۳ : د خوښې تولګنونو a_n , ... , a_1 لپاره ($n \geq 1$) غ ګ و موجود او d د a_1 , ... , a_n خطي (لايني) کمبينيشن دی دا په دې مانا چې

$$d = a_1x_1 + ... + a_nx_n$$

د مناسبو تولګنونو x_n , ... , x_1 لپاره.

يادونه : له دې بيا لاس ته راوړل کيدی شي:

$$(a_1 , ... , a_n) = ((a_1 ,..., a_{n-1}), a_n)$$

د په خوښه تولګنونو a_n , ..., a_1 د ($n \geq 1$) لپاره. سرې کړی شي چې د $a_1,...,a_n$ غ ګ و پل په پل د اويکليد الګوريتموس له لارې پيدا کړي، چې دلته يې د اوبې يا حل څخه تيرېږو.

د اوبې يا حل لپاره يې د n په لور د پوره ايندکشن څخه کار اخستل کيږي چې په ۸ –امه برخه کې څېړل شوی دی.

بيلګې:

۱ - ګنونه 240 او3750 غ ګ پ 30 = 2.3.5 لري

۲ – لرو 408 او748

$$408 = 2^3.3.17, 748 = 2^2.11.17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس غ ګ پ دی: 17 . 2<2> = (408,748) یا دا لاندې که ن ج پورته شول

$$(408,748) = 2^{2}.17 = 68$$

۳ – پ غ ګ پ د ګڼونو او غ ګ پ 6 = (30.66.114) دی، ځکه، چې
30 = 2.3.5

او 66 = 2.3.11 او 114 = 2.3.19 دي

٤ – ګڼونه 54 او 65 ګډ پرويشونی نه لري دا موږ پرويشپردی بولو، ځکه، چې دي:

65 = 5.13 /\ 54 = 2.3.3.3

خورا کوچنی ګډ زیاتځلی(کوچکترین مضرب مشترک)

موږ په لاندې کې د خورا کوچني ګډ زیاتځله (لنډ: ک ګ ز) کلیمې په څیرنه پیل کو٠ دا کلمه و غ ګ پ یوه دوه ییزه یا دوه ګونی یا غبرګه (دوال Dual) کلمه ده، موږ په لاندې ډول سملاسي تولیز پيژند ورکوو

تعریف۳ . تې : $a_1 ,\ldots, a_n$ دې ($n \geq 2$) تولګڼونه وي، او v دې یو داسی نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره چی باور لري:

الف – $a_i \mid v$ د $i = 1 ,, \ldots , n$ لپاره

ب – له $a_i \mid w$ څخه د $i = 1 , \ldots , n$ لپاره لاس ته راځي $v \mid w$.

نو v د $a_1 , \ldots , a_n$ کوچنی ګډ زیاتځله(لنډ : ك ګ ځ) بلل کیږي او داسې یې لیکو:

$$v = [a_1 , \ldots , a_n]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (د دوه ګڼونو لپاره)

a او b دې تولګڼونه وي او v دې یو داسې نه کمیز یا نه منفی تولګڼ وي، د کوم لپاره، چې باور لري:

(۱) $v|a$ او $v|b$

(۲) له $a|w$ او $b|w$ څخه لاس ته راځی $v | w$

نو v د a او b خورا کوچنی ګډ زیاتځله (لنډ» ک ګ ز او که غواړی خ ک ګ ز) بلل کیږي او په لاندې توګه یې لیکو

$$v = [a,b]$$

جمله :

په خوښه تولګڼونو $a,b,c,\ldots,n$ لپاره ک ګ ز شته دئ او دا یواځنی دئ

$$[a,b,c,\ldots,n]$$

یادونه: موږ لاندې مساوات هم د مختلفو جملو او د هغو له حلونولاس ته راوړو :

دتولګڼونو ($n \geq 3$) $a_1, \ldots a_n$ لپاره لرو $[a_1,\ldots,a_n] = [[a_1,\ldots,a_{n-1}], a_n]$

او هم $|a_1 a_2| = [a_1, a_2]$ (a_1, a_2)

لاس ته راوړنې (داهم په همدې مانا مګر د جملی په څیر دی): د په خوښه تولګڼونو a, b, c لپاره باور لري: له $a | c$, $b | c$ او $(a,b) = 1$ څخه لاس ته راوړو $ab | c$

د ګڼتیوري بنسټیزه جمله:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژنده :

يو ټولګڼ $n > 1$ لومړی ګڼ (prime number) بلل کيږي، که له ساده پروېشونv بل پروېشونی ونه لري٠

لومړي ګڼونه لاندې غوه خويونه لري.:

ليما (لکه کوچنی جمله): که p يولمړی ګڼ وي او $p \mid a_1 \dots a_n$ د ټولګڼونو $a_1, \dots, a_n$ لپاره. نو $p \mid a_i$ د کم له کمه يوه i د $1 \le i \le n$ سره.

حل (اوبی): حل يی د ايندوکشن له لارې صورت نيسی، چی ددې لپاره بايد ۸ - امه برخه کتل شوي وي.

د $n = 1$ لپاره ښوونه ساده ده . اوس دې $n > 1$ وي او ليما دې $n - 1$ لپاره سملاسي باور ولري. نو لرو $p \mid a_n$ ، په بل ډول بيا له $p \nmid a_n$ څخه لاس ته راځي چې $(p, a_n) = 1$ دې . له مخکنه تيرې جملی لاس ته راځي، چې که $p \mid a_1 \dots a_{n-1}$ وي ، نو داسې دی $p \mid a_i$ د يو i لپاره چې $1 \le i \le n-1$ وي د ايندکشن د نيونې په بستې.

د لومړنيو ګڼونو غوره والی د « ګڼونتيوري بنسټيزی جملې» څخه لاس ته راځي

جلمه (د ګڼونتيوري بنسټيزه جمله):

هر يو پيداينتي (طبيعي) ګڼ ،د ګڼونو تر تيب پورې، په يواځني او يواځني (يويواځنی (له دې کلمو څخه موخه داده، چې دا په يواځی يو ډول ليکل کيدی شي او بس٠ کيدی شي د ګڼونو پروتځاي بدل وي، خو ضريبونه همغه دي)) ډول د لومړنيو ګڼونو ځل په ځير ليکل کيدی شي٠

اوبی : ښوونه د n په لور ايندکشن له لارې مخ ته بيايو (برخه ۸ دې ودې کتل شي) د $n = 1$ لپاره باور لري، که. لکه معمول ، 1 د طبيعي ګڼونو د تش(خالي) ځل په ځير تعريف کړو. له دې امله دې $n > 1$ وي او جمله دې د ټولو طبيعي ګڼونو $< n$ لپاره ښوول

(c) ketabton.com: The Digital Library

شوي وي. موږ اوس ټول د n پرویشونی $t > 1$ په نظر کي نیسو. کم له کمه یو داسی ګڼ شته لکه n . که p د دې پرویشونو کوچنی پرویشونی وي، نو p لمړی ګڼ دی. په بل ډول به نو بیا p یو پرویشونی q لرودی د $1 < q < p$ سره، او دا چی q د n پرویشونی وي، نو دا به د p تعریف رد کړي. دا چی $n / p < n$ د ایندونکشن نیوني په بنسټ $\frac{n}{p}$ د لمړي ګڼونو د ځل په څیر لیکل کیدی نو په همدې ډول پخپله n هم.

وي دې $n = p_1p_2..p_r = p'_1p'_2...p'_s$ د n دوه ډوله د لمړیو ګڼونو د ځل په څیرلیکنه . له $p_1 \mid p'_1...p'_s$ اوس لاس ته راځي $p_1 \mid p'_i$ د یو i د $1 \le i \le s$ سره . د نمرې بدلولو له لارې دې وي $p_1 \mid p'_1$. داچي بیا $p_1 = p'_1$ باور لري، نو لاس ته راځي $p_2...p_r = p'_2....p'_s$ ، له کومو چی د ایدکشن له نیوني لرو $r - 1 = s - 1$ ، پس $r = s$ او (او د ترتیب بدلون) هم $p_i = p'_i$ له $2 \le i \le r$ لاس ته راځي .

پای.

د بنسټیزې جملی د ګټور استعمال لپاره لاندې جمله ده

جمله : هر طبعی ګڼ n په ټیك یو ډول په لاندې فورم انځوریدلی شي $n = \prod_p p^{\nu_p}$ لپاره) . (د پای ډیرو p یواځي د پای ډیرو p ($\nu_p = 0$ ، $\nu_p \ge 0$) (ν نیولي شتون لري) چیرته چی p ټولو طبعي ګڼونو کې په جګیدونکې لړی پرلپسې کې ځغلي.

یادونه: د عملي شمیرنې لپاره په هغو ګڼونو چې جګ یې صفر وي تیریدل کیدی شي، لکه : $n = 28 , n = 2^2.7$ د $n = 2^2 . 3^0 . 5^0 . 7$ لپاره

لاس ته راوړنې : $(a,b) = 1$ او $(a , c) = 1$ ، نو هم $(a , bc) = 1$ ، د په خوښه ټولګڼونو a , b , c لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی یا حل : نیولی دې وي چې $(a , bc) > 1$ ، نو بیا به یو لمړنی ګڼ p موجود وي د p/a او p / bc سره، د لیما ۲ . ۲ له مخې به یې باور لرودی p/b یا p/c داد (a,b)= (a,c) = 1 سره تضاد دی.

جمله : a او b دې له صفر مختلف ګڼونه وي او $|a| = \prod_p p^{\alpha_p}$ او $|b| = \prod_p p^{\beta_p}$ د دوي مطلقه ارزښتونو لمړی فاکتورتجزیه د ۲ . ۴ له مخې ، نو a | b هلته او هلته باور لري که د ټولو لمړي ګڼونو p لپاره باور ولري $\alpha_p \le \beta_p$

لاس ته راوړنې : وي دې a او b له 0 مختلف ګڼونه، $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسی $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتورتوټونه (تجزیه) وي. نو باور لري

$$(a,b) = \prod_p p^{\min(\alpha_p, \beta_p)} \ , \ [a,b] = \prod_p p^{\max(\alpha_p, \beta_p)}$$

چیرته چې $\min(\alpha_p, \beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p, \beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بیلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$

او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

یادونه : د لاس ته راوړنې ۲ ځخه سم د لاسه له دوو څخه زیاتو ټولګنونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعمالیدی شي.

یو څو په لمړیو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ایا ناپای زیات لمړي ګڼونه موجود دې که نه اویکلید لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې یو ښکلې ځواب دی چې له هغه ریښه نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راوړني : وي دې a اوb له 0 مختلف ګڼونه $|a|=\prod_p p^{\alpha_p}$ همداسې $|b|=\prod_p p^{\beta_p}$ دې د مطلقه ارزښتونو لمړني فاکتوريزوټونه (تجزيه) وي. نو باور لري

$$(a,b)=\prod_p p^{\min(\alpha_p,\beta_p)}\ ,\ [a,b]=\prod_p p^{\max(\alpha_p,\beta_p)}$$

چيرته چې $\min(\alpha_p,\beta_p)$ د دواړو ګڼونو α_p او β_p خوراکوچنی او $\max(\alpha_p,\beta_p)$ خورا لوي په ګوته کوي.

بيلګه : $a = 2124 = 2^2.3^2.59$ او $b = -1764 = -2^2.3^2.7^2$ نو لرو $(a,b)=2^2.3^2 = 36$ او $[a,b] = 2^2.3^2.7^2.59 = 104076$

يادونه : د لاس ته راوړنې ۲ څخه سم د لاسه له دوو څخه زياتو تولګڼونوباندې غ ګ و او ك ګ ز هم استعماليدی شي.

يو ځو په لمړيو ګڼونو اړونده پرابلومونو دې پوښتنو ته چې ايا ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود دې که نه اويکليد لخوا ځواب ورکړ شوی. لاندې يو ښکلي ځواب دی چې له هغه ريښه نيسي:

جمله: ناپاي ډير لومړني ګڼونه شته.

حل(اوبی) : موږ جمله ناسيده يا ناسمه ښايو (۸ –امه برخه دې وکتل شي) او نيسو چې پايډير لمړی ګڼونه $p_1 , p_2 , p_3 , \ldots\ldots\ldots , p_r$ موجود دي. ګڼ $N = p_1p_2\ldots p_r+1$ له 1 لوي دی او له دې امله په يوه لمړي ګڼ p ويشونکی دی. د نيونې له مخې لرو $p = p_i$ د $1 \leq i \leq r$ سره . د $P|N$ او $p \mid p_1p_2\ldots p_r$ له امله لاس ته راځي $p \mid 1$.کوم چې ناشونی دی (ناممکن) له دې امله بايد ناپای زيات لمړي ګڼونه موجود وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : د میلاد څخه پخوا د« اریتوتنس غلبیل» متود څرګندوو، چې موږ د 1 او 100 ترمنځ د لمړي ګڼونو معلومول دي متود له لارې په لاندې توګه څرګند وو

~~1~~ 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~
~~15~~ ~~16~~ 17 ~~18~~ 19 ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~
~~25~~ ~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ 29 ~~30~~ 31 ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~ ~~36~~
37 ~~38~~ ~~39~~ ~~40~~ 41 ~~42~~ 43 ~~44~~ ~~45~~ ~~46~~ 47 ~~48~~ ~~49~~ ~~50~~
~~51~~ ~~52~~ 53 ~~54~~ ~~55~~ ~~56~~ 57 ~~58~~ 59 ~~60~~ 61 ~~62~~ ~~63~~ ~~64~~
~~65~~ ~~66~~ 67 ~~68~~ ~~69~~ ~~70~~ 71 ~~72~~ 73 ~~74~~ ~~75~~ ~~76~~ ~~77~~
~~78~~ 79 ~~80~~ ~~81~~ ~~82~~ 83 ~~84~~ ~~85~~ ~~86~~ ~~87~~ ~~88~~ 89 ~~90~~ ~~91~~
~~92~~ ~~93~~ ~~94~~ ~~95~~ ~~96~~ 97 ~~98~~ ~~99~~ ~~100~~

۳ ۰ ۱ ۰ ۳ - راشنل ګڼونه Rational Nnumbers

(لاتین: عاقلانه یا هوښیار اعداد یا ګڼونه)

د افغانستان په دري ادبیاتو کې داسی ګڼونه او ایراشنلګڼونه کله ناطق د ګونګ اوداسې نورو ګڼونو په نامه یا دیږي، کله یې ماتګڼونه بللي، خوزه دا ښه بولم، چې دا همداسې یانې راشنلګڼونه وبلل شي، که څوک یې هوښیار ګڼونه بولی هم خوښه یی او یا مات ګڼونه ، خو دلته راځیو Ratio nهوښیار په معنا نه بلکه د نسبي په معنا دی۰

یادونه : که / ولرو یانې که ولرو a / b نو دا په دې مانا، چېa په b ویشل کیږي۰ که ولرو$\neq$ نود نابرابروننخښنه ده۰ دا په دې مانا، چې b له 0 سره برابره نه ده۰ د دوه ګڼونود a او b ویش $x = b / a$ د ټولګڼونو په ډیرۍ کې تل هلته شته دی، چې a د b ټولګڼیز څو ځله وي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره، چې بیا هم ویش$a : b$ (دلته هم b پر a ویشل کیږي) کیدونی شي» سره له دې، چې ویش تل په ټولګڼونوکی پیژند نه لري یا تعریف نه دئ یا صورت نه نیسي« باید د ټولګڼونو ډیرئ ماتګڼونو(کسر) ډیرئ‌ته پراخه شي، چې د لومړي ځل لپاره افاده یا ویینه b/a سومبولیک مانا لري، د نوو ګڼونو په څیر نیسو او په ټولګڼونو یې ور زیاتوو، نو هغهٔ ګڼونه، چې لاس ته راځی موږ ورته راشنلګڼونه وایو۰ دلته دا راشنل ګڼ د جوړې په څیر ورکړ شوی دئ

cb / ca هلته باور لري، چې $c\neq 0$ دټولګڼ او $a|b$ د ماتګڼ په څیر ورکړ شوي وي

د راشنلګڼونو ډیرئ، چې په Q سره ښایو د ټولګڼونو ماتګڼو b/a چې $a\neq 0$ او a او b د ټولګڼونو له ډیرئ وي، د ټولګڼونوپراخوالی دئ او ټول د مخه تیر بنسټیز قوانین په کې باور لري او د ویش بنسټیز قانون ته داسې پراخیدلی شي

ټ : د ویش(تقسیم) بنسټیز قانون(دوام)

۲ - د دوه راشنل ګڼونو a، $a\neq 0$ او b لپاره یواځنی راشنل ګڼ $x = b/a$ شته دئ، چې برابرون یا مساوات$ax = b$ پوره کوي

راشنل ګڼونه هم د ورځنیو اړتیاو پر بنسټ منځ ته راغلی

بیلګه :

که شپږ منه غنم په دولسو تنو وویشو، نو د هر تن نیم من غن, راسیږي، چې دا نیم یې

راشنلګڼ دئ، یاني $6 : 12 = 1 / 2 = 1 : 2$ یا $\frac{1}{2}$

دا باید په ګوته کړو، چې راشنل ګڼونه د پای یا ناپای لسمیز ګڼ په څیر لیکل کیدی شي

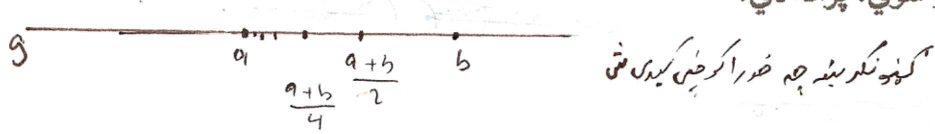
(c) ketabton.com: The Digital Library

٣٠١٠٤ - رييل ګڼونه(Real numbers (reele Zahlen

(فرانسوي: په رېښتوني شته يا موجود)

د ريشنلګڼ په بنسټ هغه ورځني تيوريکی اړتياوي چی د شميرعمليو بی بنديزه (نامحدود) په کار اچولو يا استعمال ته موجود وي حل يا اوبی شوې او همدارنګه عملي اړتياوي چی اندازه کولو ته موجود وي هم حل شوې وي.

د ريشنلګڼ له لارې کيدی شي چی د کرښی اوږدوالی ټيك ورکړ شي يا په همدې مانا : په هرڅومره وړوکی ګڼونکربڼه انتروال کی هم ناپای زيات ګڼونه، چی په ټکو يا نقطو انځور شوي، پراته دي.



د ټولو دې امکاناتو سره سره هم بيا په يوه کرښه کی هر ټکی د ريشنلګڼ په ذريعه نه شي ښودل کيدی يا په بل عبارت د کرښی هر ټکی د ريشنلګڼ په مانا نه دی . دا ګڼونه چی د «ايريشنلګڼونو»په نامه ياديږي، کيدی شي د يوه پريوديکي(periodische) (د ګڼونو کړی نه شليږي) ناپای لسيزمات له لارې وښوول شي.

د بيلګي په توګه د مربع د نيمي(قطر) x اندازه چی د مربع يو اړخ ١ وي نه شي کيدی چي په ريشنلګڼ وښوول شي. د پيتاګوراس د جملی په بنسټ د x لپاره لاندې مساوات لرو : $x^2 = 1^2 + 1^2$, پس $x = \sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریبلګڼ کلیمه یوه ژوره کلیمه ده چې د پوهیدلو لپاره یې «پولی» (لیمس lim) ته اړتیا موجود ده چې په ۱۸ –امه برخه کې به تر څیړنې لاندې ونیول شي.

ډیر اینتروالبندیدل چې په همغه یوه ټکې راځرخي مساوي(ورته) ارزښته (Äquivalent لاتین :مساوي ارزښته) لیدل کیږي

ریبلګنډیری R چې په ریشنلګنډیري د ایریشنلګنډیري ورزیاتول دي چې له ۲ . ۱ . ۱ تر ۳ . ۱ . ۳ برخې پورې ټول بستزقوانین په کې باور لري. د ریبلګڼ له لارې دکرښې ټول ټکي په بر کې نیول کیدی شي. په دې ډول ریبلګنونه ټولې د شمیرلو او اندازه کولو اړتیاوې پوره کوي.

ګورو چې $x^2 + 1 = 0$ د ریبلګڼ حل یا اوبې نه لري. دلته د دې ګڼونو پراخوالي ته اړتیا پیښیږي چې کمپلکسګڼونو ته پراخ شي، او په ۵ –امه برخه کې به تر څیړنې لاندې ونیول شي.

یا دا لاندې په لنډه توګه:

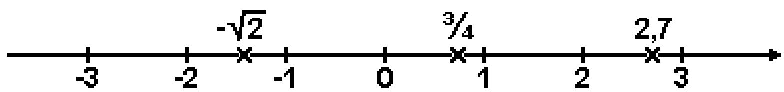
موږ ګڼونه یا اعداد لرو، چې هغه راشنل ګڼونه نه دي یانی که موږ د ۲ ګڼ ریښه(جذر) ونیسو، نو داسې یو ګڼ لاس ته راځي، چې هغه په لسمیزه توګه پای ته نه شي رسیدی یانی پریودیکی (تل بیرته راګرځیدونی یا پسې نور هم پراخیدونی) دي۰ داسې ګڼونو ته ایراشنل ګڼونه وایو۰

تل بیرته راګرځیدنیز (periodi(cal تل بیرته راګرځیدوني ,Period د ګڼونو ځنځیر نه شلیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایراشنل – یا نانسبي عددونه یاګڼونهIrational numbers

د راشنل او ایراشنل ګڼونوټولنی ته ریيل ګڼونه وایو(دا چې ټولنه څه شی دی، په ډیری پوهنه یا سیټتیوري کې به ولوستل شي) .۰ موږ د ګڼونو د ښوولو لپاره لاندې ګڼونکرښه باسو په کومه کې چې له صفر سره پیداینتي-، ټول- راشنل-،اراشنل ګڼونه کښل شوي دي یانې ریل ګڼونکرښه



۳ ۰ ۲ - رابیلشوی(له نورو -) د شمیر قواعد

په دې برخه کې د ریيل ګڼونو لپاره رابیل شوي قوانین څیرو، چې د مخه تیرو قواعدو باندې ولاړ دي۰ دلته درانده ټکی دا لاندې دي:

- په ریيلګڼونو کی څلور بنسټیز شمیرډولونه په ځانګړي توګه په لاندې ډول د نوکانو افادی (وییني) سره شمیرنه (نوکان اینسوول)۰ له زیاتون ګډ فاکتورونه یا څلووني له نوکانو راوستل، د بینومیال فرمولونه۰

- پر صفر ویشنه د ناشونوالی په پام کی ساتنه

- له ماتو (کسرونو) سره شمیرل او په ځانګړي توګه لنډول (واړه کول) پراخول یا غزول او د اصلي ګډ ماتلاندي (مخرج المشترک) جوړول۰ د داسی ماتلاندی(مخرج) چې له ټاکلو او ناټاکلو ترمونو څخه جوړ وي۰

نوموني: کسر ته مات وایو او صورت او مخرج ته موږ ماتباندې او ماتلاندې وایو، چې سملاسي یې په مانا هم پوهیږو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ۱ – جمعه او تفريق (زياتون او کمون)

د زياتون او کمون بنسټيزو قوانينو څخه لاندې لاس ته راځي

$$-(-a) = a \,, \quad a - b = a + (-b),$$

$$(a + b + c \ldots - c - d - \ldots) + (e + f + \ldots - g - h - \ldots) = a + b + \ldots - c - d - \ldots + e + f + \ldots - g - h - \ldots$$

دا دا مانا لري، چې که چيرې د نوکانو دباندې زياتوننخښنه (د جمع علامه) وي، نو د نوکانو څخه ويستلو کې ګڼ خپله مخنخښنه نه بدلوي۰ که د نوکانو د باندی کموننخښنه (منفي نخښنه) وي، نو د ګڼونو له نوکانو ايستلو په حال کی د نوکانو دننه نخښی بدليږي۰ يانی کموننخښنه زياتوننخښنه او زياتوننخښنه کموننخښنه کيږي۰ بيلګه يې لاندې ګورو

$$(a + b + \ldots - c - d - \ldots) - (e + f + \ldots - g - h - ..) = a + b + \ldots - c - d - \ldots .. - e - f - \ldots \ldots + g + h + \ldots$$

په همدې ترتيب کيدی شي نوکان هم ځاي پرځای شي۰

دلته بايد مطلق ارزښت هم په ګوته شي ، چې په ګڼکرښه د صفر څخه د يوه رييلګڼ واټن په ګوته کوي،

د کوم لپاره چې ليکو :

مطلق عدد يا - ګڼ يا بې اړيکو ګڼ (absolut number)

دا په دې مانا، چې د دې ګڼ سره زياتيزه او کميزه نخښنه يا مثبت او منفي نه ليکل کيږي يا يون(واحد) هم ورسره نه وي، دا ټيک او ټيک يو ګڼ ښايج او بس۰

$$|a| = a \;;\; a > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a| = 0 ; a = 0

| a| = -a ; < 0

یانې که a زیاتیزه یا مثبت وي،نو a پخپله لیکواو که a کمیزه یا منفي وي، نو a- لیکواو که a صفر وي نو د هغه لپاره 0 لیکو

۳ . ۲ . ۲ ځل(ضرب)

د ځل لپاره لاندې د مخنخښی قوانین باور لري:

$$(+a)(+b) = +ab,\ (+a)(-b) = -ab\ ,\ (-a)(-b) = +ab,\ (-a)(+b) = -ab$$

که چیرته ډېر نوکبندونه راګرځیدلی وي، نو دا د ځل قانون پل په پل پر مخ ځی

بیلګه:

$$(a+b)(c-d)(e-f-g) = (ac - ad + bc - bd)(e-f-g)$$

$$= (ace-acf-acg-ade+adf+adg + bce-bcf-bcg-bde-)\ bdf+bdg$$

د ځانګړي حالت په توګه د بینوم پیژندل شوی فرمولونه راوړو:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a-b) = a^2 - b^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی کولی شي، چې پورته فرمولونه وښايي، چې ټيک دي.

دا په لاندې ډول کارولکيږي :

بيلګه ۱ . ۳ :

$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

$a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 = (ax - by)^2 = (by - ax)^2$.

$16u^2 - 2v^2 = (4u + 2\ v)(4u - 2\ v)$

۳ ۰ ۲ ۰ ۳ ويش

په پام دې کې ولرو، چې b:a د $a = 0$ لپاره کوم مفهوم نه لري۰ پر صفر ويش ناشونی دی

په ويش کی نوکبندول د زياتون، کمون او ځل په څير ساده نه کيږي۰ په ويش کی د زياتون په ډول ليکل شوی هر توکی په ماتلاندې ويشل کيږي:

بيلګه ۳ ۰ ٤ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc) : 3ab = a - 2b + 4c$$

يا داسې

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{12abc}{3ab} = a - 2b + 4c$$

د $ab \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې لاس ته راوړنې(نتیجې) ته سرې د ګډو څلوونو یا فاکتورونو یا خپلواکنوک څخه وتلو له لارې هم رسیدلی شي:

$$3a^2b - 6ab^2 + 12\ abc = 3ab(\ a - 2b + 4c)$$

له دې څایه کیدی شي، چې د بولینوم وېش بیل شي

بیلګه ۳ . ۵ :

$$(3a^2b - 6ab^2 + 5c) : 3ab = a - 2b \ \text{Rest} \ 5c \ \text{باقي} \Leftrightarrow$$

$$\frac{3a^2b}{3ab} - \frac{6ab^2}{3ab} + \frac{5c}{3ab} = a - 2b + \frac{5c}{3ab} \ \text{لپاره} \ ab \neq 0,$$

د یوه زیاتو یا چمعي وېش په یوه چمعه، کیدی شي د بینوم جکلې له لارې صورت ونیسي

بیلګه ۳ . ۶ : $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{a+b} = a + b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۷ : $(a^2 - b^2) : (a + b) = a - b \Leftrightarrow \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a - b$ لپاره $a \neq -b.$

بیلګه ۳ . ۸ : $\frac{(ax - by)^2}{by - ax} = \frac{(by - ax)^2}{by - ax} = by - ax$ لپاره $ax \neq by,$

دلته هم وېش د پاتې یا باقي سره شوني دی.

بیلګه ۳ . ۹ : $a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = [(a - b)^2 + b^2] : (a - b) = a - b$:

باقي یا پاتې b^2

له دې لاس ته راځی او په ځت

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه ۱ . ۱۰

$$\frac{(a-b)^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}=a-b+\frac{b^2}{a-b} \quad \text{باقي} \quad a\neq b,$$

$$(16u^2-v^2):(4u+\sqrt{2}\,v)=4u-\sqrt{2}\,v \ \text{Rest } v^2 \ \text{باقي} \ \Leftrightarrow$$

$$\frac{16u^2-v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2+v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}=\frac{16u^2-2v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

$$=4u-\sqrt{2}\,v+\frac{v^2}{4u+\sqrt{2}\,v}$$

د $4u \neq -\sqrt{2}\,v$ لپاره

فورمال ور د دوه پولينومونو ويش دی (برخه ۱۲ دي اندول(پرتله) شي):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x^1+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x^1+b_0}=P_n(x):Q_m(x),$$

که د ماتباندي پولينوم درجه د ماتلاندي پولينوم درجی لوي يا مساوي وي($n\geq m$).

مونږ نيسوچی: $a_n\neq 0,\ b_m\neq 0$ او $Q_m(x)\neq 0$.

د دواړو ويشو« توټه ويشو» (پارشيالويش(Partialdivision)) دا دې چی دا

د $P_n(x):Q_n(x)$ ويش په لاندې ډول وليکلی شو:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\text{Polynom } 1+\frac{\text{Polynom } 2}{Q_m(x)},$$

چيرته چی د پولينوم 2 درجه له $Q_m(x)$ درجی څخه کوچنی ده.

دې هدف ته په لاندې ډول رسيږو

۱ – سړی يواځی د جګ نظم غړي $a_nx^n : b_mx^m$ ويشي او له دې سره يوه

غلطي $F(x)$ کوي:

$$Q_{n(x)}:Q_m(x)=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+F(x) \qquad *$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – سړی (*) په ماتلاندې پولینوم $Q_m(x)$ ویشي

$$P_n(x) = (a_n / b_m)\, x^{n-m} Q_m(x) + F(x)$$

او له دې غلطی $F(x)$ ، په لاندې فورم یا ډول لاس ته راځي

$$F(x) = P_r(x) / Q_m(x)$$

د $P_r(x) = P_n(x) - (a_n / b_m)\, x^{n-m}\, Q_m(x)$ سره

چیرته چې د پولینوم $P_r(x) = c_r x^r + c_{r-1}x^{r-1} + .. + c_0$ درجه r د پیل پولینوم $P_n(x)$ له درجې n څخه کم له کمه په یوکوچنی وي . د ګنونو شمیر په

تکیه ویلی شو، چې $P_r(x)$ پاتی پولینوم یا په ساده ډول پاتی (باقي) دی.

۳ – که لا تراوسه د $Q_m(x)$ درجه r له m کوچنی وي نو د ټکو ۱ – او ۲ – توپه ویش په $P_r(x) : Q_m(x)$ استعمالیږي، د لاندنی نتیجی سره

$$P_r(x) : Q_m(x) = (c_r / b_m)\, x^{r-m} + P_t(x)/Q_r(x)$$

چیرته چې د $P_t(x)$ درجه t کم له کمه په یو له $P_r(x)$ درجې کوچنی وي.

د توپه ویش دا عملیه اخر ته رسیږي، که (د پای ډیرو پلونو (قدمونو) اخستلو وروسته د ماتباندې غلطی پولینوم درجه له m څخه کوچنی وي.

بیلګه ۲ . ۱۱ . لمړی دې د توپه ویش ۱ او۲ پلونه (قدمونه، کدمونه) په پراخ ډول د لاندې ویش په بیلګه توضیح شي

$$P_n(x) : Q_m(x) = P_3(X):Q_1(x) = (6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$P_3(x) \quad : Q_1(x) = (a_3 / b_1)x^2 + F(x)$
$(a_3 / b_1)x^2Q_1(x) = 2x^2(3x-2) =$	$(6x^3 + 5x^2-3x+1) : (3x-2) = 2x^2 \quad +F(x)$ $6x^3 -4x^2$
$P_2(x) = P_3(x) -(a_3 /b_1)\, x^2Q(x) =$	$9x^2 -3x +1$
$F(x) = P_2(x) : Q_1(x) =$	$(9x^2 - 3x +1) : (3x - 2)$

بيلګه ۱۳ . ۱۲ : د تېرې ويش بيلګه ۱ . ۱۱د $F(x)$ غلطي ته دوام ورکوو، ترڅو چي د ليکني شکل لنډ شي:

$$F(x) = P_2(x):Q_1(x) = (9x^2-3x+1):(3x-2) = 3x+G(x)$$

$$3x.Q_1(x) \quad = \quad (9x^2-6x)$$

ياباقي پاتي $= \quad 3x+1$

$$G(x)= (3x+1):(3x-2)$$

له دې لاندې نتجه لاس ته راځي :

$$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2)=2x^2+3x + G(x)$$

$$G(x) \; = (3x+1):(ex-2) = \; 11 +H(x)$$

$$Q_1(x) = 3x-2$$

ياباقي $= \quad 3 \quad =$ پاتی

$$H(x) = \; 3 : (3x-2)$$

پس باور لري

$$(6x^3+5x^2 - 3x+1) : (3x-2) = 2x^2+ 3x+1 + 3/(3x-2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تول توپه ویش کیدی شي په لاندې ډول مخ ته یووړ شي .

(1) (4) (7) (۱۰)

$(6x^3+5x^2-3x+1):(3x-2) = 2x^2 + 3x + 1 + 3/(3x-2)$

(2) $\underline{6x^3-4x^2}$

(3) $-9x^2-3x+1$

(5) $\underline{9x^2-6x}$

(6) $3x+1$

(8) $\underline{3x-2}$

(9) 3

دلته (i) د پرلپسې پل اخستلو په مانا ده.

جمله ۳ . ۱۳

(1) (4) (7) (10)

$(18x^4 + 15x^3 + 0x^2 - 2x + 1) : (3x^2 + x - 1) = 6x^2 + 3x + 1 + \dfrac{2}{3x^2 + x - 1}$

(2) $\underline{18x^4 + 6x^3 - 6x^2}$

(3) $9x^3 + 6x^2 - 2x + 1$

(5) $\underline{9x^3 + 3x^2 - 3x}$

(6) $3x^2 + x + 1$

(8) $\underline{3x^2 + x - 1}$

(9) 2

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ۰ ۲ ۰ ٤ ماتشمیرنه (کسرشمیرنه)

د مات m/n کلمه د لومړي ځل لپاره د تولګنونو m,n څخه د ریشنلګنونو انځورونو لپاره تعریف شوې۰ کیدی شي، چې دا کلمهa/b ته، چې a او b رییل ګنونه دي، وغزول شي۰

باید په پام ې ور،چې ماتباندې صفر نه شي..

د بیلګي په توګه:

ویش(a/(b-c تیک هلته مفهوم لري، چې b ≠ c وي۰ ماتګې a/b همدا ګڼ ښایي

لکه a : b او یا $\frac{a}{b}$ ، دلته هم باید b |=0 وي.

په اخر کې باید په ګوته شي، چې مات لاندی – او همدارنګه ماتباندې ګڼ هم هر ماتګې کیدی شي او هم دواړه۰ دا باید دلته هم په پام کې وي، چې هیڅ یو ماتلاندې ګڼ باید صفر نه وي یانی دلته بی له اولنی ماتباندې نور یو ګڼ هم، چې ماتلاندې پورې اړه لري، نه شي صفر کیدی دا موږ د ماتو مات (کسرالکسر) بولو۰

بیلګې:

a : (b/c) = a / (b/c) , b |=0 , c|= 0 ,

(a/b) : c = (a/b) / c b|=0, c|= 0

(a/b): (c/d) = (a/b) / (c/d), b |= 0 , c |= 0 , d |=0

یا په لاندې ډول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{a}{b}:\frac{\frac{a}{b}}{c}, b\neq 0, c\neq 0, ..., \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}, b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0$$

په ځو واره ماتګې کې باید اصلي ماتکرښه څرګنده پیژندونکي وي، چې په دې توګه د هر ډول ناټیکوالی مخه نیول شوي وي۰ په ټولیزه توګه باور لري

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}\neq\frac{\grave{a}}{\frac{b}{c}}$$

هریو ماتګې b|=0, a / b په یوه ګې c |= 0 پراخیدی او همداسې لنډیدی شي

یانې ماتلاندې او ماتباندې په یوه ګې c ځلیدی یا ویشل کیدی شي او دا کړنلار په اصلي

ګې کې تغیر نه راولي

$$\frac{a}{b}=\frac{a.c}{b.c}=\frac{a:c}{b:c}, b\neq 0, c\neq 0$$

د ماتګې لنډوالی ددې لپاره ښه دی، چې ماتګې ساده کړي.

د بیلګې په توګه:

$$\frac{8}{12}=\frac{2}{3}, \frac{ax-ab}{y-ac}=\frac{x-b}{y-c}; a\neq 0, y\neq c$$

باید تل په پام کې ولرو، چې یواځنی فکتور یا ځلوونی یا ضریب لنډیدی شي او نه زیاتوونی د بیلګې په توګه لاندې ماتګې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(a+c):b+c) چې $b \neq -c$ وي نه شي لنډیدی دا $(a+c) : (b+c) = a:b$

باور لري،چې $b |= 0, c = 0 \lor -c |= a, a = b$

پراخوالی یا غزول د دې لپاره اړیین دی، چې ډیر ماتګنونه په ګډ ماتباندې (مخرج المشترک) راوستلی شي، ځکه چې یواځې هغهٔ مات یو په بل زیاتیدی یا یو له بل کمیدی شي، چې ګډ ماتلاندې ولري.

لکه : $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, c \neq 0$

که چیرې پرښت یا برعکس ماتګنونهa / b او c/d د نابرابر ماتلاندې لرونکی سره زیاتوو او یا کموو ، نو دا په ګډ ماتلاندې باید راولو۰ ګډ ماتلاندې د ټولو ماتلاندو ښخه دی۰ د بیلګي په توګه لاندې باور ي دی:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}, b \neq 0, d \neq 0, f \neq 0 \Leftrightarrow bdf \neq 0$$

او دا لاندې

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{bd} = \frac{ad \pm cb}{bd}, b \neq 0, d \neq 0 \Leftrightarrow bd \neq 0$$

تل باید ماتګنونو ګنلو کې ماتلاندې سره ځل نه شي، چې ګډ ماتلاندې لاس ته راولو، دا د ښوونځي په څرګنده بیلګه باندې ښایو

بیلګه: $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{15} - \frac{1}{36}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي، چې اصلي ماتلاندې)ا۰م۰ل (وټاکل شي

= 2.3.5.6.15.36= 97200 ا ۰ م ۰ ل ۰

کيدی شي، چې ا۰م۰ل۰ د لومړنيو ګڼونو ځل په ځير هم وليکو:

2 = 2

3= 3

5 = 5

6 = 2. 3

15= 3 .5

3۰. 3.۰2۰36 = 2

$2^2.3^2.5 = 4.9.5 = 180$

پس د ګډ ماتلاندې لپاره د لوړګڼ يا لوړ جګګڼ يا لوړ طاقت لومړي ځلووني رانيول کيږي۰ چې ګڼل خورا ساده کوي۰

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=$$

$$\frac{90-60+36-30+12-5}{180}=\frac{43}{180}$$

دا چې دا تګلار ځنګه د ماتو په تولیزه افاده استعماليدی شي لاندې بيلګه يې ښايي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۳ ۰ ۱۵ په لاندې بيلګه کې

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}$$

چې يوائې د لاندې لپاره موخه ور دی $a\neq 0 \wedge b\neq 0$

د اصلي ماتلاندې لپاره يانې

$$a.b(ab)(a^2b).(ab^2) = a^5.b^5$$

نه ټاکي، نو له دې امله دی

$a = a$

$b = b$

$ab = a\ \ b$

$a^2 . b = a^2\ \ b$

$ab^2 = a\ \ b^2$

دا ا۰م۰ل۰ په لاندې توګه دی $= a^2\ \ b^2$

له دې امله لرو:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a^2b}+\frac{1}{ab^2}=\frac{ab^2-a^2bab-b+a}{a^2b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ ۰ ۱٦ : د وییني یا افادې

$$\frac{2}{a-2}+\frac{2}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{a+6}{a^2-4}, a\neq 0, a\neq \pm 2$$

لپاره ټاکو

$a-2 = (a-2)$

$a - 1 = (a-1)$

$a+1 = (a+1)$

$a + 2 = (a+2)$

$a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$

$a^2-4 = (a-2) (a+2)$

$(a-2)(a-1)(a+1)(a+2) = (a^2-1)(a^2-4)$

دا پورته لاس ته راوړنه ا۰م۰ل۰- چۀ دا په همدې وخت کې غ ک پ هم دی- په ګوته کوي او له پورته څخه د مخه ورکړشوې افادې لپاره لاس ته راځي:

$$\frac{2(a^2-1)(a+2)+2(a^2-4)-(a-1)(a^2-4)-(a-2)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

$$=\frac{(a+3)(a^2-4)+(a+6)(a^2-1)}{(a^2-1)(a^2-4)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مات ماتباندې صفر دېپه دې ډول په پورته پیل کې ورکړ شوې افاده یا وینه د صفر پیچلې لیکلو بیلګه ده او بس۰

د ځل او ویش لپاره لاندې قاعدې باور دي:

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, b\neq \wedge d \neq \Leftrightarrow bd\neq 0$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}.\frac{d}{c}; b\neq 0, c\neq 0, d\neq 0 \Leftrightarrow bcd\neq 0$$

بیلګه ۳ ۰ ۱۷ الف)

$$1-\frac{1}{1-a\frac{1}{1-\frac{b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a}{\frac{a-b}{a}}}=1-\frac{1}{1-\frac{a^2}{a-b}}=1-\frac{1}{\frac{a-b-a^2}{a-b}}$$

$$=1-\frac{a-b}{a-b-a^2}=\frac{a-b-a^2-a+b}{a-b-a^2}=\frac{-a^2}{a-b-a^2}=\frac{a^2}{a^2-a+b}$$

د $a\neq 0, a\neq b, a^2-a+b\neq 0$

لپاره۰ دا په دې مانا، چې

$$a\neq \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{1-4b})$$

بیلګه ۳۰ء ۱۷ ب:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}}=\frac{\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a-b)(a+b)}}{\frac{a(a-b)+b(a+b)}{(a+b)(a-b)}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a^2-b^2)}\cdot\frac{(a^2-b^2}{a(a-b)+b(a+b)}$$

$$=\frac{a^2+ab-ab+b^2}{a^2-ab+ab+b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=1, \forall\, |a| \neq |b|$$

يادونه: په پورته ليکنه کې د ګڼونو موضوع لږ وغزول شوه، خو لږ څه نور هم بايد راغلي وی۰ دلته اړيين د ګڼونو شميرقوانين دي او د ګڼونو پيژندل۰ د ګڼؤنو اړيکې د خونديونې له لارې

$N \subset Z \subset Q \subset R$

او په دې کنونو کې باوري د شمير قوانين، چې هغه زياتون ، کمون ، ځل ، ويش دی او د ويش په بنسټ ماتشميرنه۰ دا بايد په همغه ساده ډول زده کړای شي۰

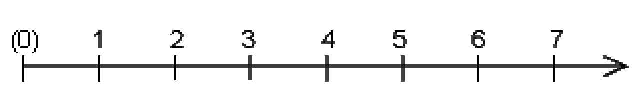
موږ هغه د لومړي وار لپاره اړيين د ګڼونو شميرنقوانين په لاندې توګه رالنډوو، چې د لومړي وار لپاره په همدې پوهيدنه بسيا کوي۰

ګڼونډيری (لنډه ټولګه)

پيداينښتي – يا طبيعي ګڼونډيری

N = {1, 2, 3, 4, 5, ... }.)

په وړانګه د پيداينښتي ګڼونو انځورونه

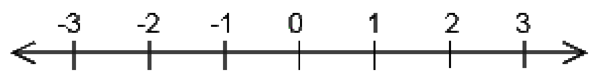


(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولګڼونو ډیری

Z = { ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... }

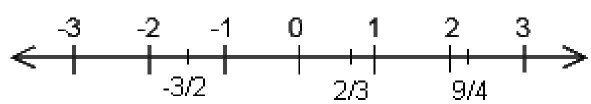
د ټولګڼونو ډیرئ انځورونه په یوه کرښه



د راشنلګڼونو ډیرئ

$$Q = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \mid Z \wedge q \neq 0 \}$$

په ګڼونکرښه راشنلګڼونه د ټولګڼونو تر منځ پراته دي



هر راشنل ګڼ د لسمیز یا پریودیکی ګڼ په څیر لیکل کیدئ شي

د ماتو سره شمیرنه

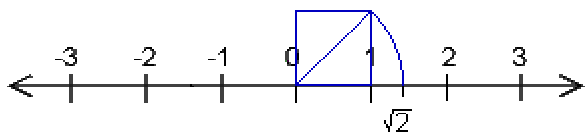
د دوه راشنلګڼونو ترمنځ تل ناپاي زیات نور راشنلګڼونه شته ، دا ګڼ پارته دي، مګر بیا یې هم ترمنځ نور ګڼونه یا ځایونه هم شته، چې ګڼونه په کې ځاي دی او دې ګڼونو ته مو ایراشنل ګڼونه وویل ۰ لکه چې یو راشنلګڼ نه دئ

راشنل او ایراشنلګڼونه ریيل ګڼونه جوړوي

د ریيل ګڼونوډیرئ یا حقیقي اعدادو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ريیلګڼونو ډيرئ د ګڼونکرښی تولو ټکو څخه جوړه ده، لاندې ګڼونکرښه کې روښانه ده



په ریيلګڼونوکې بی له بنديزونو شميرل کړی شو، خو په ماتلاندې کې بايد صفر نه وي او دا د هر ډول ګڼونولپاره باور لري

شميرډولونه لومړئ پوړئ

زياتون يا جمعهAddition:

زياتوونی +زياتونی = زياتون

د زياتون کموتاتيو قانون $a + b = b + a$

د زياتون اسوڅياتيو قانون $(a + b) + c = a + (b + c)$

و زياتون ته د يوه بی اغيزه يا ناپيلی توکی شتون$a + 0 = a$

مخامخ – يا په ښټ ګن يا برعکس عدد$a + (-a) = 0$

کمون:Subtraktion

د زياتون په ښټ کارونه يا عمليه ، ترې کمه وونی – کمه ونی = کمون

$a + x = b \Leftrightarrow x = b - a$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلگه: $7 + x = 10 \Leftrightarrow x = 10 - 7 = 3$

شميرډولونه:

دويمه پوړۍ

ضرب يا ځل: فاکتور (ځله ووني ضريب) · فاکتور(ځله ووني) ځل
د زياتون تکرار، بيلگه. $4 + 4 + 4 = 3\cdot4 = 12$

د ضرب يا ځل کموتايتو قانون $a.b = b.a$

د ضرب يا ځل اسوښياتيو قانون $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

دستريبوتيو قانون $a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$

و ضرب ته د يوه ناپيلي توکي شتون(بي اغيزه توکی يې که وبولو هم بده به نه وي)

$a\cdot1 = a$

په څټ ارزښت يا برعکس قيمت $a\cdot(1/a) = 1$

يو ضرب تيک هلته صفر دئ، چي د صرب يو ضريب صفر وي $a\cdot0 = 0$

ويش:
ويشونی : پرويشونی = ويش (لوستل يې له ښي وکيڼ لورته)

ويش د ضرب يا ځل په څټ کارونه ده) $a:b=c$

$a\cdot x = b \Leftrightarrow x = b:a$

د بېلګې په توګه $z.B.: 4\cdot x = 12 \Leftrightarrow x = 12:4 = 3$

په صفر ويش پيژند نه لري يا تعريف نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ تمرینونه

۱ – د اعدادو یا ګڼونو ډولونه او د د اعدادو انځورونه

۱ ، ۱ – په کوم د اعدادو ډېرئ یا سټ کې د عدد a او عدد bلپاره د شمیرلو
څلور قاعدې یا لارې باور لري؟

یادونه: دلته دې ترې کمونی یا مفروق منه او وېشونش یا مقسوم تل a وي
همداسې دې کمونی یا مفروق او پروېشونی یا مقسوم علیه تل b وي.

a) $a = 8, \quad b = 2$
b) $a = 5, \quad b = 8$
c) $a = 7, \quad b = 0$
d) $a = -6, \quad b = 1$

۱ . ۲ عددونه او یو له بل سره پرتله کړئ او ورکړئ، چې له دې دواړو
کوم لو دی!

a) $a = \frac{13}{17}, b = \frac{169}{289}$
b) $a = \frac{11}{21}, b = \frac{121}{231}$
c) $a = \frac{888}{901}, b = \frac{896}{911}$
d) $a = -\frac{13}{12}, b = -\frac{143}{130}$

۱ . ۳ – د اعدادو یا ګڼونو او څخه تفرسق، ضر ب او وېش جوړ کړئ!
ورکړئ، چې دا نتیجې د اعدادو کومو ډولونو پورې اړه لري!

د پوښتنې ۱ ، ۱ یادونه دلته هم باور لري.

a) $a = \pi, \quad b = 5$
b) $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{2}$
c) $a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{3}{2}$
d) $a = 0, \quad b = 1$

۱ . ۴- په دوه ییز سیستم کې لاندې ګڼونه یا اعداد انځور کړئ!

a) 28 b) 47 c) 73 d) 112

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – لاندې رښتوني یا راشنل اعداد د کوټیو کې اچوني یا کوټی وني له لارې په نږدې ۵ ځایونږ تیک پیدا کړئ.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲ . د زیاتیزو او ځلیزو (د جمعې او ضرب) نوکانو وازول

۲ . ۱ – لاندې نوکان واز کړئ

a) $7a - 3b + (-a + 2c) - (3c - 6b) - (6a - 3c)$
b) $5a + [7c - (2a - 3b)] - (4c - a + b)$
c) $7a - [3a - (7 + 5b)] + [a - (4 - 6b)] - (2a + 7b)$
d) $8a - \{a + [(3a - 2b) - (5a + 3b)] - [(-a + 6b)]\}$

2.2. a) $(-a)(b - a - c)$
b) $2a[a - (b - 3a)]$
c) $3(a + b + c) - 5(a + b) - c - 2(b - c - a)$
d) $|a| \cdot (b - 2a) - b \cdot (a + 2b)$

2.3. a) $(2a - b)(9a + 4b)$ b) $(9a - 2b)(7a - 3b)$
c) $(a + b - c)(a - b - c)$ d) $(3a + 2b)(4a - 3b)(5a - 7b)$

2.4. a) $(7a - 5b)(3a + 4b) - (5a - 9b)(4a - b)$
b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
c) $(a + b)(c - d) - (a - b)(c + d)$
d) $(1 - a)(a - 1) - 2(a + 1)(a - 2)$

۳ – د بینوم فرولونه

۳ . ۱ – د بینوم فرمولونه وکاروئ یا استعمال کړئ او د شونتیا سره سم یې ساده کړئ

a) $(-a + 3b)^2$ c) $(-a - b)(a - b)$
b) $(-1 + a)(a + 1)$ d) $(-1 + a)^2 - (1 - a)^2$

3.2. a) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
b) $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $(3a + 2b - 5c)^2$
d) $(a + b - c - d)^2$

3.3. a) $49a^2 + 42a + 9$
b) $25a^2 + 40ab + 16b^2$
c) $169a^2 - 130ab + 25b^2$
d) $9a^4b^2 + 12a^2b + 4$

3.4. a) $(8a - b)^2 - 16a^2$
b) $81a^2 - 16(4a - 3b)^2$
c) $4a + 12\sqrt{ab} + 9b$
d) $(\sqrt{ab} - 1)(-1 - \sqrt{ab})$

3.5. a) $(a + b + 1)(a + b - 1)$
b) $(a + b)^2 + 2a + 2b + 1$
c) $a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$
d) $a^2 + 2ab + b^2 - 4(a + b) + 4$

۳ . ۶ لاندې ويينې يا افادې ساده کړئ، داسې چې د مربع تکميلونې له لارې پوره مربع وې جوړې کړئ!

a) $4a^2 - 12a + 9b^2 - 24b = 0$
b) $16a^2 + 25b^2 - 128a + 50b = 0$
c) $3a^2 - 2b^2 - 2\sqrt{6}\,a + 2\sqrt{6}\,b = 0$
d) $4x^2 + 12xy - 9a^2 + 12ab = 0$

۴ . د مناسبو ضريبونو له نوکانو راوسته له ۴ .
۱ تر ۴ . ۴ پورې پوښتنو کې ورکړ شوې ويينې يا افادې په ضريبونو ټوټه کړئ او تر شوونتيا پورې يې ساده کړئ.

4.1. a) $a + a^2$
b) $-a^2 - a$
c) $8ab + 20b^2$
d) $ab + ac - ad$

4.2. a) $a^2b^2 + ab + ab + 1$
b) $ab - ac - b + c$
c) $3a + 3 - 2a - 2 + 4b(a + 1)$
d) $8(7a - 5b) - 5c(7a - 5b)$

4.3. a) $3ac - 3bc - 2ad + 2bd + 4ac - 4bc - 7ad + 7bd$
b) $a^2b + ac - ab - c$
c) $15ab - 5a - 1 + 3b$
d) $4a^2 + 20ab + 25b^2 - a^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.4. a) $(a^3 - a^2)(2a - 2a^2)$
b) $(-5a - 3b)^2 + (-5a + 3b)^2$
c) $(-5a - 10b)(-3a + 6b)$
d) $(-a - 1)(a - 1) - (a^2 - 1)$

۴ . ۵ – هر ځل د n لوی توان (n=1,2,3,...) له نوکانو راوباسئ!

a) $n^2 + n + 1$
b) $3n^2 - n + 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$
c) $(1 - 2n)^3$
d) $(\frac{1}{4}n^2 + 3n - 1)^2$

۵ – د په نوکانو کې افادو وېش

لاندې وېش سره ته ورسوئ.

دا چې وېش په صفر ناشونی دی، په دې او لاندې ټولو تمرينونو کې دا ا رزښتونه له شميره وباسئ، کوم چې $a,b,...$ يې نه شي نيولی يا اخستلای.

5.1. a) $(10a^2 - 2ab + 16ac) : 2a$
b) $(25ab - 40b^2) : (-5b)$
c) $(28a^3 - 20a^2 + 32a) : (-4a)$
d) $(27a^2b - 63ab^2) : (-9ab)$

5.2. a) $(3a^2 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$
b) $(a^2 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$
c) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$
d) $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

5.3. a) $(35a^2 + 24ab - 15ac + 4b^2 - 6bc) : (5a + 2b)$
b) $(15a^3 + 67ab^2 - 52a^2b - 28b^3) : (5a - 4b)$
c) $(21ax - 15bx + 9cx - 35ay + 25by - 15cy) : (7a - 5b + 3c)$
d) $(12a^2 + ab - 17ac - 20b^2 + 29bc - 5c^2) : (3a + 4b - 5c)$

5.4. a) $(a^3 + b^3) : (b + a)$
b) $(1536b^3 + 375a^3) : (25a^2 + 64b^2 - 40ab)$
c) $(144a^4 - 81b^2) : (27b + 36a^2)$
d) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

5.5. a) $(9a^3 - 7ab^2 + 2b^3) : (3a + 2b)$
b) $(a^2 - 10a - 25) : (a - 5)$
c) $(a^3 - 2ab + b^3) : (a + b)$
d) $(24a^4 - 26a^3 - 76a^2 + 32a) : (4a^2 - 7a - 8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5.6. a) $(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9)$
b) $(2x^2 - x + xy - y^2 + 2y - 2) : (2x - y + 1)$
c) $(13a^2b + 4b^3 - ab^2 + 10a^3) : (2a + 3b)$
d) $(3a^3 + 2a^2 - 7a^2b + 3a - 2ab + 4ab^2 - 4b + 3) : (3a - 4b + 2)$

۶ . ماتشميرنه يا كسرشميرنه

۶ . ۱ – لاندې كسرونه صورت او م خرج يعني د ماتباندې او ماتلاندې د خورا غټ ګډ پروېشوني سره د لومړنيو ضريبونو يا ځلوونو له لارې لنډ كړئ

a) $\frac{6\,732}{20\,196}$
b) $\frac{2\,730}{5\,005}$
c) $\frac{20\,520}{2\,280}$
d) $\frac{69\,069}{138\,138}$

۶ . ۲ – د لاندې اعداد خورا كوچنى ګډ زاتځلى (ذ الاضعافالاقل) پيدا كړئ

په لاندې كې und د او په معنا دى

a) 3, 6, 9, 18, 27, 54 und 81
b) 8, 12, 21, 42, 56 und 84
c) 5, 13, 16, 20, 26 und 42
d) 120, 252, 264, 315 und 616

۶ . ۳ . د برابر نوميزو يا برابرمخرج كسرونو شميرنه

6.3.1. a) $\frac{1}{3}+3\frac{1}{3}+3\cdot\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
b) $\frac{3}{7}-\frac{1-6}{7}+2\frac{1}{7}-7\frac{2}{7}$
c) $10\frac{1}{5}-\frac{4-5}{5}-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{10-1}{5}$
d) $2\frac{2}{26}+\frac{5-3}{13}+3\frac{33}{39}-0\cdot\frac{25}{65}$

6.3.2. a) $\frac{a+1}{a}-\frac{a-1}{a}-\frac{1-a}{a}$
c) $\frac{(a-b)^2}{ab}-\frac{1-2ab}{ab}-\frac{a^2+b^2}{ab}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $\frac{a+1}{b}-\frac{a-b}{b}-\frac{b-a}{b}$ d) $\frac{(a-b)^3}{2ab}-\frac{(a+b)^3}{2ab}$

۶ . ۴ – د نا برابرنومیزو کسرونو جمعه او تفریق، په مخرج یا ماتلاندې کې ضریبونه

6.4.1. a) $5\frac{7}{12}+1\frac{41}{72}+2\frac{17}{24}+9\frac{5}{9}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}+\frac{14}{27}+\frac{71}{81}$

b) $36\frac{14}{39}+19\frac{4}{13}+15\frac{5}{6}-2\frac{19}{72}$ d) $\frac{15}{64}-\frac{77}{96}+\frac{1}{243}-\frac{3-8}{24}+3\frac{1}{1296}$

6.4.2. a) $\frac{b+5c-a}{6}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{4a-5b+7c}{3}$

b) $\frac{a-9}{18}+\frac{a-2}{6}+\frac{5(2a-1)}{12}-\frac{3(a-1)}{8}-\frac{2(3a-4)}{9}$

c) $\frac{16b+3a}{48}+\frac{7a-8b+9c}{24}-\frac{9a+8b+12c}{32}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

6.4.3. a) $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-\frac{a^2+b^2}{2b}-1$

b) $\frac{5a-6b}{30c^2}-\frac{b(5c^2-3a)}{15ac^2}-\frac{a}{4b}+\frac{a(3c^2-2b)}{12bc^2}+\frac{b}{3a}$

c) $\frac{3a^2+8b^2}{6ab}-\frac{a(4b-5c)}{10bc}+\frac{4a-5b}{10c}+\frac{b(3a-2c)}{6ac}$

d) $\frac{4c-3a}{12ac}+\frac{5b-2c}{10bc}-\frac{b^2-c}{4b^2c}+\frac{4b^2-5a}{20ab^2}+\frac{2}{3a}+\frac{a-b}{5ab}$

۶ . ۵ - د نابرابر نومیزو ماتونو(کسرونو) جمعه او تفریق(زیاتون او کمون)، جمعه مخرج یا ماتلاندې کې.

۶ . ۵ . ۱: د a لپاره یو په بل پسې ورکړشوي ارزښت ځای په ځای کړیاو دا داسې لاس ته راغلي ماتونه(کسرونه) سره یوځای کړئ! بیا په ټولیزه توګه د ورکړ شوو کسرونو لاس ته راوړنې ورکړئ او هغه ارزښتونه لرې کړي، چې د a د اخستلو یا نیولو اجازه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}$	د $a=1,2,3$ سره
b) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}$	د $a=3,4,5$ سره
c) $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}-2$	د $a=2,3,4$ سره
d) $\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{(a+1)^2}-\frac{1}{(a-1)^2}$	د $a=2,3,4$ سره

6.5.2. a) $\frac{3a-1}{4a-1}-\frac{3}{4}$

b) $\frac{a-2}{a-3}-\frac{a-1}{a-2}$

c) $\frac{1}{a+1}+\frac{4}{3a+2}-\frac{3}{a+1}$

d) $\frac{10}{2a-2}-\frac{6a}{3a^2-6a}-\frac{9b}{3ab-9b}$

6.5.3. a) $\frac{3ax-3by}{6x^2y-6xy^2}-\frac{5a^2x+5aby}{10ax^2y+10axy^2}$

b) $\frac{6ab+9b}{6ab-6b}-\frac{6ab-4b}{6ab+6b}-\frac{10b^2}{12a^2b^2-12b^2}$

c) $\frac{1}{a^2-b^2}-\frac{2b^2}{2a^4-2a^2b^2}-\frac{b^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2ab}$

d) $\frac{24a^2b-72ab^2}{60a^2b+24ab^2}-\frac{49a^2b-28ab^2}{35a^2b+14ab^2}-\frac{20a-10b}{10a-5b}$

6.5.4. a) $\frac{3a+b}{2a^2+2ab}-\frac{a^2+b^2}{2a^2b+2ab^2}+\frac{2a-5b}{4ab+4b^2}$

b) $\frac{a+2b}{3a^2-3ab}-\frac{1}{2b}-\frac{3b-a}{2ab-2b^2}$

c) $\frac{2a-5}{a+3}-\frac{3a-4}{a+2}+\frac{a^2+6a+10}{a^2+5a+6}$

d) $\frac{5a-2b}{3a+b}-\frac{88a^2+28ab+0,25b^2}{48a^2+7ab-3b^2}+\frac{24a+b}{16a-3b}$

6.5.5. a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{a^2+ab}-\frac{a^2}{ab+b^2}$

b) $\frac{6a-5b}{8a^2+24ab+18b^2}-\frac{2a-b}{36a^2-81b^2}+\frac{3}{12a-18b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{2a+3b}{2ab+b^2}-\frac{4a^2+b^2}{4a^2b+2ab^2}-\frac{5a-b}{4a^2+2ab}$

d) $\frac{9a-b}{6a^2-2ab}-\frac{6a+b}{3ab-b^2}+\frac{1}{2b}$

۶ . ۶: د ماتونو یا کسرونو ضربونه(یا ځلونه):

6.6.1. a) $3\cdot\frac{1}{3}$ b) $b\cdot\frac{1}{a}$ c) $\frac{5}{8}\cdot\frac{8}{5}$ d) $\frac{0}{b}\cdot\frac{b}{c}$

6.6.2. a) $\left(\frac{a}{3b}+\frac{3b}{a}\right)\cdot 3ab$ c) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{3b}\right)\cdot(2a-3b)$

b) $\left(\frac{5a}{6bc}-\frac{6b}{7ac}+\frac{2c}{3ab}\right)\cdot 84abc$ d) $\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

6.6.3. a) $\frac{4a^2-9b^2}{21a^2b+14a^3}\cdot\frac{7a+5ab}{6b-4a}$ b) $\frac{16a^4-a^2}{24a^3+8a^2}\cdot\frac{36a^2+24a+4}{4a+1}$

c) $\frac{a^2+1}{(a+1)^2}\cdot\frac{a^3+a^2+a+1}{(a^2+1)^2}$ d) $\frac{4ab-3a}{9ab-3b^2}\cdot\frac{18a-6b}{4a^2+10ab}\cdot\frac{8ab-6a}{4ab+10b^2}$

۶ . ۷ . د ماتونو وېش:

6.7.1. a) $\frac{2}{3}:3$ b) $a:\frac{1}{b}$ c) $\frac{a}{b}:b$ d) $\frac{0}{a}:\frac{1}{b}$

۶ . ۷ . ۲ : د لاندې وېینو یا افادو برعکس یا په څټ ارزښتونه پیدا کړی.

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{a+1}{b}$ c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ d) $\frac{1}{a+b}$

6.7.3. a) $\left(\frac{a}{2b}-\frac{2b}{a}\right):\frac{a}{a+2b}$ c) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$

b) $\left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right):\frac{1-a^2}{a^2}$ d) $\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.7.4. a) $\dfrac{1-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1}{\dfrac{a^2+b}{b}-\dfrac{a+b^2}{a}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a-1}{a}-\dfrac{a}{a+1}}$

6.7.5. a) $\dfrac{\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{b^2}}$

b) $\dfrac{\dfrac{x^2}{ab}+x\cdot\left(\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}\right)-\dfrac{1}{ab}}{\dfrac{x}{a}-\dfrac{1}{b}}$

c) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$

d) $\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}+\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}+\dfrac{1}{2b}}+\dfrac{\dfrac{1}{16a^2}-\dfrac{1}{2ab}+\dfrac{1}{b^2}}{\dfrac{1}{8a}-\dfrac{1}{2b}}$

6.7.6. a) $\dfrac{a+\dfrac{1}{1-ab}}{1-\dfrac{1}{1-ab}}$

b) $\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-\dfrac{a}{a-b}}}$

c) $1-\dfrac{1}{1-a\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{b}{a}}}$

d) $\dfrac{\dfrac{a+\frac{1}{4}b}{a-\frac{1}{4}b}-\dfrac{a-\frac{1}{4}b}{a+\frac{1}{4}b}}{1+\dfrac{b^2}{16a^2-b^2}}$

۶ . ۸ . لاندې ماتونه یا کسرونه، که ممکن وي، ساده کړئ (که غواړئ د مخکني شکل بدلون څخه وروسته)

6.8.1. a) $\dfrac{35ac-50bc}{7a-10b}$

b) $\dfrac{a-\sqrt{a}\cdot b}{b-\sqrt{a}}$

c) $\dfrac{34ax+51bx-119cx}{2a+3b-7c}$

d) $\dfrac{a^2-ab+ac}{b-a-c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.8.2. a) $\dfrac{ax+bx+ay+by}{a+b}$ c) $\dfrac{91ab+7b+39a^2+3a}{13a+1}$

b) $\dfrac{ab+\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a-\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{2}}$ d) $\dfrac{ax+\frac{x}{b}-\frac{a}{y}-\frac{1}{by}}{\frac{1}{b}+a}$

6.8.3. a) $\dfrac{25a^2-130ab+169b^2}{25a-65b}$ c) $\dfrac{\frac{1}{4}a^2b^2+17ab+289}{\frac{17}{2}\left(\frac{1}{17}ab+2\right)}$

b) $\dfrac{2x^2+8xy+8y^2}{(x+2y)^2}$ d) $\dfrac{25a-20\sqrt{ab}+4b}{ab(\sqrt{a}-0{,}4\sqrt{b})}$

6.8.4. a) $\dfrac{a^4-b^4}{(a+b)^2(a-b)}$ c) $\dfrac{(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2)^2}{ab(a+b)}$

b) $\dfrac{(a+b)^4-(a-b)^4}{a^2+b^2}$ d) $\dfrac{(a^2+b^2)^2(a^2-b^2)^2+2a^4b^4}{a^4+b^4}$

6.8.5. a) $\dfrac{(\frac{1}{9}a^2+b^2+\frac{2}{3}ab)(x^3-27y^3)}{(2b+\frac{2}{3}a)(x-3y)}$ c) $\dfrac{(80-40ab+5a^2b^2)(4-ab)}{64\cdot\left(\frac{ab}{4}-1\right)^3}$

b) $\dfrac{(2x^2-20x+50)(2a-1)(a+\frac{1}{2})}{(1-2a)(2a+1)(25-x^2)}$ d) $\dfrac{(32a^3b^2x-18ax^3y^2)\cdot 3by}{(12ab^2y+9bxy^2)\cdot 2ax}$

6.8.6. a) $\dfrac{(a+b+1)(a+b-1)+(a-b)^2-2\cdot\left(b^2+\frac{1}{2}\right)}{a+1}$

b) $\dfrac{\left(4a+\frac{1}{4}b-2\sqrt{ab}\right)\cdot\left(2\sqrt{a}+\frac{1}{2}\sqrt{b}\right)}{2\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}}$

c) $\dfrac{(a+1)^2-b^2}{a^2+2ab+b^2+2a+2b+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $\frac{(a-1)^2-(b-1)^2}{a^2+b^2+2ab-4(a+b-1)}$

۶ . ۹ . د (-1) سره شمیرنه

الف- ورکړشوی دې وي/ (a(b-c) c . 1-=a ځای په ځای کړئ او داسې لاس ترې راغلي کسر یا مات لپاره مختلف لیکدودونه ورکړئ.

ب – ورکړي دې (a-1)/(5c -3b-a) وي په صورت او مخرج (ماتباندې او ماتلاندې) کې (-1) له نوکانو راوباسئ او دا عدد لنډ کړئ.

پ – کسر یا مات (b-a-)/ (b^2 - a^2) د (-1)سره پراخ کړئ او ساده یې کړئ.

ت- ورکړی دې وي $1-\frac{25a^2-36b^2}{6b-5a}$ په مخرج یا ماتلاندې کې (-1) له نوکانو راباسئ او دا وبینه یا افاده ساده کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

٤ ۰ توان (پوتنځ) او ريښه (جذر) (Potenz , Wurzel Root)

په دې برخه کې د توان او جذر يا ريښې قوانين ترڅېړنې لاندې نيسو، دلته غوره دا ده، چې د کاروني يا استعمال چټکتيا ته پرمختګ (تکامل) ورکړو ۰ دا مشوره کيږي، چې ريښه دې په پوتنځ واړول شي، چې د اکسپوننت - يا ځګعدد يې نسبي يا راشنل وي۰ د دې فورمال ټيک کره د ګڼلو قوانينو په څنګ کې د باوري کيدو لپاره بايد په نيونو(فرضيو) هم ژور فکر وشي۰

د ريښې پيژند د خلاف يا پر ځنډ عمليو مخه بايد نيول شوي وي، چې د هغې له مخې راديکاند (ريښه ويستونی يعنی هغه ګڼ، چې ريښه يی وېستلکيږي يا نيول کيږي،د ريښې نخښې لاندې ګڼ او هم د ريښې ارزښت نامنفي اعداد (ناکميز ګڼونه) وي۰ د توان زړه پورې ريل اکسپوننت (په ځګ) هلته کره دی يا باوري دی، چې د بنسټ لپاره د مثبت عددونو نيونه يا فرضيه شوي وي۰

٤ ۰ ۱ توان (پوتنځPotenz) په ټولګڼيز يا تام عدد په ځګ يل اکشسپوننت

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ٤ ۰ ۱:

د يوه په خوښه ريل ګڼ توان لاندې مورږ د a د خپل ځان سره n- م واره ځل

پوهيږو۰ د دې لپاره ليکو: $a^n = b$ دلته a بنسټ n = 1,2,3,…

اکسپوننت(جګګڼ، لنډ: جګ) او b د پوتنځ يا توان ارزښت بلل کيږي۰

د بيلګي په توګه

$$a = a\ ,\ a^2 = a\ .\ a\ ,\quad a^3 = a.a.a$$

(4,1) د n = 0 لپاره کره ټاکل کيږي $a^\circ = 1$ د $a \mid= 0$ سره

د پيژند يا تعريف پر بنسټ (او د څه بنديزونو په څلورديوالی کې، چې لاندې شوي) ښوول کيدی شي، چې د خوښی يا زړه پورې ريیلګڼونو $a,b \in R$ او $m,n \in N^*$ نامنفی ټولګڼونو اکسپوننت يا جګګڼ لپاره لاندې باورلري

$$a^n.b^n = (a.b)^n;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,2)$$

$$a^n : b^b = (\frac{a}{b})^n = (a/b)^n; b \neq 0;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,3)$$

$$a^n.a^m = a^{n+m};\ldots\ldots\ldots\ldots(4,4)$$

$$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}; a \neq 0, n \geq m;\ldots\ldots\ldots\ldots(4,5)$$

$$(a^n)^m = a^{n.m};\ldots\ldots\ldots\ldots(4,6)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته د توان اړیکې د ټولګنیز مثبت جګڼ یا اکسپوننت لپاره باور لري، کیدئ شي، چی ټولګښونو ته وغزول شي، که چیرې پیژند ورکړو یا تعریف کړو:

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n};n=1,2,3,....,..a\neq 0,..................(4,7)$$

دا پورته د توان قوانین د ټولګنیز جګ(اکسپوننت) لپاره بی بندیزونو یواځې د نه ورکیدونکو رییل بنسټونو یانې د $a \mid= 0$ او $0 = \mid b$ لپاره باور ي دي . په (4,5) کې بیا بندیز $n \geq m$ اړیین نه دی۰

د توان قوانین کیدئ شي په بڼه بدلونکو افادو یا ویینو وکارول- یا استعمال شي۰

بیلګه4 .1

$$[\frac{4a^{-3}b^0}{x^2y^{-1}}]^{-2}=(4abx^{-2}y)^{-2}=4^{-2}a^6x^4y^{-2}=\frac{a^6x^4}{16y^2},abxy\neq 0$$

بیلګه 4 . 2

$$\frac{9^4(a^2\sqrt{ab})^2}{18^2.(3ab)^3}=\frac{3^8.a^4.a.b^2}{2^2.3^4.3^3.a^3.b^3}=\frac{3a^2}{4b},a>0,b\neq 0$$

بیلګه4 . 3

$$\frac{3-a}{a^{m-4}}+\frac{a^6-a^5+2a^3-1}{a^{m+1}}-\frac{2a^2+1}{a^{m-2}}=$$
$$=\frac{a^5(3-a)+a^6-a^5+2a^3-1-a^3(2a^2+1)}{a^{m+1}}=$$
$$=\frac{3a^5-a^6-a^5+2a^3-1-2a^5-a^3}{a^{m+1}}=\frac{a^3-1}{a^{m+1}},a\neq 0,m\in Z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوتنځ زياتون او کمون کې بايد پام وي، چې يوازې د برابر پوتنځ ګڼونه يو له بل سره زياتيدی او يو له بل کميدی شي٠

بيلګه 4 . 4

$$3a^n + 2a^n = 5a^n$$

بيلګه4 . 5

$$4a^{n+1} + 2a^n + 5b^{n+1} - 3b^n - 3a^{n+1} + a^n - 4b^{n+1} + 3b^3 = a^{n+1} + 3a^n + b^{n+1}$$

دې ته بيا ګوته نيسو، چې د بنسټ - او پوتنځ مخنخښې کې دې توپير وشي٠ پوتنځ له مثبت - يا زياتونمخنخښې سره تل مثبت يا زياتيز پوتنځ ارزښت لري، په دې ترڅ کې، چې پوتنځ د منفي - يا کميز بنسټ سره که اکسپوننت جوړه وي مثبت زياتيز او که اکسپوننت ناجوړه وي نو منفي - يا کمون ارزښت لري٠

باور لري:

$$(2a)^{2n} = +a^{2n}, ..., (-a)^{2n} = +2a^{2n}$$
$$(+a)^{2n+1} = +a^{2n+1}, ..., (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}, n \in Z, a > 0$$

۲ ۰ ٤ – ريښه او توان له ريشنل جګ عدد (اکسپوننت) سره

پيژند ٤ ۰ ۲

د يوه نامنفي ګڼ a لپاره n -مه ريښه هغه نامنفي ګڼ b دی، د کوم لپاره چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري: $b^n = a$

د دې لپاره ليکو:

$$b = \sqrt[n]{a}, n = 1, 2, 3, ...(4,8)$$
$$a \geq 0, b \geq 0..............................(4,9)$$

دلته a راديکاند Radikand ، يا ګڼې، چې ريښه (جذر) يې نيولکيږي(موږ دا ريښه نيووني يا ريښه ويستونی بولو) او n دريښې جګ(اکسپوننت) اوb د ريښې ارزښت يا ريښه ارزښت بلل کيږي٠

بايد پردې ټينګار وشي، چې ريښه يوازې د نامنفی راديکاند يا ريښه ويستوني (ريښه نيوني) a ≥ 0 راوستل کيږي يا نيول کيږي او پخپله په لاندې توګه يو نامنفي - يا ناکميز ارزښت لري يانی

$$b = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

د دې کره کوني لپاره لاندې يادونې شوي دي:

۱ – د جوړه ...,n = 2,4,6 لپاره د a<0 سره ريښه b په ريبلګڼونو کې نه شته، کوم ، چې (4,8) پوره کړي

ځکه، چې د b جوړه په توان تل نامنفي يا ناکميز يانې زياتيز ګڼ دی٠

۲ – د جوړه او مثبت - يا زياتيز برابرون $b^n = a$

په ختـه په ريښتوني دوه ريبل اوبيوني ياحلونه لري د بيلګي په توګه $b^2 = 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یانې n = 2 او a = 4 اوبیونې

$$b_1 = 2, b_2 = -2$$

دي٠ د دې لپاره، چې د رادیکاند د شمیرلو کارونې یواځنۍ سرته ورسولی شو، باید د یوې اوبیونې لپاره پریکړه وکړو، نو له دې امله موږ مثبت ارزښت غوره بول

۳ – د ناجوړه . n= 1 , 3 , 5 او a≥ 0 لپاره

$$b^n = a$$

تل یواځني زیاتیز(مثبت) اوبی یا حل لري یانې b≥ 0

۴ – د ناجوړه n او کیمز یا منفي a لپاره $b^n = a$

تل یواځني یو منفی اوبی یا حل لري٠ یانې b < 0 د بیلګي په توګه دا $b^3= -8$ یواځې

اوبی b = -2 لري.

په هر صورت باید د جوړه...n=2,4,6 ګڼونو لپاره a≥ 0,b≥ 0 وغوښتل شي، ځکه چې په بل صورت کې به یا ریښه شته نه وي او یا به یواځنی اوبی نه لري، یانې څو اوبی به شته وي

د ناجوړه یا طاقو,...n = 1,3,5 لپاره کیدی شي، چې له دواړو غوښتنو تیر شو٠ دلته به یواځې تاوان یا زیان دا وي، چې د تولو ممکن حالتونو لپاره به بیل بیل د ریښې د قوانینو غوره کولو ته اړ کیږو٠ له بلې خوا به ریښی د قوانینو ترتیبول د پوتنخ لپاره ، چې پورته ایښول شوي بندیزونه nقوانینو لپاره ستونځمن وي٠ له دې امله د ناجوړه ریښو

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننت غوره کوو او د يواځني يو اوبی لپاره 2- د 8- = b^3 او نه $-2 = \sqrt[3]{-8}$

بلکه $-2=-\sqrt[3]{8}$ ليکو٠ په دې اړوند او د يادو شوو نيونو په بنسټ دې دا لاندې اوبی په ګوته شوی وي

$$\sqrt{a^2} = a, \ldots\ldots\ldots\ldots(4,10)$$

څلوری ريښه يا مربع ريښه $\sqrt{a^2}$ د ټولو حقيقي اعدادو يا - ګڼونو a لپاره تعريف شوي٠ د نامثبت يا نازياتيز ې a لپاره به (4,10) په داسی حال کې، چې د منفي a لپاره به بيا د (4,10) اوبی منفي يا متيز وي، کوم، چې نيونه $b \geq 0$ نفې کوي.

په ځانګړي حالتونوکې به د (4 , 10) بنول شويو حالتونو استعمال لاندې مخامخوالي يا مضاد لاس ته راولي، لکه :

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2, \sqrt{4} = \sqrt{(-2)^2} = -2$$

ياني د 2- = 2 سره٠

د (10 , 4) ټيک داسې ليکل کيدی شي:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \{a, a \geq 0, \ldots\ldots\ldots\ldots(4,11)$$

$$= \{-a \quad , a \leq 0 \qquad (4,11)$$

د ريښې يا جذر له پيژند (9 , 4) , (8 , 4) سره سم کيدی شي، چې لاندې باوري د ريښې قوانين وليکل شي د…. n = 1,2,3 او $a , b \geq 0$ لپاره

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \ldots\ldots\ldots\ldots(4,12)$$

$$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}, b > 0 \ldots\ldots(4,13)$$

$$\sqrt{a}.\sqrt[m]{a} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}} \ldots\ldots\ldots\ldots(4,14)$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a} \ldots\ldots\ldots\ldots(4,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته د (4,15),(414),(413,),(4.12) ترمنځ باید لږ واټن وي، خو کومه ترې ناسمه پوهیدنه نه رامخ ته کوي . دلته پیژندل کیږي، چې د ریښې قوانین د پوتنځقوانینو ته، چې په(4,2) تر (4,6)پورې ورکړ شوي،د پرتلې وړ دي. په رښتیا چې دا د پوتنځقوانینو لاس ته راتلی شي، که پوتنځ د ریشنل اکسپوننت سره په لاندې ډول تعریف شي یا یې لاندې پیژند ورکړ شي.

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m ....(4,16)$$

د... $a \geq 0$, $n = 1,2,3,\ldots$, $m = 1 , 2 , 3\ 4$ لپاره

د بیلګې په توګه (۱٦ ، ٤) په لاندې ډول لیکل کیږي

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{a} = a^{1/n} \cdot a^{1/m} = a^{(1/n)+(1/m)} = a^{(n+m)/n.m} = \sqrt[n.m]{a^{n+m}}$$

دا اړیکې (4,16) کیدی شي منفي ...,$m = -1,-2,-3$ ته هم پراخه شي، چیرته، چې (4,17) په ټینګه - یا کره باور ولري

$$a^{-(m/n)} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, a > 0....................(4,17)$$

بې له بندیزونو د خوښې جګو n او m لپاره د پوتنځقوانین (4, 2) تر (4,6) باور لري، خو یواځې هلته، چې نه ورکیدونو بنسټونو یانې $a>0, b>0$ نیونه شوې وي.

د ریښې شمیرلو لپاره باید اساساً د(4,16) له مخې ریشنل اکسپوننتونه واوړي او له (4,2) تر (4,6) استعمال کړي

اړتیا لرو، چې د پوتنځ او ریښې سره شمیرلو د قوانینو استعمال نیونې تل و ازمایلی شو. په ځانګړي ډول د بنسټ نه منفیتوب کمونوالی یا نامنفیوالی یا مثبتتوب(مثبتوالی یا زیاتونوالی) پریږدو، چې لاندې ناسم پاي کیدډول وښایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{-a}=(-a)^{1/2}=(-a)^{2/4}=\sqrt[4]{(-a)^2}=\sqrt[4]{a^2}=a^{2/4}=a^{1/2}=\sqrt{a}$$

برابرون یوازې د دې ساده حالت $a=0$ لپاره شته دی یا باور لري، د $|a|=0$ یا $a\neq 0$ لپاره a-او یا a منفي دي دا په دې مانا، چې a یا-a پیژند نه لري یا تعریف نه دی۰

د توان قوانین د توان سره شمیرلو، چې راشنل جګ لري، په لاندې بیلګو کې روښانه کوو:

پام: په لاندې بیلګو کې دا تراوسه د شمیر بنسټیز قوانین ټول راغلي، د نو ورسره بلدېدونکو ګرانو لوستونکو ته دې دا روښانه وي، چې د لږ فکر وروسته هرڅه روښانه کیدی شي۰ شمیرنه یې لږ وخت نیسي، که غواړئ پخپله یې یو ځل وشمیرئ۰

بیلګه ٤ ۰ ٦

$$\sqrt[3]{\sqrt{125}}=\{(125)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}=(125)^{\frac{1}{6}}=(5^3)^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}=2,2361$$

بیلګه ٤ ۰ ٧

$$\frac{a^2\sqrt{b}c^{-2}}{\sqrt[3]{a^2}b^{-3}}:\frac{d^2\sqrt{c}}{\sqrt[5]{d}a^{-5}}=\{a^{(2-\frac{2}{3})}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{-2}\}:\{a^5c^{-2}d^{(2-\frac{1}{5})}\}=$$

$$=a^{(2-\frac{2}{3}-5)}b^{(\frac{1}{2}+3)}c^{(-2-\frac{1}{2})}d^{(-2+\frac{1}{5})}=a^{-\frac{11}{3}}b^{\frac{7}{2}}c^{-\frac{5}{2}}d^{-\frac{9}{5}}=$$

$$=\frac{\sqrt{b^7}}{\sqrt[3]{a^{11}}.\sqrt{c^5}.\sqrt[5]{d^9}}=\frac{b^3.\sqrt{b}.c^2}{a^3.\sqrt[3]{a^2}.c^2.\sqrt{c}..d^5.\sqrt{d^4}}$$

بیلګه ٤ ۰ ٨

$$8.\sqrt[3]{343}-4.\sqrt[3]{125}+5\sqrt[3]{8}-5\sqrt[3]{729}$$

$$=8.\sqrt[3]{7^3}-4\sqrt[3]{5^3}+5.\sqrt[3]{2^3}-5.\sqrt[3]{3^6}=8.7-4.5+5.2-5.9=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ . ٩

$$5.\sqrt{63}-2.\sqrt{175}-\sqrt{343}+3.\sqrt{28}$$
$$=5.\sqrt{7.3^2}-2.\sqrt{7.5^2}-\sqrt{7.7^2}+3.\sqrt{7.2^2}=$$
$$=5.3\sqrt{7}-2.5\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+3.2.\sqrt{7}=$$
$$=15.\sqrt{7}-10.\sqrt{7}-7.\sqrt{7}+6.\sqrt{7}=4.\sqrt{7}$$

بیلګه ٤ . ١٠

$$\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}.\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{(a-\sqrt{a^2-b^2}).(a+\sqrt{a^2-b^2})}=$$
$$=\sqrt{a^2-(\sqrt{a^2-b^2})^2}=\sqrt{a^2-a^2+b^2}=|b|$$

د $|a| \geq |b|$ لپاره

د مختلفو شمیرلو لپاره موخور دی، چې مات لاندې کې منځ ته راغلې رینې له منځه یوسو (د ماتلاندې ریشنل کول)۰

که په ماتلاندې کې یوه رینه $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ د فاکتور یا ځلوونې په څیررامنځ ته شي، نو دا د وظیفې لپاره یوازې اړیین ده چې $m < n$ ($m , n > 0$) او $m, n \in Z$ په پام کې راوړو

کارونه یا عملیه په لاندې ډول اجرا کیږي($N^*|= 0$, $a > 0$)

$$Z/N=\frac{Z}{N}=\frac{Z}{N*\sqrt[n]{a^m}}=\frac{Z.a^{1-\frac{m}{n}}}{N*a^{\frac{m}{n}}.a^{1-\frac{m}{n}}}=\frac{Z.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{N*a},.........(4,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ٤ ۰ ۱۱

$$\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}=\frac{3}{2.3^{\frac{1}{3}}}=\frac{3.3^{\frac{2}{3}}}{2.3.3^{\frac{2}{3}}}=\frac{3^{1+\frac{2}{3}}}{2.3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}=\frac{3^{\frac{5}{3}}}{2.3}=\frac{3^{\frac{2}{3}}}{2}=\frac{1}{2.\sqrt[3]{9}}$$

که په ماتلاندۍ کې د څلوری- یا مربع رېښې زیاتون یا کمون وي $N=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ نو ماتلاندۍ له مات $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ سره غزوو او د بینوم فرمول استعمال سره له $a > 0$ او $b > 0$،چې $a\neq b$ وي لاس ته راځي:

$$\frac{Z}{N}=\frac{Z}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}).(\sqrt{a}\mp\sqrt{b})}=\frac{Z.(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})}{a-b},...(4,19)$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۲

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

بیلګه ٤ ۰ ۱۳

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

۴ . ۳ توان(پوتنځ) د حقیقي – یا ریيل جګ (اکسپوننت) سره

دلته دا په ګوته کوو یا دې دا ویل شوي وي، چې د توان ټول قوانین له (4,2) تر (4,7) دې په خوښه حقیقي اعدادو اکسپوننتونو(جګعددونو)m,n لپاره باور لري،طبعاً بې بندیزه ټیک د مثبت بنسټ لپاره. یعنې a,b>0 ، برسیره پردې دې باید توان $a^{\alpha}; a > 0$ د ناریښتوني یا ایراسنل عدد α لپاره تعریف شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که α يو ايراشنل – يا رېښتونی عدد وي، نو موږ د ۳ . ۱ . ۴ برخې سره سم انتروالونو بندولو په بنبټ لرو: $\propto = \{a_{n;}a'_{n}\}$. دلته $a_{n;}a'_{n}$ هوښيار يا راشنل اعداد دي.

بيا نو

$$\beta = \{a^{a_n} ; a^{a'_n}\} \tag{4,20}$$

هم په انتورالونو بندول دي چې غږي يې (۴،۲) لاندې تعريف شوي توانونه دي د راشنل اکسپوننت سره. د هغه موجود په انتروالونو بندولو سره په دې توپير، چې

$$\begin{aligned} 2^1 &< 2^{\sqrt{2}} < 2^2 \\ 2^{1,4} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} \\ 2^{1,41} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} \\ 2^{1,414} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} \\ 2^{1,4142} &< 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} \\ &\vdots \end{aligned}$$

اخرني مساوات په دې معنا دی

نو لرو $$\sqrt[10000]{2^{1412 < 2^{\sqrt{2}} < \sqrt[10000]{2^{14143}}}}$$

٤ ، ۳ تولګه : د a>0, b>0 رييل او $m,n \in N(n \neq 0)$

همدا ډول $m,n \in N(n \neq 0)$ ييلو لپاره باور لري

$$\alpha, \beta \in R$$

$$a^0 = 1, \frac{1}{a^{\alpha}} = a^{-\alpha}, \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} =$$

$$= (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته موضوع تر دې ځايه بسيا کوي، که نور څه مخته راتلل، چې اړيين وو، هغه به بيا په ګډه ورزياتوو

۴ . ۵ . تمرينونه

۱ . د توان کلمه، د توان جمعه او تفريق يا زياتون او کمون

۱ . ۱ – د توان په څير يې وليکئ

a) $(-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1}) \cdot (-a^{-1})$ b) $-\left(\frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}} \cdot \frac{1}{a^{-2}}\right)$

c) $-(b-a) \cdot (a-b) \cdot (a-b)$ d) $-(a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b) \cdot (a^0 b)$

1.2. a) -3^{-4} b) $(-5)^3$ c) $(-2^{-1})^3$ d) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$

1.3. a) $12a^2b - 6ab^2 - 15a^2b + 6ab^2 - 7a^2b$

b) $(3a+2b)x^4 - x^4(2b-3a) + x^4(3a+2b)$

c) $4(a-b)^2 + 2(b-a)^2 - 3(a-b)^2$

d) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 15(a-1)^3 + 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

۲ – د توانو ضرب او وېش د برابر بنسټ سره

2.1. a) $\frac{3a^{n+1} \cdot 6x^{n+7} \cdot 9b^{x+1}}{3x^n \cdot 2b^{x+1} \cdot 3a}$ c) $\frac{a^{x+1} \cdot b^{x+3} \cdot a^{3x-1} \cdot b^{x+3}}{a^{x-2} \cdot b^{3-x} \cdot a^x \cdot b^{x+1}}$

b) $\frac{a^{n+1} \cdot a^{n+1} \cdot a^n}{a^0 \cdot a^n \cdot a^{n-1}}$ d) $\frac{a^{3n-x} \cdot b^{2n+x}}{a^{n+2x} \cdot b^{2n-x}} \cdot \frac{x^{3n+2} \cdot y^{2n-1}}{x^{2n-3} \cdot y^{n+1}}$

2.2. a) $\frac{18x^{a+4}}{2y^{5a+7}} : \frac{4x^{7-3a}}{9y^{8+5a}}$ c) $\frac{42a^2b^3 \cdot x^{n+1}}{36c^3 \cdot y^2 \cdot z^{n-3}} : \frac{70a^3b^2 \cdot x^{n+2}}{54c^2y^4 \cdot z^{n-2}}$

b) $\frac{a^{5x-2y}}{b^{6m-1}} : \frac{a^{4x+y}}{b^{m-2}}$ d) $\frac{45xa^3 \cdot 9y^n(a-1)^2}{9yb^3 \cdot 30x^n(a+1)^2} : \frac{9y^{n-1}(1-a)^3}{24x^{n+1}(1+a)^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ . د توان ضرب او جمعه(زیاتون) د همغه بنسټ سره:

2.3. a) $(x^{5n+3} + x^{4n+5} - x^{3n+4}) : x^{2n+3}$

b) $(143a^4b^5 - 221a^3b^5 - 247a^5b^4) : 13a^3b^4$

c) $(a^{n+1}b^{x-1} + a^nb^x + a^{n-1}b^{x+1}) : a^{n-2}b^{x-1}$

d) $(16a^8 - a^4b^2 + 9b^4) : (4a^4 - 5a^2b + 3b^2)$

د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال.

په لاندې کې x وشمیرئ

۳ . د توان په توانونه، د توانونو ضرب او وېش د برابر جګګڼ یا جګعدد سره، د کمیزو یا منفي اکسپوننتونو سره شمیرنه

3.1. a) $\left(1\frac{3}{4}\right)^2 : \left(2\frac{1}{3}\right)^2$

b) $4^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-4}$

c) $\left(-\frac{1}{a^{-4}}\right)^{-5}$

d) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$

3.2. a) $\frac{18^4(a^2b)^2}{27^3 \cdot (2a\sqrt{a} \cdot b)^2}$

b) $\frac{(6ab)^3 \cdot (5a^2b)^4}{2^4 \cdot 3ab^2 \cdot (25a\sqrt{b})^2}$

c) $\left(\frac{4b^2y^2}{6a^2x^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{8a^3y^2}{6b^3x^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{18b^3x^6}{16a^3y^3}\right)^2$

d) $\left(\frac{45b^2y^3}{24a^3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{6bx^3}{9ay^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{75b^3x^3}{36a^4y}\right)^2$

3.3. a) $\frac{(3a-9b)^2}{81b^2-9a^2}$

b) $\frac{(6a-12b)^2 \cdot (3a+6b)^2}{(6a^2-24b^2)^2}$

c) $\frac{(4a^2-9b^2)^2}{(3a^2-2ab)^2} \cdot \left(\frac{9a^2-4b^2}{2a^2+3ab}\right)^2$

d) $\left(\frac{2xb^3}{3ya^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{15x^2a^3}{8y^3b}\right)^2 : \left(\frac{25x^3b^3}{12y^4a}\right)^2$

3.4. a) $\frac{27x^{-5} \cdot y^{-6} \cdot z^{-1}}{45x^{-4} \cdot y^{-5} \cdot z^0} \cdot \frac{49x^{-2} \cdot y^{-3} \cdot z^{-4}}{42x^{-3} \cdot y^{-4} \cdot z^{-3}}$

b) $\frac{a^{-2} \cdot x^{-4} \cdot y^{-6}}{b^3 \cdot c^{-4} \cdot z^{-5}} : \frac{a^{-3} \cdot b^{-5} \cdot x^{-3}}{c^{-5} \cdot y^6 \cdot z^{-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\dfrac{(ax-ay)^m \cdot (3bx+3by)^n}{(cx^2-cy^2)^{m+n}}$

d) $\left(\dfrac{(x+y)^{3a-4}}{x^{a-1}y^2} : \dfrac{y^{2a-5}}{x^{4a-3}(x+y)^{3-2a}}\right)\dfrac{x^{4-3a}y^{3a-6}}{(x+y)^{a-2}}$

۴ . د کومو شرلیطو لاندې کیدی شي لاندې عددونه د یوه مربع – یا څلوری ریښه وي؟

4.1. a) $+a, -a$ b) $+a^2, -a^2$ c) $+a^3, -a^3$ d) ab

4.2. a) $+(a-b), -(a-b)$ b) $+(a-b)^2, -(a-b)^2$ c) a^2-b^2 d) a^2+b^2

۵ - د ریښو جمعه او تفریق)زیاتوناو کمون)

5.1. a) $6\sqrt{27}+2\sqrt{108}-7\sqrt{75}$

b) $\sqrt{50}+\sqrt{8}-\sqrt{72}+\sqrt{18}$

c) $3\sqrt[4]{256}-4\sqrt{49}-7\sqrt[3]{27}+2\sqrt[5]{32}$

d) $3\sqrt{50}-\sqrt{98}+4\sqrt{288}+14\sqrt{162}-\sqrt{25-9}\cdot\sqrt{2}$

5.2. a) $\dfrac{x(2r^2-4x^2)}{\sqrt{r^2-x^2}}-8x\sqrt{r^2-x^2}$

b) $\dfrac{r(4r^2-3rH)}{\sqrt{4r^2-2rH}}-3r\sqrt{4r^2-2rH}$

c) $2\sqrt{(x-k)^2+x^2}-\dfrac{(2x-k)^2}{\sqrt{2x^2-2kx+k^2}}$

d) $\dfrac{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2-\left(c+\frac{c}{2}\right)^2}{\sqrt{h^2+\left(c-\frac{c}{2}\right)^2}}-\dfrac{h^2+2\cdot\frac{c^2}{4}}{\sqrt{h^2+\frac{c^2}{4}}}$

5.3. a) $\sqrt{1-x}+\dfrac{x+1}{2\sqrt{1-x}}$

b) $\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{3x^2}{(1-x^2)^2\sqrt{1-x^2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}+\dfrac{x}{(x+\sqrt{x^2+a^2})\cdot(\sqrt{x^2+a^2})}$

۶ – د ریښو یا جذرونو ضرب او وېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

6.1. a) $\sqrt{3\cdot 7}\cdot\sqrt{3\cdot 5}\cdot\sqrt{5\cdot 7}$ c) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}:\sqrt{\frac{a^2-b^2}{4}}$

b) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+2ab}{2}}\cdot\sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{2}}$

6.2. a) $(3-\sqrt{2})(2+3\sqrt{2})$ c) $\sqrt{12x^2-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

b) $\sqrt{8+2\sqrt{10}}\cdot\sqrt{8-2\sqrt{10}}$ d) $\sqrt{a^2+a}\cdot\sqrt{ab+b}$

6.3. a) $\left(4^{-\frac{1}{4}}+\left(\frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}}\right)^{-\frac{4}{3}}\right)\cdot\left(4^{-0,25}-(2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}}\right)$ c) $\frac{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}}{\sqrt{a+c}-\sqrt{b+c}}$

b) $\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\frac{3x-3}{2x+2}}$ d) $\frac{\sqrt{(a-b)^2+a^2+b^2-2ab}}{\sqrt{2(a^2+b^2)(a^2-b^2)}}$

۷ – د توان او رينبې رينه وېستنه (حلونه)

.1. a) $\sqrt{0,04^5}$ b) $\sqrt[3]{4200}$ c) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{8}}$ d) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

.2. a) $\sqrt[2n-1]{a^{4n^2-1}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6\cdot b^{12}}}$

b) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6\cdot b^8}}$

.3. a) $\sqrt[3]{(a-b)^3(a+b)^4}$ c) $\frac{4\pi r^3-8\pi r^3}{\sqrt{\left(4r^2-2r\cdot\frac{4}{3}\cdot r\right)^3}}$

b) $\sqrt{\frac{1}{8}a^2+\sqrt{\left(\frac{a^2}{8}\right)^2+\frac{a^4}{8}}}$ d) $\pm\sqrt{\left(\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}\right)^2-\frac{y_1^2x_0^2}{y_1^2-y_2^2}}-\frac{x_0y_1^2}{y_1^2-y_2^2}$

.4. a) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}}}}$ c) $\sqrt{a\cdot\sqrt[8]{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt[3]{a^3\cdot\sqrt{a^2\cdot\sqrt[5]{a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}}}}$ d) $\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[6]{a^4}}}:\frac{\sqrt{a^3\cdot\sqrt[9]{a^7}}}{\sqrt[9]{a^7\cdot\sqrt{a}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ – لاندې ماتونه یا کسرونه داسې شکل ته واړوئ، چې مخرج رېښه نه وي.

8.1. a) $\frac{3}{4\sqrt{3}}$ b) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ c) $\frac{10}{3\sqrt{8}}$ d) $\frac{15}{\sqrt[11]{243}}$

8.2. a) $\frac{a^2}{\sqrt[3]{a^5}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[9]{x^{13}}}$ c) $\frac{y^2x}{\sqrt{x^3y}}$ d) $\frac{ab}{\sqrt[7]{a^2b^3}}$

8.3. a) $\frac{13}{7-\sqrt{10}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{5}+1}$ c) $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$ d) $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$

8.4. a) $\frac{8}{3\sqrt{2}+4}$ b) $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ c) $\frac{6}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ d) $\frac{6}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

8.5. a) $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ b) $\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{8})}{\sqrt{8}+\sqrt{5}}$ c) $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ d) $\frac{4\sqrt{10}-7\sqrt{3}}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

8.6. a) $\frac{7\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}+2\sqrt{5}}$ c) $\frac{\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}}$

b) $\frac{2\sqrt{6}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-3\sqrt{5}}$ d) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ۰ لوګاریتم یا لوګاریتموس Logarithmus

په دې برخه کې د لوکاریتم کلمه ترخیړنې لاندې نیسو او د لوګاریتم د قوانینود استعمال اسانتیاوې، چې په کره یا په کلکه یې په نیونو (فرضیو) پاملرنه شوې وې څیړو۰

۵ ۰ ۱ د لوګاریتم کلمه

موږ په دې برخه کې لوګاریتم تر څیړنې لاندې نیسو، د لوګاریتم د قوانینو اسانتیاوې څیړو ، چې په نیونو یا فرضیو کې باید پوره پاملرنه شوې وې ۰د لوګاریتم $c = \log_b a$ پیژند لپاره د یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد a یوه زیاتیز ـ یا مثبت عدد b ته چې $b \neq 1$ او د لوګاریتم بنسټ بلل کیږي له لاندې برابرون یا مساوات څخه مخ ته ځو د په خوبنه c لپاره

$$b^{c} = a\ ; a > 0; b > 0; b \neq 1 \qquad (5,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a او b له مخه ورکړ شوي وي، نو د برخی ٤ سره یواځنی تاکلی دی۰ که a او b له مخه ورکړشوي وي، نودپورتنیو نیونو سره یواځنی رییل ګڼc شته دی، چې برابرون(4,1) پوره کوي۰ دې ته د a لوګاریتم وایود b پر بنسټ:

پیژند ۵ ۰ ۱:

د ریلل مثبت ګڼ a لوګاریتم لاندې، چې له یوه سره نابرابر بنسټ bولري، هغه ریلل ګڼ c پوهیږو , له کوم سره، چې bد هغه په توان یا پوتنځ کړو او ګڼ a ترې لاس ته راشي۰ لکه (5,1)

د دې لپاره لیکو:

$$c = \log_b a; a > 0; b > 0; b \neq 1,.............(5,2)$$

(5,1) او (۲ ۰ ۵) یو ارزښت لري د دې لپاره، چې د لوګاریتم قوانین له (5,2) سره سم لاس ته راوړو، نو د(5,1) ته بیرته ورګرځو۰ دا به په لاندې بیلګه کې روښانه شي،په کوم کې چې له a,b,c څخه تل دوه ګڼونه ورکړ شوي دي

بیلګه ۵ ۰ ۱

۵ ۰ ۱ الف : له $2^x = 16$ لرو x=4 ، ځکه، چې $16 = 2^4$

ب له $3^x = \frac{1}{9}$ څخه لرو x=-2 ، ځکه چې $3^{-2} = 1/3^2 = 1/9 = \frac{1}{9}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۲ الف: د $2 = \log_x 36$ x²=36 سره یو ارزښت لري، نو لرو x=6

ب : د $-6 = \log_x \frac{1}{36}$ $x^{-6} = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$ سره یو ارزښت لري،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو $x = 2$

۵ ۰ ۱ ۰ ۳ الف : د $x = \log_5 125$ سره، يوارزښت لري، $5^x = 125 = 5^3$

نو $x = 3$

ب: د $x = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{16})$ $(\frac{1}{2})^x = 1/16 = (1/2)^4$

سره يو ارزښت لري، نو لرو $x = 4$

۳ ۰ ۱ ٤ الف د $5 = \log_3 x$ $3^5 = x$ سره يو ارزښت لري، نو $x=243$

ب : د $-5 = \log_2 x$ $2^{-5} = x$ سره يو ارزښت لري، نو لرو $x = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

۵ ۰ ۱ ۰ ۵ الف $2 = \log_x(-6)$ تعريف نه دی يا پيژند نه لري۰

ب : $x = \log_{-5} 125$ پيژند نه لري يا تعريف نه دی

پ: $\log_1 x$ پيژند يا تعريف نه دی

له (5,1) او (5,2) څخه لاس ته راځي

$$a = b^{\log a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,3)$$

$$\log_b 1 = 0, \log_b b = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,4)$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځانګړي بنسټ لپاره لاندې سومبول کارولکېږي

$b = e = 2,71828 \Leftrightarrow b = 10$

$$\log_{10} a = \log a, \log_e a = \ln a, ...(5,5)$$

د lga لوګاریم ته لسیز لوګاریتم وایي او lna ته پیدایښتي یا طبیعي لوګاریتم وایي(e وروسته څېړو) زیات وخت د لشمیز لوګاریتم لپره داسې هم لیکو:

$$c = \log a \qquad (5,6)$$

که سومبولlog څو واره رامنځ ته شي، نو په پام کې دې وي، چې په خوښه، مګر همغه بنسټ باید وکارول شي۰

۵ ۰ ۲ د لوګاریتم قوانین

د لوګاریتم د پېژند سره سم د (5,1) او(5,2) له مخې کیدی شي د پوتنځ د قوانینو(5,3) تر(5,7) په مرسته لاندې لوګاریتم قوانین رابیل کړای شو، کوم چې په خوښه مګر همغه لوګاریتم بنسټ b |= 0 ، b>0 او د زیاتیز(مثبت) x> 0 , y > 0 لپاره باور لري

$$\log(x.y) = \log x + \log y, ...(5,7)$$

$$\log \frac{x}{y} = \log x - loy, ...(5,8)$$

$$\log x^a = a \log x, a \in R, ...(5,9)$$

$$\log \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log, n = 1, 2, ..., ...(5,10$$

د پوتنځ قوانینو له مخې د دې فرمولونو راوستل یو د وړاندیز وړ د لوګاریتم ژورې څیړنې لپاره تمیرن ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې په توګه له (۷ ، ۵) همداسې

$$\log_b(x.y)=\log_b x+\log_b y,..........................(5,11)$$

څخه په لاندې ډول او له (5,2)،(5,1) څخه لرو

$$c_1=\log\ \ x, c_2=\log_b y, c=\log_b(x+y),.................(5,12)$$

د لاندې سره یو ارزښت لري

$$b^{c_1}=x, b^{c_2}=y, b^c=x.y,..............................(5,13)$$

له(5,13) او د پوتنخ قانون(4, 2) پر بنسټ لرو :

$$b^c=x.y=b^{c_1}.b^{c_2}=b,\Rightarrow c=c_1+c_2,.....................(5,14)$$

او له (5,11) همداسې د(5,7) ښوونه د (5,12) له امله د لوګاریتم د (5,7) تر(5,10)

قوانینو کیدی شي د پیچلي لوګاریتم له افادې څخه د لوګاریتم ساده بنستیزې افادې ته بیرته راوګرځو اوپه ښټ۰

بیلګه ۵ ۰ ۲

$$\log\frac{2\sqrt{a+b}\,a^3b^2}{\sqrt[3]{c}(a+c)^2}$$

$$=\log 2+\frac{1}{2}\log(a+b)+3\log a+2\log b-\frac{1}{3}\log c-2\log(a+c)$$

بیلګه ۵ ۰ ۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log(a+b)+2\log(a-b)-\frac{1}{2}\log(a^2-b^2)$$
$$=\log\frac{(a+b)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}=\log[(a-b)\sqrt{a^2-b^2}]$$

اوس باید وښایو، چې تر کومو شرایطو لاندې دا اړیکې باور لري۰

په بیلګه ۵ ۰ ۲ کې په کینې اړخ کې لوګاریتم ځاي لري، چې د ټولوa,b,c تعریف دئ او لاندې برابرون پوره کوي یا ډکوي:

وي دې$a+b>0$ (د دې لپاره ، چې ریښه تعریف وي او صفر نه شي، ځکه، چې بیا لوګاریتم اوبی یا حل نه لري۰

وي دې$c>0$ (د دې لپاره چې ریښه تعریف او ماتلاندې صفر نه شي)

وي دې $a+b\neq 0$ (د دې لپاره، چې لوګاریتم تعریف وي)

وي دې $b\neq 0, a>0$ (د دې لپاره، لوګاریتم تعریف وي)
د کینې اړخ لوګاریتم په ځانګړي ډول د $a = 2 . b = -1 , c = 1$ لپاره تعریف دئ۰ په ښي اړخ کې ولاړ برابرون شکلبدلون یا ځیره بدلون ریښتونی کیدی نه شي، ځکه چېLog بې ځایه دئ ۰ د دې لپاره، چې د ځیرې بدلون ریښتونوالی ممکن شي، باید د $b\neq 0$ پر ځاي په ټینګه یا کره،$b>0$ وغوښتل شي ۰

په بیلګه۵ ۰ ۳ کې کینه خوا یواځې هلتهموخه وره ده، چې وي:

$$a+b>0, \quad a-b>0$$

نو بیا$a^2-b^2 = (a+b)(a-b)> 0$ او په دې بیلګ کې رامنځ ته شوي ټول لوګاریتمونه هم تعریف دي۰ دا اړیکې د ټولو a ، bلپاره هم باور لري،د کومو لپاره چېپورته نابرابرون ډک وي۰ دا کیدی شي$a > b$, $a > -b$ له امله هم و$a > |b|$ ته راغونډ شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته دي هم ګوته نیولې وي، چې لوګاریتم په یوه بنسټ b یوه بل لوګاریتم یوه په خوښه بل بنسټd ته د شمیراوړون د شمیرنې اړول کیدی شي $(b>0, b\neq 1, d>0, d\neq 1, a>0)$

د(۵،۳) له مخې باور لري $a = b^{\log_b a}$

د دې برابرون لوګاریتم نیول و بنسټd ته لرو:

د $\log_d a = \log_d b^{\log_b a} = (\log_b a)(\log_d b),\ldots\ldots\ldots\ldots(5{,}15)$

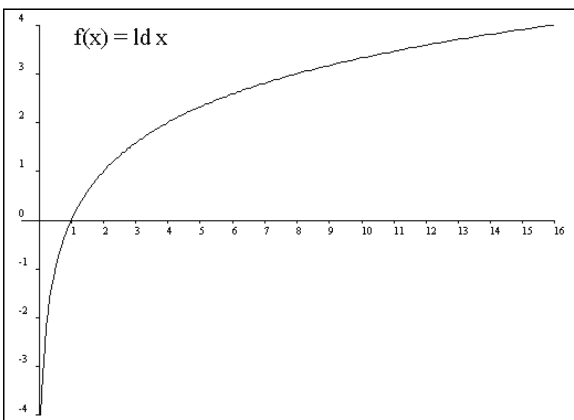
لسیز لوګاریتم اړول په پیداینتي یا طبیعي لوګاریتم او په څټ لپاره لیکو b=10, d = e همداسې b = e , d = 10 او لاس ته راځي :

Lga = (lge)(lna); …………………(16)

Lna=(ln10)(lga) = 2,30429lga;……(17)

$\lg a = (\lg e)(\ln a),\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5{,}16)$

$\ln a(\ln 10)(\lg a) = 2{,}30429\lg a,\ldots\ldots\ldots\ldots(5{,}17)$



د لوګاریتم فنکشن یا بلواک او دیاګرام یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^{\log_b n} = n$$

$$\log_b b^x = x$$

تکرار د نورو تورو سره

د يوه ځل لوګاريتم

$$\log_b (n \cdot m) = \log_b n + \log_b m$$

$$\log_b \frac{n}{m} = \log_b n - \log_b m$$

د پوتنځ لوګاريتم

$$\log_b n^m = m \cdot \log_b n$$

د ريښي لوګاريتم

$$\log_b \sqrt[m]{n} = \frac{1}{m} \log_b n$$

د لوګاريتم يو په بل بدليدل

$$\log_b n = \log_b d \cdot \log_d n$$

د کوما يا لسميزمات نخښۀ وروسته بينارځايونه ó او لسميزسيستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

	binär	dezimal
2^{-1}	0,1	0,5
2^{-2}	0,01	0,25
2^{-3}	0,001	0,125
2^{-4}	0,0001	0,062.5
2^{-5}	0,0000.1	0,031.25
2^{-6}	0,0000.01	0,015.625
2^{-7}	0,0000.001	0,007.812.5
2^{-8}	0,0000.0001	0,003.906.25
2^{-9}	0,0000.0000.1	0,001.953.125

۵ ۰ ۳ ټولګه

لوګاریمتم د اکسپوننشل فنکشن یا بلواک په څټ بلواک دی

$x = \log_b n \quad \Leftrightarrow \quad b^x = n$

د $a,b,x,y,d, > 0$ رییل ګڼونواو $a, b, d \neq 1$ لپاره باور لري:

$$c = \log_b a \Leftrightarrow b^c = a, b^{\log_b a} = a, \log_b 1 = 0, \log_b b = 1, b \neq 1$$

$$\log_{10} a = \lg a, \log_e a = \ln a, e = 2,71828.....$$

$$\log(x.y) = lox + \log y, \log \frac{x}{y} = lodx - \log y,$$

$$\log x^{\alpha} = \alpha, \alpha \in R, \log \sqrt[n]{x} \frac{1}{n} \log x, n = 1,2,3,....$$

$$\log_b a = (lod_b d)(.(\log_d a),$$

$$\lg a = (\lg e).(\ln a) = 0,43429 \ln a, \ln a = (\ln 10).(\lg a) = 2,30259 \lg a$$

۵ . ۴ – تمرینونه

۱ . د د لوګاریتم تعریف

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلوګاریتم تعرف وکاروئ یا استعمالکړئ او x وټاکئ.

1.1. a) $\log_7 49 = x$ b) $\log_3 1 = x$ c) $\log_5 \sqrt[6]{25} = x$ d) $\log_{0,5} \frac{1}{32} = x$

1.2. a) $\lg \frac{1}{10} = x$ b) $\lg 10^{-\frac{1}{3}} = x$ c) $\lg \sqrt[3]{100} = x$ d) $\lg \sqrt{\frac{1}{10}} = x$

1.3. a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x 25 = 2$ c) $\log_x 243 = 5$ d) $\log_x 1024 = 10$

1.4. a) $\log_x 4 = \frac{1}{2}$ b) $\log_x \frac{1}{5} = -1$ c) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2}$ d) $\log_x \frac{1}{32} = -5$

1.5. a) $4^x = 64$ b) $64^x = 64$ c) $9^x = 3$ d) $8^x = 4$

1.6. a) $2^x = \frac{1}{8}$ b) $3^x = \frac{1}{27}$ c) $5^x = 0{,}04$ d) $10^x = 0{,}0001$

1.7. a) $\lg x = 3$ b) $\lg x = -2$ c) $\log_2 x = 6$ d) $\log_{0,5} x = 4$

1.8. a) $\ln x = 2$ b) $\ln x = \frac{1}{2}$ c) $\ln x = -1$ d) $\ln x = 0$

۲ . د لوګاریتم قوانینو استعمال دلوګاریتم

قوانیناستعمال کړئ دو د a,b,c,d,m,n باور لرلو ورشو کره وټاکئ.

2.1. a) $\lg 2^4$ b) $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3$ c) $\lg \sqrt{10}$ d) $\lg\sqrt{\frac{1}{100}}$

2.2. a) $\ln \left(\sqrt{e}\right)^3$ b) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}}$ c) $\ln \sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}}$ d) $\ln \sqrt{\frac{5e}{e^{\ln 5}}}$

2.3. a) $\lg \sqrt[7]{a^5}$ b) $\lg \frac{a^2 b^3}{c}$ c) $\lg \sqrt[3]{\frac{ac^2}{bd}}$ d) $\lg \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a^5 b^3}}$

2.4. a) $\lg (a^4 - b^4)$ b) $\lg (a^2 + b^2)^2$ c) $\lg \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 - b^4}$ d) $\lg \frac{a^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2}$

2.5. a) $\log \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ c) $\ln \frac{\sqrt{a} \cdot b^{-2}}{\sqrt[3]{c} \cdot d^{-3}}$

b) $\lg \sqrt[n+1]{a^n \cdot \sqrt[m]{b^{-1}}}$ d) $\log 2 \sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{a^2 b \cdot \sqrt[4]{ac^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{3}\log(a-b)^{-1}$

b) $\lg a + n\lg(a+b) + n\lg(a-b)$

c) $\lg a - \frac{1}{2}\lg b + \frac{4}{3}\lg c$

d) $\frac{1}{3}\lg(a^2-b^2) - \frac{1}{2}\lg(a-b) - \frac{1}{2}\lg(a+b)$

2.7. a) $\frac{1}{3}\lg a + \frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\lg(a+b) + \frac{1}{2}\lg(a-b) - \lg a - \lg b\right\}$

b) $\frac{1}{2}\lg(a^2+b^2) - \frac{1}{3}\{\lg(a-b)+\lg(a+b)\}$

c) $\frac{1}{3}(\lg a + 3\lg b) - \frac{1}{2}(4\lg c - 2\lg d)$

d) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{b-\sqrt{b^2-a^2}} + \ln\sqrt{a}$

۳ . د لوګاریتم بنسټیز فرمولونو استعمال.

x وشمیرئ.

3.1. a) $x = \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$

b) $x = 2 \cdot 10^{2\lg 2}$

c) $x = 3 \cdot 10^{-2\lg 3}$

d) $x = \left(100^{\frac{1}{2}\lg 49}\right)^{\frac{1}{2}}$

3.2. a) $x = \sqrt{10^{2+\lg 9}}$

b) $x = \sqrt[3]{10^{4-\frac{1}{2}\lg 100}}$

c) $x = \sqrt[3]{10^{\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 32)}}$

d) $x = \sqrt{\sqrt{10}^{\lg 16}}$

3.3. a) $x = \ln\frac{7{,}63}{\sqrt{e^3}}$

b) $x = \ln\frac{0{,}23}{2e^2}$

c) $x = \left\{\left(\sqrt[3]{e}\right)^2\right\}^{\ln 8}$

d) $x = \left(\sqrt{e}\right)^{3\ln 5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٦ ٠ ګونومتري (کونجکچ یا مثلثات (Gonometry

دا برخه هم د ښوونځي له امله یو تکراري خوي لري. ددې وظیفه به داوي چی د کونجکچ چېکتیاته (ګونومتري شمیرنی ته) په ګراد- او لینده کچ، دکونجفنکشن په استعمال د ولاړکونجیز - او عمومي درېګوډیود تریګونومتري فرمولونو په استعمال د تریګونومتري افادو په څیره بدلون ته پر مختګ ورکړي یا پر مخ بوزي. غواړم چی د بنسټیزې هندسي کلیمی او قوانین مو د هرڅه له مخه مخ ته پراته وي . خو سره له دې به هم ددې کتاب لوستونکی د بنسټیزې هندسی سره بلد وي ٠ زه به کوښښ وکړم چی ځنی هندسي کلیمی،کم له کمه په څیره کی ګرانو لوستونکو ته، په مناسب ځاي کی وړاندې کړم یا بهتره په پښتو ونوموم .

١ ٠ ٦ بنسټیزه هندسه

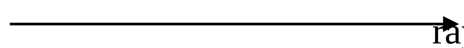
٦ . ١ . ١ ټکی او کرښه point (stright) line

ټکی او کرښه د بنسټیزې هندسی مهمی بنسټیزې کلیمی دي. دا ابسترکتی(خیالي، فکري ، نه لیدیدونکی) کلیمي په خورا ټیك راوړوندود هم نه شي تعریف کیدی، مګر ددوي ترمنځ موجودې اړیکي کیدی شي په شمیرنه کی په خورا زیاتو ډولونو استعمال شي، ٦

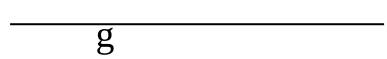
(c) ketabton.com: The Digital Library

سره له دې هم هڅه کيږي چی ټکی او کرښه ليدوړ وګرځول شي لکه څنګه چی په ۴ . ۱ - امه برخه کی پيښ شوي. دلته کرښي په g ښوول شوي او غشی یی ناپای پراخوالی په ګوته کوي. دا د غشي انځورونه دکرښی په انځورونه کی پرېښول کيږي يعني نه انځوريږي، که دا مو و ناريښتياو ته ونه هڅوي ۰ ټکی کيدی شي د دوه کرښو غوځځاي په څير ونيوله شي) څيرې په غور وګوری

وړانګه   ray   A



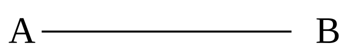
کرښه   g

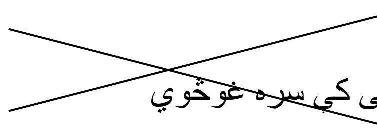


(stright line

بند کرښه یا ټوټه کرښه Line segment

A   B





دوه کرښې په ټکی کې سره غوځوي

د بيلګي په توګه لاندې ويناوې باور یا صدق لري

- ددوه ټکو له لارې یوه کرښه ټاکل کيږي(پورته څيره وګوری)، چی دا کرښه دا ټکي خوندي ساتي   یا پخپل بر کی لري .

- دوه ناغبرګي او په یوه هواره کی پرتی کرښی یو بل ټيك په یوه ټکي کی سره غوځوي   (پورته څيرو کې کتل کيږي)

یوه وړانګه s_1 له یوې لور په یوه ټکي A بنده کرښبرخه ده) (او یوه پایکرښه له دوه ټکو A او B بنده یا راګير کرښه ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

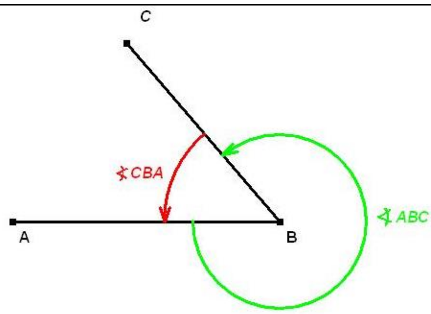
---

٦ . ١ . ٢ کونج angle یا زاویه

که یوه وړانګه s_1 د خپل پیلځاي څخه په S و خپل اخر ځاي s_2 (څیره ۴ . ۲الف) ته یووړه شي، نو دا وهل شوې هواره دننني هواره، s_1 او s_2 پېنی او په همدې ډول د S کونج α (الفا) ککره بلل کیږي.

که څرخون د ساعت نخښي په څټ یا مخامخ وې نو دا څرخونلورمثبت یا زیاتیزه او همداسی کونج مثبت یا ز یاتیز کونج بولو او بل ډول څرخونلور یی منفي- یا کمیز کونج بلل کیږي.

په مخامخ ه کي سور په نخښه شوی کونج ننوتی او زرغون په نخښه شوی کونج وتلی کونج دی

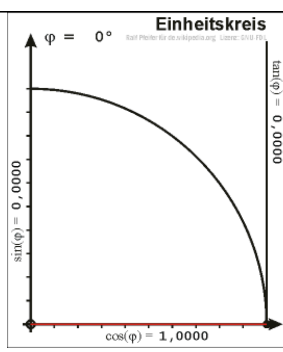


کیدی شي چی یو کونج x په ګراد اندازه شي

$$x = a°$$ (6 . 1)

په داسی حال کی چی ولاړکونج، کوم چی یو په بل ولاړې کرښي $g_1 \wedge g_2$ (او ته دي پام وي) یی جوړوي، له 90° سره مساوي وښایو(لاندي څیره ، که نوربڅیرې و نه کښل شوې) . کیدی شي چی کونج x (ایکس دلته د الفا په ځاي دی، توري پروانه لري، چی کوم وي)په لینده اندازه هم ورکړ شي

$$x = b$$ (6 . 2)



(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته یونګردۍ کې ګورو، چې هر ډول کوجونه کښل او ټاکل کیدی شي

په دې ډول ټاکل شوی ګردۍ لینده په وړانګه(شعاع) ویشل کیږي. له دې لارې x د یوه بي نومه ګڼ په څیر لاس ته راځي، چې د ډیرو ګڼلو لپاره ګټور دی. یوه په لینده اندازه ورکړ شوی کونج x په یوې یوونګردۍ) r = 1 (کی انځوروړ دی، چیرته چی دا د اړوند ګردیلیندې اوږدوالی ښاي (څیره په پورته کې کښل شوې)

په دې پسی یا ددې په تعقیب یو د 360° کونج د یوونګردۍ چاپیرۍ) محیط(په ګوته کوي . له دې امله د ګرادGradmass (درجکچ (او)ګردي-) لیندې اندازې یا لیندیکچ یو په بل بدلون ممکن کیږي.

$$a^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} b = 57,296^\circ b, b = \frac{\pi}{180^\circ} a^\circ = 0,017453a, ...(4,3)$$

پام : په پورته څیره کې هر ډول کونجونه که له ۳٦٠ درجو زیات هم وي کره کیدی ، که ځیرې روښانه نه وو لیکل شوي، چې دا شپږمه برخه ده یا ٤ – مه برخه لیکل شوي وي،نو هغه دې ،نو ٤ دې په ٦ بدل شي٠.

د لاندې بیلګو له لارې دې د کونجورکولو یو څو امکاناته ونومول شي او په همدې ډول دې د »شمیراوړون اړیکی« یاپه ښه توګه د شمیر یو په بل بدلون اړیکی وڅیړل شي.

یادونه : زما شمیرونی یو ډول پرابلم لري او هغه دا چې د دقیقې او ثانیې نخښې هغهسې، چې ورسره بلد یو نه کاړی، دا به راته ګران لوتونکي وبخښي٠

بیلګه .٦. ١ :

کونج “47°12'36 = a دې په لینده اندازه واړول شي. موږ لمړی کونج په دڅیمالو یا لسیزو برخو اړوو، دا په دې مانا چې ورکړ شوې دقیقې او ثانیې دې په ورته لسیزمات افاده شي:

12’=720“

720 = '12 "

(c) ketabton.com: The Digital Library

پس په ټولیزه توګه $720'+36" = 756"$ له دې لاس ته راځی

$1'=(1/3600)°$ (<=)

له دې وروسته په همدې توګه $756.(1/3600)°=0,21°$

له دې لاس ته راځي : $a=47°12'36"=47,21°$

په عمومي توګه باور لري

$$\alpha' = (\frac{\alpha}{60})°, \beta'' = (\frac{\beta}{3600})$$

د(٦ . ٣) پسی باور لري $b=0.017453.47,21=0,826$

دلته ځیرې راځي، خو د دې ځیرو په ځاي به موږ په پورته ځیرو بسیا وکړو، دا چې موږ تراوسه د لږ څه ځمککچ سره بلد یو (د دې لپاره دې زما د ځمککچ کتاب وکتل شي)، نو دا کومې ستونځې نه رامنځ ته کوي٠

بیلګه ٦ . ٢ :

کونج $\frac{\pi}{7}$ دې په درجه کچ یا -اندازه) لسیز او سکساګسیمال (لاتین :یوناني: د بابلیانو په ۶۰ اباد شوی ګنیز سیستم(ځاي ارزښت سیستم) ویشنو (برخو) ورکړ شي. د (۳ . ۴) له

مخی لرو

$a° = 57,296°.(3,14/7)=25,701°$ د $0,701°$ اړولو په دقیقو او ثانیو ورکوي

$$0,701° = 0,701.60' = 42,06', \qquad 0,06' = 0,06.60=3,6"$$

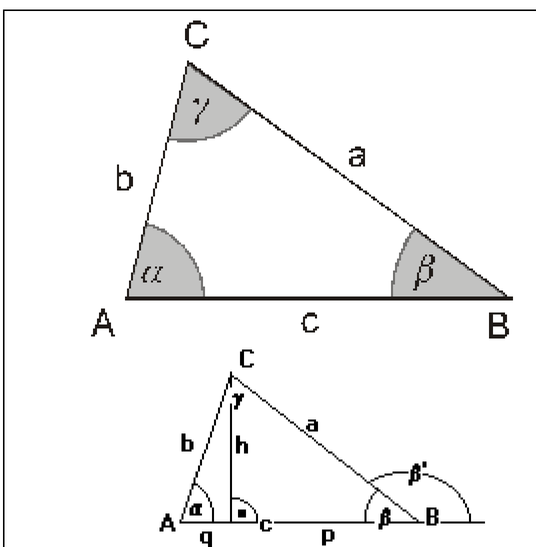
پس داسی دی $\frac{\pi}{7} = 25,701° = 25°42'3,6"$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته داسی لوستل کیږي ۲۵ درجي، ۴۲ دقیقي او ۶ ، ۳ ثانیي

۶ . ۱ . ۳ دریګوډی

یادونه: موږ دلته بیا د نومونو(نومه ونو) د ستونځو سره مخامخ کیږو. هغه هواره چی له کرښو راګیر وي دلته له درې کرښو یا هغه هواره، چې ګوډونه ، کونجونه یا ګوټونه ولري، موږ دا ۰۰۰ کونجي یا۰۰۰ ګوټي او یا ۰۰۰ګوډي بولو. ځموږ ژبه او الماني تر یوې ډیرې اندازی په ترکیبي نومونو کی او یا نورو نومونو ډولونوکی یو بل ته ورته دي او په الماني کی هم دې ته ځانګړي نومونه شته. ماته یو کونج چي له دباندې ورته کتل کیږي او د یوې بندې هواره وي ګوډ مناسب ښکاریږي. موږ په ورځنی یا مروجه ژبه کی وایو ، چی د هغه کلی په ګوډ کی .... دا تخنیکي هم درست دی، ځکه چی دا هم دلته مات دی یعنی ګوډ دی. که یو کونج له دننه وګورو نو هغی ته موږ تل کونج وییلی. که څوك په یوه ګوټه کی ناست وي نو وایي، چه په هغه کونج کی دلته نو بیا ګوډ نه وایي. ما د کتاب په اوږدو کی لمړی ځل د ټولو لپاره کونج کارولی، که ټول مو همغسی سم یا اصلاح نه کړل ، نو فکر کوم چی د ګرانو لوستونکو به ورته پام وي .



په ټولیزه توګه په یوه سطحه یا هواره کی له پرتو کرښو g1 , g2 , g2 څخه یو مثلث یا دریګوډی جوړیږي، چی ګوډونه یی A . B . C ، اړخونه یی a .b .c او کونجونه یی α,β,γ دي (د مثلث دننه کونجونه یا زا ویې او دباندې ګوډونه دي، چې موږ یط په پښتو کې همداسې بولو)) مخامخ څیرې دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جملې باور لري چې بې له ښوونې دلته راوړل کیږي

- په دریګوډي کې د کونجونو زیاتون 180° درجې دی یا π دی

- یو دباندنی کونج د په نه پراته دننني کونجونو د زیاتون سره مساوي ده، له دې امله د یوه دریګوډي د دباندنیو کوجونو زیاتون 360° یا π 2 دی۰

- د یوه دریګوډي د اړخونو نیمي په یوه ټکي کې یو بل سره پري کوي، چې دا په همدې وخت کې د دریګوډي » دروندټکی یا دثقل مرکز « دی. اړخنیمي یو بل په تناسب د ۱ : ۲ پرې کوي یا په پښتو:

د اړخونو ځاننیونه یی۱ :۲ ده) په څیره کې وګورئ) د یوه دریګوډي منځولاړې

یو بل په یوه داسې ټکي کې سره غوڅوي، کوم چې په همدې وخت کې د چاپیر ګردي) هغه ګردئ یا دایره چې دریګوډی په خپل دننه کې نیسي یا بهتره، د دریګوډي خوندیګردئ(منځټکی دئ)۰

د یوه دریګوډی کونجنیمي یو بل په یوه ټکي کې سره پرې کوي، چې دا په همدې وخت کې د دننه ګردئ) ګردئ چې د دریګوډي

په دننه کې ده یا ګردئ یا دایره کې خوندي دریګوډی (منځټکی دئ) لاندې کې بې څیره شته) د یوه دریګوډي جګې یا د ارتفاع کرښې په یوه ټکي کې سره غوڅوي.) څیرې ټولې لاندې کتل کیږي

د هوارې ځمککچ کې غوره ټکي دا لاندې دي :او په دوي پورې لاندې څیرې اړه لري، چې تکرار راځي، خو پروا نه لري۰

د جګیو غوڅټکی Orthocenter **Höhenschnittpunkt** (*H*),

(c) ketabton.com: The Digital Library

(*U*) **<u>Umkreismittelpunkt</u>** circumcenter ·د دباندنی- یا په راتاو گردی منځټکی

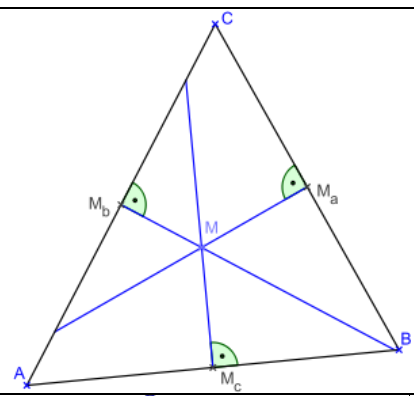
<u>Seitensymmetralen</u>), seid symetry ·د اړخسیومتریو غوڅټکی

(*I*) **<u>Inkreismittelpunkt</u>** inscribed circle, incircle den ·د دننه گردی منځټکی

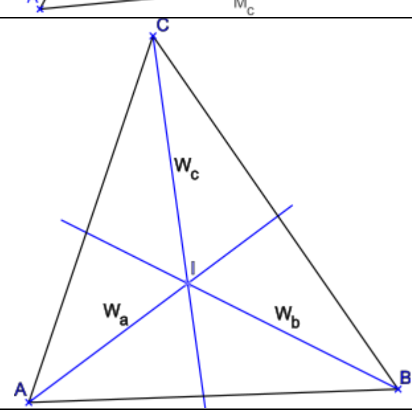
r <u>Winkelsymmetralen</u> · د کونجسیومتري

r (*S*) **<u>Schwerpunkt</u>** centroid · دروندټکی

<u>Seitenhalbierenden</u>) median اړخنیمی·



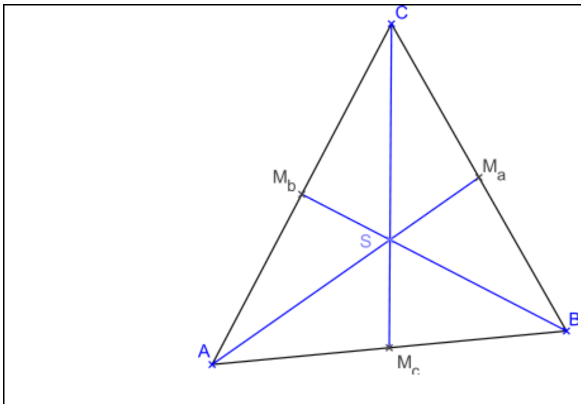
مخامخ خیره کې مثلث یاد دریګوډي په منځ عمود یا - ولاړې کرښې ښایي



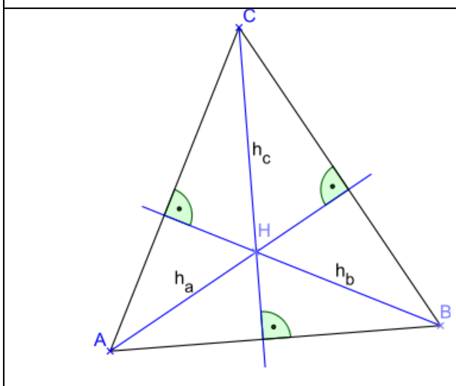
دامخامخ مثلث هغه کرښې ښايي، چې کونج نیموي او موږ یې کونجنیمی (ناصف الزاویه) بولو (په پورته خیره په نیم اړخ ولاړې کرښې دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

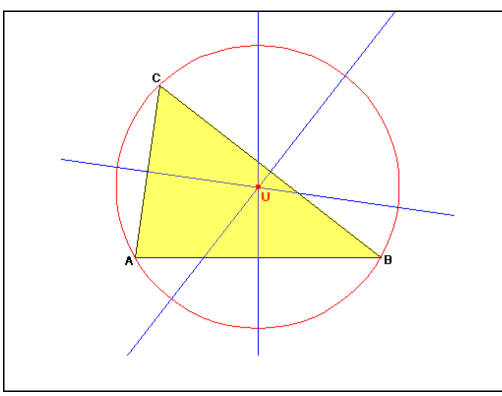
لاندې مثلث کې هغه کرښې دي، چې له کونج څخه اړخ نیموي. موږ يې اړخنیمی یا ناصف الاضلاع بولو.

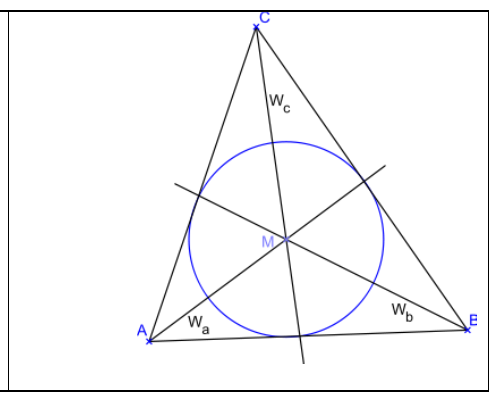


لاندې څېره کې د مثلث هغه کرښې دي، چې له کونج په اړخ ولاړې دي. دا د اړخ جګوالی په ګوته کوي، چې ما جګی یا ارتفاع بللي دي.



په پورته څېره کې کونجنیمی دي ، چې منځ ټکی يې د خوندې ګردی یا دننه ګردی منځټکی هم دی



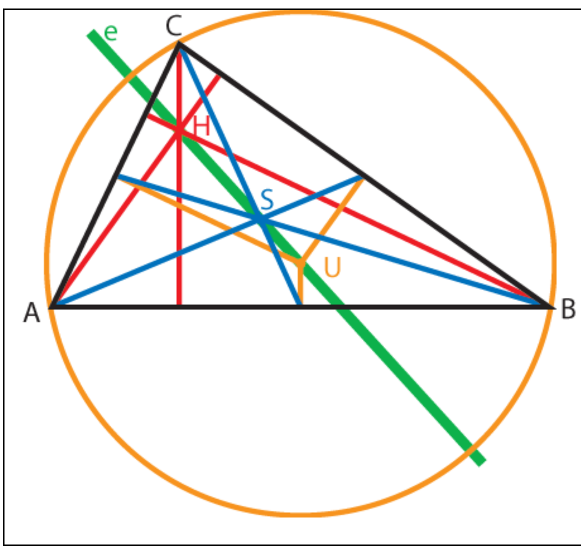


(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته کینه څیره کې د اړخ په نیمه ولاړې کرښې دي، چې غوڅټکی یې د په راتاو ګردی یا چاپېرګردی منځټکی دی۰

دا په یو ډول درې کرښې هرې درې یې په یوه ټکی کې سره غوڅوي۰

که د یوې درېګوډی د منځولاړو په غوڅټکي یوه ګردی داسی ووهل شي، چې د ګردی کرہ درېګوډۍ له یوه ګوډ څخه تیره شي، نو دا ګردی د درېګوډي له نورو دوه ګوډونو څخه هم تیریږي۰ که درېګوډی تیره کونجیزه وي، نو د ګردی منځټکی د درېګوډي په دننه کې پروت دی ، که درېګوډی ولاړکونجیزه وي، نو کونج د ګردی په هیپوتینوز ې یا اوږده اړخ پروت دی (د تالس جمله دې وکتل شي) او که درېګوډی پڅکونجیزه وي، نو منځټکی له درېګوډی دباندې پروت دی۰



که درېګوډی ABC وي ، S دروندټکی، U د چاپیریالګردی منځپکی ، او H د جګیو غوڅپکی وي، نو کرښه په لاندې ځانئیونه یا تناسب پراته دي :دا په لاندې څیره کې کتل کیږي ۰

$$\overline{HS} : \overline{SU} = 2 : 1$$

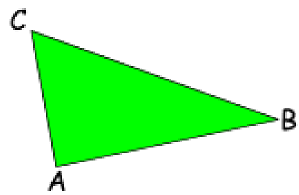
٦ . ١ . ۴ برابرارزښتوالی او ورته والی یا مشابهت Congruence and Similarity

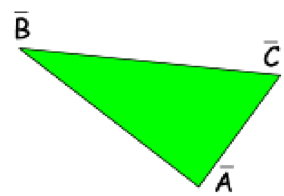
دوه دریګوډي ABC او 'A'B'C یو بل سره کونګروانیځ یا برابر پټووني دي یانې برابرارزښته دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$ABC \equiv A'B'C'$

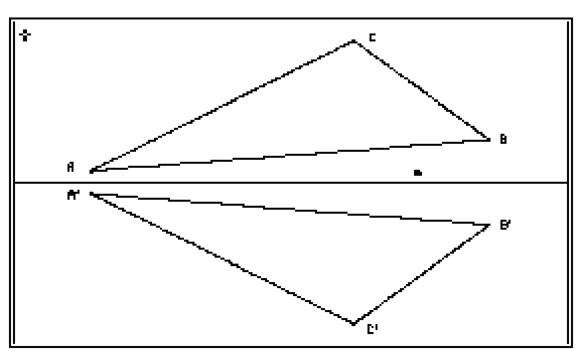
(4.4) که وکښول شي یانې که هرې لورته یوورل شي(وکښول شي) او وڅرخول شي او اینه ونه یا هندارونه يې يو بل پوره پټ کړي يا يو په بل پوره پریوځي (لاندې ځیر)





که دریګوډي سره کونګروانېځ وي، نو باید کم له کمه په دري اصلي توټو (اړخونو او کونجونو) کی یو بل سره مساوي وي

په ځنډ یی هم باور لري S اړخ او W کونج په ګوته کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

جملې: دریکوډي ټیك هلته کونګروائنځ دي چی یو بل سره مساوي شي په

۱ - درې اړخونو کی SSS

۲ - دوه اړخونو او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی SWS

۳ - دوه کوجونو او د لوي اړخ ته مخامخ کونج کی SSW

۴ - یوه اړخ او ددې اړخ دواړه خواو کونجونو کي ,WSW

د دې جملو په ځتې هم باور لري، دا په دې مانا چی که دریګوډي په کونګروائنځ جملو کی ورکړشوو اصلي برخو کی سره برابر وي، نو دا کونګروائنځ دي. د کونګروائنځ جملو په بنسټ کیدی شي په ځانګړي توکه دریګوډیجوړښت سرته ورسول شي، کوم چی د کونګروائنځ جملو کارونی په ځیر لیدل کیدای شي .

د دوه هوارو شکلونو ورته والی (Ähnlichkeit)هلته مخ ته پروت دی، کله چی په همغو یا اړوند درې کونجونو کی یو بل سره برابر وي او د همغو یا اړوند اړخونو تر منځ یی تناسب یا ځاننیونه موجود وي .

دا جملي هلته هم باور لري که د کونګروائنځ له جملو ورته جملو ته ورشو

جمله:

دوه دریګوډي ټیك هلته یو بل ته ورته دي که یو دبل سره برابر وي، په :

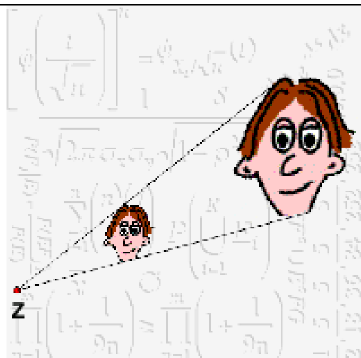
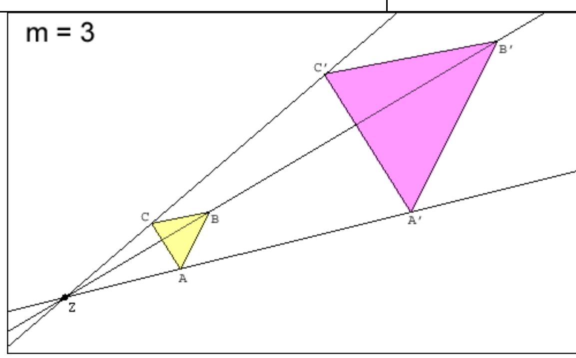
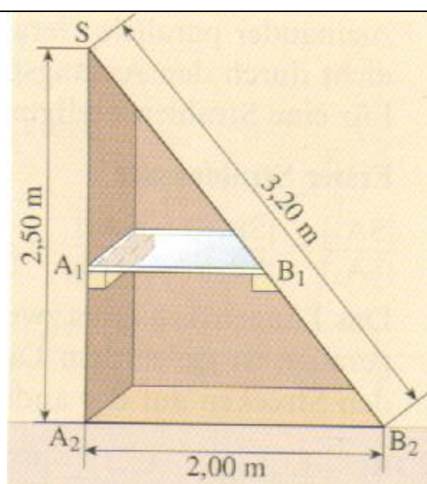
۱ - دري اړخونود اوږدوالي ترمنځ ځان نیونی یا تناسب کی

۲ - د دوه اړخونو د اوږدوالي ترمنځ تناسب او ددې اړخونو ترمنځ کونج کی

۳ - د دوه اړخونو او د لوي اړخ مخامخ کونجونو ترمنځ تناسب یا ځاننیونه کی

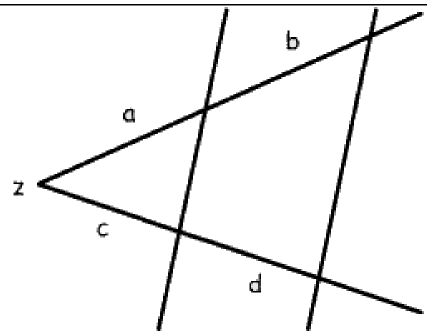
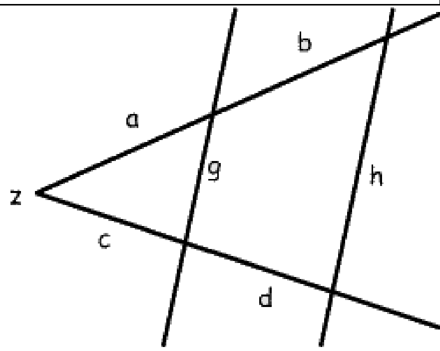
۴ - دوه مساوي پرتو کونجونو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

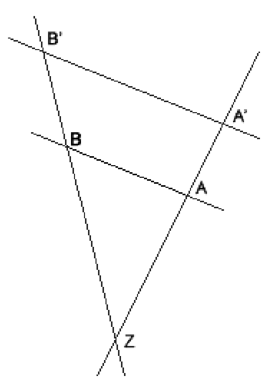
دا مخامخ ځيرې ورته دي ، كه د دې دوه كرښو پاى سره په يوه كرښه وتړى او د يوه اړخ د د په خوښه ټكي سره د مخ ته كرښې سره غبګه كرښه وباسى، نو دوه ورته درېګودې لاس ته راځي	
په لاندې ځيره كې كښل شوي دريګودې ورته دي، دا په دې مانا چي باور لري: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$	
د ورته جملو سره خپلواني جملى د وړانګو جملى دي:	

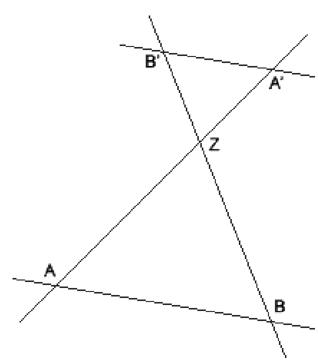
په دې پورته ځيره كې درېګودې يو بل ته ورته دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د وړانګې لومړۍ جمله: دوه له یوه ټکی وتلې وړانګې ، که له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي نو ټوټې يې لاندې اړيکی سره لري۰ $\frac{a}{(a+b)}=\frac{c}{(c+d)}$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$
	د وړانګې دويمه جمله: که له یوه ټکي دوه کرښې وکښل شي او دا بيا له دوه غبرګو کرښو غوڅې شي، نو د ټوټو ترمنځ دا لاندې اړيکی لري، دا ته والي له جملو ده۰ ټکی چې څنګهدي په پام کې نيول کيدی شي او د دې او پورته جملې ترمنځ توپير ته هم پام نيولی شو $\frac{g}{h}=\frac{c}{(c+d)}$ $\frac{g}{h}=\frac{a}{(a+b)}$

يا دالاندې، چې هرڅه يې روښانه دي





(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{ZA'} : \overline{ZA} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$
$$\overline{ZA} : \overline{AA'} = \overline{ZB} : \overline{BB'}$$
$$\overline{ZA'} : \overline{AA'} = \overline{ZB'} : \overline{BB'}$$

$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZA'} : \overline{ZA}$$
$$\overline{A'B'} : \overline{AB} = \overline{ZB'} : \overline{ZB}$$

(دا لاندې د لیکنې له لارې روښانه شوې څیره دې ګران لوستونکي وکاږي)

که درې په یوه ټکي کی پریکیدونکی کرښې g1 , g2 او g3 د دوه غبرګو) موازی(کرښو g4 او g5 لخوا پرې شي، نو د بیلګې په توګه له ۴ . ۱۰ کښل شوي څیرې څخه لاندې اړیکي لاس ته راځي:

OA1 : OA2 = OB1 : OB2 , OA1 : OA2 = A1B1 : A2B2 . 1

دا په دې ماناچی په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځانیوی سره پرتی دي:

A1A2 : B1B2 = OA1 : OB1 = OA2 : OB2 . 2

دا په دې مانا چی: په وړانګو پرتي ورته برخی په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي لکه اړونده، د ککری اندازه شوې برخي چی په وړانګه پرتی دي.

A1A2 : A2A3 = B1B2 : B2B3 , A1A2 : B1B2 = A2A3 : B2B3 - ۳

دا په دې مانا چی: په غبرګو پرتی کرښي په همغه برخوکی یو له بل سره په مساوي تناسب یا ځاننیونی پرتی دي

د وړانګو جملی هم باور لري، که د دوه غبرګو په څیر رامنځ ته شي یا که ککره د غبرګو ترمنځ پرته وي) په دې حالت کی دې وړانګي د کرښو په ځاي بدلی یا ولیکل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۴ . ۳ : د اړخونو a او c او همداسی د کونج الفا څخه دې

يو دريګوډی جوړ شي. لاندې حالتونه تر څيرنې لاندې نيسو

- 1 $a > c$

موږ کاږو $AB = c$ او په ټکي A کونج‌الف

د c په کچه کاږو. په B يو ګردښلينده کاږو د a

په کچه چې د الفا ازاده پښه په ټکي C کې غوڅوي)

څيره دې ګران لوسونکی پخپله وکاږي، روښانه ده

- 2 $a < c$

دلته درې امکاناته شته دیځ(د دې درې امکاناتو څيره وکاږۍ)

۲ . ۱ : د ګرديلينده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه هغوټکو کې پرې کوي،
په کومو کی چی اوبی يواځنی نه دی٠

۲ . ۲ : ګردښلينده د α ازاده پښه لمسوي٠

۲ . ۳ : ګردښلينده د α اندازه پښه نه غوڅوي .

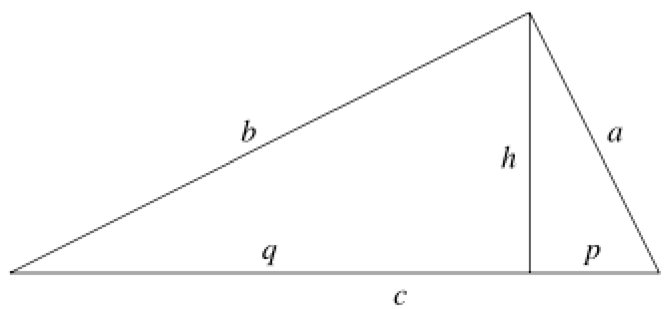
۳) $a = c$

ګردښلينده په B د a په اندازه د α ازاده پښه په دوه ټکو ، په نامه A او C کې پرې
کوي. دې لپاره چې حالتونه ۲ - او ۳ - له منځه لرې او تل يواځنی حل ولرو، نو $a > c$
نيونه په دريم کونګرواينځ جمله کی ضرور ده

۶ . ۱ ٠ ۵ .ولاړکونجيز دريګوډی مثلث قايم الزاويه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلفو دریګوډیو څخه موږ په لاندې برخه کی ولاړ کونجیز دریګوډی ترڅیرنی لاندې نیسو .په ولاړکونجیز دریګوډي کی د ولاړ کونج مخامخ اړخ
هوپوتینوزې) Hypotinuse(بلل کیږي، نور دواړه اړخونه کاتیتونه یو: کاتیت (Katheten)بلل کیږي. هغه ولاړکونجیز دریګوډي ته روځنی یا ورسره بلدې یا مروجی په نخښه کونه یا لنډ په نخښونه به له ځیرې ۴ . ۱۳ څخه واخلئ



په ولاړکونجیز دریګوډي کی دا لاندې راوړل شوې اړیکی باور لري چی دلته یی بی له اوبی)ښوونی(راوړو:

یادونه : په ولاړګوډیز کې د ولاړکونج مخامخ اړخ اوږد اړخ بولو او د ولاړ ګوډ پښې ولاړ اړخونه، چې غوښتوني کونج ته مخامخ مخامخ اړخ (پښه) او په موخه ور کونج پرته پښه په کونج پروت اړخ (- پښه) بولو او یا په دې لاتین نوموونو یانې مخامخ کاتېت او (په کونج) پروت کاتېت.

د پیتاګوراس (Pythagoras) جمله:

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتینوزې مربع هواره د دواړو کاتیتو د مربع هوارو زیاتون سره برابر یا مساي ده:

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (6.5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دکاتیتو(د ولاړاړخونو یا د مخامخ او په پراته اړخ(ضلع)) جمله:

په ولاړکونجيز دریګوډي کی د کاتیت مربع هواریزمساوي ده د ولاړ کونجي هوارې سره، چی له هیپوتینوزې او ددې کاتیت له پرویکشن یا پریوستون څخه لاس ته راځی:

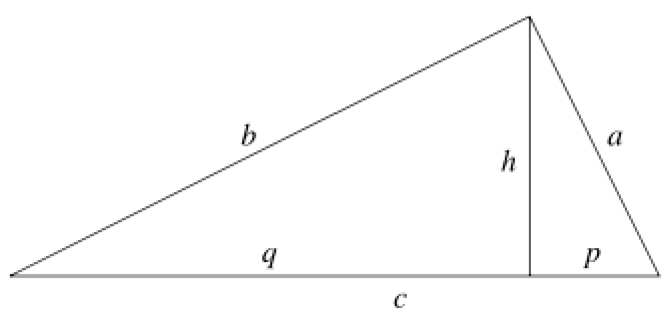
$$a^2 = p.c \, , \, b^2 = q.c \qquad (6,6)$$

جګجمله :

په ولاړکونجیز دریګوډي کی د هیپوتیزې په جګي مربع هواریزمساوي ده د هیپوتینوزې (لوي اړخ) برخو څخه منځ ته راغلې ولاړکونجي هوارې سره

$$h^2 = q \,.\, p \qquad (6.\,7)$$

یا په لاندې کې لنډ بیا ورکړ شوي



لنډ: (ددې لپاره دې پورته څېره وکتل شي)

پیتاګوراس جمله : $c^2 = a^2 + b^2$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اويکليد د کاتيتونو(پروت – ،مخامخ اړخونو) جملې

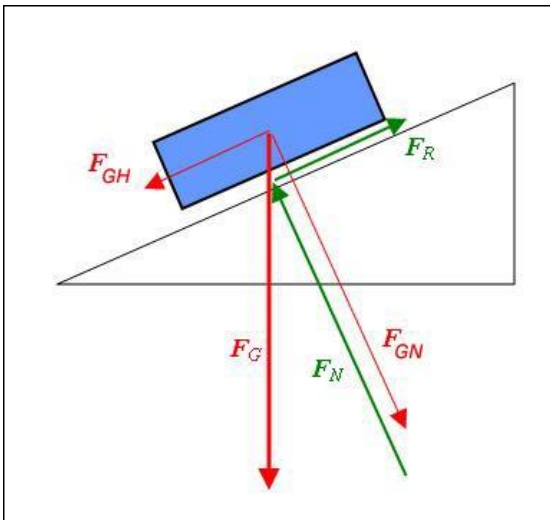
$$a^2 = c \cdot p$$

$$b^2 = c \cdot q$$

$$c = p + q$$

د اويکليد جګجمله $h^2 = p \cdot q$

بيلګه ۴ . ۴ : (ځيره نه ده کښل شوې، د ې ته دې ګران لوستونکج فکر وکړي۰ دا يوه فزيکي دنده هم ده(ځېره وکښل شوه، نخښې هم لږ بدلې دي)) د يوه بدن د وزن G تجزيه څرګندوي (د بدن دروند ټکی) دا د فزيك له مخی هغه ټکی دئ چی د بدن ټول وزن پرې پروت وي) KSP =)چی په يوه مائله هواره پروت دی، دا وزن مائلي هوارې سره غبرګ په يوه کښته کشونکی زور FH او په مائلی هوارې نيغ ولاړ ، ولاړ) عمودي(زور) قوه FN)تجزيه کيږي. د ښوولو ده چی، دريګوډي ABC د KSPاو FN او FH له خوا ټاکلي دريګوډي سره ورته دی



يادونه: په ليکنه کې زور يا توان د لاندې ځېرې سره داسې بدلو:شين تنيا د مستطيل شکل G دی

$$F_H = F_{GH}, F_N = F_{GN}, G = F_G$$

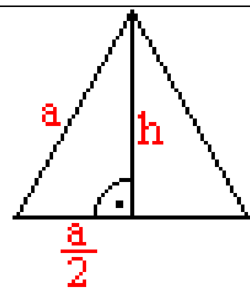
ګوډونه : له پورته ګوډ A کښته ښی لور ته ګوډ C کښته کيڼ لور ته ګوډ B په ګوډ A کونج α ، په ګوډ B کونج β

(c) ketabton.com: The Digital Library

داچې G||AC ځغلي، نو FH او G يو کونج α جوړوي. دا چې $\beta = R - \alpha$ ده، نو FN او G کونج β جوړوي، دواړه دريګوډي په دې برسيره په ولاړکونج کې يو بل ته ورته دي٠

يادونه : داسې بيلګې، چې ځيره يې نه شم ايستلى که وي هم بدې نه دي، ګران لوستونکي کړاى شي،چې داسې ځيرې پخپله وباسي، دا دې يو تمرين وي٠ زما زړه نه شي، چې له ليکلو يې تير شم٠

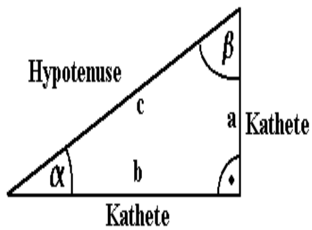
بيلګه ۴ . ۵ : په يوه مساوي اړخيز دريګوډي کې دې (لاندې ځيره) جګې و شميرل شي .د ٦ . ۴ (له مخې لرو(جګې په همدې وخت کې د مخامخ اړخ نيمى هم دى، دا په دې درېګوډي کې وکاږى)

	$h^2 = a^2 - (a/2)^2$ $h^2 = a^2 - a^2/4$ $h^2 = (3/4)a^2$ $h = (\sqrt{3}/2)a$

٦ . ۲ په ولاړکونجيز دريګوډي کې د اړخونو تناسب

د کونجکچ لپاره د اړخونو تناسب هم مساعد دى، چې يوه ولاړکونجيز دريګوډي کې جوړيږي(لاندې ځيره). که د کونج α مخامخ اړخ يا -کاتيت a د gegkathete مخامخ اړخ په ځير وښايو، د b اړخ په β پروت اړخ ankathete او hypothenuse لوي اړخ وي، نو په ولاړکونجيز دريګوډي کې لاندې اړخځانيوني منځ ته راځي يا جوړيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{katheta}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{kathetb}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{opk}{ank}$$

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{ank}{opk}$$

د وړانګو جملو له امله دا اړيکي يا تناسب يواځي د کونج په واك کی دئ. که په پام کی ونيول شي چي $\beta = 90° - \alpha$ دئ، نولاندې اړيکی ليکلی شو

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c} = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{b}{a} = \tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot\beta = \frac{a}{b} = \cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$

له دې ليدل کيږي، چی د دې څلورو ارزښتونو د پيداکولو لپاره دوه ګنجدولونه پوره دي يا بسيا کوي. وړپسي يا ددې په تعقيب پيژندوړ دي

$$\tan\alpha = \frac{in\alpha}{\cos\alpha}, \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha};.....................(6,10)$$

برسيره پردې د پيتاګوراس د جملی په پام کی نيولو سره لرو

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;.......................(6,11)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha};...........(6,12)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

٣.٠٦　　په یوونګردۍ کی د کونج فنکشنونه (-بلواك)

په ۴ . ۲ برخه کی $\sin\alpha; cis\alpha; \tan\alpha; \cot\alpha$ یواځي د لیدیدونکو (Konkrete
اړختناسبونو لپاره په یوه ولاړکونجیز دریګوڼي کی ځاي په ځاي دي. دا ویناوې یواځي
یا په ځانګړې توګه د $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} (0 < \alpha < 90°)$ لپاره تعریف دي. که د α د
خپلواك واریابل په څیر ونیسو، نو $\sin\alpha$ او داسی نور فنکشنونه راپه ګوته کوي چی
په برخه ۱۵ کی انځور دي او کوجنفنکشنونه بلل کیږي. په یاده شوې برخه کی) څیرې
۱۵ . ۲۰ الف او ب

ددې لپاره چی د دې تعریفونو پراخوالی په زړه پورې کونجونو لپاره ممکن شي، نودا مو
د یوون ګردي باندې مخ نخښی په واك کی کرښو ته لاربښودوي .د لته ټولی کرښی) د
لته به له کرښو ځمور. مطلب پاې کرښی وي(، چی پخپله او یایی پرویکشن یا پریوستون
یا پریوتنه په وړانګو s1 او s2 پروت وي زیاتون مخنخښه) مثبت مخنخښه(لري، ټولی
کرښي او یایي پرویکشنونه پریوستونونه چی په وړانګو s'1 او s'2 پرتی وي کمون
مخنخښه (منفي مخنخښه) لري .د لاندې څیرو کښلو سره کیدی شي تعریفونه ۸ . ۴ (د
په خوښه کونجونو لپاره پراخه شي

$$\sin\alpha = \overline{QP}, \cos\alpha = \overline{OP}, \tan\alpha = \overline{AD}, \cot\alpha = \overline{BE}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6{,}13)$$

د کونج α لپاره چي په لومړي څلورمه یا کوادرانت Quadrant (لاتین: د
کواوردیناتسیستم څلورمه کی پروت دی(لاندې څیره له کیڼ و ښی لورته کښته دا په
فرمولونوکې کارول شي توري ساده ایښوول کیږي٠ په څیرو کې شني کرښې د ساین دي
او سرې کرښې کوساین دی او کونجونه ټول په ترتیب له یوه سره پهالف سره په نخښه
کیږي، چې د دې لارې تانجنت او کوتانجنت هم پیدا دي او توري هم ایښوولی شو)، دا
تعریفونه د هغو تعریفونو سره سر خوري، کوم چی په ولاړکونجیز دریګوڼي کی تر
څیرنی نیول شوي دي .په پام کی دې وي چی کونج α په لینده اندازه کی د
ګردیلیندې اوږدوالي AP سره مساوي دی، چیرته چی په زیات څرخون له 2 څخه
لوییدلی هم شي .برسیره پر دې له تعریفونو) ۱۳ . ۴ (څخه لاس ته راځي، چی ساین-او
کوساین فنکشنونه، پریود :°360) 2 (periode) تل تکراریدونکی ، بیرته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راګرځيدونکی(، تنجنت - او کوتنجنت فنکشنونه پريود(180°) لري .

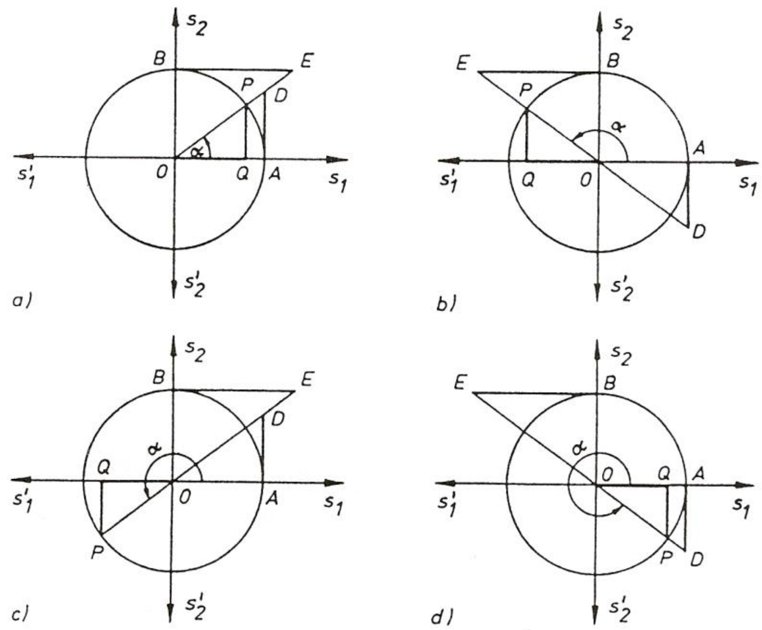


Bild 4.17

پس لرو

$$\sin(\alpha+2\pi)=\sin(\alpha+360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2\pi)=\cos(\alpha+360°)=\cos\alpha; \quad ....(6.14)$$
$$\tan(\alpha+2\pi=\tan(\alpha+360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2\pi)=\cot(\alpha+360°)=\cot\alpha$$

په

ټوليزه)عمومي(توګه لرو

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin(\alpha+k.360°)=\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos(\alpha+k.360°)=\cos\alpha; \quad ....(6.15)$$
$$\tan(\alpha+2k\pi=\tan(\alpha+k.360°)=\tan\alpha$$
$$\cot(\alpha+2k\pi)=\cot(\alpha+k.360°)=\cot\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټولو ټولګټونو $k = ..-3,-2,-1,0,1,2,3....$ لپاره

یادونه :د کوادرانت لپاره څلورمه لیکلی شو خو دا باید په پام کی وي چی دا په کواوردیناتسیستم کی دی

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونج-یازاویو توبعو وخنخښه

	لومړۍ څلورمه $(0;\frac{\pi}{2})$	دویمه څلورمه $(\frac{\pi}{2};\pi)$	دریمه څلورمه $(\pi;\frac{3}{2}\pi)$	څلورمه څلورمه $(\frac{3}{2}\pi;2\pi)$
sinx	+	+	-	-
cosx	+	-	-	+
Tan x	+	-	+	-
cotx	+	-	+	-

برسیره پر دي لاندې اړیکی باور لري:

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \;,\quad \cos(\pi-\alpha) = -\cos.\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \;,\quad \cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha \qquad (4.16)$$
$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \;,\quad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \;,$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \;,\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha \;,\quad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

بیلګه ۴ . ۶ : د جبشمیروني سره د کونجفنکشن د $\alpha = 446°$ لپاره پیداکوو. دا چی α په درجی اندازه ورکړ شوي ده، نو اومشالتریا سویچ بدون ( ) دلته مطلب د

(c) ketabton.com: The Digital Library

جبشميري اړونه ده، پۀ غوښتل شوي فنکشن کی) په « DEG » سموو او بیا لاندې ورکونې کوو.
په همدې ډول تکمي وهو

جدول یا تخته ۴ . ۱ د کونجفنکشنونو مخنخښه

دنده مو د لاندې مساوت حل یا اوبی دی

$$1.\quad \sin\alpha = a \quad , \quad 2.\quad \cos\alpha = a,$$
$$3.\quad \tan\alpha = a \quad , \quad 4.\quad \cot\alpha = a$$

دلته تمرینونه ۱ او ۲یواځي هلته موخه ور یا هدفمند ي، چې باور ولري$-1 \le a \le 1$

او په تمرین ۳ او ۴ کط په خوښه هر ارزښت نیولی شي.
یو «بنستیزوبی یا بنستیز حل»α_0 د هر تمرین د جبشمیرني سره په لاندې ډول یا همداسی تکموترتیب لاس ته راځي (دا په دې اړه لري چېα_0 په درجه اندازه یا لیندده اندازه اندازه کوو، نو په ورته ډول د سویچبدلون په "DEG" یا "RAD" باندې راولو)

1. [a] [F] [sin]   2. [a] [F] [cos]

3 [a] [F] [tan]   4. [a] [1/x] [F] [tan]

تکمه F د په څټ فنکشن ته تلنه ممکنوي.
دلته نو بیاد α_0 هر بنستیزحل په درجه یا لیندده کچ څرګندیږي.
د $a = -0,55$ لپاره لاندې بنستیزحلونه لاس ته راځي :

1. $\alpha_0 = -33,367013° = -0,58236,$
2. $\alpha_0 = 123,36701° \quad = 2,1531606,$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $\alpha_0 = -28{,}810793° = -0{,}5028432,$
4. $\alpha_0 = -61{,}189206° = -1{,}0679531.$

د مخ ت ه تيرو په بنسټ لو

1. $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) = \sin(\pi - \alpha),$
2. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$

او په ورته توگه،، فرعي يا ځنگيز حل يا اوبی،،

1. $\beta_0 = 180° - \alpha_0 = \pi - \alpha_0,$
2. $\beta_0 = -\alpha_0$

لاس ته راشي

د ليديدونكي حالت $a = -0{,}55$ لپاره په دې مانا چې :

1. $\beta_0 = 213{,}367013° = 2{,}1531563,$
2. $\beta_0 = -123{,}36701° = -2{,}1531606.$

د α ټول حلونه د (۱۵ . ۴) له امله په لاندې فورم لاس ته راځي

1. und 2. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 360° = \alpha_0 + 2k\pi,$
$\alpha = \beta_0 + k \cdot 360° = \beta_0 + 2k\pi,$

3. und 4. $\alpha = \alpha_0 + k \cdot 180° = \alpha_0 + k\pi.$

بيلگه ۴ . ۹ : لرو $\sin x = 1/2\sqrt{3}$. ودې شميرل شي $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\pm\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{3},$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{\pm\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۴ . ۱۰ : په بیلګه ۴ . ۴ کې ورکړشوی زور F_H او F_N څومره لویې دي، که په مایل هواره پروت بدن وزن 700 N وي (دلته N د Newton لپاره دی چی وزن پرې اندازه کیږي) او مائلی هوارې مایلکونج $\beta = 28°$ وي؟

$$\sin\beta = \frac{F_H}{G}, \quad F_H = G \cdot \sin\beta = 700\ \text{N} \cdot \sin 28°$$
$$= 700\ \text{N} \cdot 0{,}4695 = 328{,}65\ \text{N}.$$

$$\cos\beta = \frac{F_N}{G}, \quad F_N = G \cdot \cos\beta = 700\ \text{N} \cdot \cos 28°$$
$$= 700\ \text{N} \cdot 0{,}8829 = 618{,}03\ \text{N}.$$

۴. ٦ دساین- او کوساین جملی

دا دواړه جملی ممکنوي چی په ټولیز یا عمومي دریګوډي کی شمیرنی پلی کړای شو

۱ . د ساین جمله‌د څیرې ۴ . ۱۸ له نخښوني سره لرو

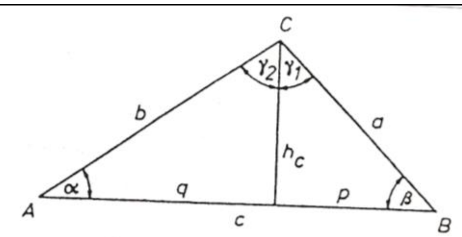


Bild 4.18

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

او له دې امله

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چې په عمومي توګه صدق کوي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (4.17)$$

څیره پورته او لاندې کښل شوي، دا یو ولاړکونجیز دریګوډی کښل کیږي(پورته او لاندې څیرې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ښوول کیدی شي، چی په عمومي توګه صدق کوي

د ساین جمله کیدی شي استعمال شي، که د یوه دریګوډي -دوه اړخونه او لوي اړخ ته

مخامخ کونج - SSW یو اړخ او داړه پرې پراته کونجونه WSWورکړشوي وي

۲ . د کوساین جمله

د ښیرې ۴ . ۱۸ څخه لاس ته راځي

$$\frac{\begin{array}{l} h_c^2 = b^2 - q^2 \\ h_c^2 = a^2 - p^2 \end{array}}{}$$

$$a^2 = b^2 + p^2 - q^2, \quad p = c - q,$$
$$a^2 = b^2 + (c - q)^2 - q^2,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cq + q^2 - q^2, \quad q = b \cos \alpha,$$

نو $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$ لرو او همداسې:

$$\boxed{\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{array}} \qquad (4.18)$$

د کوساین جله استعمالیدی شي، که په یوه درېګوډي یا مثلث کې

- درې اړخونه یا ضلعې یا

- دوه ا ړخونه(ضلعې) او له هغو رابند کونج یا زاویه

ورړ شوي وي.

بیلګه ۴ . ۱۱ :د دوه قوو(زور F1)او F2 لاس ته راوړل شوې R1 چی په پراته لورد F1سره کونج جوړوي ، څنګه شمیرل کیږي؟ د دې دوه قوو F1 او F2 برسیره له دوي جوړکونج هم معلوم دی .د دې پوښتنی کولو د روښانولو لپاره ښیره ۴ . ۱۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې، له کومی څخه چی د دوي ترمنځ اړیکي هم معلومیږي .په دې پسی په ABCدریګوډي کی، F1 = c, F2 = a او ss - 180° = ss' معلوم دي، α

او R = b لټوونکی یا غوښتونکی لویي دي؟

د کوساین جملی (۱۸ . ۶) څخه لرو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosss$$

همداسی یا⇔

$$R^2 = F1^2 + F2^2 - 2F1F2\cos(180° - ss')$$

او د ساین له جملی (۱۷ .۶) لاس ته راځي

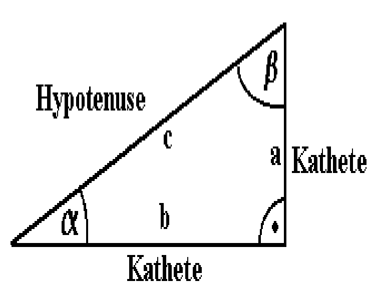
له کومو چی α تاکل کیدی شي .

لوي اړخ او ولاړ یا عمود اړخونه (هیپوتینوز او کاتیتونه یا مخامخ- او په پروت اړخ):

۱ – په ولاړکونجیز دریګوډي کې ولاړ کونج ته مخامخ اړخ هیپوتینوز یا لوي اړخ بولو۰

۲ - نور دواړه اړخونه غوښتوني – یا مطلوب کوج ته مخامخ اړخ او په مطلوب کونج پروت اړخ یا ولاړ اړخونه یا کاتیتونه بولو۰

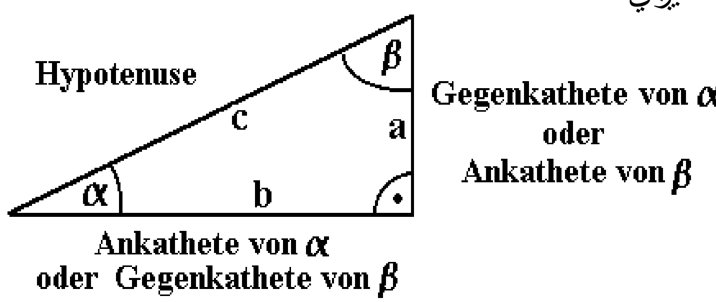
مخامخ دریګوډی دې ورکړشوی وي: په لاندې درېګوډي کې کونجونه، او اړخونه جوت یا څرګند روښانه دي . د اړخونو نومونه: الفا کونج ته مخامخ مخامخ اړخ بولو او په الفا پروت اړخ په پروت یا پروت اړخ بولو. ولاړ کونج ته مخامخ لوی اړخ بولو



(c) ketabton.com: The Digital Library

لند یا تکرار :پورته او په لاندې بیلګه کې دا اړخونه دغوښتوني کونج مخامخ او په پراته اړخونه بلل کیږي

بیلګه
بیا دې همغه پورته درېګوډۍ ورکړ شوی وي، چې په بیتا پروتاوخ یا کاتیت د الفا مخامخ اړخ یا کاتیت او په څنګ په الفا پرو اړخ یا ه کاتیت د بیتا مخامخ اړخ یا کاتیت ده، چې په څیره کې لیدلکیږي۰



د ساین جمله

په تریګونومتري کې ساینجمه د درېګوډي د یوه کونج او د دې کونج مخامخ اړخ ترمنځ اړیکی ښایي۰ دا له البتانی میندل شوي او ښوول شوي۰ د درېګوډي درې اړخونه او درې ګونجونه ، وړانګه او چاپیرۍ ورکړ شوي (لکه په فرمول کې) نو باور لري:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r = \frac{u}{\pi}$$

یادونه : دا پورته فرمول دې (6,14)وي ۰

زیات وخت د ساین جمله په داسې ډول هم ورکول کیږي:

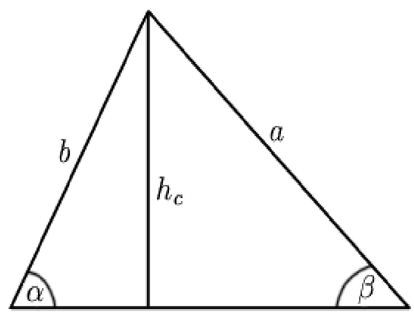
$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c$$

که چیرې په درېګوډي کې د ساین جملې له لارې څه ښوول کیږي ، نو دې ته دې پام وي، چې په اینتروال [0°;180°] کې په ټولیزه توګه د همغه کونج دوه یو له بل بیل ارزښتونه لیدل کیږي، دا: دوه ګونوالی ګونګرواینځجمله په ګوته کوي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره دې د کوساین جمله هم وکتل شي

ښوونه : (دا ځیره دې ٦ ، ١٨ وي او دا نا نومول شوي کونجونه دې x,y وي)

 	$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$ $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$ په h_c پسې یې اوبی کوو $h_c = b \cdot \sin\alpha$ د برابراینوني له لارې لاس ته راځي $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$ که په $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ وویشو، نو د غوښتني لومړی برخه کې لاس ته راځي $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$

برابرون له $\frac{c}{\sin\gamma}$ سره په پیداینتي توګه ځګی h_a او یا h_b لاس ته راکوي

د کاروني بیلګه : درځګوړی ABC لارو او ورکړ شوي :

$$a = 5,4\,\text{cm} \text{ ، } b = 3,8\,\text{cm} \text{ ، } \alpha = 73^\circ$$

دا نورې لویې دې په درېګوډي کی پیداشي

د β شمیرلو لپاره د ساین جمله کارول کیږي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a} = \frac{3{,}8\,\mathrm{cm}\cdot\sin 73^\circ}{5{,}4\,\mathrm{cm}} = 0{,}67$$

$$\beta = \underline{42^\circ}$$

لکه د خه مو، چې ګوته ورته ونیوله یو بل کونج هم د همدې ارزښت سضته شته ، یاني

$$\beta' = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

د دې اوبی په پوښتنه کې نه راځي، ځکه چې د درېګوډي د کونجونو زیاتون به له ۱۸۰ درجو څخه واوړي.

او نو ګاما د کونج زیاتون جملې له لارې لاس ته ر اوړو

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 73^\circ - 42^\circ = \underline{65^\circ}$$

اړخ c هم داسې لاس ته راځي

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5{,}4\,\mathrm{cm}\cdot\sin 65^\circ}{\sin 73^\circ} = \underline{5{,}118\,\mathrm{cm}}$$

دکوساین جمله

په تریګونومتري کې کوساینجمله په درېګوډي کې د درېګوډي د اړخونو او کونجونو

ترمنځ اړیکې ښایي ، چې په لاندې توګه ورکړ شوي دي :

یادونه : دا لاندې فرمولونه دې (۱۸ ۰ ۹) وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

که ګاما ۹۰ درجې وي، نو دپیتاګوراس جملې له مخې لرو:

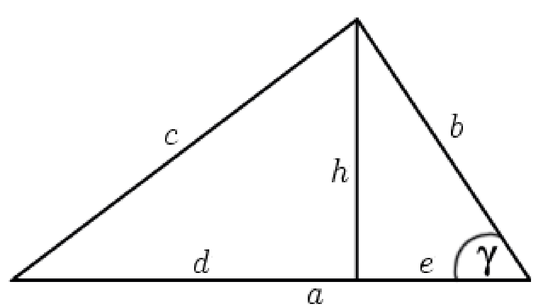
$$c^2 = a^2 + b^2$$

د کوساین جمله استعمالیدی شي، که په یوه دریګوډي کی

- درې اړخونه (SSS) یا
- دوه اړخونه او له هغو بند کونج (SWS) ورکړ شوي وي.

که له پورته څخه يې درې ورکړ شوي وي، نو څلورم یې پیداکولی شو

ښوونه :



د درېګوډي په کیڼ لور د پیتاګوراس قضیه استعمالوو، چې د c^2 لپاره یوه شمیرافاده یا –
وییینه پیداکړو، د دې لپاره د دې خوا د ولاړاړخونو یا کاتیتو اوږدوالی څلورئ یا مربع
باید پیدا شي

$$h^2 = b^2 - e^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښي اړخ لپاره د پیتاګوراس قضیي استعمال څخه لرو

$$d^2 = (a-e)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2$$

(د بینوم فرمول)

د پیتاګوراس جملې له مخې د کیڼ لور لپاره لرو:

$$c^2 = h^2 + d^2$$

اوس دواړه پورته پیداشوي شمیرویینې یا- افادې سره زیاتوو:

$$c^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot e + e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot e$$

اوس باور لري $\cos\gamma = \frac{e}{b} (\frac{ankathet}{Hypotenuse})$

له دې لاس ته راځي $e = b \cdot \cos\gamma$

دا پورته ځاي په ځاي کوو، نو د c^2 لپاره لاس ته راځي:

$$c^2 = \underline{\underline{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}}$$

بیلګه:

یو درېګوډیABC ، جې اړخونه یې څرګند دي، ورکړ شوی

$a = 4{,}9 \text{ cm}$ ،

$b = 2{,}8 \text{ cm}$

$c = 3{,}5 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج β لویوالی غواړو پیداکړو

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} = \frac{(4{,}9\,\text{cm})^2 + (3{,}5\,\text{cm})^2 - (2{,}8\,\text{cm})^2}{2 \cdot 4{,}9\,\text{cm} \cdot 3{,}5\,\text{cm}} = 0{,}83$$

$$\beta = \underline{34^\circ}$$

دا پیژند ورکو یا داسې تعریفوو

$$\sin A = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \cos A = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\text{adj}}{\text{opp}} \qquad \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

Common formularکډ وډ فرمولونه

Pythagorean identitiesد پیتاګوراس کټمټوالی

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Sum and difference identitiesزیاتون او کمون کتمتوالی

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Double-angle identities دوه برابره کونج کې ګتمتوالي

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2}{\cot A - \tan A}$$

Half-angle identities د نیم کونج ګتمتوالی

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

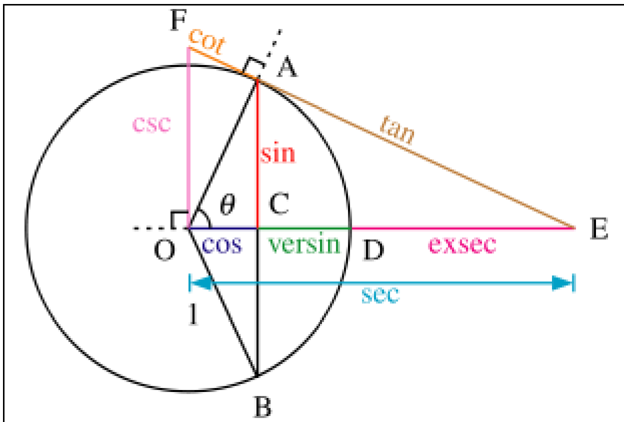
$$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\sin A}$$

د تريګونومتريکي کتمتوالي ليست List of trigonometric identities

نوره ژوره ځيرنه دلته نه کړو، دې ته ګوته نيسو، چې په لاندې ځيره کې تريګونومتريکي فنکشنونه روښانه دي

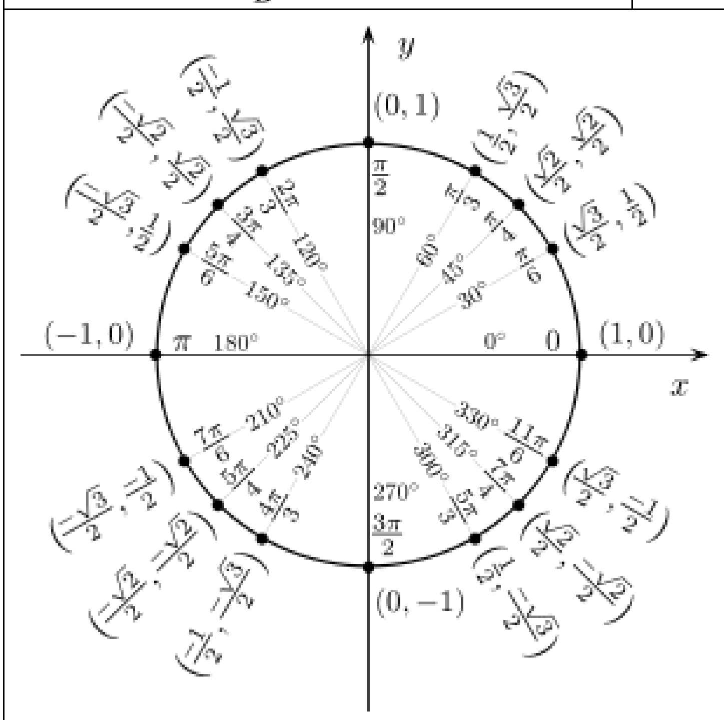


د يوه کونج θ ټول تريګونومتريکي فنکشنونه په O باندې د يوې يونګردی ترم له لارې ورکول کيدی شي (يونګردی لاندې ورکړ شوي او کونجونه هم په نخښنه شوي)

مخامخ:

يوونګردی(يووالي يا واحد ګردی)

The unit circle



(c) ketabton.com: The Digital Library

Notationلیکنبڼه

دا لاندې لیکنبڼه یا - ډول د ټولو تریګونومتریکي – یا مثلثاتي فنکشنونو ساین، کوساین ، تانجنت ، کوتانجنت ، سیکانت، کوسیکانت لپاره باور لري، د لنډوني لپاره په لاندې جدول کې یواځې ساین او کوساین لیکل شوي دي

$\arcsin(x)$ کیدی شي$\sin^{-1}(x)$ ولیکل شي، خو د $(\sin(x))^{-1}$ سره باید بدل نه شي

:پیژند:Definitions

$$\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\qquad \cot(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{1}{\tan(x)}$$

تل بیرته راګرځیدنه ، سیومتري او بدلونPeriodicity, symmetry, and shifts .

:په یوون(یووالي-) ګردۍ یا دایره کې ساده لیدل کیږي

Periodicity تل بیرته راګرځیدنه

ساین ، کوساین ، سیکانت، کوسیکانت تل بیرته راګرځیدنه 2π ده(پوره ګردۍ) (تکرار دۍ)

$$\sin(x)=\sin(x+2k\pi)$$

$$\cos(x)=\cos(x+2k\pi)$$

$$\sec(x)=\sec(x+2k\pi)$$

$$\csc(x)=\csc(x+2k\pi)$$

تانجنت ، کوتانجنت تلبیرته راګرځیدنه π لري(نیمګردۍ یا نیمدایره) :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(x) = \tan(x + k\pi)$$

$$\cot(x) = \cot(x + k\pi)$$

سیومتري Symmetry

د تریګونومتریکي فنکشنونو لپاره سیومتري ، لکه لاندې کښل شوي

$x \to -x, x \to \pi/2 - x$ ،یا $x \to \pi - x$ په لاندې ډول ده

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin(x), & \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x), & \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\
\cos(-x) &= \cos(x), & \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x), & \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\
\tan(-x) &= -\tan(x), & \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \cot(x), & \tan(\pi - x) &= -\tan(x) \\
\cot(-x) &= -\cot(x), & \cot\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \tan(x), & \cot(\pi - x) &= -\cot(x) \\
\sec(-x) &= \sec(x), & \sec\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \csc(x), & \sec(\pi - x) &= -\sec(x) \\
\csc(-x) &= -\csc(x), & \csc\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \sec(x), & \csc(\pi - x) &= \csc(x)
\end{aligned}$$

بدلون : د $\pi/2$ او π بدلون دئ

$$\begin{aligned}
\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos(x), & \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\
\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x), & \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\
\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\cot(x), & \tan(x + \pi) &= \tan(x) \\
\cot\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\tan(x), & \cot(x + \pi) &= \cot(x) \\
\sec\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= -\csc(x), & \sec(x + \pi) &= -\sec(x) \\
\csc\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sec(x), & \csc(x + \pi) &= -\csc(x)
\end{aligned}$$

د پیتاګوراس کتمتوالی Pythagorean identities

د دې بنسټ د پیتاګوراس قضیه ده

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کونج د زياتون او کمون کتمتوالی Angle sum and difference identities

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

د کمون او زياتوننخښي په ورته ترتيب راځي لکه په فرمولونو کي

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

که په کيڼ لور " + " وي، نو په ښي لور"-" راځي او په څټ

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

د کونج دوه ځلوالي فرمول Double-angle formulae

که $x = y$ کيږدو د پيتاګوراس يا موفريي فرمول له لارې لرو د $n = 2$ له امله ۰

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = \frac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$$

$$\cot(2x) = \frac{\cot(x) - \tan(x)}{2}$$

د نيمکونج فرمول Half-angle formular

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}. \qquad (1)$$

که د ریښي لاندې ماتباندې او مات لاندې له $1 + \cos x$ سره ځل شي ، نو د پیتاګوراس جملې له مخه لرو:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1+\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

په ورته توګه که برابرون له (۱) له $1 - \cos x$ سره ځل شي، نو لور

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{(1-\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1-\cos x}{\sin x}.$$

د نیمکونج فرمولونه د تانجنت لپاره دي:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کيږدو $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),$

نو لرو: $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

د ځل و زياتون ته کټمتوالی Product-to-sum identities

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x-y)+\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$$

د زياتون- و- ځل ته کټمتوالی (برابرون) Sum-to-product identities

که د x لپاره $(x+y)/2$ او y لپاره $(x-y)/2$ کيږدو نو لرو

$$\cos(x)+\cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)+\sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x)-\cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x)-\sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

که $x, y,$ او z د کوم دريګوډي کونجونه وي يا په نورو کليمو، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیمګردی یا نیمدایره ,if $x + y + z = \pi =$ half circle, =که

$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$ نو یا او

and $\sin(2x) + \sin(2y) + \sin(2z) = 4 \sin(x) \sin(y) \sin(z).$

Trigonometric conversions تریګونومتریکي په څتوالی

هر تریګونومتریکي فنکشن د بل تریګونومتریکي فنکشن سره سیده یا سیخې اړیکی لري٠ داسې اړیکی د په ښت اړیکو له لارې افاده یا ویل کیدی شي، لکه : که φ او ψ د تریګنومتریکي فنکشنونو د یوې جوړې نمایندګی وکړي ، او arcψ دې د ψ په ښت وي، داسې چې $\psi(\text{arc}\psi(x)) = x$ ٠ نو $\varphi(\text{arc}\psi(x))$ کیدی شي د یو الجبري فنکشن ترم x په څیر وویلی شي یا افاده شي٠

داسې فرمولونه د لاندې جدول له لارې ښوول کیدی شي : موږ دا نوره نه روښانه کوو او په لاندې جدول پوهیدی شو

φ \ ψ	sin	cos	Tan	csc	sec	cot
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$
Cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
Tan	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$
sec	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
cot	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 0 = \sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin 45^\circ = \sqrt{2}/2 = \cos 45^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

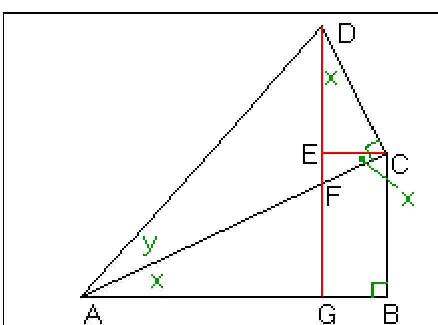
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ = \cos 0$$

د طيلايي نسبت φ له امله لرو

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \varphi/2$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\varphi-1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$$

جيومتريکي غوښتنه (ثبوت)Geometric proofs



sin(*x* + *y*) = sin(*x*) cos(*y*) + cos(*x*) sin(*y*)

په مخامخ څيره کي کونج x د ولاړکونجيز درېکوډي ABC برخه ده، او کونج y د و لاړکوډيز درېکوډي ACD برخه ده ۰ نو جوړښت DG و AB باندې ولاړ او CE و AB ته غبرګ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کونج ACE =کونجBAC = Angle x

EG = BC.   کونج CDE= x

$$\sin(x+y)$$

$$= \frac{DG}{AD}$$

$$= \frac{EG+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC+DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} + \frac{DE}{AD}$$

$$= \frac{BC}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} + \frac{DE}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{BC}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} + \frac{DE}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

cos(*x* + *y*) = cos(*x*) cos(*y*) − sin(*x*) sin(*y*)

د پورته ځیرې څخه کار اخلو:Using the above figure

$$\cos(x+y)$$

$$= \frac{AG}{AD}$$

$$= \frac{AB-GB}{AD}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{AB - EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} - \frac{EC}{AD}$$

$$= \frac{AB}{AD} \cdot \frac{AC}{AC} - \frac{EC}{AD} \cdot \frac{CD}{CD}$$

$$= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD} - \frac{EC}{CD} \cdot \frac{CD}{AD}$$

$$= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).$$

د $\sin(x-y)$ او $\cos(x-y)$ فرمولونو ښوونه

د $\cos(x-y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه ساده ښوول کېږي، که د $\cos(x+y)$ او $\sin(x-y)$ لپاره فرمولونه وپېژنو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

که په فرمول $\sin(x+y)$ کې د y په ځاي -y کېږدو نو لرو

$$\sin(x+(-y)) = \sin(x)\cos(-y) + \cos(x)\sin(-y).$$

که د فاکت څخه، چې ساین جوړه او کوساین ناجوړه فنکشنونه دي، نو لرو

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y).$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

موږ په پورته فرمول $\cos(x+y)$ کې د y په ځاي -y ږدو ، نو لرو

$$\cos(x+(-y)) = \cos(x)\cos(-y) - \sin(x)\sin(-y).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د فاکت څخه، چي ساین جوړه او کوساین ناجړه فنکشنونه دي، نو لاس ته راوړو

$$\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y).$$

۶ . ۵ تریګونومتریکي یا کونجکچ فرمولونه

د کونجبلواك یا کونجفنکشن د شمیرلو لپاره، له دا اوس څرګند فرمولونو، یوه د اړیکو ډله شته) د زیاتون)جمع(تیوریم(، له کومو یی چی دلته یوڅو راوړل غواړو .د همغو فرمولتولګه) کتاب چي فرمولونه په کي راټول وي(کی لاندې فرمولونه پیدا کیدی شي

$$\sin(x \pm y) = \sin x.\cos y \pm \cos x.\sin a;........................(6,19)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x.\cos y \mp \sin x.\sin y;........................(6,20)$$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x; \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x;....................(6,21)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x.\tan y};.....................(6.22)$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};..........................(6,23)$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2};$$

$$cox + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2};..............................(6,24)$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$$

ددې اړیکو ښوونه یوه مهمه کورني دنده ده، خو څه به په دې لاندې بېلګه کې وښایو

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۱۲ :

Cos(x+) = cosx.cosy –sinx.siny

مونږ له څیرې ۴ . ۱۸ څخه مخ ته ځو، او ځاې په ځاې کوو $\gamma_1 = x$ ، $\gamma_2 = y$ ،
نو لرو $\gamma = x + y$.

د کوساین له جملې لاس ته راځي

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = p^2 + h_c^2, \quad b^2 = q^2 + h_c^2, \quad c^2 = (q+p)^2$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - (q+p)^2,$$
$$= p^2 + h_c^2 + q^2 + h_c^2 - q^2 - 2qp - p^2$$

له $2ab\cos\gamma = 2h_c^2 - 2qp$ څخه لاس ته راځي

$$\cos\gamma = h_c^2 / ab - qp / ab = (h/a).(h/b) - (q/b).(p/a),$$
$$\cos\gamma = \cos\gamma_1 .\cos\gamma_2 - \sin\gamma_1 . \sin\gamma_2$$
$$\cos(x+y) = \cos x .\cos y - \sin x . \sin y$$

څه چې د ښوولو وو

یادونه: ځای په ځای باید دې ته ګوته ونیسم، چې د ضرب او وېش تړاو نسبت و جمعې اړ تفریق یا زیاتو او کمون تړاو ته کلک یا کلک نښتی دی.

بیلګه ۴ . ۱۳ – لاندې وېینې یا افادې دې ساده شي

$$a)\ y = \sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$$

دې (۶ . ۲۳) پسې د مساوات(برابرون) ښی اړخ د لاندې سره یو- یا هم ارزښته ده.

$$2\sin\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \frac{\pi}{4} - \alpha - \frac{\pi}{4}}{2} = 2\sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{4}) = 2\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له کوم چې $y = \sqrt{2}\ \sin\alpha$ لاس ته راځي

b) $y = \cos(\frac{3}{2}x + \pi)$

د (۶ . ۲۰) پسې لرو

$$\cos(\frac{3}{2}x+\pi) = \cos\frac{3}{2}x \cdot \cos\pi - \sin\frac{3}{2}x \cdot \sin\pi.$$

دا چې $\cos\pi = -1, \sin\pi = 0$ دی، نو لاس ته راځي

$$y = \cos(\frac{3}{2}x+\pi) = -\cos\frac{3}{2}x.$$

دې نتیجې ته د (۶ . ۱۶) استعمال وروسته هم رسیږو، له کومې چې لاس ته راځي

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \text{ ist.}$$

بیلګه ۶ . ۱۴ برابرون یا مساوات $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad 0 \le \alpha \le 2\pi,$ دې وښوول شي

دی $1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$ او له دې سره

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - (\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2}} = |\sin\frac{\alpha}{2}| = \sin\frac{\alpha}{2} \quad (\text{wegen } 0 \le \alpha \le 2\pi).$$

۶ . ۶ تمرینونه

۱ – بنسټیزه هندسه یا ځمککچونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۱ – لاندې کونجونه دې په لینده اندازه همداسې په درجه اندازه(د څسیما یا دسیمال یا لسمیز او سمساګیسیمال (د ۶۰ په بنسټ جوړ شوي ګڼل(که غواړۍ شمیرل) برخو) ورکړ شوي دي،

1.1.1.a) $15°$	b) $225°$	c) $105°$	d) $277,5°$
1.1.2.a) $\frac{\pi}{8}$	b) $\frac{\pi}{12}$	c) $2\pi+\frac{\pi}{2}$	d) $\pi-\frac{\pi}{3}$
1.1.3.a) $4,24°$	b) $70,9°$	c) $31°\ 17'\ 20''$	d) $228,1923°$
1.1.4.a) $5,19$	b) $0,22$	c) $2,31$	d) 1

۱ . ۲ – یو درېګوډی له $a = 4,5$ cm , $b = 12,2$ cm او $c = 11,7$ cm سره ورکړ شوی دی. دا دریګوډی جوړ کړی ! د اړخونو نیموونکی وکاږی، د منځ ولاړې ، کونجنیموونکي او جګې، همداسی یي ګردیخوندي او خوندیګردي ګردی(یعنی دباندې او دننه ګردی) رسم کړی.

۱ . ۳ – لاندې دریګوډی جوړ کړی

a) $a = 11,7$ cm , $b = 9,2$ cm , $\gamma = 43,5°$

b) $c = 16,1$ cm , $\alpha = 84,6°$ $\beta = 51,9°$

وښایي چی ولی دواړه دریګوډي ورته د؛

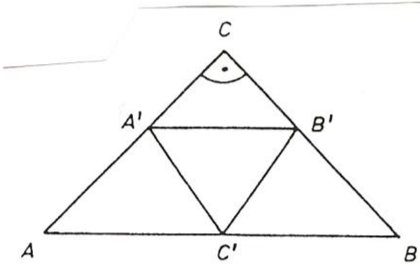


Bild 4.20 ځیره

۱ . ۴ – یو مساوي پښیز، ولاړکونجیز درېګوډي ABC ته یو مساوي اړخیز دریګوډی A'B'C' داسی په دننه کی ورکړ شوی چی $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ څغلي او C' په $\overline{AB}$ پرته ده (څیره ۴ . ۲۰ دې وکتل شي).

ورکړی $\overline{B'C'} = \overline{A'C'} = \overline{A'B'}$ د $\overline{AC} = \overline{BC}$ سره!

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . ۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی د خیږي ۴ . ۲۱ سره سم په لیدوړ ډول په دننه کی یوه مربع ورکړ شوې. د مربع اړخونه وشمیرۍ

الف) له کانتو څخه

ب) له هیپوتینوزپبرخو څخه

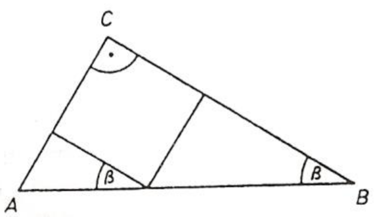


Bild 4.21

۲ . د جبشمیرنی سره د ارزښتونوټاکنه

۲ . ۱ – له لاندې کونجونو څخه د لاندېکونجونو لپاره فنکشن ارزښتونه پیداکړی:

a) α = 47,15° , b) α = -390° , c) α = 7,784 , d) α = 13,195

۲ . ۲ – کونج ß دې د sinß = a , cos ß = a , tan ß = a , cot ß = a څخه د

a) a = 0,8290 , b) a = -0,2907 , c) a = -2,145, d) a = 0,8660

لپاره وشمیرل شي (په اوبی کی دې د الفا په ځای بیتا ولیکل شي !!!)

۳ . په ولاړکونجیز دریګوډي کې شمیرنې

۳ . ۱ – په ولاړکونجیز (γ = 90°) دریګوډي کې معلوم دي

الف) a = 3 cm , b = 4 cm ، ب) a = 5 cm , c = 12 cm

کوم ارزښتونه sin α , cos α , tan α , cot α لري؟

۳ . ۲ – ولاړکونجیز دریګوډي کې (γ = 90°) نه ورکړشوي کونجونه او نه ورکړ شوي اړخونه وشمیرۍ ، لاندې لویې موړ ته معلومې دي:

a) a = 50cm , b) a = 40cm , c) b = 70 cm , d) c = 65 cm

b= 78,1 cm α = 43°36' α = 18°55' ß = 59° 29'

۳ . ۳ – وشمیرۍ ! h_c , A او همداسی د ټاکلي مساوي پښیز دریګوډي ورکړ شوي پاتې کونجونه او اړخونه (ß = α, a = b):

a) a = 66cm , b) c = 22,4 cm , c) a = 38,9 cm , d) c = 30,3 cm

c = 130 cm α = 47,8°, γ = 33,3° γ = 48,2°

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) درې قوې دې د زوریا قوت $F_1 = 167{,}5N$, $F_2 = 112\,N$ او $F_3 = 157\,N$ سره ورکړ شوې وي، چې په ګډه یو دریګوډی جوړوي. د دې دریګوډي کونجونه چې له اړخونو رابند دي، څومره لوي دي؟

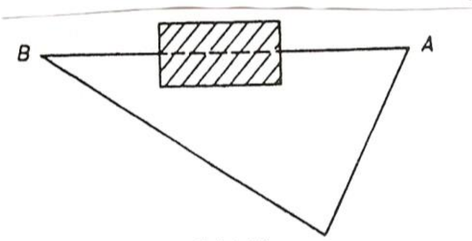


Bild 4.23 خاکره

پ) دوه ټکي A او B چې یوه کور یې مخه پټه کړې وي، یو له بل څومره لرې دي، که $\overline{BC} = 75{,}25\,m$, $\overline{AC} = 51{,}75m$ او $\sphericalangle BCA = 71°15'\,45''$ وي (څیره ۴ . ۲۳)

ت) د دوه یخ هاکي لوبغاړو S_1 او S_2 ترمنځ یو د مخالف ټیم لوبغاړی G ولاړ دی. S_1 په داسې ډول توپ و S_2 ته وهي چې توپ په یوه دیوال ولږیږي. (څیره ۴ ، ۲۳ وګوری).
د دواړو لوبغاړو S_1 او S_2 لریوالی څومره دی؟ که د دوي واټن له دیوال $a_1 = 2{,}5m$ همداسې $a_2 = 6{,}5\,m$ وي او توپ د یوه دې دیوال سره په یوه کونج $\propto = 42°$ ولږیږي.؟

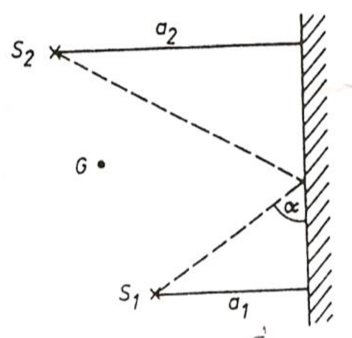


Bild 4.24 خاکره

۵ . د ټریګونومتریکي یا دریګوډیزو(مثلثاتي) فرمولونو استعمال

۵ . ۱ – بې له جبشمیري او جدول دې نور دوه درې فنکشن ارزښتونه دې وشمیرل شي، که ورکړ شوي وي: $(0 < \alpha < 2\pi)$:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ c) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ d) $\cot\alpha = -\sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

۵ . ۲ - لاندې مساوات وښایئ:

5.2.1. a) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ b) $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

c) $\cos\alpha\cdot\sqrt{1+\tan^2\alpha}=1$ d) $1+2\cos\alpha=4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$

5.2.2. a) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ b) $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

c) $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ d) $\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

5.2.3. a) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ b) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

c) $\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$ d) $\cot 3\alpha=\frac{\cot^3\alpha-3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha-1}$

5.2.4. a) $\cos 2\alpha=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$ b) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos 2\alpha=1-8\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$ d) $\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

5.2.5. a) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=\frac{1}{4}\sin 4\alpha$

b) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=-(\cos\alpha+\sin\alpha)$

c) $\sin\alpha+\sin(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\sin(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0$

d) $\sin^2(3\pi-\alpha)+\sin^2(6{,}5\pi+\alpha)=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼډیری پر بله ګڼډیری ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیری کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیری وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$i^2 = -1$ (7 , 4)

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خيالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}.i, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a}.i$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د تولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې ډول د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

=>لاس ته راځی یالرو

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x + p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «دبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیوني یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرئ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, ...(7,14)$$

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګیري کمپلکس ګڼ بلل کیږي٠ لنډ کنجوګیري کمپلکس ګڼ یا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه یا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رییل همدا رنګه ایماجینار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کیږي، که دوي په رییل او ایماجینار برخه کې یو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اینول شوې

ګډوله یا کمپلکس عدد کیدی شي په سطحه یا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شمیرنه کوي، لکه د حقیقي اعدادو سره او په پام کې نیسي چې:$i^2 = -1$

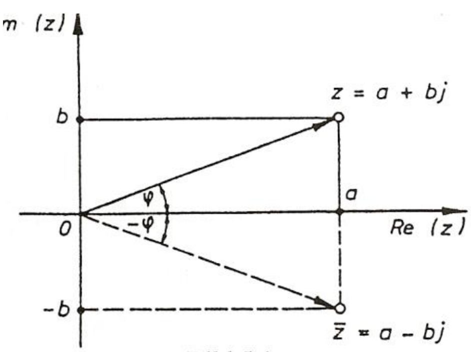


Bild 5.1

موږ دې سیستم ته پروت ولاړ سیستم وایو یا کواوردیناتسیستم Koordinaten systm

پورته څیره دې وکتل شي

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وایي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطڅي ریيلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته يېایماجینار برخه وایي لکه ښنګه، انځور شوي دي۰ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي۰(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې ویيونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون ښنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښیرو ته دې پام وي او ګورو، چې رییل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$| z_1 | = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, | z_1 | = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د(-z2) په زیاتون)کیدی شي د ښېرې ۵ (په همدې توګه د ښېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم بنوول شي.

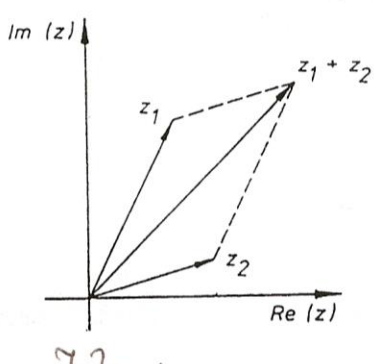


Bild 5.2 (7.2)

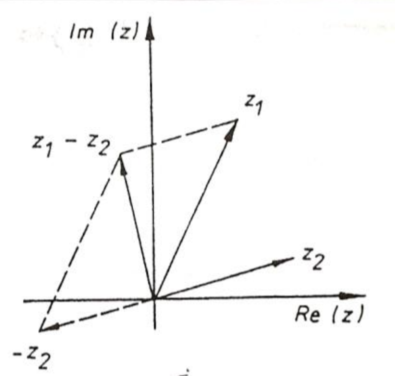
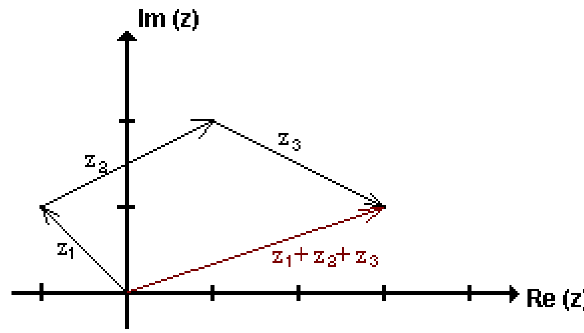


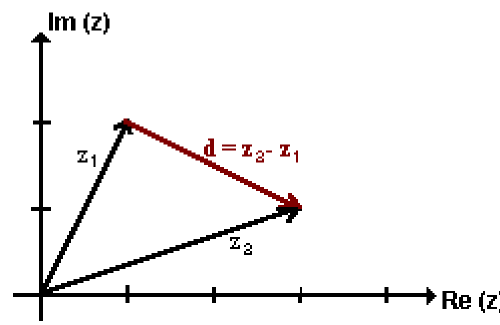
Bild 5.3 (7)

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا لاندې:



په پورته او لاندې ځیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي۰

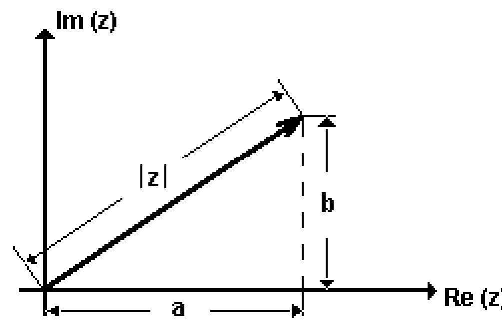
دا د په |z| سره ښایو او د پیتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کیږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی لیکه

هم وکتل شي۰ مخامخ ځیره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښایي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځاننيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i) = a_1a_2 + a_1 b_2i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2(-1)$$
$$\Rightarrow$$

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 + a_2 b_1)i \qquad (7,20)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتين توري په بدل ډول ليکل شوي، چې دا هم زما تخنيکي ستونځې دي، دا که په هرځايکې وي،دا به راته ګران د شميرپوهنې مينه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمايل کيدی شي

$$\overline{z_1 . z} = z_1 . z_2 \quad , \quad |z_1 . z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بيلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z}$ = (a+bi) (a-bi) = a²+b²+(-ab + ab)i =a²+b²

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

۷ ۰ ۳ ويش

$$z_1 : z_2 = (a_1 + b_1 i):(a_2 + b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{\overline{z_2}}}{z_1 \overline{z_2}} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z_1}.Z_2}{\overline{Z_2}.Z_2} = \frac{(a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i)}{(a_2 - b_2 i)(a_2 + b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1) i}{a_2^2 + b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ . ٤ : د Z1 او Z2 لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3} i)$ d) $z = -1 - i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

----

١ . ٢ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط يا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

٢ – جمعه او تفريق(زاتون او کمون)

٢ . ١ – د شميرنې او کاږنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

٢ . ٢ - د شميرنې او کاږنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a) $(22 + 5i) + (2 + i)$ b) $(3 + 2i) - (5+2i)$

c) $(1+2i) - (1+2i)$ d) $i -(1-2i)$

٣ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقيقي ګڼونه دي.

٣ . ٢ – وشميرئ

a) $(2 + \sqrt{3}\,i) . (3-\sqrt{2}i)$ b) $(3 + 2\sqrt{2}\,i) . (3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1 + \sqrt{5}\,i).(1 - \sqrt{5}\,i).(13 - 12i))$ d) $\sqrt{3 + \sqrt{7}i} . \sqrt{3 - \sqrt{7}i}$

٣ . ٢ – وشميرئ

a) $(x + y\,i)\,(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x} + \sqrt{y}\,i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a - 3bi\right) \cdot \left(\frac{4}{3}a + 5bi\right)$ d) $(c - \sqrt{d}\,i)(-c - 2\sqrt{d}\,i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

4.1. a) $z_1 + z_2$ b) $z_1 - z_2$ c) $z_1 \cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1 + z_2|$ b) $|z_1 - z_2|$ c) $\bar{z}_1 + \bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1| \cdot |z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1 \cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\,\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ - د ښوونې(ثبوت) متودونه

په شمیرپوهنه کې داسې مخ په وړاندې ځو، چې د ځینو نیونو یا فرضیو په فرمولولو سره، غوښتنو یا ښوونو او یا لکه تراوسه د ثبوتولو پرابلم (د ګڼپوهنې جملې په څیر) منځ ته راڅوو، چې دا نیونې او غوښتنې ویناوې دي۰ په جملو کې‌د دې ماتماتیکې یا شمیرپوهنیزه تړنه بیا ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه ده(مخ ته دې وکتل شي)یانې A => B دا غوښتنه د رښتیا ارزښت w غوښتنه B کې نغښتې او دا اوبی یا حل B له V او د دې تراوسه اوبی- یا حل شوو جملو لاس ته راځی۰ د دې لاس ته راوړنو لپاره بیلابیلې لارې شته ، چې په لاندې کې یې څیړو

۸ ۰ ۱ سیده یاسیخه (مستقیمه) ښوونه

په سیده ښوونه (ثبوت) کې سړی له یوې وینا A څخه مخ ته ځي، چې رښتیاارزښت یې څرګند دی او په دې لاس ته راوړنې پسې د B وینا لاس ته راوړي۰

دا وینا B هم رښتیا ده، ځکه چې له یوې رښتیا پریمیسې Prämisse (نیونې یا فرضیې) څخه رښتیا کونکلوزیون Konklusion (لاس ته راوړنه یا نوره هم ښه ښوونه یا ثبوت)(د اینمپلیکیشن ۱ او ۲ لیکه د رښتیاارزښت په جدول کې) له یوې رښتیا پریمیسې څخه د نارښتیا کونکلوزیون لاس ته راوړنې نارښتیا دي (ایمپلیکیشن رښتیا ارزښت ۲ ـم جدول)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه : سیده اوبیونه یا حل:

نیونه V : $x \geq 1$

غوښتنه B : $6x+3 \geq 3x + 6$

اوبی : وینا A ، چې رښتیا ارزښت w یې جوت دی، نیونه یې $x \geq 1$ ده۰ له 3 سره ځل له امله لاس ته راوړنې لرو چې په لاندې ډول دی$3x \geq 3$: د 3 زیاتون له لارې لرو: $3x + 3 \geq 6$ د 3x زیاتون له امله لاس ته راځي:

$$6x + 3 \geq 3x+6.$$

بیلګه:

د یوه ناتیک اوبیوني یا حل کارونه (متود)

د ښووني دی $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$

د ښوونې وړ وینا څخه لاندې لاس ته راوړنې لرو:

$$(a+b)^2 \geq ab$$

$$a^2+b^2+2ab \geq 4ab$$

$$a^2 -2ab+b^2 \geq 0$$

$$(a-b)^2 \geq 0$$

لاس ته راوړل شوې ویناوې $(a-b)^2 \geq 0$ بې بندیزه رښتیا دي۰ مګر دا د ښوولو وینا یواځې د شرایطو$a \geq 0$, $b \geq 0$ لاندې باور لري۰ له دې امله که له رښتیا وینا څخه غوښتل شوې یا د ښوولو ویناو ته نه شي راتلی(سیده ښوونه) او په ناسداړه یا غیرمستقیم ه ښوونه یا اوبیونه باندې استعمال شي نو ګټوره به وي، چې په لاندې توګه تر څېړنې لاندې ونیول شي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ ۰ ۲ ناسیده ښوونه یا - ثبوت:

په ناسیده ښوونه کې له یوه نفي یا نیګیشن یا نه والي څخه مخ ته ځو، چې A « ناغوښتنه» او له دې یوه وینا B لاس ته راوړل کیږي، کومه چې نارښتیا ده۰ وینا یعنې نفیې غوښتنه یا ثبوت هم نارښتیا دی، ځکه چې له یوې نارښتیا نیونې څخه یوه نارښتیا ښوونه یا ثبوت لاس ته راتلی شي(د ایمپلیکیشن څلورمه کرښه).

له یوې رښتیا نیونې څخه د یوې نارښتیا ثبوت لاس ته راوړنه نارښتیا ده۰ (د ثبوت د

رښتیا جدول څخه) که د غوښتنو نفی نارښتیا وي، نو غوښتنه بیا په دې اوبیونې یا حل کې رښتیا ده۰

بیلګه : ناسیده ښوونه یا ثبوت

نیونه V : a , b دې رییل ګڼونه وي او وي دې: $a \geq 0, \quad b \geq 0$

ښوونه یا غوښتنه B :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

اوبیونه : د غوښتنو نفیې ده $\frac{a+b}{2} \prec \sqrt{a.b}$

د پورته نابرابرون له څلورې یا مربع کولو له امله لاس ته راوړنه لرو:

$$(a+b)^2/4 < a.b$$

دواړه لورې له څلورو سره ضربوو، نو لاس ته راځی

$$(a+b)^2 < 4a.b$$

له څلورې وتنې یامربعوتنې څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^2+b^2+2ab < 4ab$$

په دواړو لورو د 4ab کموني څخه لاس ته راځي

$$a^2-2ab+b^2 < 0$$

د نابرابرون کینه لور د څلورئ ۰ مربع په بڼه لیکل کیدی شي او هیڅکله له صفر څخه نه شي کوچنی کیدی۰ دا په دې مانا، چې $(a+b)^2 < 0$ نارښتیا دی یا غلط دی، نو له دې سره $(a+b) < ab$ نارښتیا دی یانې

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

رښتیا دی ۰

۲ – غوښتنه B :د ۲ رېښه یا جذر $\sqrt{2}$ ایرشنل دی

اوبیونه یا حل : د غوښتنې نفیې ده، چې : د ۲ رېښه $\sqrt{2}$ ریشنل ګڼ دی (د ریشنل ګڼونو لپاره دې برخه ۳ وکتل شي)، نو باید بیا دوه ټولریشنل ګڼونه q, p, د $q\neq 0$ سره شته وي، چې دا باوري شي: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$

له دې پورته برابرون سره p^2 یو جوړه((جفت) ګڼ دی۰ نو له دې امله p هم یو جوړه ګڼ دی، ځکه چې یواځې د جوړه ګڼ مربع یا څلورئ جوړه کیدی شي $p=2p'$ له مربع یا څلورئ کولو او پر ځاي اینوولو لاس ته راځي:

$P^2 = 4p'^2$،

$2q^2 = 4p'^2$

$q^2 = 2p'^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له اخرنی برابرون لاس ته راځي، چې q هم یو ځلوری یا مربع ګڼ دی۰ په دې پسې لرو p او q پر ۲ ویشونی دی، یانې پرویشپردی نه دی۰ که پرویشپردي ټول ګڼونه p او q له $\sqrt{2}$

سره شته نه وي، نو دا ډول ټولګڼونه نه شي کیدی، چې شته یا موجود وي۰

۸ ۰ ۳ د پوره ایندکشن له لارې ښوونه

د پوره ایندکشن ثبوت یا حل د هغو غوښتنو لپاره کارول کیږي، چې د یوه ټاکلي ګڼ n0 (صفر باید لږ. د ن د پښی لاندې ولیکل شي) څخه د ټولو پیداینښتي ګڼونو لپاره باوري کیدی شي۰ یانې دلته نوینه داده، چې یوه وینا د لپاره که باور ولري، نو دا بیا د ټولو پیداینښت ګڼونو لپاره باور ي کیدی شي۰

بیلګه ۱ :

د ټولو n ≥ 0 لپاره ۲ په توان دn له صفر لوي یا له صفر بسره برابر دي یعنې باور لري: $2^n \geq 0$

بیلګه : د ټولو n ≥ 0 لپاره باور لري 1+3+5+… 2n+1)= n²

د پوره ایندکشن د ښوونې لپاره د « پوره ایندکشن پرینځیپ بنسټ» مخ ته پروت دی:

که یوه وینا دn= n0 یا(په لاندې، که ن،ج، ته پورته شو،نو صفر په پښه کېلیکل شوی) $n = n_0$ لپاره باور ولري او که د دې وینا د یوه په خوښه پیداینښتي ګڼ n = k لپاره اور لرلو څخه د n = k+1 لپاره باوریوالی ترې لاس ته راشي، نو دا وینا د ټولو پیداینښتي ګڼونو $n \geq n_0$ لپاره ریښتونې ده ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې په ترتیب د اینډکشن ښوونه په دوه پلونو یا قدمونو سرته رسیږي

۱ - د اینډکشن پیل

ښوول کیږي، چې دا وینا د $n \geq n_0$ لپاره باور لري

۲ – د اینډکشن پل

اوس باید یو ایمپلیکیشن یا لاس ته راوړنه وښوول شي٠ له دې امله د اینډکشن پل یا له برخه پلونو جوړ دئ

۲ الف: د اینډکشن نیونه :

نیول کیږي، چې وینا د $n = k \geq 0$ لپاره باور لي او دا نیونه په V فرمولبند کیږي

یادونه V د نیونې لپاره ځاي پرځاي کیږي یا راوړل کیږي٠

۲ ب – د اینډکشن غوښتنه:

غوښتل کیږي، چې دا وینا د $n = k+1$ لپاره باور لري او دا غوښتنه په B فرمولبندي کوو٠ دا په ګوته کوو، چې B دلته د غوښتنې پرځاي لیکو

۲ ج – د اینډکشن ښوونه :

ښوول کیږي، چې B له A څخه لاس ته راځي: A=>B

بیلګه ۱ :

۱ – د $n = 0$ لپاره باور لري $2^\circ = 1 > 0$

۲ ٠ ۱ ٠ V ته :

$2^k > k$

و ۲ ٠ ۲ B ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$2^{k+1} > k+1$

۲ ۰ ۳ له $B \Rightarrow V$: له $2^k > k$ او $1 > 2$ څخه د زیاتون له امله لاس ته راځي :

$2 + 2^k > k+1$

او له دې لاس ته راځي: $2.2^k > k+1, 2^{k+1} > k+1$

بیلګه ۲ :

۱ ۰ د $n = 1$ لپاره باور لري $1 = 1° = 1$

و ۲ ۰ ۱ V ته: $1+3+5++\ldots+(2k-1) = k^2$

و ۲ ۰ ۲ B ته:

و ۲ ۰ ۳ $B \Rightarrow V$ ته: له نیونې څخه د زیاتوون 2k+1 زیاتونې او له دې د ښي خوا د یوه بینومځلوری(-مربع) په څیر انځورونې څخه لاس ته راځي:

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1=k^2+2k+1$

او له دې د ښی خوا انځورونې څخه د بینوم څلوری(-مربع) لاس ته راځی :

$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)= (2k+1)^2$

یادونه : د V او B پر ځاي کړی شو، چې نیونه او غوښتنه ولیکو، یانې موږ درې څه لرو، چې نیونه غوښتنه او ښوونه ده۰ په هغه ورسره بلد ډول یې ښوونه د یوه پارابلم حل دی، چې ما اوبی یا اوبیونه بللی(اوبي پښتو ده او ښه کره، همدې وي یا لغات ته مناسب خپل د پښتو نوم دی، چې ورسره بلد هم یو، لکه ملګوبی، خړوبی، چې موخه ترې همدا اوبی دی او په نورو ژبو کې هم همداسې دی)

دلته د شمیرپوهنې سم اند درس ته د پای ټکی ږدو، کهٔ نور څه مو ښه مخ ته راغله هغه به بیا د ترڼې په ډول ورسره مل کړو۰ ستاسو وړاندیزونو ته هم سترګی په لار یم۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

۸ . ۴ تمرینونه

۱ – سیده وښایي

الف) له $a + 1/a = b$ څخه لاس ته راځي $a^3 + 1/a^3 = b^3 - 3b$

ب) د دوه تیرو کونجونو α ، β لپاره صدق کوي

$$\sin(\alpha + \beta) < \sin\alpha + \sin\beta$$

۲ – ناسیده وښایي :

الف) د ټولو x لپاره ، چې وي $0 < x < \infty$ ، صدق کوي

$$(3x - 4) / (2x + 4) > 1$$

ب) $\sqrt{2}$ یو ایریشنل ګڼ دی

۳ – د پوره اندکشن له لارې یې وښایئ

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{(n+1)\,n}{2}.$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{(2n+1)(n+1)\,n}{6}.$

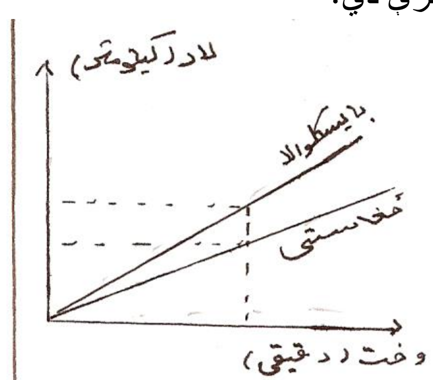
c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ ۰ کرښیز- یا خطي-یا لاینیز مساوات د یوې متحولې سره

پیل بیلګه

یو بایسکل ځغلوونکی او یو پلی له یوه ځایه په همغه وخت خوزي یا حرکت کوي، کوم چی په ګراف کی کښل شوی دی(که د ګراف کښل راته ناشوني شول بخښنه غواړم۰ که بل چا دا کار وکولی شو نو دا به یې هم مرسته وي، خو پرې پوهیدل کومې ستونځې نه لري) بایسکل په ګړی کی ۱۵ کیلومتره ځغلي او پلی ۱۰ کیلو متره په ګړی کي ځغلي. دوي پس له یونیم ساعت سره یوځاي کیږي. هر یو څومره لار وهي او یو له بل څومره لرې دي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا مور دلته، لکه په ځنو کتابونو کی چی د فنکشن د نامه لاندې ياديږي، په همغه نامه نه يادوو خو هدف به همغه وي که دا د برابرون يا مساوات په نامه وبولو .
وخت) په دقيقه (په t ښايو لار) کيلومتر(په s ښايو د لارانځورونی څخه په ګراف کی ښرګنديږي چی بايسکلځغلوونکی له ۶۰ دقيقو وروسته ۱۵ کيلو متره ځغليدلي يعني 15km /hاو پلی ۱۰ کيلو متره يعني 10km/h
غواړود هرڅه لمړی وښايو چی هر يو له يونيم ساعت وروسته څومره لار وهلي او بيا دويمي پوښتني ته ځواب ورکوو.
بايسکل ځغلوونکی به له دوه ساعته وروسته 2.15km = 30 km ځغليدلی وي او پلی به 2.10km=20kmځغليدلی وي بايسکل ځغلونکی به له tوخته وروسته t.15km
15.tkm=لار وهلي وي. دلته وختt خپلواك اوړيدونی يا نا پژندونکی او لار s بلواك اوړيدونی يا ناپيژندونکی يعني د t په واك کی دی. دا کليمي به بيا د فنکشن او څيرونو په برخو کی پوره تر څيرني لاندې ونيول شي. د بايسکل ځغلوونکي وهلې لار، چی په r يې ښايو برابرون داسی ليکو:

$$S_r = 15.t; t \in Q_0^+$$

د بايسکل ځغلونکی وهلی لار، tچی د بايکلځغلولو وخت دی طبعآ زياتيز يا مثبت دی ورته دپلي چی په lيي ښايو وهلي لار هم تاکل کيږي،يعني د l وهلی لار:

$$S_l = 10.t; t \in Q_0^+$$

له دې سره مو وښوول چی دواړه له پيل ټکي له 1,5 ساعته يو له بل څومره لرې دي. وهل شوې لار :

د بايسکل ځغلوونکي $S_r = 15.1,5 = 22,5km$

د پلي $S_l = 10.1,5 = 15,0km$

ددې په تعقيب له 1,5 ساعته وروسته دواړه يو له بل 7,5 km لرې دي .

۹ . ۱ لاينيز- يا کرښيز مساوات :

د کرښيز مساوات فرمول د يوې اوښتونې يا مجهولې x سره داسی دی

$$Ax = a \qquad (9.1)$$

دلته A , a حقيقي اعداد دي. د (۱ . ۶) برابرون اوبيونه (حل) دا مانا لري چی ټول هغه حقيقي اعداد وښوول شي چی که په پورته (۱ . ۹) برابرون يا مساوات کې ځای په ځای شي، د مساوات شرايط پوره کړي. د حقيقي اعداد و بنسټيز قانون (۳ – مجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

برخه دې وکتل شي) په بنسټ کيدی شي چې د حقيقي عددد مساوات دواړه خواوي په يوه عدد سره ځل يا ضرب کړو. بی له دې چی مساوت زخمي شي. داچی ويش په د $\frac{1}{A}; A \neq 0$ ځل سره برابر دی نو ليکل کيږي

$$x = \frac{a}{A}; A \neq 0; ....(9,2)$$ ....

دا د (۱ . ۹) يواځنی ممکن حل دی۰که په څټ يا برعکس A = 0 وي، نو دلته دوه حالتونه يو د بل توپيروو

۱ – که $a \neq 0$ وي: دا مساوات بيا داسی دي $0.x = a; a \neq 0$

دا يو مخامخوالی يا تضاد يا نوره هم ښه په ځتوالی تشکيلوي ، نو په دې حالت کی حقيقي عدد x شته نه دی چی دا(۱ . ۹) مساوات پوره کړي.

۲ - که a = 0 وي، نو بيا برابرون (۱ . ۹) لاندې شکل نيسي

$$0.x = 0$$

دا برابرون بيا د ټولو رييلګڼونو xلپاره پوره (ډك) دی. يا برابرون پوره کوي.

دا بيا داسی هم ليکل کيږي : (په خوښه x = (belپس دا لاندې باور لري:

برابرون (۱. ۹ .) د $A \neq 0$ لپاره يواځنی ټاکلې اوبيونه (۹ .۲) لريد A = 0 او $a \neq 0$ لپاره اوبيونه نه لري د A = 0 او a = 0 لپاره هر رييلګڼ x اوبيونه يا حل دی.

په دې لاس ته راوړنوکی، د يوې اووښتونې يا مجهولی سره د رييل برابرونونو د ګڼلو ټوله تيوري خوندي ده .

يو لاينيز برابرون (مساوات) (يو برابرن، چی د برابرونونو په دواړو خواوکی د لاينيزو برابرونونو ترمونو زياتون $a_i + x_i + b_i$ پرت وي) دا مخکني نورمالفورم (۹ . ۱) مو له مخه مخ ته نه دی پروت، پس سړی په دواړو خواو د لاينيزو ترمونو د هدف په لور زياتون (همداسی کمون) له لارې همغه مخکني نورمالفورم ته بيرته راوړوي، دا د II . 2 بنسټيز قانون له مخی يو ورته فورمبدلون يا بڼه بدلون دی)(د اوبي يا حل ډيری تغير نه دی خوړلی) د بيلګې په توګه لاندې مساوات ورکړ شوی

$$a_1x - b_1x + c_1 - d_1 = a_2x - b_2x + c_2 - d_2$$

پس کيدی شي چی په دواړو خوا $b_2x + d_1$ ور زيات کړو او $a_2x + c_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترې کم کړو، نو لاس ته راځي

$$a_1x-b_1x-a_2x+b_2x=c_2-d_2-c_1+d_1; \qquad (9.3)$$

دلته هغه د x لرونکی غړي د مساوات په کیڼ لور او ثابت د برابرون په ښي لورپراته دي. داسی لیکو

$$A=a_1-b_1-a_2+b_2; a=c_2-d_2-c_1+d_1$$

نو دا برابرون (۳ . ۹) د برابرون (۱ . ۹) سره (ته) کټمټ (ورته) دی، که په لاندې فورم یا بڼه یو مساوات ورکړ شوی وی

$$\frac{a_1}{a_2}x=\frac{b_1}{b_2}$$

(دا ټیك هلته موخه ور یا هدفمند دی چی $a\neq 0; b\neq 0$ وي) . نو برابرون د x په لور حل کیدلی شي ، که دا په a2 ځل شي او د a1 |=0 په حالت کی په a1 وویشل شي:

$$x=\frac{a_2b_1}{a_1b_2}$$

بیلګه ۹ . ۱ :

برابرون $\frac{a^2x-b^2}{a}-\frac{a(b-ax)}{b}+\frac{b^2}{a}$ هلته موخه ور دی چی $a\neq 0; b\neq 0$ وي. ددې لپاره چی د ماتلاندې ښخه ځانونه خلاص کړو، نو پورته ورکړ شوي برابرون د ګډماتلاندي a.b سره ځل کوو:

$$b(a^2x-b^2)-a^2(b-ax)+b^2=a^2b$$

$$a^2bx-b^3-a^2b+a^2x+b^3=a^2b$$

اوس برابرون ترتیبیږي او راټولیګی، xله نوکانو ښخه راوځي

$$a^2bx+a^3x=a^2b+b^3+a^2b-b^3$$

$$a^2(ax+b)=2a^2b$$

د $a\neq 0$ له امله کیدی شي په a^2 وویشل شي (a+b)x=2b

دا د لاینیز برابرونونو بنسټیزه بڼه (فورم) (۱ . ۹) ده

که ($a+b\neq 0, (a\neq -b)$ وي ، نو(x = 2b /(a + b

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوګونی یا یواځنی اوبیونه یا حل دی
که(a = -b) a + b = 0 ، نو د $b \neq 0$ له امله اوبیون شته نه ده .
هغه حالت چی ناپاي زیاتي اوبیوني یا حلونه منځ ته راځي(د x =په خوښه) ، د نیونی یا فرضیي له امله چی باید $b \neq 0$ وي، موجود نه دی.
پام:
په دې هکله زیاتې بیلګی کیدی شي راوړل شي، چې ضریب یا ځله ووني په مختلفو توانونو وي۰ زه دلته یواځې دومره یادونه کوم، چې په مساواتو کې، چې اوښتونی یا متحولې ولري، همغهسی شمیرل کیږي، لکه په ریبلعددونو کې۰
دلته هم باید دې ته پام وي، چې ماتلاندې صفر نه شي۰ که چیرې اړیینې وې او یا ګرانو لوستونکو یې راوړل وغوښتل، نو زه به بیا دا کار سرته ورسوم او بیلګې به هم راوړم او که چیرې کوم د شمیرپوهنې مینه وال په دې هکله د پوښتنو ځوابونه غوښتل، زه به وهڅیږم او دا کار به هم سر ته ورسوم، که لوي څښتن غوښتل۰ زه دومره یادونه کوم، چې په دې هکله زما د شمیرپوهنې بنسټیز کتاب کې زیاتې بیلګې راوړل شوي، خو نه پوهیږي، چې دا کتاب به چا ته ورسیږي او که نه

بیلګه 9 . ۲ :
برابرون $(x/a)-((a-x)/2bc)+(a-x)/3c =1$ یواځې
د $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ لپاره موخه ور دی.
ددې لپاره چی مات لاندې له منځه یوسو، نو مساوات د ا.م.ل. 6abc ا(صلي ماتلاندې)
سره ځل کوو: $6bcx-3a(a-x)+2ab(a-x) =6abc$
وروسی نور، په لاندې ډول، د څرګندو شمیرلارو یا - قاعدو له لارې لاس ته راځي:

$$6bcx-3a^2+3ax+2a^2b-2abx=6abc$$

$$(6bc+3a-2ab)x=6abc+3a^2-2a^2b,$$

$$(6bc+3a-2ab)x=a(6bc+3a-2ab)$$

دا بیرته د لاینې مساوات (۹ . ۱) بنسټیښه ده، او له دې امله صدق کوي:
د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره x=a د مخ ته پراته مساوات یواځنی حل دی.
د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره د $0x = 0$ له امله هر ریبل کڼ x اوبیونه ده.
نو لرو x=a د $6bc+3a-2ab \neq 0$ لپاره د $6bc+3a-2ab = 0$ لپاره x په خوښه
دلته د څیړل شوو برابرونونو، چی په ساده ډول یی لاینیزوالی یا لاینیزتوب پیژندل کیږي، په څنګ کی برابرون شته چی په اصل (پرینځیپ) کی کرښیز یا لاینیز نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

مګر په لاینیز مساوات یا برابرونونو اړول کیدی شي. دلته ددې غوښتنو په څنګ کی چی د ناپیژندونکو ضریبونو a,b,c ..... لپاره شوي، زیات وخت په x هم شرطونه ایښول کیږي.
ددي لپاره لاندې کی درې ساده بیلګي راوړو:

بیلګه ۹ . ۳ :
برابرون $(8x - 9)(3x - 4) - (5x - 6)^2 = (4 + x)(3 - x) - 9$
د لومړي ځل لپاره څلوری برابرړن یا مربع مساوات دی، ځکه چی څلوری(مربع) غړي لري. د یو له بل څلولو یا ضربولو وروسته څلوری غړي له منځه ځي. یو لاینې مساوات د یوې ځانګړي سره سره پاتي کیږي:

$$24x^2 -32x-27x+36 - (25x^2 - 60x + 36) = 12 - 4x +3x -x^2 -9$$

$$-x^2 + x = 3 - x - x^2$$

$$2x = 3$$

$$x = 3 / 2$$

بیلګه ۹ . ۴ : برابرون $(2x -a) / (x-b) = 1$ یواځي هلته هدفمند دی که حل x دا شرط $x \neq b$ پوره کړي. نو بیا لرو: $2x-a=x-b \Rightarrow x=a-b$
د $x \neq b$ له امله باید باوري وي $a - b \neq b$ له دې امله لرو $a \neq 2b$ پس ورکړ شوی مساوات د $a \neq 2b$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a-b$ لري او پرته له دې ($a = 2b$) حل نه لري.

بیلګه ۹ . ۵ :
مساوات $(a / x) + (b / x) - (c / x) = 1$
یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري . $x = a + b -c$ دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځي هلته حل دی، کله چی $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځي د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b -c$ لري، په غیر له دې ($a+b=c$) حل یا اوبیونه نه لري

بیلګه ۹ . ۶ : د لاندې مساوات څیړنه:

$$\frac{b^3c^2x-\frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3}-\frac{a^2x-\frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc}+\frac{abcx-\frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2}=0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې ټيك د $abc \neq 0$ لپاره يو هدف لري، بايد د اصلي مات لاندې پيدا كولو لپاره د مات لاندې ك.ګ.ځ. تکرار شي

$$12150ab^4c^3 = 2^2.3^5.5^3.a.b^4.c^3$$
$$2880a^3bc = 2^6.3^2.5.a^3.b.c$$
$$5400(abc)^2 = 2^3.3^3.5^2.a^2.b^2.c^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2^6.3^5.5^3.a^3.b.c^3 = 64.243.125.a^3bc^3$$

دا پورته ګڼ اصلي ماتلاندې (ا.م.ل) دی

كه برابرون د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي:

$$16a^2(b^3c^2x - \frac{1}{a^2}) - 225b^3c^2(a^2x - \frac{1}{b^3c^2}) + 120c.(abcx - \frac{1}{ab^2c}) = 0$$

د نوكانو يو له بل ځلولو راټول، ترتيبونه او ويشنه د x تر څنګ ولاړو فاكتورونو يا ضريبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نيونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړكيږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2,\ abc \neq 0$$

د دې وظيفي لپاره د حل نور امكانات نه شته.
تر اوسه مو هغه ماتونه وڅيړل چې مات لاندې يي له ځلونو جوړ وو، غواړو چې اوس داسې ماتونه وڅيړو چې مات لاندې يي له زياتونونو جوړ وي، چې د نوكانو له لارې په ځلوونو ټوټه كيدلي يا تجزيه كيدلی شي .

بيلګه ۹ . ۷ :
برابرون

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2} + \frac{b}{a^2b+b} = \frac{a^2bx}{a^2bx-b} + \frac{b^2(2ax-3)}{a^4x^2x^2-b^2} - 1$$

ټيك د دې نيونو سره صدق كوي $ab \neq 0$, $|x| \neq 1 / a^2$. :

(c) ketabton.com: The Digital Library

اصلي مات لاندې) ا م ل (په لاندې ډول پيداکوو

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 -1)$$

$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$

$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$

$$a^2bx - b = b.(a^2x-1)$$

$$b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a4x^2 - 1 =$$

اصلي ماتلاندى)ا م ل

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو) چي يو يا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بنديږي(، لنډونو او ځلوونو له لارې لاس ته راځي

$$.....a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) = a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1)$$

$$2a^2bx - a^2 + a^2b^2x - b^2 = a^4b^2x^2 + a^2b^2x + 2ab^2x - 3b^2 - a^4b^2x^2 - b^2$$

$$.............2a^2bx - 2ab^2x = a^2 - b^2$$

$$.................2ab(a-b)x = (a+b)(a-b)$$

$$..................................x = \frac{a+b}{2ab}$$

د $b \neq a$ او $0 \neq ab$ لپاره(دا د نيونو له لارې تل پوره دی)که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$له امله په خوښه ارزښتونه نيولی شي، بی له هغو چی په بنسټيزو نيونو کی له نيونو د باندې ساتل شوي وي) يعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي(. په دې حالت کی د xمطلقه ارزښت د کښونو $a = b$ د په څټ ارزښت سره نه شي مساوي کيدی .د x لپاره نيول شوې نيونی د حل ورکولو کی بايد په پام کی نيول شوي وي دا په دې مانا چي بايد تل پوره وي:

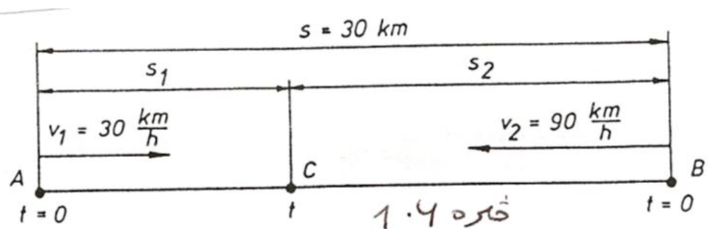
$$\pm 1 / a^2 \neq \frac{a+b}{2ab}$$

بيلګه ۹ . ۸ :

دوه ګاډې تمځايونه Aاو B يو له بل km30 لرې دي. د A څخه يو بارګاډی په ساعت کی د ديرش کيلومتره 30km/h په يوه ثابت سرعت يا چټکتيا باندې د B په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

خوزيږي. د Bڅخه يو تيز ګاډی D د 90km/h ثابت سرعت سره دA په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به يو بل سره مخامخ شي؟دلته درې فزيکي لويي يو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو t , s او vسره وښول شي. ددې شي ځانتيوني لپاره څيره ځېره وکاږئ



څيره ۱۰۴

پوښتنه » چيرته « د دواړو ګاډو د يوځايوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کيدی شي د A څخه و C ته لرېوالي(د بار کاډي لارs1) يا د Bلرېوالي وC څخه(د تيزګاډي D لار s2) سره وشميرل شي. پوښتنه »کله« د ګاډو يوځايوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دئ کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانيدو تر يوځايکيدو وټاکو. دلته درې اوړېدوني يا مجهولی مخ ته لرو s1 , s2 او t .

د پورته ورکړشو شي نيونی سره مناسب لاندې اړيکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باورې ارزښتونو مارونې يا استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\ t \quad , s_2 = 90\ t \quad , s_1 + s2 = 30$$

(دلته د اندازی يونونه(واحدونه) پرېښوول کيږي. او پريکړه کوو چی لار په کيلو متر او وخت په ساعت ښايو)!

دا درې مجهولی s1 , s2 او t دی د دې برابرونونو يا مساواتو سره چی حل به يی په همداسی په برخه ۱۱ کی ورکړشوی وي، مګر دا دومره ساده دې چي د يوې له پيژندلو سملاسي نورې هم شميرل کيدی شي. کيدی شي چی دا مساوات په يوې مجهولی مساواتو بيرته واړول شي. ددې مجهولی x په ځای کيدی شي s1 , s2 او t وټاکل شي .

که وليکو s1 = x ، نو د اخري برابرون څخه لاس ته راځي .s2 = 30 - x دا په لمړنيو دوه مساواتو کی ځاي په ځاي کوو او دواړه د t په لور حلوو:

$$t = s1 / 30 = s2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو: $x / 30 = (30-x) / 90$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاینیز ټاکنبرابرون یا ټاکنبرابرون د x لپاره دی، چی ساده حل کیدی شي:

$30x = 30 - x \; , \; 4x = 30 \quad x = 7,5$

نو لرو

$s_1 = 7,5 \text{ km} \; , \; s_2 = 22 \; , 5 \text{ km} \; , \; t = (7,5 / 30)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$

که ولیکو $s2 = x$ ، نو شمیرنه لاندې لار غوره کوي یا بهیر نیسي:

$s_1 = 30 - x \; , \; t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = (30 - x)/ 90$

$3(30 - x) = x$

$90 = 4x$

$x = 22,5$

$s_2 = 22,5\text{km} \; , \; s_1 = 7,5 \text{ km} \; , \; t = (22,4/90)h = 1h/4 = 15 \text{ min}$

که بالاخره وخت $t = x$ د اووښتوني یا ناپیژندونی په څیر وټاکو، نو بار لري یا صدق کوي: $s1 + s2 = 30x + 90 \; x = 30$

$20x = 30$

$x = 30 / 120 = 1/ 4 \; , \; t = (1 /4)h = 15 \text{ min}$

$s1 = 30t = 30 /4 \text{ km} = 7,5\text{km}$

$s2 = 90 \; t = 22,5 \text{ km}$

دواړه ګاډي له ټکی A څخه د 0,25 h= 15 min حرکت وروسته په 7 , 5 km لریوالی یو بل سره مخامخ کیږي

بیلګه ۹ . ۵ – مساوات $(a/x)+(b/x)-(c/x)=1$

یواځي هلته هدفمند دی چی $x \neq 0$ وي. ددې نیونو لاندې باور لري $x = a + b - c$. دا نو د $x \neq 0$ له امله یواځې هلته حل دی، کله چې $a + b \neq c$ وي. پس ورکړ شوي مساوات یواځې د $a + b \neq c$ لپاره یواځنی ټاکلی حل $x = a + b - c$ لري، په غیر له دې $(a+b=c)$ حل نه لري.

بیلګه۹ . ۶ – د لاندې مساواتو څیړنه

$$\frac{b^3c^2x - \frac{1}{a^2}}{121500ab^4c^3} - \frac{a^2x - \frac{1}{b^3c^2}}{2880a^3bc} + \frac{abcx - \frac{1}{ab^2c}}{5400(abc)^2} = 0,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی تیك د $abc \neq 0$ لپاره یو هدف لري، باید د اصلي مات لاندې پیدا کولو لپاره د مات لاندې ك.گ.څ. تکرار شي.

$121500ab^4c^3 = 2^2 . 3^5 . 5^3 .a . b^4 .c^3$

$2880a^3bc = 2^6 .3^2 .5.a^3.b . c$

$5400\, a^2b^2c^2 = 2^3 .3^3.5^2.a^2b^2c^2$

اصلي ماتلاندې لنډ «ا م ل» $= 2^6 . 3^5 .5^3 .a^3b.c^3 = 64.243.124.a^3bc^3$

که مساوات د ا.م.ل. سره ځل شي، نو ماتونه له منځه ځي او لاس ته راځي

$$16a^2\cdot\left(b^3c^2x-\frac{1}{a^2}\right)-225b^3c^2\cdot\left(a^2x-\frac{1}{b^3c^2}\right)+120ab^2c\cdot\left(abcx-\frac{1}{ab^2c}\right)=0.$$

د نوکانو یو له بل څخلولو راټول، ترتیبونه او ویشنه د x تر ځنګ ولاړو فاکتورونویا ضریبونو ($A = 89a^2b^3c^2 \neq 0$) څخه د نیونو سره سم دا لاندې لاس ته راوړکیږي

$$x = 1 / a^2b^3c^2 \quad , \quad abc \neq 0$$

د دې وظیفې لپاره د حل نور امکانات نه شته.

تر اوسه مو هغه ماتونه وڅېړل چی مات لاندې یې له څلونو جوړ وو، غواړو چی اوس داسی ماتونه وڅېړو چې مات لاندې یې له زیاتونونو جوړ وي، چی د نوکانو له لارې په څلونو توټه کیدلي یا تجزیه کیدلی شي.

بیلګه ۹ . ۷ :

$$\frac{a^2(2bx-1)}{a^4b^2x^2-b^2}+\frac{b}{a^2bx+b}=\frac{a^2bx}{a^2bx-b}+\frac{b^2(2ax-3)}{a^4b^2x^2-b^2}-1$$

تیك د دې نیونو سره صدق کوي: $|x| \neq 1 / a^2 \;,\; ab \neq 0$.

اصلي مات لاندې(ا م ل) په لاندې ډول پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a^4b^2x^2 - b^2 = b^2.(a^4x^2 - 1)$$
$$= b^2.(a^2x+1)(a^2x-1)$$
$$a^2bx + b = b.(a^2x+1)$$
$$a^2bx - b = b. \qquad (a^2x-1)$$

اصلي ماتلاندی(ا م ل) $= b^2.(a^2x+1).(a^2x-1) = b^2(a^4x^2 - 1)$

د اصلي مات لاندې مساواتو له نوکانو څخه راوتلو (چې یو یا څو غړی د نوکانو دباندې او نور په نوکانو کی بندیږي) ، لنډونو او څلوونو له لارې لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} a^2(2bx-1)+b^2(a^2x-1) &= a^2b^2x(a^2x+1)+b^2(2ax-3)-b^2(a^4x^2-1) \\ 2a^2bx-a^2+a^2b^2x-b^2 &= a^4b^2x^2+a^2b^2x+2ab^2x-3b^2-a^4b^2x^2+b^2 \\ 2a^2bx-2ab^2x &= a^2-b^2 \\ 2ab(a-b)x &= (a+b)(a-b) \\ x &= \frac{a+b}{2ab} \end{aligned}$$

د $a \neq b$ او $ab \neq 0$ لپاره (دا د نیونو له لارې تل پوره دی)

که $a = b$ وي، نو x د $0.x = 0$ له امله په خوښه ارزښتونه نیولی شي، بې له هغو چې په بنستیزو نیونو کې له نیونو د باندې ساتل شوي وي(یعني په مساوات کی ځاي ورته نه وي). په دې حالت کی د x مطلقه ارزښت د کنونو $a = b$ د په ځنې ارزښت سره نه شي مساوي کیدی.

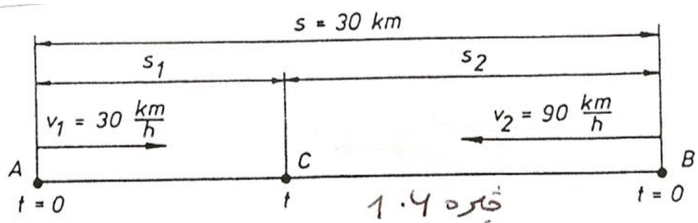
د x لپاره نیول شوې نیونې د حل ورکولو کې باید په پام کې نیول شوي وي؛ دا په دې مانا چې باید تل پوره وي:

$$\pm 1 / a^2 \neq (a+b) / 2ab$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۶ . ۸ : دوه ګاډي تمځایونه A او B یو له بل 30 km لرې دي. د A څخه یو بارګاډی په ساعت کی د دیرش کیلومتره 30 km/h په یوه ثابت سرعت یا چټکی باندې د B په لور حرکت کوي. دB څخه یو تیز ګاډی D د 90km / h ثابت سرعت سره د A په لور حرکت کوي. که دواړه ګاډي په همغه وخت کي حرکت وکړي ، کله به یو بل سره مخامخ شي؟

دلته درې فزیکي لویي یو رول لري : لار، وخت او سرعت. دا به په سومبولونو s , t اوv سره وښول شي. ددې شي ځانتیوني لپاره څیره ۶ . ۱ ورکړ شوې.



څیره ۶ . ۱

پوښتنه « چیرته » د دواړو ګاډو د یوځایوالی ټکی C ته متوجه ده. دا کیدی شي د A څخه و C ته لریوالي(د بار کاډي لار s_1) یا د B لریوالي و C څخه (د تیزګاډي D لار s_2) سره وشمیرل شي.

پوښتنه «کله» د ګاډو یوځایوالي وخت t ته متوجه ده. دا هدفمند دی کی د وخت لپاره د وخت کمون له روانیدو تر یوځایکیدو وټاکو.

دلته درې مجهولی مخ ته لرو s_2 , s_1 او t . د پورته ورکړشو شي نیونی سره مناسب لاندې اړیکی باور لري:

$$v_1 = s_1 / t \quad , v_2 = s_2 / t \quad , \quad s_1 = + s_2 = s$$

د باوری ارزښتونو استعمال سره لاس ته راځي

$$s_1 = 30\,t \ , \ s_2 = 90\,t \quad , s_1 + s_2 = 30$$

(دلته د اندازی یونونه پرینښوول کیږي. او پریکړه کوو چی لار په کیلو متر او وخت په ساعت ښایو!)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دري مجهولې s_2 ، s_1 او t دی د دري مساواتو سره چې حل به یې په ۶ الف او یا همداسې په برخه ۱۱ کې ورکړشوې وي، مګر دا دومره ساده دي چې د یوې له پیژندلو سملاسي نورې هم شمیرل کیدی شي. کیدی شي چې دا مساوات په یوې مجهولې مساواتو بیرته واړول شي. ددې مجهولې x په ځای کیدی شي s_2 ، s_1 او t وټاکل شي. که ولیکو $s_1 = x$ ، نو د اخري مساوات څخه لاس ته راځي $s_2 = 30 - x$. دا په لمړنیو دوه مساواتو کې ځای په ځای کوو او دواړه د t په لور حلووو:

$$t = s_1 / 30 = s_2 / 90 = x / 30 = (30 - x) / 90$$

نو لرو

$$x / 30 = (30 - x) / 90$$

لاینې ټاکنمساوات د x لپاره دي، چې ساده حل کیدی شي:

$$30x = 30 - x\ ,\ 4x = 30$$

$$x = 7{,}5$$

$$s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad s_2 = 22{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{7{,}5}{30}\,\text{h} = \frac{1}{4}\,\text{h} = 15\,\text{min}.$$

نو باور لري:

که $s2=x$ کیږدو،نو شمیرنه په لانې ډول ځغلي یا لاندې لار غوره کوي:

$$s_1 = 30 - x,\quad t = \frac{s_1}{30} = \frac{s_2}{90} = \frac{30 - x}{30} = \frac{x}{90}\,,$$

$$3\,(30 - x) = x,$$

$$90 = 4x,$$

$$x = 22{,}5,$$

$$s_2 = 22{,}5\ \text{km},\ s_1 = 7{,}5\ \text{km},\quad t = \frac{22{,}5}{90}\ \text{h} = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\,\text{min}.$$

که بالاخره وخت د نامعلومې په څیر وټاکل شي، یعنې $x=t$ ، نو باور لري:

$$s_1 + s_2 = 30x + 90x = 30,$$

$$20\,x = 30,$$

$$x = \frac{30}{120} = \frac{1}{4},\quad t = \frac{1}{4}\ \text{h} = 15\ \text{min}.$$

$$s_1 = 30\,t = \frac{30}{4}\ \text{km} = 7{,}5\ \text{km},$$

$$s_2 = 90\,t = 22{,}5\ \text{km}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه ګاډي له ټکي A څخه د 0,25h=15min خوزښت(حرکت) وروسته په 17,5km کې یو بل سره مخامخ کیږي.

۹ . ۲ تمرینونه

۱ . ناکرښیز یا نالاینیز مساوات د یوې مجهولې سره

لاندې مساوات حل کړئ او a او b نتیجه یې د ازمایئ! د مجهولو ضریبونو سره ارزښتونه راوباسئ؛ چې a او b یې نه شي غوره کولی یا نیولی.

دا ورکړئ چې مساوات د کومو a او b لپاره یواځنی حل لري، حل نه لري او یا ناپای ډېر حلونه لري.

همداسې تلنه طا رویه د نورو مجهولو ضریبونوسره هم وکړئ، چې په نورو برخو کې منځ ته راځي.

۱ . ۱ –بې له کسرونو یا ماتونو مساوات حل کړئ.

1.1.1. a) $8\left(\frac{1}{2}x-1\right)-2(x-1)=0$

b) $(3-x)(x+4)-9=(3x-4)(8x-9)-(5x-6)^2$

c) $2a(x+3)=(3+x)(5+2a)$

d) $3a-(7b+11a)-(3x-12b-9c)=(3x-8a)+5b-(3c-6x)$

1.1.2. a) $(a-x)(x+c)=2c(a-x)-(b-x)(c-x)$

b) $a(x+1)(ax+b)+b(a+bx)(1-x)=x^2(a-b)(a+b)$

c) $(x+a)(a-x)-b(b-a)=(x+a)(b-x)$

d) $a^2(x-a)+ab^2=b^2(x+b)-a^2b$

۱ . ۲ – کسري مساوات په مخرج کې د ټاکلو ضریبونو او فاکتورونو سره .

1.2.1. a) $\frac{3x-16}{3}+\frac{2x-10}{5}=3-\frac{x+1}{15}$ b) $4-\frac{10-3x}{5}=3-\frac{10-7x}{10}+\frac{x}{2}$

c) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}=1-\frac{7x+1}{8}$ d) $\frac{4x+1}{3}+\frac{6x-1}{2}=5+5\cdot\frac{8x-10}{9}$

1.2.2. a) $\frac{4x-3}{20}-\frac{1}{12}(4x-5)=1-\frac{3}{5}(2x+11)$

b) $3(6\frac{1}{2}+x)-\frac{7}{3}(2x-\frac{19}{2})-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}=0$

c) $\frac{7x-16}{3}-\frac{4}{5}(x+1)+6=\frac{3x}{2}$ d) $\frac{3x}{4}-\frac{4}{3}(x-4)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.2.3. a) $\frac{3x-7}{5}-\frac{7-4x}{7}=\frac{5x-11}{10}-\frac{19-10x}{14}$

b) $\frac{17+4x}{10}-\frac{7+x}{5}=\frac{7x+13}{25}-\frac{5+x}{20}$

c) $\frac{2x-11}{15}-\frac{x}{5}+\frac{59}{40}=\frac{8x-59}{30}-\frac{16x-145}{24}$

d) $\frac{4x+4}{5}-\frac{5x-4}{55}=\frac{2x+9}{4}-\frac{12x-3}{44}$

1.2.4. a) $\frac{5x+17}{3}-\left(\frac{3x+8}{2}-3\right)=\frac{3x+12}{2}-\left(\frac{x+4}{6}+3\right)$

b) $2-\left(\frac{3x+8}{4}-\frac{2x+2}{3}\right)=1-\left(\frac{7x+20}{8}-\frac{2x-7}{3}\right)$

c) $\frac{4-x}{2}-\left(\frac{8-x}{3}-\frac{x+2}{4}\right)+\left(\frac{8-x}{6}-\frac{3(2+x)}{8}\right)+x=1$

d) $\frac{10-14x}{8x}-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{2x}\right)=\frac{5}{8x}-\left(\frac{12}{5}+\frac{14x+1}{10x}\right)$

۱ . ۳ – کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

1.3.1. a) $\frac{ax-1}{bcx}+\frac{bx-1}{acx}+\frac{cx-1}{abx}=0$ b) $\frac{ax-b}{bcx}+\frac{bx-c}{acx}+\frac{cx-a}{abx}=0$

c) $\frac{3(x-b)}{a}-\frac{2(x-a)}{b}-1=0$ d) $\frac{a-b^2}{x}-\frac{c-b^2}{x}-b=0$

1.3.2. a) $\frac{bx-a}{a}+b=bx-1$ b) $\frac{x-a}{a}-a=\frac{x-b}{b}-b$

c) $\frac{a+b}{x}-a=ab-\frac{a-b}{x}$ d) $\frac{ax^2-bx+1}{a}=\frac{bx^2-ax+1}{b}$

1.3.3. a) $\frac{bx-a^2}{a}+\frac{ax-b^2}{b}=\frac{b-ab}{a}+\frac{a-ab}{b}$

b) $\frac{20a-x}{5a}+\frac{6b-cx}{2b}=10-\frac{9c-ax}{3c}$

c) $\frac{a^3}{b}(x-1)-\frac{b+c}{b}(1-2x)=b^2(1-x)+\frac{b+c}{b}$

d) $\frac{x(b-a)}{ab}+\frac{b(c-x)}{ac}=\frac{x+b}{a}-\left(\frac{b}{c}+\frac{x}{b}\right)$

۱ . ۴ - کسري – یا ماتمساوات، چې په مخرج کې یې نا ټاکلي ضریبونه او فاکتورونه ورکړشوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.4.1. a) $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{2(x+2)}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(x+2)}$ b) $\frac{12x+5}{16x-15}-\frac{16x+1}{15}=\frac{3-2x}{5}-\frac{2x-1}{3}$

c) $\frac{10-2x}{3}+\frac{13+2x}{7}=\frac{14x+26}{2x+21}-\frac{17+8x}{21}$

d) $\frac{2x^n+7x^{n-1}}{9}+\frac{7x^n-44x^{n-1}}{5x-14}=\frac{4x^n+27x^{n-1}}{18}$

1.4.2. a) $\frac{8x+7}{9x^2-4}=\frac{16}{15x-10}$ b) $\frac{24-5x}{6-2x}-5=\frac{34-14x}{9-3x}$

c) $\frac{x+4}{12x+4}-\frac{x-4}{3x+1}=5$ d) $\frac{10x-11}{12x+18}=\frac{3}{2}-\frac{4x+1}{6x-9}$

e) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{3x-6}=\frac{1}{6}$ f) $\frac{8-x}{5-10x}=2-\frac{5}{3-6x}$

g) $\frac{12x}{10x+5}+\frac{6x-10}{2x+1}-\frac{2x+25}{12x+6}+\frac{10x-1}{8x+4}=2$

h) $\frac{3x-2}{5x+10}-10=\frac{2x+1}{3x+6}+\frac{2(1-4x)}{x+2}$ i) $\frac{6x-1}{4x-6}+\frac{10x-7}{6x-9}=11-\frac{14x+1}{8x-12}$

j) $\frac{3x}{2x-\frac{1}{2}}-\frac{16x^2}{3(4x-1)}=\frac{4(1-x)}{3}-\frac{4}{12x-3}$

1.4.3. a) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+4}{x-2}=2\frac{x-38}{x^2-4}$ b) $\frac{12}{x+4}-\frac{x+4}{x-4}+\frac{x^2}{x^2-16}=0$

c) $\frac{5x^2-120}{10-x}+\frac{3x^2+80x}{10+x}=\frac{2x^3+160}{100-x^2}$

d) $\frac{15x+2}{5x-2}+\frac{25x-2}{5x+2}=\frac{200x^2-25x+18}{25x^2-4}$

e) $\frac{16x^2-20x+4}{4x^2-16}=\frac{2x-1}{2x-4}+\frac{3(2x+1)}{2(x+2)}$

f) $\frac{7x^2+8}{2(x^2-1)}=\frac{2(x+1)}{x-1}+\frac{3x-4}{2x+2}$

g) $\frac{16x^2-6x}{2x+1}-\frac{6x}{1-2x}=\frac{32x^3-16x^2+4x+16}{4x^2-1}$

۱ . ۴ . ۴ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $\frac{2x-5}{x-5}+\frac{3x-5}{x-9}=\frac{5x^2-39x+30}{x^2-14x+45}$

b) $\frac{2x-9}{x-12}+\frac{x-6}{x-24}=\frac{3x^2-87x-36}{x^2-36x+288}$

c) $\frac{11x+6}{x^2-3x-54}=\frac{3x-14}{2x-18}-\frac{3(x+2)}{2x+12}$

d) $\frac{7x-15}{3x-6}+\frac{8x-21}{3x-3}+\frac{10x+21}{3x^2-9x+6}=5$

e) $\frac{1}{3x+21}+\frac{1}{3(x-5)}-\frac{x+6}{4(x^2+2x-35)}=0$

f) $\frac{136x^2-4x-266}{48x^2-32x+5}=\frac{14x-19}{4x-1}-\frac{8x+25}{12x-5}$

g) $\frac{8x-3}{6x-4}+\frac{6x-4}{10x-6}=\frac{116x^2+10x-34}{60x^2-76x+24}$

۱ .۴ .۵ -

a) $\frac{5x-12}{2}=\frac{5\cdot\left(\frac{1}{2}x^2+3\right)}{x+1}-\frac{7x-10}{2x-10}$ b) $\frac{28}{45-7x}=\frac{5}{x-9}-\frac{9}{x-5}$ ؛

c) $\frac{x+6}{x-2}+\frac{3x-8}{x-4}=\frac{6(x+9)}{x+6}$ d) $\frac{x-13}{x+3}+\frac{8x+45}{x+5}=\frac{9x+7}{x+2}$

۱ . ۵ – کسري مساوات، چې په مخرج يا مات لاندې کې يې ناټکلي ضريبونه او فکتورونه ورکړ شوي وي.

۱ . ۵ . ۱ –

a) $\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{a-b}{2c-x}=\frac{a+b}{2c+x}$

c) $\frac{a}{a-2x}-\frac{b}{b-2x}=0$ d) $\frac{x-\sqrt{a}}{x-\sqrt{b}}-\frac{x-\sqrt{a}}{x+\sqrt{b}}=0$

۱ . ۵ . ۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\frac{a}{x+b}-1=1+\frac{b}{x+b}$ b) $a-\frac{ax}{x-1}=\frac{1}{a}-\frac{x}{ax-1}$

c) $a+b+\frac{x}{a+b}=a-b+\frac{x}{a-b}$ d) $\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{x}=\frac{1}{a-b}+\frac{a-b}{x}$

e) $\frac{x}{ab}+ab=\frac{1}{a+b}+(a+b)x$ f) $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}+\frac{2ab}{a+b}=\frac{(a+b)^2 x}{ab}$

g) $\frac{a+1}{b}x+\frac{b+1}{a}x+\frac{2ab}{a+b}=a+b+1$

1.5.3. a) $\frac{2(6x^2-11a^2)}{4x^2-9a^2}=5-\frac{4x+a}{2x+3a}$ b) $\frac{a}{1-x}-\frac{b}{x+1}=\frac{(a-b)(ab+1)}{1-x^2}$

c) $\frac{2a}{2-x}-\frac{2b}{x+2}=\frac{4(a^2b+ab^2+a-b)}{4-x^2}$

d) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{1-x}{a-x}=\frac{a(1-2x)}{a^2-x^2}$ e) $\frac{ax+b}{ab-b^2}-\frac{a-bx}{ab+b^2}=\frac{2(ax+b)}{a^2-b^2}$

f) $\frac{2a+ab^2x}{a+ab^2x}-\frac{a^2(3-2bx)}{a^2-a^2b^4x^2}=\frac{b^2(2ax-1)}{a^2-a^2b^4x^2}-\frac{ab^2x}{a-ab^2x}$

۶,۱ – کسرمساوات یا ماتبرابرون له دوه کسرونو سره

a) $\frac{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}-x}$ b) $\frac{\frac{3}{2}-\frac{1}{x}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{x}}-\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+1}$

c) $\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}$ d) $\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}=\frac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}$

۱ . ۷ . شي تمرینونه

۱ . ۷ ۱ – که د یوه گڼ خلور خله او ۱۴ زیاتون ۴۰ وي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

۱ ۷ . ۲ – که د یوه گڼ خلورخله او ۴ زیاتون ددې گڼ او ۱۴ زیاتون سره برابر وي ، نو هغه گڼ کوم دی ؟

۱ . ۷ . ۳ – د یوه گڼ خلورمه برخه او پنځه خله ۴۲ گڼ ورکوي ، نو هغه گڼ کوم دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۴ – که د يوه ګڼ څلوربرابره څخه ۲ کم شي او په يوه ګڼ وويشل شي چې ۴
تړې کم شوی او ۱۱ لاس ته تري راشي، نو دا ګڼ به کوم وي؟
۱ . ۷ . ۵ – د يوه ګڼ پنځه ځله او د ۳ زياتو دوه ځله لوي دی لکه د دې ګڼ دري
ځله او ۱ کمون. دا ګڼ کوم دی؟
۱ . ۷ . ۶ – د يوه ګڼ څلورځله او ۱۴ کمون نيم دومره لوي دی لکه ددې ګڼ دوه ځل
او ۸ . دا ګڼ څه نوميږي؟

۱ . ۷ . ۷ – د يوه ګڼ شپږ ځله او د ۵ کمون يا توپير چې ددې ګڼ په څلور ځله او ۵
زياتون وويشل شي، ۱ ور کوي. دا ګڼ څه نوميږي؟
۱ . ۷ . ۸ – د يوه مات ماتباندې په ۵ له ماتلاندې کوچنی دی. که ماتباندې په ۲۳ او
مات لاندې په ۸ لوي شي، نو د ورکړشوي مات په څټ ارزښت لاس ته
تړې راځي. دا ګڼ څه نوميږي.
۱ . ۷ . ۹ – ۲۵ داسې په دوه ګڼونو بيل کړی يا تجزيه يا ټوټه کړی، چې د مربع توپير
يې ۱۲۵ شي.
۱ . ۷ . ۱۰ – د دوه ګڼونو توپير يا کمون ۶ او مربع يې ۱۸۰ دی . ګڼونه څه نوميږي؟
۱ . ۷ . ۱۱ – دوه ګڼونه داسې تناسب کې دي، يا يو بل ته داسې ځانونه نيسی .
که دوم په لمړی وويشل شي، نو ۲ لاس ته راځي او پاتی يې ۷ دي.
دواړه ګڼونه کوم دي؟
۱ . ۷ . ۱۲ – د دوه ځاينيونکي ګڼ پروت زياتون ۱۲ دی. که له دې ګڼ ۱۸ کم شي،
نو يو دوه ځاينيونکی ګڼ لاس ته راځي، د همغه ځايګڼونو سره مګر په
څټ ترتيب سره.
۱ . ۷ . ۱۳ – يو زدکړی غواړي د يوه ګڼ څخه مربع ريښه د يو په بل کې بندولو
پرينځيپ يا اصول له لارې پيدا کړي. دی لمړی يو ګڼ د ريښې په ځير

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکي، چې مربع يې په ۲۷ کوچنی دی. بيا يوه ريښه ټاکي ، کومه چې دوه له هغه لوي دی چې لمړی ټاکل شوی. ددې ريښي مربع په ۳۳ لوي دی ، هغه گڼ کوم دی چې مربع ريښه يې غواړو پيدا کړو ؟

۱ . ۷ . ۱۴ – يو د سپورت ملګرو ټولنه له څلورو ډلو جوړه ده. لمړی ډله ۳۷ دملګرو غړي لري، په داسی حال کی چې نورو ډلی 1 / 4 , 1 / 5 په همدې ډول 2 / غړي په بر کی نيسي. د غړو شمير څومره دی او د هرې ډلی څومره دي

۱ . ۷ . ۱۵ – يو نفر په درې ورځو کی مجلی په داسی شمير خرڅوي: په لمړی ورځ 1 / 9، دومه ورځ 1 / 6 او په دريمه ورځ 1 / 4 د مجودو لوټوکه .

دی اوس له هغومجلو د نيمايي دوه کمي د ځان سره لري. هغه څومره مجلی د خرڅلاو لپاره لرودې؟

۱ . ۷ . ۱۶ – يوه ميلمه د يوه زدکوونکی څخه د هغه د عمر پوښتنه وکړه. زدکوونکي په ټوکه ځواب ورکړ« ځما پلار چې درې مياشتی پخوا يی خپله ۵۵ کلنی ولمانځله، ځما د عمر څلورواره څخه 1 / 4 زيات زوړ دی.» زدکوونکی څومره عمر لري؟

۱ . ۷ . ۱۷ – د يوه زدکوونکي پلار څلورنيم ځله زوړ دی لکه د هغه خوي. دواړه ۲۷ کاله د هغه د يو اوياکلن نيکه څخه ځوان دي، پلار او ځوي څومره زاړه دي؟

۱ . ۷ . ۱۸ – په يوه معما کی يو زدکوونکی د ې بل ته وايي:« که زه لما سره بټوه کی پيسو سره ۵.۲ افغانی ور زياتي کړم ، زياتون يی له ۵ سره ځل يا ضرب کړم او له دې ځل څخه ۱۲ کمی کړم او دا لاس ته راغلی کمون يا توپير په 11 وويشم نو نتيجه يی ۸ افغانی ده. » هغه زدکوونکی په خپله بټوه کی څومره پيسی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۷ . ۱۹ – په يو په بل پسې تړلو مقاومتونو کې لمړی او دوهم يو ډول لوي دي، دريم دوه ځله او څلورم دريځله دومره لوي دي لکه لمړی دوه ياد شوي مقامتونه، ټول مقاومت ۱۰۵۰ (اوميګا) ، په دې پروت شپانونك ۱۱۰ ولټه دی. اوس الف) يوګوني مقاومتونه څومره لوي دي، ب برققوه، برخه مقاومتونه ؟

۱ . ۷.۲۰ – د دوه غبرګ چالان عمومي مقاومت (ماته متأسفانه په افغانستان کی د فزيك مروج نومونه دې معلوم، خو فکر کوم چي په هدف به پوه شو) دی

a) $1000\,\Omega$, b) $2000\,\Omega$

يو مقاومت $4000\,\Omega$ دی، هغه بل څومره لوي دی؟

۱ . ۷ . ۲۱ . د دريې غبرك قاومتونو څخه يی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دريم يی درېواره دومره لوي دی لکه دوم . هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت a) $12\,k\Omega$, b) $300\,\Omega$ وي؟

. ۲۱ . د دريې غبرګو مقاومتونو څخه يی دوم دوه واره دومره لوي دی لکه لمړی او دا دريم يی درېواره دومره لوي دی لکه دوم ، هر مقاومت څومره لوي دی، که عمومي مقاومت الف) $12\,k\Omega$ ب) $300\,\Omega$ وي؟

. ۲۲ په اوبو کې يو د لرګي منډه بايد څومره لوي وي، چې د لمبيدو استعداد يی ۷۵۰ نيوټونه وي او د لرګي خاص وزن يا کلکوالی (د فرمول څخه معلوميږي چی دا څه شی دی) $4\,\frac{N}{dm^3}$ وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۷ . ۲۳ د سونګموادو ټانك د دوم ماشین لپاره ۴۰ لیتره ګډوډ د سونګ مواد لري. څومره تیل او څومره بنزین په ټانك کی موجوددي که ګډونه یی وي؟

۷ . ۲۴ د ښار د ښکلا لپاره د ښارمنځ د سرك په اوږدوالي ۸۵ ونی کینول کیږي. دا چی د مخه خرکړ شوی او تل همغه واټن په یوه متر کوچنی شي ، نو په سرك بیا ۲۰ ونی زیاتی کینښول کیدی شي. د دې هرې ونې واټن وبلی ته څومره لویي دی؟

۷ . ۲۵ د بایسکلځغلونوکو ډله له سر څخه ۵۰ متره اوږدوالی لري. هغه ۴۵ کیلومتره په ساعت کی سرعت لري، چی په یوه پله چی اوږدوالی یی متره دی ، څومره وخت ته ضرورت لري، چی له پله پورې لاړ شي.

۷ . ۲۶ واورومنډه کي ، دا وروستنه وړونکی د پروسېرکلني وړونکی څخه یوه نیمه دقیقه وروسته په ځغاسته پیل کوي. د څو کیلو متره وروسته دی کړي چی لمړني ځغلیدونکي څخه مخ ته شي، که د ده منځنی سرعت ۵ متره ثانیه کی وي او د لمړي ۸ ، ۴ متره په ثانیه کی وي ؟

۷ . ۲۷ د تامنځي د دز سره د سپورت میله کي ۲۰۰ متره ځغاستی د منډې ډله په ځغاسته پیل کوي. ځغلیدونکی د پیل کرښي څخه لس متره شا ته ولاړدي. برخه نیوونکی په منډه پیل کوي ، چی د تومانچی د ډز کرد وګوري دو وخت توپیر څومره دی، که غږ رسیدنه په نظر کی ونه نیول شي او د غږ سرعت ۳۴۰ متره په ثانیه کی وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ کومبیناتوریك - د بینوم جمله

کومبیناتریک څخه په شمیرپوهنه کې د دې لپاره کار خلي، چې یو ګڼ ، پل ځاي بدلو
څومره والبشابې او که څو ګنونهخپل ځاي بدل کړې دا څنګه لیکل کیږي۰ د ځای بدلون
شمیرنه ده
او د هغې ډولونه۰
په ۰ ۱ ۰ ۱ او ۰ ۱ ۰ ۲ برخو کی به د شمیرپوهنی مرستندوي مواد د بینوم
جملی(۳.۱۰)
برخه(او کومبیناتوریك (۱۰ . ۴ برخه) د فاکولتیت کلیمي او بینومیالکوایفیڅینت
(بینوم ځلوني) پیل شي .

۱۰ . ۱ فاکولتیت Die Fakultät, factorial

پیژند ۱۰ . ۱ :
د n!سومبول (ویل کیږی n « فاکولتیت «) لاندې سړی له1 تر n پورې ګنونو ضرب
پوهیږي، یعنی $n ! = 1.2....(n-2).(n-1).n$ برسیره پر دې تعریفوو: $0! = 1$

د فاکولتیت له پیژند څخه څرګندیږي، چی $(n+1)! = n!.(n+1)$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه:
په افغاني ادبیاتو کی تر هغي چی ماته معلومات شته د فاکولتیت په ځاي فاکتوریال لیکل شوی. ما په دې کتاب کی دا د الماني کلیمه یا پښتو ، ځله وونی،، زیات کاره ولی، هیله ده چی تاسو به یی په خپله خوښه وټاکی. په دې کی کومه سهوه منځ ته نه شي راتلی۰

بیلگی :

الف !n : د $n = 5$ لپاره په دې ډول دی: $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 120$

ب : په دې ډول دی : $0!.2!.4! = 1.(1.2).(1.2.3.4) = 48$

پ: په دې ډول دی: $5!/3! = 1.2.3.4.5 / 1.2.3 = 4.5 = 20$

ت : په دې ډول دی

$$(n+2)!/(n-1)! = 1.2.3....(n-1)(n).(n+1).(n+2)/1.2.3...(n-1)$$
$$= n.(n+1).(n+2)$$

ټ: داسی دی

$$2.n! = 2.(1.2....n),$$
$$(2.n)! = 1.2....n.(n+1)....2n.$$

۱۰ . ۲ د بینوم ځلووني یا ضریبونه

پیژند: ۱۰ . ۲

د سیمبول $\binom{n}{k}$ (وییل کیږي n « پر » k لاندې د دوه ځله ونو ویش پوهیدل کیږي چی هر یو k ځله وونی یا ضریبونه یا فاکتورونه لري :

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \prod_{i=1}^{k}\frac{n+1-i}{i}$$

برسیره پر دې دا هم په کلکه کره کیدلی شي:

$$\binom{0}{0} = 1; \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{1} = n$$

د k ګڼ يو پيدايښتي يا طبعي ګڼ دئ او د ماتلاندې او مات باندې ګڼونو ګڼون يا تعداد ښايي،په مات لاندې کي د لومړيو k پيدايښت يا طبعي ګڼونو فاکتورونه دي. دn ګڼ رييل دى او د مات پورته لومړنى فاکتور دئ. دوم فاکتور1 - n ، دريم n-2 تر k –م فاکتور n-k+1 پورې . دا $\binom{n}{k}$ سومبول د اويلر(leo nard Euler له ۱۷۰۷ - ۱۷۸۳سويسي ګڼپوه، فزيکپوه او استرولوګ) لخوا د لومړي ځل لپاره پيل شو، له دې امله ورته د اويلر سومبول وايي پرتله يا مقايسه برخه ۱۰ . ۳ (. که ژوك ديوه بينوم پوتنځ يا توان شميري) ۱۰ . ۳ برخه(، نو سيمبول $\binom{n}{k}$ لاس ته راځي چې د يوا-
ځنيو زياتونونو ځلونه دي، او له دې امله ورته بينوم ضريب يا بينوم ځلهووني ويل کيږي.

بيلګې :

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{20}{2} = 10$$

$$\binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ ،} \binom{3}{5} = 0$$

$$\binom{2}{1/3}$$

تعريف نه دی ، ځکه چی 3 / 1 پيدأيښتي يا طبعي ګڼ نه دی.

د بينوم ضريبونو يا ځلونوخويونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - د $n<k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري $\binom{n}{k}=0$

که n یو طبعي ګڼ وي او لهk کوچنی وي، نو صفر په ماتباندې کی یوځله وونی

یا ضیرب دی

۲ - د $n>k$ ، $n,k \in N$ لپاره باور لري

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اوبیونه (حل): سړی د $(n-k)!$ سره د مات $\binom{n}{k}$ پراخوالي له امله لاس ته راوړي

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\prod_{i=1}^{k}\frac{n+1-i}{i}$$

دا پورته برابرون له $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$ سره ځلوو، نو لاس ته راځي

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

له دې نور لاس ته راځي، که د k په ځاي n - k ولیکل شي

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

۳ - باور لري

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

حل (اوبی) : د کیڼ اړخ زیاتون څخه دا لاندې لاس ته راوړل کیدی شي، که د بینوم ضریبونه یا ځلووني د ماتو په څیر ولیکل شي ، ماتونه ور زیات کړي او د زیاتونون ګډ فاکتورونه چی په ماتباندې کی دی په نوکانو کی ونیسي اوپاتی ساده کړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)+n(n-k)...(n-k+1)(n-k)}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)[k+1+n-k]}{(k+1)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n+1)}{(k+1)!}$$

که په پورته ا افاده يا وپينه كي د مات پورته اخرنی فاكتور د لومړي ځله ووني په څير وليكل شي، لاندې بينوميال يا بينوم ځلوونی (ضريب) تعريفوي:

$$\binom{n+1}{k+1}$$

۱۰ . ۳ د بينوم جمله

د بينوم لاندې سرى د دوه توكو (ګنونو) زياتون پوهيږي. يعني: x+y
د بيونم جمله موږ ته ښايي چې څنګه د يو بينوم

$$(x+y)^n$$

پوتنځ، چې پيدايښتي ګڼ n يی ايكسپوننت يا جكګڼ يا لنډ جګ وي، د زياتون په څير پر مخ بيول كيږي. كه د x + y بينوم پوتنځ د n = 0,1,2,3,4,5,6 اكسپوننت لپاره شميرو، نو لاندې نتيجه لاس ته راوړو :
پاسكال دريګوډى

$$(x+y)^0=..................1$$

$$(x+y)=..................x+y$$

$$(x+y)^2=..............x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^3=............x^3+3x^2x+3xy^2+y^3$$

$$(x+y)^4=.........x^4+4xy+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

$$(x+y)^5=....x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې د زیاتونونو پرمخبیولوکی یو قانونیت لیدل کیږي. د زیاتونو ګڼون(شمیر، تعداد) د بینوم د اکسپوننت څخه په یو لوي دی . ټول زیاتونی د x او y پوتنځ ځل لري، په داسی ډول چی د x اوy پوتنځ زیاتون په n برابریږي او په دې ډول د x پوتنځ په کمیدلو) د y پوتنځ په زیاتیدلو دx په اکسپوننت په ترتیب پرلپسی
n , n-1, ...1 , 0
د yاکسپوننت په ترتیب 0,1 n-1,n..,دي. د بینوم پوتنځ کوایفځینتونه داسی په نامه پاسکال Blaise Pascal(۱۶۲۳ - ۱۶۶۲ فرانسوي شمرنپوه(ګڼوندریګوډی جوړوي .

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

په دې کی هر ګڼ د دواړو پورته کیڼ-ښي پرتوګڼونوزیاتون دی، چی بي له کړاو د نورو اکسپوننتویا په جګو ,n = 7,8... .. لپاره پرمخ بیول کیدی شي. د ډیرو لویو اکسپوننتو n لپاره بیا هم دالار له کړاو ډکه ده لیونارد اویلرLeonhard Euler د کومبیناتوریك فکرونو کی د کوایفیځینتونو یووني یا یوونوالي یا بهتره یوونوالیز ستروکتورونه یا جوړښتونه وپیژندل. په n -م n (د بینوم جګ یا اکسپوننت (لیکه اوK- م ځای، n ,.... , 1 , 0 = k کی ولاړ ضریب دفورم څخه دیَ) له کومه امله چی په ۱۰ . ۲ برخه کی د اویلر سومبول په نوم داسی بلل شوي د بینوم ضریب په
ځیر رامنځ ته شو)که د پاسکال ګڼونو دریګوډیَ د اویلر سومبول استعمال په ځیرولیکل شي نو لاس ته راځي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\dots\dots\dots\dots\binom{0}{0}$$

$$\dots\dots\dots\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\dots\dots\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{1}$$

$$\dots\dots\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\dots\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\dots\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

داويلر سومبول كى د فاكتور پرځاي ، چې ګڼونه دى ، سومبول $\binom{n}{k}$ ليكل كيږي.

يادونه : ما كله a,b او كله بيا x,y ليكلي، دا په يو ډول ليكنه ښكلې ښكاريږي، خو زه كله كله داسې ستونځې لرم .

په ۱۰ . ۲ برخه كى د بينوميالكوايفيڅينت لپاره ښوول شوو خويونو ۲ په بنسټ د پاسكال دريكوډي منځنى محور ته سيومتري پراته كوايفيڅينته سره مساوي دي. داچى هر كو- ايفيڅينت وربانديې پورته كوايفيڅينتونو زياتون سره مساوي دى په ۳ كى وښوول شو)

د تمرين وظيفه ۱۰ . ۴ دې هم ورسره پر تله) مقايسه(شي) د اويلر سيمبول په استعمال

د يوه بينوم $(a+b)^n$ د پوتنڅ د زياتون پرمختګ د يوه طبيعي ګڼ n لپاره په لاندې ډول ليكلو ته اجازه راكوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۱ (د بینوم جمله)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

اوبونه (حل): د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندوکشن پیل : (n = 0)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}a^0 = 1$$

د ایندکشن نیونه : (n = k)

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^{n-1} + \binom{k}{k}b^k$$

د اندکشن غوښتنه: (n = k + 1)

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}ab^n$$
$$+\binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

دایندکشن ښوونه:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b)$$
$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k}{k}ab^k$$
$$+\binom{k}{0}a^{k+1}b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \ldots + \binom{k}{k-1}ab^k + +\binom{k}{k}b^{k+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

كه يو د بل سره (يو د بل لاندې په څنګ يا كږې پرتې) برابر پوتنځ يا توان څلونه د اويلر فرمول يا سومبول د زياتونخويونو د استعمال له لارې سره راټول (يوځاي) شي

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},\ldots,\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

لومړي او اخر زياتون ضربيونه وليكل شي نو غوښتل شوې اړيکی لاس ته راځي

$$\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0},\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}$$

د (a-b)=a+(-b) له امله د بينوم له جملی د يوه n -م پوتنځ دكمون څخه لاس ته راځي

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 - \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots \pm \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}(-b)^i$$

بيلګي:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$(x-y)^3 = \binom{3}{0}x^3+\binom{3}{1}x^2(-y)+\binom{3}{2}x(-y)^2+\binom{3}{3}(-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

۱۰ . ۴ كومبيناتوريك:

كومبيناتوريك د يوې ډيرۍ د پای غړو يوځای درولو يا راوړلو ترتيب قوانينو سره سر او كارلري. كيدی شي د ټولو غړو يا يوې برخي يوځاييولو په څير راوړل شي، په يوځاييولو کی کيدی شي د غړو ترتيب يو رول ولوبوي او يا هم نه، او همدارنګه په رابوځاييولو کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي د غړو تکرار راشی او يا هم نه. له دې امله د يوځاييولو يا ټولګی درې ډولونه توپيروو(Komplexion هم ورته وايي)، په نامه پرموتيشن، واريیشن، کمبينيشن (Permutation, Variation, Kmobination) کوم چې په لاندې برخو کی يو په بل پسی څيړل کيږي او په اخرنی جدول کی به ليديدونکی څرګند شي يا ليدوړو ښوول شي

۱۰ . ۰ . ٤ . ۰ . ۱۱ پرموتيشن Permutare

(لاتين: ..سره بدلول، دلته دا اصلاً ځاي بدلون دی. لنډ: بدلون)

پيژند ۱۰ . ۳ :

د n غړو يو پرموتيشن (ځاي بدلون)بې له تکرار داسی »يوځاي درول« دي، په کوم کی

چې n غړي په يوه د زړه پورې ترتيب کی څنګ په څنګ ولاړ وي. د n غړو مختلفه ترتيبونه

تل د مختلفو پرموتيشنونو يا ځايبدلونونو په مانا ده

بيلګی:

۱ - د دوه غړو پرموتيشن

الف : 1 2 دی 12 21

ب : a , m دی a m m a

۲ - د درې غړو پرموتيشنونه

الف : ۱ ، ۲ ، ۳ دي:

۱۲۳ ۲۱۳ ۳۱۲

۱۳۲ ۲۳۱ ۳۲۱

ب : a,m,s دی:

ams mas sam

asm msa sma

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د څلور غړو پرموتیشنونه

الف : 1,2,3,4 دي:

4123	3124	2134	1234
4132	3142	2143	1243
4213	3214	2314	1324
4231	3241	2341	1342
4312	3412	2413	1423
4321	3421	2431	1432

دا پورته پرموتیشنونه له پورته وکښته لور ته لیکسیکایي ترتیب دي، دې ته به د کرانو لوستونکو پام وي، وروسته هم همداسی دي، که دا توري وي او که ګڼونه ۰ په ګڼونو کی پیدایښتي ده، چې د پښتو لیکسیکایي ترتیب پچه [ام کی نیول شوی۰له ښي لور کښته بیا بیرته ګین لور خوزښت دی۰

ب : a,m,s,u دي:له کښ کښته لور ته بیا بیرته پورته

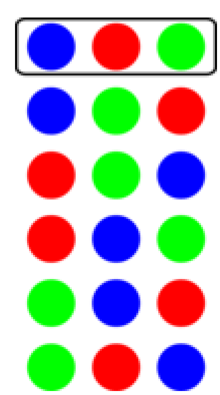
uams	samu	masu	amsu
uasm	saum	maus	amus
umas	smau	msau	asmu
umsa	smua	msua	asum
usam	suam	muas	aums
usma	suma	musa	ausm

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ (ا ت ج ګ دي:دلته طبعآ له ښي وکیڼ لورته ترتیبیږي(

اتجګ	تاجګ	جاتګ	ګاتج
اتګج	تاګج	جاګت	ګاجت
اجتګ	تجاګ	جتاګ	ګتاج
اجګت	تجګا	جتګا	ګتجا
اګتج	تګاج	جګات	ګجات
اګجت	تګجا	جګتا	ګجتا

د ټولو پرموتیشنونود لیکلو لپاره مرستندوی مواد، د بیلګی په ډول له څلورو غړو څخه د ۲۴ پرموتیشنونو، لیکسیکني ترتیب، دا په دي مانا چی د لیکسکا لغاتو ترتیب ته »کتِ متِ« (ورته) دی، چی د غړو پیدایښتي لړی مخته پرته وي (په تورو، په ګڼونوکښطبعی یو په بل پسي). دبیلګي په توګه د غړو a , m , s , u ۲۴ پرموتیشنونه په لکسیکا ترتیب ورکړ شوي. د دې غړو) یا تورو(جوړ شوي پرموتیشنونه) لغاتونه(maus همدا رنګه saum په دي ترتیب کی ۸ -ام همدا ډول په ۱۴ -ام ځاي کی ولاړ دي. همدا ډول په پ (کی د څلورو تورو ا ، ت ، ج ، ګ پرموتیشن ورکړ شوی چی ۸ -۱م ځا ي کی یي تاګج ولاړ او په ۱۵ – م ځای کی یي جتاګ ولاړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته درې غونډارو لپاره نظم يا ترتيب ۲ ۰ ۳ = ٦ دی۰

که ليکو ، چې 1.2.3.4.5.6نو ددې پرځاي ليکو :6! = 720

جمله ۱۰ . ۲ :

د پرموتيشنونو Pn ګڼون (شمير يا تعداد) ، د n يوله بل مختلفو غړو، په لاندې

ډول دی : $Pn = n!$

اوښونه : د پوره ايندکشن له لارې :

دايندکشن پيل : $(n = 1)$: $P_1 = 1! = 1$

د ايدکشن نيونه : $(n = k)$: $P_k = k!$

د ايندکشن غوښتنه : $(n = k+1)$: $P_{k+1} = (k+1)!$

د ايندکشن ښوونه : k غړو ته په k! پرموتيشنونو کی د ځل په څير يو(k+1) -ام غړی راځي. دا (k+1) - ام غړی کيدی شي له لومړې تر (k+1) - ام ځاي پورې ودرېږي، داسی چی د (k+1) -ام غړي ورنيولو د هر k غړو پرموتيشن k+1 پرموتيشنونه د k+1 غړو پرموتيشنونه شي. له دې امله باور لري

$$P_{k+1} = P_k\,(k+1) = k!(k+1) = (k+1)!$$

بيلګه :

په څومره مختلفو لړيو پرلپسی (دا مړضوع په ۱۸ برخه کې کتلی شئ) کی لس زدکوونکی په يوه ليست کی خپل نومونه ليکلی شي ؟

اوبی يا حل : $P_{10} = 10! = 3628800$ ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۰ . ۴ :

هر د k غړو ترتیبونه، د کومو څخه چې i-ام غړی ni - ځله رامنځ ته کیږي،

د $i = 1 , 2 , ... ,k$ لپاره، نو پرموتیشن د تکرار) د تکرارسره پرموتیشن(سره نومیږي . د غړو شمیر په پرموتیشن کی بیا داسی دی $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$

بیلګی :

۱ - د دوه غړو a , b پرموتیشن په کوم کی چی غړی a یو ځل او غړی b دوه ځله رامنځ ته کیږي،

$(k = 2; n_1 = 1; n_2 = 2; n = n_1 + n_2 = 1 + 2 = 3)$

په دې ډول دی: abb bab bba

۲ - د غړو a , b پرموتیشن، په کوم کی چی a دوه ځله، غړی b درې ځله رامنځ ته کیږي $(k = 2; n_1 = 2; n_2 = 3; n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5)$ په لاندې ډول دی

abbba abbab ababb aabbb
babba babab baabb
bbbaaa bbaba bbaab

جمله ۱۰ . ۳ : د k غړو د پرموتیشن ګڼون یا تعداد $P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)}$ ، له کومو چی i-ام غړی ni -ځله رامنځ ته کیږي ، په لاندې ډ ول دی:

$$P_n^{(n_1, n_2, ..., n_k)} = \frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$$

حلونه یا اوبیونه: که په پرموتیشن کی $n = n1 + n2 + ...+ nk$ (دلته دې ګڼونه دn ایندکس کې ومنل شي) غړو یو له بل توپیر لرودی (مختلف وي) ، نو n! پرموتیشنونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

به موجود وی، که i - ام غړی ni -ځله رامنځ ته شي، داچی د ni غړو لپاره ni!
پرموتيشنونه موجود دي، نو ni پرموتيشنونه د يوه پرموتيشن په ځير رايو ځاي کيږي،

دا په دې مانا چی د n! شمير په $n_i!$ بايد وويشل شي (i = 1 . ..., k)

بيلګی :

۱ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په کوم کی چی لومړی (n_1-1)- ځله او دويم (n_1-2)- ځله رامنځ ته کيږي، دی:

$$P_3^{(1,2)} = \frac{(1+2)!}{1!2!} = \frac{3!}{1!.2!} = 3$$

۲ - د k = 2 مختلفو غړو پرموتيشن، په کومو کی چی لومړی (n1=2) -ځله او دويم (n2 = 3) -ځله رامنځ ته شي، دی

$$P_5^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$$

۱۰ . ۴ . ۲ واريیشن اوښتنه يا بدليدنه Variation :

تعريف ۱۰ . ۵:

د n غړو واريشن (بدليدنه يا اووښتنه Variation) لاتين(بدلونه اووښتنه تغيرونه يا بيا تغيرونه) و k -ام ټولګي ته(وهرې k ټوټی ته، n ≤ k) هر له k غړو يوځانکول (بوځاي درول، يوځاي ليکل) دی، کوم چی د n غړو د لړی پرلپسی په نظر کی نيولو سره جوړيږي..

بيلګي:

۱ - د درې غړوa,b,c واريیشن و دويم ټولګي ته دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

ab	ba	ca
ac	bc	cb

۲ - د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و ۲ - م ټولګي ته دي:

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

د څلورو غړو d , a , b , c واریېشنونه و ۳ - ۱م ټولګي ته دي

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3 ,4, 5 واریېشنونه و ۲ - ۱م ټولګي ته دي

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو واريشنونه و n -ام ټولګي ته د n غړو پرموتيشن سره يو شی يا براابر کيږي

جمله ۱۰ ۰ ٤ :

د n غړو و k -ام ټولګي ته د واريشنونو ګڼون (تعداد) $V_n^{(k)}$ دی :

$$V_n^{(k)} = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

اوبونه : د مکلمل (پوره يا بشپړ ايندکشن له لارې) ايندکشن په k اړه لري، n ځاي په ځاي دی يا ځاي په ځاي کلك ولاړ دی

ايندکشن پيل :(k = 1)

$$V_n^{(1)} = n!/(n-1)! = n$$

ټيك (صحيح) دی ، ځکه چې له n غړوکيدی چی له يوه غړی جوړ واريشنونه جوړکړی شي.

ايندکشن نيونه : (k = k0) :

$$V_n^{(k_0)} = n!/(n-k_0)!$$

ايندکشن غوښتنه(ثبوت:):(k0 +1 = k)

$$V_n^{(k_0+1)} = n!/(n-k_0-1)!$$

دايندکشن ښوونه : د k0 - م درجی هر واريیشن لپاره، په دې واريیشن کی نه رامنځ ته کيدونکو پاتی n - k0 غړو شمير دی .که په ترتيب يو له دې n - k0 غړو د دې k -م ټولګی واريشنونو $V_n^{(k)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرکی ځاي په ځاي شي، نو له دې یو دk+1 ټولګي n - k0 واریشنونه لاس ته راځي، او که دا کار په ټولو واریشنونو $v_n^{(k)}$ وشي، نولاندې واریینشونه لاس ته راځي:

$$\frac{n!}{(n-k_0)!}(n-k_0) = \frac{n!}{(n-k_0-1)!}$$

(که چیرې یود n - k0 غړو ورزیات په یو بل ځای کیښوولی وی، نو یودk+1 ټولګي واریښن به یی لاس ته راوړی وی، کوم چی همدا اوس موجود دئ. دا سړی په بیلګه ۲ (n = 4, k = 2 , k =3 (باندې لیدوړ کولی شي)

بیلګي:

۱ - د درې غړو واریینشنونو شمیر و دوم ټولګي ته دی : $v_3^{(2)} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

۲ - د څلور غړو واریینشنونو شمیر و دوم ټولکی ته دئ: $v_4^{(2)} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

د څلور غړو واریینشنونو شمیر ودریم ټولګي ته دئ: $v_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

۳ - د پنځه غړو واریینشنونو شمیر ودوم ټولګي ته دئ: $v_5^{(2)} = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$

پیژند ۱۰ . ۶ :

د n غړو واریینشنونه و k - ام ټولګي ته په کوم کی چی یوګونی غړي تر k-ځله تکرار وي نو واریینشنونه د تکرار سره نومیږي یا بلل کیږي.

بیلګی: ۱ - د درې غړو a , b , c واریینشنونه و دوم ټولګي د تکرار سره دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

aa	ba	ca
ab	bb	cb
ac	ba	cc

۲ - څلور غړو a , d , c , b د دویم ټولګی واریيشنونه د تکرار سره دي:aa

	ba	ca	da
ab	bb	cb	db
ac	bc	cc	dc
ad	bd	cd	dd

۳ - د درې غړو 1 , 2 , 3 د دریم ټولګي واريیشنونه دي(دا لاندې ولاړ ترتیب له کینې وښې لور ته دی، خو په لاندې کې په څټ شوی)

111	211	311
112	212	312
113	213	313
121	221	321
122	222	322
123	223	323
131	231	331
132	232	332
133	233	333

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۵ : د n غړو د k -ام تولګي د وارییشنونو شمیر $V_{W_n}^{(k)}$

$V_{W_n}^{(k)} = n^k$:د تکرار سره دی $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

حل)اوبی): په k د پوره ایندکشن له لارې:

د ایندکشن پیل (k = 1) :

د $V_{W_n}^{(1)} = n^1$ لپاره صحیح دی، ځکه چی له n غړو څخه n وارییشنونه،چی هر یوله یوه غړي جوړ دی، جوړیږي.

د ایندکشن نیونه (k0 = k) : $V_{W_n}^{(k_0)} = n^{k_0}$

د ایندکشن غوښتنه (k0+ 1 = k): $V_{W_n}^{(k_0+1)} = n^{k_0+1}$

د ایندکشن ښوونه : د (k0 + 1) -ام درجی وارییشنونه د nk وارییشنونو چی k0 – امه درجه وارییشنونو څخه لاس ته راځي، په کوم کی چی له دوي هر یو په ترتیب د n غړو اخر ته یو ور واچوي یا ورزیات (علاوه) کړي (یادونه دې، چی په واریشنونو بی له تکرار شوې ، وکتل شي) .

له دې امله د دې شمیر $n^{k_0}.n = n^{k+1}$ وارییشنونه دی.

بیلګي :

۱ - د درې غړو و دوم تولګي ته د وارییشنونوشمیر له تکرار سره دی

$V_{W_3}^{(2)} = 3^2 = 9$

۲ - د څلور غړو و دوم تولګی ته د وارییشنونو شمیر له تکرار سره دی

$V_{W_4}^{(2)} = 4^2 = 16$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د درې غړو و دریم ټولګي ته ض واریېشنونو شمیر له تکرار سره دی

$$V_{W_3}^{(3)} = 3^2 = 27$$

۴ - د مورس نخښه (Morsezeichen) له دوه غړو ، ټکی او لنډې کرښی یوځای کیږي.

د یوه ، دوه درې او څلورو غړو جوړه نخښو شمیر دئ

$$V_{W_2}^{(1)} + V_{W_2}^{(2)} + V_{W_2}^{(3)} + V_{W_2}^{(4)} = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

۱۰ . ۴ . ۳ کمبینیشن (Kombination (لاتین: یو بل سره تړل)

تعریف ۱۰ . ۷ :

د n غړو و k-ام ټولګي ته ($n > k$) یو کمبنیشن هغه دئ چی هر یو له k غړو یوځاي دروولو څخه ، کوم چی له n غړو، بی د غړو له نظم په پام کی نیولو سره، جوړوي.

کمبینیشن له واریېشن منځ ته راځي، که چیری نظم په پام کی ونه نیول شي.

بیلګي:

۱ - د درې غړو a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډول دی:

ac bc

...... ac

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دوم ټولګي ته کمبینیشن په لاندې ډل دئ

ab bc cd

...... ac bd

.... ad

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې ځلو غړو ودريم ټولګي ته كمبينيشنونه په لاندې ډول دي:

abc bcd

acd

۳ - د پنځه غړو 1 , 2 , 3, 4 , 5 و دريم ټولګي ته كمبينيشنونه په لاندې ډول دي(لاندى هم بايد له كيڼ لاندې لورته په ښى لور ليكل شوي وى)

123 234 345

124 235

125 245

134

135

145

جمله ۱۰ . ۶ : د n غړو و k -م ټولګي ته د كمبينيشنونو شمير دى $C_n^{(k)}$

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$$

اوبى (حل): د n غړو و k-ام ټولګي ته د اوريېشنونو شمير دى:

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{n-k}$$

كمبينيشنونه له واريېشنونو په دې توپيريږي، چې ترتيب په نظر كى نه نيول كيږي، دا بيا دا مانا لري چى ټول د k غړو k! پرموتيشنونه په يو كمبينيشن كى يوه ته يوځاي كيږي له دې امله لرو :

$$C_n^{(k)} = \frac{V_n^{(k)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی :

۱ - و دوم ټولګي ته د درې غړو کمبینشنونو شمیریا ګڼون دی

$$C_3^{(2)} = \binom{3}{2} = 3$$

۲ - و څلورم ټولګي ته د څلور غړو کمبینیشنونو شمیر دی‌د څلورو غړو و دریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(2)} = \binom{4}{2} = 6$$

۳ - د پنځه غړو ودریم ټولګي ته د کمبینیشنونو شمیر دی

$$C_4^{(3)} = \binom{4}{3} = 4$$

۴ - په لاتري (۶ له ۴۹ څخه) د امکاناتو لپاره شمیر دی

الف (یو شپږ $C_{49}^{(6)} = \binom{49}{6} = 13983816$

ب : یو څلور $C_6^{(4)}.C_{43}^{(2)} = \binom{6}{4}\binom{43}{2} = 13545$

۶ تیپ عددونه د یوه ۴ عددونوګروپ څخه بوځاي کیږي، چی له ایستل شوو شپږ عددونو (۴ تیک یا صحیح) او دوه عددونه(۲ پاتی عددونه) دي .

پیژند ۱۰ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د n غړو و k-ام ټولګي ته کمبينيشن، په کوم چی يواځني غړي k - ځله تکراروي، کمبينيشنونه د تکرار سره نوميږي.

بيلګي:

۱ - د دريِ غړو a , b , c و دويم ټولګي ته د تکرار سره کمبينشنونه دي.

aa ....

ab ...... bb

ac bc cc

۲ - د څلور غړو d , a , b , c و دويم ټولګي ته د تکرار سره کمبينيشنونه دي

aa ....

ab .... bb

ac .... bc cc

ad bd cd dd

۳- د دريِ غړو 1 , 2 , 3 و دريم ټولګي ته د تکرار سره کمبينيشنونه دي(لاندي ليکنه بايد له کينِ لور پيل وی، خو دلته له ښی لور پيل شوی وکينِ لور ته)

111 221 331

112 222 332

113 223 333

123

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۰ . ۷ : د n غړو و k - ام ټولګي ته د تکرار سره د کمبینیشنونو شمیر یا ګڼون دی:

$$C_{W_n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$$

دلته دې له ښوونی(چی په kد پوره ایندکشن له لار ې صورت نیسی) تیر شو.

بېلګې: ۱ - د درې غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(2)} = \binom{3+2-1}{2} = 6$$

۲ - دڅلورو غړو و دویم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_4}^{(2)} = \binom{4+2-1}{2} = 10$$

۳ - د درې غړو و دریم ټولګې ته د تکرار سره کمبېنیشنونه ګڼون یا شمېر دی

$$C_{W_3}^{(3)} = \binom{3+3-1}{3} = 10$$

۴ - د څلورو مکعبونو ، چې اړخونه یې د یوه تر شپږ نخښه وي . (نخښه شپږ اړخیز) ممکن مختلف اچول ، په دې مانا چې کومې سترګې سره لوېږي لاندې دي.

$$C_{W_6}^{(4)} = \binom{6+4-1}{4} = 126$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۰ . ۴ . ۴ د برموتييشن،واريیشن،كمبينيشن ټولكه

دااا	د په پا يوې برخې راټولونه م كې نيولو شوو غړو		د ټولو په پام كې نيول شوو غړو راټولونه يا ټولګه
	له نظم تيريدنه	نظم په پام كې نيونه	
	كمبينيشن	واريیشن	پرموتيشن
د ټول غړي يوله بل توپير لري	د n غړو كمبينيشن و k-ام ټولګي ته شمير يا ګڼون $C_n^{(k)}=\binom{n}{k}$	د n غړو واريیشن و k-ام ټولګي ته شمير يا ګڼون $V_n^{(k)}=\frac{n!}{(n-k)!}$	دn غړو پرموتيشن شمير يا ګڼون $P_n=n!$
له تكرار سره	د n غړو دكمبينيشن شمير وk -ام ټولګي د تكرار سره $C_{W_n}^{(k)}=\binom{n+k-1}{k}$	د n غړوواريیشن شمير د تكرار سره $V_{W_n}^{(k)}=n^k$	د k غړو پرموتيشن د ni غړو سره په k -م ګروپ كې $P_n^{(n_1,n_2,\ldots n_k)}=$ $=\frac{n!}{n_1!.n_2!....n_k!}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ . ۵ تمرینونه

۱ – لاندې فاکولتې وشمیرۍ

الف) 7! ، ب) 3!.5! ، پ) 6! / 4!.I0!

۲ – لاندې ویشونه ساده کړۍ

a) (n+1)! / (n-2)! b) (2n)! / n! c) n! / 2n!

۳ – لاندې افادې وشمیرۍ!

a) $\binom{6}{4}$ b) $\binom{1,5}{3}$ c) $\binom{-1}{6}$ d) $\binom{4}{1}$ e) $\binom{4}{0}$

f) $\binom{8}{8}$ g) $\binom{5}{4}\cdot 4!$ h) $\binom{7}{6}\cdot 3!$ i) $\binom{6}{7}\cdot 3!$ j) $\dfrac{\binom{7}{6}}{3!}$

۴ – لاندې زیاتونونه وشمیرۍ!

a) $\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$ b) $\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$ c) $\binom{3}{2}+\binom{3}{3}$

d) $\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$ e) $\binom{4}{2}+\binom{4}{3}$ f) $\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

۵ – لاندې افادې د بینوم د فرمول کارونې (استعمال) په بنسټ وګڼۍ!

a) $(x+y)^7$ b) $(a-6)^6$ c) $(5a+4y)^3$

d) $(x/2-y/3)^4$ e) $(2\ \ a+3\ \ b)^2$ f) $(x^2+y^2)^3$

۶ – لاندې افادې ساده کړۍ!

a) $(-1+a)^2-(1-a)^2$ b) $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$

c) $(\ ab-1)(-a-\ ab)+ab$

۷ – د بینوم په یو ځل یې بیل (تجزیه) کړۍ!

a) $25a^2+10\,ab+b^2$ b) $(49a^2-42a+9$

c) $169a^2-130\,ab+25b^2$ d) $2x+2.\ \ 6xy+3y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۸ - الف) د غړو ۱ ، ۲، ۳ ، ۴ پرموتیشنونه په لکسیکوگرافي نظم ولیکی!
ب) د a,e,f,h,n پرموتیشنونو په څو ځایونو کی« fahne » او« hafen » ولاړ دي؟ دا الماني کلیمي دي چی دپښتو اړونه یی « بیرغ» او« بندر» دي.

۹ - الف) په څو ځایترتیب یا تنظیم کیدی شي ، شپږ کسه ځاي ونیسی؟
ب) څومره پنځهٔ ځیفري گڼونه د پنځه ځیفرونو4, 3, 2, 1, 0 سره کیدی شي ولیکل شي، که هغه گڼونه چی په صفر پیل کیږي ونه لیکل شي ؟
پ) د غړوa,b,c,d,f څومره پرموتیشنونه په c ، په de ، په cdef پیل کیږي؟

۱۰ - الف) د غړو a , b , c ټول پرموتیشنونه ولیکی، په کومو کي چي a او b هره یوځل، غړی c دوه ځله رامنځ ته کیږي.
ب) د دي پرموتیشنونو گڼون یا شمیر وگڼی!

۱۱ - څومره تنظیم شوي جوړې د الفبا د۲۶ (لاتین توري) تورو څخه جوړیدلی شي ؟

۱۲ - د څلورم تولگي څومره مختلف وارییشنونه د
الف) بي له تکرار
ب) له تکرار سره د غړو 8 , 6 , 4, 2, 0 موجود دي؟
۱۳ - یوه سوری کارت له ۸۰ سوریدرځونو چي هریو لس سوري لري، جوړ دی. څومره د سوریو یوځایلیکل ممکن دي، که هر درځ ټیك یو ځل سوری شي؟
۱۴ - له شپږ غړو جوړ کمبینیشن گڼون و څلورم تولگي ته او پنځم تولگي ته څومره لوي دی،
الف) بي له تکرار
ب) له تکرار سره؟
۱۵ - یادونه : دا د کارتو لوبولپاره تمرین نه دی لیکل شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۶ – څومره مختلفی ازمایښتی ممکن دي که په یوه تولید کی له هر ۲۰ یوه وازمایل شي؟

۱۷ – په موټرو ترافیك نخښی په لاندې توګه یوځای شوی : یوه د ځای نښونه ډله د نخښی الف بی پسی څلور ګروپ یا ډله راځي، چی له څیفرونو ۰ تر ۹ څخه جوړ وي. د یوې کره ټاکلی الف بی پیژندنښی یا ترافیکی نخښی ممکن دي؟

۱۸ – د مختلفو اندازو او د خامموادو جوړ نلونه ، د رنګونی له لارې یو له بل توپیریدی شي ، که څلور رنګ نښونی ولرو؟

۱۹ – د منډې یوه میچ په اخرکی شپږ پاتی منډې وهونکی برخه اخلي. د منډو څومره امکانات موجود دي؟

۲۰ – په څومره ډوله

الف) اته مختلفی مرغلرې،

ب) درې سرې، څلور شنی، یوه زرغونه مرغلره

ترتیبیدلی شي؟

۲۱ – څومره تلفونونه کیدی شي وتړل شي کی یواځي پنځه ځایزه نمره موجود وي؟

څومره تلفون تړل ممکن دي که تلفون نمرې شپږځایزې وي او په 0 پیلکیدنه یی اجازه ونه لري؟

۲۲ – د درې شپږسترګیو (یا –اړخیزو) سره (څیره مکعب دی اومخونه له یوې تر شپږ سترګو باندې په نخښه دي، ماته یي د پښتو نوم نه راځي او االماني یی Würfel دی) څومره مختلفی اچونی ممکن دي، چی ټولې شپږسترګي مختلفې سترګې ګڼون وښايي؟

څومره مختلفې اچونې له درې شپږسترګیو سره ممکن دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ کرښیز-، خطي – یا لاینیز الجبر

یادونه : د لته دې هم د هرڅه له مخه بیا دې ته ګوته نیول شوي وي ، چی څه به تکرار
وي، خو هغه لاتین متل دی، چی » تکرار د زدکړې مور ده .«
لاندې مخ ته پرته اصلي برخه دm برابرونونو ځوابونو ته چی n اووښتونې یا مجهولی یا
ناپیژندونکی لري، وقف ده، چیرته چی m د برابرونونو ګڼون یا تعداد n د
ناپیژندونکو یا مجهولو ګڼون (تعداد) سره برابر او همدا ډول لوي او یا کوچنی کیدی
شي
په ۱۱ . ۱ برخه کی د دوه ناپیژندونکو یا مجهولو سره د برابرونونو سیستمونه تر
څیړنی لاندې نیول کیږي، چی د ښوونځي شمیرپوهنی تکرار دی، مګر دلته د
برابرونونو سیستمونه د ناټاکلوځلونو یا ضریبونو یا فاکتورونو سره هم راوړل کیږي،
چی د حالتونو توپیریدنه یي اړیینه ده٠
دا راوړنی به په ۱۱ . ۲ برخه کی درې ناپیژندونکو یا نامعلومو او په ۱۱ . ۳ برخه کی
په خوښه زیاتوناپیژندونکو ته وغزیږي، په ټولو برخو کی پل په پل د دیترمینانت کلیمه او
د ګاوس الګوریتم د کار ډګر ته را اچول کیږي .
په ۱۱ . ۴ برخه د هوموجینو برابرونونو سیستم ځانګړي ځوابونه په بر کی نیسي٠
یادونه : ولې لاینیز برابرونونه او نه کریز یا بندکرښیز یا خطی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ د برابرونونو له ځيرې پوهيږو، چۀ دا يوه کرښه ورکوي، چې لاتين يا کۀ غواړی انګريزي يې لاين نومولی٠ د کرښو اوبندکرښو نومونه هم شته، خو د دې لپاره، چې د نورو درسي منځپانګی سره يې توپير وي،نو موږ هم ورته له دې امله لاينيز وايو٠

۱۱ . ۱ . لاينيز برابرون د دوه ناپيژندونکو سره

داسی يو مساوات د دوه ناپيژندونکو سرهکيدي چی په لاندې ډول انځور شي

$$ax + by = c \qquad (11 . 1)$$

دلته کيدی شي چی ناپيژندونکی لويي x او y په خوښه رييل ګڼونه وي چی يو له بل سره په ورکړ شوي بنه تړلي. يا په بل عبارت : x او y واريابلی(اووښتونکی يا لنډ: اووښتوني) دي، برابرون (۱۱ . ۱) لاينيز فنکشن(بلواك) برابرون په ګوته کوي چی د هغي ځيره په y,x کواوردينات کی ناپای کرښه ده(۱۶ - امه برخه دی وکتل شي)

ځانګړی حالت : a = 0 يا b = 0 په ځانګړې توګه کرښه انځوروي يا په ګوته کوي چی د y - محوراو همداسی د x - محور سره غبرګه د ه .

که دا (۱ . ۱۱) برابرون د دواړو ناپژندونکو يا مجوهولو x اوy لپاره ټاکنمساوات يا ټاکنبرابرون ونيول شي، نو دا پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ددې مسئلی د حل (اوبی) لاندې به څه پوهيدل غوښتونکی وي.

د (۱۱. ۱) برابرون اوبيونه په څرګند ډول د ټولو ارزښتجوړو (x ,y) ډيری ده، چی(۱۱.۱) برابرون پوره کوي. که اصلي حالت a , b |= 0 ته پام وکړو نو برابرون (۱ . ۱۱) د y په لور داسی ځوابوو.

$$y = - (a/b)\, x + c/b \qquad (11 . 2)$$

کيدی شي چی x په خوښه وټاکل شي اوy له (۲ . ۱۱) برابرون څخه لاس ته راولو. ګورو چی ناپاي ډيرې اوبيونې يا حلونه لاس ته راځی يعني د اوبيونې ډيری يا اوبيډيری L په لاندې ډول ده

$$L = \{ (x, y) \mid y = - (a/b) x + c/b \} \quad (11 . 3)$$

داسې لوستل کيږي: L د ټولو (x,y) جوړو ډيری ده ،داسې چې..... (ورپسې هغه برابرون)٠

ددې لپاره لنډ ليکل کيږي: د (۱۱ . ۱) برابرون اوبی يا حل y = -(a/b)x+c/b ،د خوښی x ٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

طبعآ کيدی شي چي برابرون د x په لور هم اوبی شي. دلته y په خوښه نيسو، نو د لته د برابرون (۱۱ . ۱) ځواب داسی دی , x = -(b/a)y + c/b په خوښه y ۰

دا چي په لاندې کی مورږ د درېو یا ډیرو ناپيژندونکو يا نامعلومو برابرونونو سره سر او کار لرو، نو موخه ور بولو که ناپيژندونکې د x, y , z .... سره په نخښنه نه کړو بلکه د $x_1, x_2, x_3, ...$ سره .

ددې په نخښونو سره کيدی شي چی په څرګند ډول وښايو:

لاندې برابرون د دوه ناپيژندونکو x_1, x_2 سره

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b, ...(11,4)$$

د a |= 0 لپاره

∞^i

ځوابونه لري

∞^i

په دې مانا چی i = 1 , 2, 3۰۰۰ ناپيژندونکو يا نامعلومی لپاره په خوښه r ازښتونه کيښوول کيدی شي.

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1} x_2 + \frac{b}{a_1}, ...(11,5)$$

x_2 په خوښه

د

$a_2 \neq 0$

لپاره

∞

ځوابونه

$$x_2 = -\frac{a}{a_2} x_1 + \frac{b}{a_2}; ....(11,6)$$

x_1

په خوښنه

د a1 =a2 = b = 0 (0.x1+ 0.x2= b = 0(لپاره ناپای ډير ځوابونه

د په خوښنه

$$x_1, x_2, ...(11,7)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$a_1 = 0; a_2 = 0; b \neq 0$$

لپاره

$$0.x_1 + 0.x_2 = b \neq 0$$

په ځتوالی یا تضاد یا مخامخوالی دی، له دې امله ځواب نه شته.
نوټ : دلته

$$\infty^i$$

دا مانا لري چی د ناپیژندوني یا مجهولی

$$x_i$$

لپاره i = 1,2.. په خوبنه ناپای ارزښتونه نیول کیدی شي.

۱۱ . ۱ . ۲ – دوه لاینیز برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سره

د دوه برابرونونو سیستم د دوه ناپیژندونکو سره لاندې عمومي شکل لري

$$I............a_{11}x_1a_{12}x_2 = a_1$$
$$II..........a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = a_2;..................(11,8)$$

دا ټاکلي برابرونونه کیدی شي چی په اوونستونو یا واریابلو x 1 اوx2کی د بلواکبرابرون یا فنکشنمساوات په څیر ونیول شي او په x1 , x2 - کواوردیناتسیستم کی د کرښو په ډول انځور شي. که کرښي یو بل غوځي کړي نو دا د مساواتو په سیستم (۸ . ۱۱) کی د کرښو یوګونی(بهتره : یوګونی، یواځنی د بل څه لپاره کارول شوی) اوبیونه ده یا حل دی.
که دواړه کرښي یو په بل پریوځي نو دا په دې مانا دي چي II همغه مساوات لکه I انځوروي. دلته دا بسیاکوي، چی د ۱۱ . ۱ . ۱ . له مخي ټیك یا فقط مساوات I یا مساوات II حل شي. دلته ناپاي ډیر

$$\infty^1$$

ځوابونه موجود دي.
داسي هم کیدی شي چی فورمال

$$\infty^2$$

رامنځ ته شي، که ټول

$$a_{ik} \wedge a_i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره برابر ي. مور دلته دا حالت نه څیرو. دا څیرو چی، که دا برابرون اوبیونه ونه لري. دا حالت هغه وخت رامنځ ته کیږي، چي کربنه I اوکربنه II غبرګي ځغلي مګر یو په بل نه وي پرتی.

په دوه برابرونونو کي، د دوه ناپیژندونکو یا اووښتونو سره، کیدي شي لاندې حالتونه را منځ ته شي

۱ - یو یوائځني ټاکلی ځواب مو مخ ته پروت دئ (اصلي حالت)

۲ - کوم ځواب مو و مخ ته نه دئ پروت (سیستم مخامخوالی یا تضاد لري)

۳ - ناپای ډیر ځوابونه موجود دی II (برابرون برابر په I مساوات او یا د هغه څو برابره دی)

۴ - ناپاي ډیر ځوابونه موجود دي.

(ټول $a_{ik} = 0$ او ټول $a_i = 0$ دي)

د دوه برابرونونو له مخی چی دوه ناپیژندونکی لري، کیدی شي په اسانتیا وپیژندل شي، چی د برابرونونو کوم حالت مو مخ ته پروت دئ.

په سیستمونو کی چي درې یا زیاتي واریابلی یا اووښتونې لري ورته حالتونه په ساده ډول نه شو پیژندلی چي کوم حالت تر مخ لرو. دلته باید فورمال پرمخ لاړ شو، دا چی څنکه دا کار سرته رسولی شو غواړو چی د پوښتنو په فورمال ځواب پیل وکړو او د برابرونونو پوښتنو ته ځواب پیدا کړو. دلته باید دري بنسټیز د مساواتسیستم د ځواب کاردودونه)متودونه(تکرار شي:

۱ . د برابر یا مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

دواړه برابرونونه د یوې نامعلومی په لور اوبی کیږي(د بیلګي په توګه د x دوه په لور(، دواړه برابرې لیکي او په دې ډول یو برابرون د یوې نامعلومي سره منځ ته راځي۰

۲ - یو د بل پر ځاي کینولو متود:

برابرون یا مساوات د یوې ناپیژندونکې (د بیلګي په توګهx دوه) په لور ځواب کیږي او دا لاس ته راوړنه په بل برابرون کی ځاي په ځاي کیږي، په دې ډول د یوې ناپیژندونې برابرون منځ ته راځي (د بیلګي په توګه دx یو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ - د زياتون کارونه (جمع کولو عمليه):

سرې يو ټاکلی څو برابره (کيدی شي چی کميز يا منفي هم وي) د II برابرون د I برابرون يوه ټاکلي څو برابره سره زياتوي، داسی چي يوه ناپيژندونی بيا مخ ته نه راځی يا له منځه ولاړه شي. د نيتجي سره بيا دا بله ناپيژندوني څيرې. دا د داوړو نامعلومو(ناپيژندونو) لپاره کيداي شي . دا متود دبرابرونونو د سيستم لپاره بنسټيز دی چی د ديترمينانتو (die Determinanten) له لارې د برابرونونو ځواب لاس ته راوړو .
دا متود په درې ځانګړو برابرونسيستمونو باندې بايد وکارول شي، ټول ځلورځلوني(ځله ووني يا ضريبونه) بايدله صفر توپير ولري يعني $a_{ik} \neq 0$ که چيرې يو $a_{ik} = 0$ د بيلګي په توګه $a_{21} = 0$ نو بيا به مساواتو په لاندې ډول د درېګوډي جوړښت لرودی:

$$I.............a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = a_1;......a_{11} \neq 0$$
$$II....................a_{22}x_2 = a_2,.......a_{22} \neq 0;..........(11,9)$$

دلته نو
$a_{21} = 0$

بيا له II سيده راويستل کيدی شو او د نتيجي څخه يي چی په I کی کښيښودل شوې وی x_1 هم معلوميدی شو. دلته دا په ګوته کوو چی د ګاوس الګوريتم په استعمال بيا برابرون د درېګوډي شکل باندې اړول کيږي .دا درې څرګند حالتونه په لاندې ډول دي :
سيستم ۱

I 2x1 + 3x2 = 4

II x1 - 2x2 = -5

دا سيستم يواځنی يوځواب لر II برابرون د I برابرون سره اړيکی نه لري

سيستم ۲

2x1 + 3x2 = 4

II 4x1 + 6x2 = 8

په اسانۍ ګورو چی دلته II برابرون په ۲ ځل شوی I برابرون دی . دواړه برابرونونه همغه کرښه وښايی او په دې ډول د مساواتو اوبيونې ناپای دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳:

I $2x1 + 3x2 = 4$

II $4x1 + 6x2 = 10$

دلته بي ډیله څرګنده ده چې برابرونونه یو د بل تضاد یا یو د بل په څټ دي .د Iبرابرون دوه برابره په لاندې ډول دی:

$4x1 + 6x2 = 8$

په دې توګه ناممکن ده چې II هم باوري وي، نو له دې امله دا سیستم ۳ اوبیونه نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۱ :

سیستم۱ دې په پورته درې ورکړ شوو متودونو ځواب شي .

الف: مساوي اینوولوکارونه یا عملیه

$$I':.....x_1 = 2-(3/2)x_2;.......;II':.....x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2-(3/2)x_2 = x_2 - 5$$

$$-(7/2)x_2 = -7$$

$$x_2 = 2;\Rightarrow$$

$$x_1 = 2-(3/2).2$$

$$x_1 = -1$$

ب) د بل په ځاي کینولوکاروونه (عملیه) : II د x1 په لور ځواب کیږي او بیا په I کی ځاي په ځاي کیږي٠

$$II'::.........x_1 = 2x_2 - 5$$

$$2(2x_2 - 5) + 3x_2 = 4$$

$$4x_2 - 10 + 3x_2 = 4$$

$$7x_2 = 14$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 2.2 - 5 \Rightarrow x_1 = -1$$

پ) د زیاتونکاروونه: x_1له منځه ځي، که (-2) ځله د II برابرون و I ته زیات شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I: .... 2x_1 + 3x_2 = 4$$
$$(-2)II: .... -2x_1 + 4x_2 = 10$$
$$I - 2II: .... 7x_2 = 14$$
$$.................................. x_2 = 2$$

کیدی شي، ود بیلګي په توګه، له II څخه x1 وشمیرل شي:

$$x_1 = 2x_2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

د زیاتون کاروونی په کلکه یا تل استعمال څخه کیدی شي
x2
له منځه یو وړل شي، په دې شکل چی د II درې برابره د I دوه ځله ته ورزیات کړی شي.

$$2.I: .... 4x_1 + 6x_2 = 8$$
$$3.II: .... 3x_1 - 6x_2 = -15$$
$$-----------------------$$
$$2.I + 3.II: .... 7x_1 .... = -7$$
$$........................ x_1 .... = -1$$

یادونه : په پورته کي یا نورو کومو ځایونو کې ، چې ټکی چیرته اینسول کیږي، پوهیږو، چې چیرته ټکی د ځاي غزونې او چیرته د ځل لپاره ځاي په ځاي شوي دي

بیلګه ۱۱ . ۲ :
سیسم ۲ دې په پورته درې متودو ځواب شي:

الف (مساوي اینوولو:
I' : x1 = 2 -(3/2).x2
II': x1 = 2 -(3/2)x2
2- (3/2)x2 = 2 - /3/2)x
0.x2 = 0

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته

x2

په خوښه. دا په دي مانا چی

x2

هر ارزښت نیوی شي ۰ له 'I ځخه ناپای ډیر ځوابونه لاس ته راځي

x1 = 2 - (3/2)x2 او x2 په خوښه.

ب) د بل په ځاي اینسوولومتود: I' x1 = 2-(3/2)x2 ,

په II کی اینسول کیږي

II' 4.(2-(3/2)x2) + 6x2 = 8

8-6x2+6x2 = 8

0.x2 = 0 x2

په خوښه له 'II لاس ته راځي

I' : x1 = 2 - 3/2 x2 x2 په خوښه

پ) د زیاتون متود یا لار یا طریقه:

2.I 4x1 + 6x2 = 8

II 4x1 + 6x2 = 8

II - 2.I : 0x1 + 0x2 = 0

که یواځی دا مساوات په نظر کي ونیول شي ، نو x1 او x2په خوښه ټاکل کیدی شي، دا چی د x1 او x2 ترمنځ په I یا II کی ورکړ شوي اړیکي دي ، نو یواځي یوه ناپیژندونکو په خوښه ټاکل کیدی شي . ځواب داسی دی:

x1 = 2-(3/2)x2

x2په خوښه

په همدي ډول:

x2 = 4/3 -(2/3)x1 ,

دلته x1 په خوښه ټاکل کیږي

بیلګه ۱۱ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیستم ۳ دي په پورته درې ورکړشوومتودونو ځواب شي.

الف (مساوي ځاي په ځاي کولو متود:

$$I': \quad x1 = 2 -(3/2)x2$$
$$II': \quad x1 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$2-(3/2)x2 = 5/2 -(3/2)x2$$
$$0.x2 = 1/ 2$$

دا یو په ښتوالی یا تضاد دی، ځکه چی هیڅ یو رییل ګڼ x2 نه شته چی دا مساوات پوره کړي، نو له دې امله کوم ځواب نه شته یا وجود نه لري.

ب) د بل په ځاي لیکلو عملیه: $I': \quad x1 = 2 - (3/2)x2$,

په II کی دی په ځای شي

$$II': 4.(2-(3/2)x2)+6x2 = 10$$
$$8 - 6x2 + 6x2 = 10$$
$$0.x2 = 2$$

دا مخامخوالی یا په ښتوالی یا تضاد دئ ، پس ځواب نه شته.

پ) د زیاتون متود:

$$2 . I \quad 4x + 6x = 8$$
$$II \quad 4x + 6x = 10$$

$$2.I - II \quad 0.x + 0.x = -2$$

په ښتوالی یا تضا د دئ ، ځواب وجود نه لري

د لاندې بیلګو سره غواړو د منځ ته راتللو پیښتنو ځوابونو لپاره اړوند لارښوونه ګوته لك کړو.

بیلګه ۱۱ ۰ ٤ :   په لاندې فورم یا بڼه   برابرونسیستم ورکړ شوی:

$$I \quad x /(a+b) +y/(a-b)$$
$$II \quad x /(a-b) +y/(a+b)$$

دا ټیك هلته   موخه ور یا هدفمند دئ چی $a =| b$ او $-a =| b$ وي، یعنی $|b| =| |a|$ وي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي چی دا سیستم د پورتنیو متودونو څخه په یوه متود ترلی ځواب کړي، د یوه د مخه ورکړ شوي فورم یا بڼې اوړون له لارې هم ځواب کیدی شي.
لمړی د جمعی متود څخه کار اخلو:
د I ځل له (a+b)/ 1 او II ځل له (a-b)/ 1- څخه وروسته دا لرو:
x/(a+b)²+y/(a²-b²)=1/(a+b)
-x/(a-b)²-y/(a²-b²)=-1/(a-b)
له دې سره د y دواړه ځله ووني یاضریبونه یو د بل مخامخ (یا په بل عبارت یو د بل په ځت) نخښی لري او له دې امله د زیاتون په حالت کی له منځه ځي، نو په دې توګه مو یو برابرون د یوې ناپیژندونکی سره مخ ته پروت دی:

$$\frac{x}{(a+b)^2}-\frac{x}{(a-b)^2}=\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a-b}$$

$$\frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}x=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}x=\frac{a-b-a-b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}x=-2b$$

$$2abx=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$x=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

که I له (a+b)/ 1 او IIله (a-b)/ 1- سره ځل شي کیدی شي: چی y په ورته ډول وشمیرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a-b)^2}=\frac{1}{a-b}$$

$$-\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y}{(a+b)^2}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$$

$$\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^2(a+b)^2}y=\frac{a-b-(a+b)}{a^2-b^2}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2}y=\frac{a+b-a+b}{a^2-b^2}$$

$$-\frac{4ab}{a^2-b^2}y=2b$$

$$2aby=b(a^2-b^2)....(*)$$

$$y=\frac{a^2-b^2}{2a};ab\neq 0$$

دلته مو ځانګړی حالت مخ ته پروت دی، چی دواړه ناپیژندونکی مساوي دي، کومی چی ځمونږ د څیړنی لپاره بي مفهومه دی.

دا د x , y لپاره شمیرل شوي ارزښتونه په هغه حالت کی باوري دی چی ab |= 0 وي.

نو څیړو چی کوم حالت توپیر د ab = 0 لپاره منځ ته راځي. . دلته مساوات) * (تر څیړنی لاندې نیسو او درې حالته توپیروو:

1. a = 0 , b |= 0

مساوات)*(داسی دي

0.x = -2b3, 0 . y = -2b3

په دې حالت کی برابرون سیستم ځواب نه لري.) تضاد مخ ته پروت دی

2. a |= 0 , b = 0

برابرون(*)(په دې حالت کی داسی دی.

0 . x = 0 ; 0 . y = 0

دلته مخامخوالی یا په څتوالی یا تضاد نه شته (له I او هم له II لاس ته راځي

x/a+y/a=1 <=> x+y=a

که y خپلواك وټاکل شي، نو لرو x=a-y دلته y په خوښه ټاکل کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بل حالت کی لرو , $y = a - x$ دلته x په خوښه دئ

3 . $a=b=0$

دا حالت د نیونی له مخی بند ، ناشونی یا ناممکن دئ.

بیلګه ۱۱ . ۵:

$$\frac{11}{2x-3y}+\frac{18}{3x-2y}=13$$

$$\frac{27}{3x-2y}-\frac{2}{2x-3y}=1$$

که دا سیستم د $(3x-2y)(2x-3y)$ سره څلوني په بنسټ فورم بدل کړي، نو لرو:

$$69x-76y=78x^2-169xy+78y^2$$

$$48x-77y=6x^2-13xy+6y^2$$

او کتل کیږي چی په دې ډول لاینیز برابرونتسیستم د x او y لپاره منځ ته نه راځي . دا چی په دې هر یو سیستم کی دوه ماتلاندې سره برابر دي نو کیدی شي چی نوې ناپیژندونکی u , v و لیکو. دا وشمیرو او بیا له دې وروسته لویي x , y راپیدا کړو . موږ ځاي پر ځاي کو

$u=1/(2x-3y)$,$v=1/(3x-2y)$

او لاس ته راوړو:

$11u+18v=13 \iff 11u+18v=13$

$27v-2u=1 \qquad -2u+27v=1$

موږ د زیاتون یا جمعی متود کاروو

$33u+54v=39$

$4u-54v=-2$

$37u=37$

$u=1 \Rightarrow v=1/9$

له دې سره کیدی شي x او y وشمیرل شي:

$1=1/(2x-3y) \iff 2x-3y=1$

$1/9=1/(3x-2y) \iff 3x-2y=9$

له دې څخه غوښتونکی ځواب $x = 5$, $y = 3$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ . ۱ . ۳ دويمه درجه ديترميناتې او د کرامر قاعده

که په ټوليزسيستم(11.8) باندې د زياتون متود استعمال شي، نودx2د له منځه وړلو په لار لاس ته راځي

$$I' = a_{22}.I - a_{12}.II$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

پورته برابرون دی) ۱۱،۱۰ (وي

اود x1 د له منځه وړلو:

$$II' = a_{11}.II - _{21}.I :$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = (a_{11}a_{2} - a_{1}a_{21})$$

دا پورته برابرون دې (۱۱،۱۱) وي

که 0 =| (a11a22 -a12a21) وي، نو له دې يواځنی ټاکلی ځواب لاس ته راځي

$$x_1 = \frac{a_1a_{22} - a_{12}a_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};\ x_2 = \frac{a_{11}a_2 - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ldots\ldots\ldots(11,12)$$

که د ارزښتونه په (11 . 8) کی ځای په ځای شي نو تصديقيږي، چی(11 . 12) په ريښتينی د (11, 8) ځواب دی. له (11 . 10) تر (11 . 12) سړی په واقعيت يا رښتونی کی د ديترمينانت کليمی په لور لاروی کوي(لارښودوي.)

پيژند ۱۱ . ۱: د يو منظم سيستم دوه ځله دوه رييلو ګڼونو $a_{ik}, (i, k = 1, 2)$ د د ۲ -امه درجه ديترمينانت لاندې ، لاندينی ګڼ پوهيږو:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};\ldots\ldots\ldots\ldots(11,13)$$

د اصلي دوه کونجتړي يا دياګونال (قطر) د توکوځل، ترې کم(منفی) د ځنګ يا فرعی دوه کوجنتړي(قطر) د توکو ځل(يا) د اصلي دوه کونجتړې يا قطر د توکو ځل ځخه د ځنګ يا فرعي دوه کونجتړې د توکو ځل کميږي يا منفی کيږي)

يادونه : دا اوس او وروسته ديترمينانت بڼه د ماتريکس په څيره ليکل شوی، په ديترمينانت کې کرښی سمې دي، خو کومه ناسمپوهنه په کې نه راځي.

په (11 . 13) کی د xi ځله ووني يا ضريبونه داسی ليکل شوي لکه په (11 . 8) سيستم کی . د (11.13) ديترمينانت له دې امله د (11 8) (له ماځخه دانوکانو کې دننه ګڼونه کله کله بدليږي، دې ته دې د ګرانو لوستونکو پام وي، دا شميرپوهنيزه ناسمي منځ ته نه راولي) سيستم د ځلونو (ضريبونو) ديترمينانت بلل کيږي.

که په (11. 13) کی لومړی (درز، ستن يا مټه يا ولاړه ليکه يا-کيله) د ديترمينانت ولاړه ليکه(په ځای) چی د xi ځله ووني يا ضريبونه دی د (11 . 8) برابرونسيستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي اړخ (مطلقه توکی) توکي a1 , a2 وليکل شي نو(په x1 اړونده) لاندې ديترمينانت لاس ته راځي:

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_1 a_{12} - a_{12} a_2$$

د پورته برابرون ګڼه يا نمره دې) ۱۱،۱٤ (وي‌په همدې ډول که د) 11 . 13 (ديترمينانت دوهم درز بدل کړی شي، نو دx2 پورې اړوند لاندې ديترمينانت لاس ته راځي

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_{21} & a_2 \end{pmatrix} = a_{11} a_2 - a_1 a_{21}; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,15)$$

که له (11 . 10) تر(11 . 12) پورې له (11 . 13) تر (11 . 15) پرتله يامقايسه شي نو لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۱ (د کرامر قاعده):
که د ځله وونو يا ضريبونو ديترمينانت لپاره په (11. 13) کی

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots (11,16)$$

باوري وي نو د مساواتو سيستم (11 . 8) يوائحنی ټاکلی ځواب لري

x1=D1/D ; x2 = D2/D /11,17)

په داسی حال چی D1 او D2 د (11 . 14) او (11 . 15) له مخی شميرل کيږي.
د (11 . 10) او (11 . 11) له امله لرو

جمله ۱۱ . ۲ :
که په (۱۱ . ۱۳) کی د ځلونو ديترمينانت D لپاره باوري وي

0 = D (11,18)

او د کم له کمه يوې ډيترمينانتD1 يا D2 لپاره په (14, 11) يا (11 , 15) باوري وي

D1|=0 ∨ D2 |=0 (11,19)

نو (11 . 8) سيستم ځواب نه لري، ځکه چي برابرون يی يو د بل سره مخامخ دي (تضاد کی دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله۱۱ . ۳ :

باوري دي

$$D=D1=D2=0 \qquad (11 . 20)$$

نو یو له برابرونونو I یا II زیاتي دئ) دواړه برابرونونه یو بل ته اړ دی یا د بل په واك کی دي(او د ۱۱ . ۱ . ۱ . ۱ . برخی متود استعمالیدلی شي یا کار ترې اخستل کیدی شي.

د ښوونبیلګو په څیر دې اوس د ۱۱ . ۱ تر ۱۱ . ۳ پورې بیلګي (۱۱ . ۱ . ۲ برخه) کارول شوي سیستمونه ۱ ،۲ او۳ ګران لستونکي په دیترنمنانتو ځواب کړي، که چیرې ما دا کار سرت ونه رساوه۰.

بیلګه ۱۱ . ۶ : د سیستم لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4-3=-7\neq 0$$

پس یواځنی ټاکلی ځواب لري. پسی باور لري

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -8+15=7\neq 0; D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -10-4=-14$$

له دې امله باوري دی

$$x1=D1/D=7/-7 , x2=D2/D=-14/-7= 2 ,$$

بیلګه۱۱ . ۷ :

د سیستم ۲ لپاره باور لري

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12-12=0$$

او ورپسی

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 24-24=0; D_2=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16-16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله ناپاي ډېر ځوابونه موجود دي) بيلګه۱۱ . ۲ دې وکتل شي.)

بيلګه ۱۱ . ۸ :   د سيستم ۳ لپاره باور لري

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$$

D =   2   3   =12 -12 = 0

او ورپسی

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 30 \neq 0$$

همدلت روښانه ده، چی ځواب نه شته(د 0=| D2 = 4 له شمیرلوکیدی شي، چی تیرشو)

بيلګه ۱۱ . ۹ :

موږ بالاخره غواړو چي په بيلګه ۱۱ . ۴ کی ورکړ شوی مساواتسیستم ته د دیترمینانت له لارې ځواب ورکړواو ددې لپاره لومړی   D , D1 او D2 شمیرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b} \\ \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{(a+b)^2} - \frac{1}{(a-b)^2} = \frac{(a-b)^2-(a+b)^2}{(a+b)^2(a-b)^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a^2-2ab+{}^2-a^2-2ab-b^2}{(a^2-b^2)^2} = -\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a-b} \\ 1 & \frac{1}{a+b} \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a+b} & 1 \\ \frac{1}{a-b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = \frac{a-b-(a+b)}{(a+b)(a-b)} = -\frac{2b}{a^2-b^2}$$

لومړی حالت $ab \mid= 0$:

دلته دیترمینانت $D \mid= 0$ او دا د برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب دی

$$x = \frac{D_1}{D} = \left(-\frac{2b}{a^2-b^2}\right) : \left(-\frac{4ab}{(a^2-b^2)^2}\right) = \frac{2b}{a^2-b^2} \cdot \frac{(a^2-b^2)^2}{4ab} = \frac{a^2-b^2}{2a}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{a^2-b^2}{2a}$$ (د $D1 = D2$ له امله)

دوم ۱ حالت $a=0, b \mid= 0$: دلته $D = 0$ مګر

$D1 = D2 \mid= 0$

او د مساواتسیستم ځواب نه لري

دوم ۲

دلته $D = D1 = D2 = 0$

او ناپای ډیر ځوابونه موجود دي چی په بیلګه ۱۱ . ۴ کي ښوول شوي .

دوم ۳ حالت $a = b = 0$:

دلته مساواتسیستم هدفمند نه دی (په صفر ویش مخ ته پروت دی) مشوره کیږي چی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندی د برابرونونو سیستم دې د لاندې بریالي فورم بدلولو وروسته دبیلا بیلو لارو ځواب شي او د ځواب متودونه دې یو د بل سره پرتله یا مقایسه شي.

$$(a-b)x+(a+b)y=a^2-b^2$$
$$(a+b)x+(a-b)y=a^2-b^2$$

۱۱ ۰ ۱ ۰ ٤ د ګاوس الګوریتم

په ۱۱ . ۱ . ۲ . برخه کي ځیرل شوو متودو ټیك په نظر نیولو سره (برابرو لیکلو- په ځاي - او د زیاتون عملیه) ، کره پو هیدلی شو چی ددې په مرسته ټولیز د برابرونسیستم (11 . 8)

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=a_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=a_2$$

په یوه درېګوډیز جوړ سیتسم

$$a_{11}x_1+a_{22}x_2=a_1$$
$$\ldots\ldots\ldots a_{22}x_2=a_2$$

بدلولي شو، کوم چی بیا خورا ساده ځواب کیدی شي

۱ . که a22 |= 0 وي، نو لاس ته راځي:

الف) x2=a2/a22

ب) برسیره پر دې که $a_{11} \neq 0$ وي، نو لاس ته راځي:

x1=(a1/a11)-(a12/a11)x2= (a1/a11)-(a12/a11).(a2/a22)

۲ . که a22 = 0 او a2 |= 0 وي نو ځواب موجود نه دئ یا نه شته

۳ . که a22 =0 او a2 = 0 وي، نو ۲- م برابرون بی هوده دی (د ضرورت وړ نه دی)، او سړی بیا ا. برابرون د ۱۱ . ۱ . ۱ برخی متود په مرسته ځوابولی شي.

د (11 . 8) سیستم د ځواب پرابلم په دې ډول کمیږي، چی دا سیستم په دریګوډئ بڼه یا – ځیره واړوي . هغه الګوریتم چی دا په هر حالت کی ځواب کولی شي، د ګاوس الګوریتم دی. یا (11 . 8) سیستم دریګوډئ ځیره لري او یا ټول aik د صفر سره برابر نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی (11 . 8) سیستم په روڅنی - یا مروج ډول او هم شیماتیکي ډول لیکل کیږي.

		x1	x2	RS
I	$a11x1+a12x2= a1$	a11	a12	a1
II	$a21x1+a22x2= a2$	a21	a22	a2

(دلته RS د مساواتو د ښي خوا (ښ خ) یا ښی لور یا ښی اړخ مانا ورکوي)، که I په ځای پریښودل شي اود II برابرون a11 / a21 - څله له I برابرون ښخه کم شي ، نولرو

		x_1	x_2	Rs
I	$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = a_1$	a_{11}	a_{12}	a_1
II'	$0.x_1+(a_{12}-a_{11}.a_{22}/a_{21})x_2=a_1-a_{11}.a_2/a_{21}$	0	$a_1- a_{11}.a_{22}/a_{21}$	$a_1-a_{11}.a_2/ a_{21}$

که II' لنډ په دی فورم ولیکل شي

نو ټول سیستم لاندې شکل غوره کوي :

		x1	x2	RS
I	$a11x1+a12x2= a1$	a11	a12	a1
II'	$b22x2 = b2$		b22	b2

اوس بیرته باید زیات حالتونه یو له بل توپیر شي:

-که $b22 |= 0$ وي ، نو x2 له II' او x1 له I لاس ته راځي.
-که $b22 = 0 , b2 |=0$ وي، نو ځواب وجود نه لري.
-که $b22 = b2 = 0$ وي، نو ناپای زیات ځوابونه موجود دي، چی له I
او ۱۱ . ۱ . ۱ برخی ته ورته را څرګندیدی شي (معلومیدلی شي.)

سیستمونه ۱ ، ۲ ، ۳ د ګاوس په الګوریتم ښوول کیږي

بیلګه ۱۱ . ۱۰ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سیستم داسې لیکل او شیماتیك کیږی:

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II	$x_1 - 2x_2 = -5$	1	-2	-5

که غوښتونکی دریګوډیخیره غواړو لاس ته راولو نو Iهمداسی پریږدو او له II څخه دI یو یو په دوه ځله کموو :

		x_1	x_2	RS
I	$2x_1 + 3x_2 = 4$	2	3	4
II'	$0.x_1 - (7/2)x_2 = -5$	0	-7/2	-5

له II' لاس ته راځي $x2 = 2$
او له I څخه لاس ته راځي. $x1 = 2 -(3/2)\ x2 = -1$

بیلګه ۱۱ . ۱۱:

دلته سیستمونه ۲ او ۳ یواځي په شیماتیکي ډول (جدول په شکل (څیړو. دلته د لمړی لیکی دوه ځله د دوهمی لیکی کمیږي

سیستم ۳

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	10
II'=II-2.I	0	0	2

سیستم۲

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	4	6	8
II'=II-2.I	0	0	0

په سیستم ۲ کی ګورو چی لمړی برابرون د دوم برابرون په مخامخ څه نوی نه لري (0 = 0 تضاد یا مخامخوالی نه شته). له دې امله یو برابرون (د بیلګي په توګه I) موجود دی چی د ۱۱ . ۱ . ۱ برخي او یا ۱۱ . ۲ په څیر ځواب کیږي. په سیستم ۳ کی تضاد همدا اوس لیدل کیږي" 0 = 2 " ، نو له دې امله ځواب نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلکه ۱۱ . ۱۲ :

سیستم I دې په ځلور ډوله یا واریانتو د ګاوس الګوریتم په مرسته وڅیړل شي

دوم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II+(2/3).I	7/3	0	-7/3
1.	2	1	-1

اول واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
II'=II-(1/2).I	0	-7/2	-7
2.	-1	2.	2

ځلورم وایانت

	x1	x2	Rs
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I=I-2.II	0	7	114

-1 1. -1 1. 2

دریم واریانت

	x1	x2	RS
I	2	3	4
II	1	-2	-5
I'= I+(3/2).II	7/2	0	-7/2

2. 2 2.

دا دلته د یو ګڼ په چوکات یا ځلورګوډیز کی نیول دا مانا لري چی د هغی د پاسه ناپیژندونکي د مساوات څخه شمیرل کیږي، کومه چی په هغه لیکه کی پرته ده چی چوکاټ شوي، دا په یواځني ډول دا مانا لري :

واریانت ۱:

ا) له I څخه دې x1 و شمیرل شي

ب) له II' څخه دې x2 وشمیرل شي

پ) په 1 کی x2 له II' شمیرل کیږي:

$$x2= -7 / (-7/ 2) =2$$

ت) په 2 کی x1 له I شمیرل کیږي:

$$x = (1/ 2)(4 - 3.2) = -1$$

واریانت ۲ :

ا) له I څخه دې x2 وشمیرل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) له 'II ځخه دې x1 وشمیرل شي
پ (له 'II لرو: 1- = x1
ت) له I ځخه لرو: x2 = 2
واریانت (امکان) ۳
ا) له II ځخه دې x2 وشمیرل شي
ب) له 'I ځخه دې x1 وشمیرل شي
پ) له 'I لرو 1- = x1
ت (له II لرو x2 = 2
واریانت (امکان) ۴
ا) له II دې x1 و شمیرل شي
ب) له 'I ځخه دې x2 وشمیرل شي
پ (له 'I لر x2 = 14 / 7 = 2
ت) له II لرو:
x1 = -5+2.2 = -1

ټولی څلور واریانتی یا امکانت برابر ارزښتونه لری، خو دا چی په څلورمه واریانت کی په ټولګنونو شمیرنه کیږي، »مخته وونه« یا مخوونه(برتري) یا نوره هم ښه وړاندې توب ورکول کیږي.

۱۱ . ۱ . ۵ له دوه وو زیات برابرونونه د دوه ناپیژندونکو سرهره

که څوك له دوه زیات برابرونونه د دوه اوښتونو یا ناپیژندونکو سره ځواب کوي، په ټولیزه (عمومي) توګه باید په نخښه شي چی لومړي دوه برابرونونه x1, x2 ځوابونه لري. که دا ځوابونه په نورو برابرونونو کی ځای په ځای شي تضاد ته رسیږو. د دوه ناپیژندونکو سره له دوه زیات مساوات په ټولیزه توګه حل نه لري. یوائې په ځانګړی حالت کی دا سیستم ځواب لرودی شي. موږ دا پروسه اول په عمومي ښوونلارې څیړو او بیا د ګاوس الګوریتم له لارې.

بیلګه ۱۱ . ۱۳: لاندني دوه سیستمونه ورکړ شوي دي

a) I x1 + 2x2 = 3 b) I x1 + 2x2 = 3
II 2x1 - x2 = 1 II 2x1 - x2 = 1
III 3x1 + x2 = 2 III 3x1 + x2= 4

له I او II ځخه د ځرګندو یا معلومومتودونو له لارې په دواړو سیستمونو کی لاندې، په لومړی ځل یوائنی پیژندل شوی، ځواب لاس ته راځي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

له) a او)b ښخه لرو1 = $x1 + 2x2$ که دا ارزښتونه په IIIکی ځاي په ځاي شي نو لرو:

په (a) کې :$1.1+3.1 = 4$ =| 2, په (b) کی : $1.1 + 3.1 = 4$

نو سیستم (a) ځواب نه لري او سیستم ($\hat{b}$) یواځني ټاکلی ځواب لري

یعني $x1=x2=1$

بیلګه ۱۱ . ۱۴ :

په بیلګه ۱۱ . ۱۳ کي ورکړ شوي مساوت اوس د ګاوس د الګوریتم له لارې ځواب کوو.

a)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	3
II'=II-2.I	0	-5	-5
III'=II-3.I	0	-5	-7
III''=III'-II'	0	0	-2

b)

	x1	x2	RS
I	1	2	3
II	2	-1	1
III	3	1	4
II'=II-2.I	0	-5	-5
III=III-3.I	0	-5	-5
III=III'-II'	0	0	0

په a) کی تضاد پیژندلکیږي ($(III':0.x1+0.x2=-2)$ ځواب نه شته یا وجود نه لري .

په b) کی تضاد مخ ته نه دی پروت .($(III':0.x1+0.x2=0)$) لهII' ښخه لرو:

$x2 = 1$ او له I ښخه لاس ته راځی : $x1=3-2.1=1$

۱۱ . ۲ لاینیزبرابرونتسیستم د درې ناپیژندونکو سره

۱۱. ۱ ۰ ۲ ۰ یو برابرون د دري ناپیژندونکو سره

مو ږ یو مساوات د دري ناپیژندونکو سره تر ښیرني لاندې نیسو:

$$a11x1 + a12x2+ a13x3 = a1 \quad (11 . 21)$$

دوه مختلف حالتونه ۱ او ۲ او نورمال فورم ۳ ممکن دي

$$I. \quad a11=a12=a13=0 \quad (11 . 22)$$

دلته $x1$, $x2$ او $x3$ یو له بل پوره خپلواك ټاکل کیدی شي. ویل کیږي چی ناپاي ډیر ځوابونه مخ ته پراته دي ($x1$ په خوښه، $x2$په خوښه او $x3$په خوښه)

$$2. \quad a11=a12= a13= 0 ,a1|=0 \quad (11 . 23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته تضاد مخ ته پروت دی

$0x1+0.x2+0.x3 = a1 \neq 0$

اوبيونه نه شته.

۳- د کم له کمه يوه ځلجوړې i , k لپار دې $aik \neq 0$ وي. (بي د ټوليز وبنديزونو يا عموميت د محدود والی دې $a11 \neq 0$ وي (. کيدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي (ناپاي ډير ځوابونه)، او لاس ته راځي

$x1=(1/a11)(a1-a12x2-a13x3)$ په خوښه$x1$ او $x3$ (11,24)

۱۱ . ۲ . ۲ دوه برابرونونه د درې ناپيژندونکو سره

لاندې د دوه برابرونسيستمونه د درې اوښتونو يا ناپيژندونکو سره

$$a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11,25)$$

$$a21x1+a22x2+a23x3= a2 \quad (11,25)$$

موږ دا را ويستلي حالتونه ، چيرته چی د ټولو i, kلپاره$aik= 0$ ، په پام کی نه نيسو. دا حالت هم په پام کي نه نيسو چی دوم برابرون د لومړي په ځير وي (ناپاي ډير ځوابونه. او يا دوهم برابرون د لمړي سره په مخامخوالي يا ښتوالي يا تضاد کی وي (ځواب نه وي) . دا ټول حالتونه اسان پيژندونکي دي. موږ په يوه بيلګه کی دا اصلي حالت څيړو چی يو ناپيژندونکي يا نامعلوم (د بيلګي په توګه $x3$) په خوښه ټاکل کيږي او دا نورې دوه ناپيژندونکی يا اووښتونې ($x1$ او $x2$) يواځنی لاس ته راځي، او يا يواځنی ورکول کيدی شي (ناپاي ډير ځوابونه).

بيلګه ۱۱ . ۱۵:

	x1	x2	x3	RS
I $x1+x2+x3=3$	1	1	1	3
II $x1+2x2+3x3=6$	1	2	3	6
II'=II-I $0.x1+x2+2x3=3$	0	1	2	3

له II' لاس ته راځي

$$x2 = 3 -2x3$$

له I څخه لاس ته راځي

$$x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3, x1= x3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې لاس ته راځي
$x_1=x_3, x_2 = 3 - 2x_3$ ، x_3 په خوښه.

۱۱ . ۲ . ۳ دریمه درجه دیترمینانت او د کرامر قاعده

اوس درې برابرونونه یا معادلې یا مساوات د درې ناپېژندونکو سره څېړو

$$\text{I} \qquad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3= a_1 \qquad (11 . 26)$$

$$\text{II} \qquad a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3= a_2 \qquad (11,26)$$

$$\text{III} \qquad a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3= a_3 \qquad (11,26)$$

له دې سیستم څخه کیدی شي چې د ۱۱ . ۱ . ۲ برخې د برابر لیکلو او یو د بل په ځای لیکلو متودونه په ساده ډول استعمال شي. د زیاتونتیورم (-قضیه) فکر غواړي او د دریمي درجې دیترمینانت او د کرامر قاعدې په لور مو د (۱۱ . ۲۶) سیستم ځواب پیدا کولو لپاره هڅوي

پېژند ۱۱ . ۲:
رییل ګڼونو a_{ik} ($i,k = 1,2,3$) یو درې درجه منظم د دیتمرمینانت سیستم

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,27)$$

لاندې سرې لاندنی رییلګڼ پوهیدلی شي):

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32)}) - a_{12}(a_1a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{33});\ldots\ldots\ldots\ldots(11,28)$$

له دې سره د دریمی درجې دیترمینانت شمیرنه د دوهمی درجی دیترمینانت په شمیرنه بدله شوه. . ۱۱ . ۲ تعریف او په ځانګړې توګه (11 .28) فرمول په لاندې ډول توضیح کیدی شي:
پېژند ۱۱ . ۳ : په (11 . 27) کی د دیترمینانت D لاندېدیترمینانت A_{ik} لاندې هغه دومه درجه دیترمینانت پوهیدلی شو، چی د D دیترمینانت i - می لیکی او k - م درځ یا متې د لرې کولو یا د منځه وړلو له لارې منځ ته راځي(زه د ماتریکس په دننه

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې دا لیکې او مټې یا ستې له منځه نه شم وړلی، خو دا کومې ستونځې نه پیښوی ، ځکه، چې لاس ته راوړنه یې پسې لیکل شوې)

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

په دې ډول کیدی شي چې د ۱۱ . ۲ دیترمینانت په دې فورم ولیکل شي

پیژند ۱۱ . ۴ :
د دریمی درجې دیترمینانت D لاندې، چې په (11 . 27) کی ورکړ شوی دی، دا لاندې ګڼ پوهیدل کیږي:

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

د زیاتون عملیي ښځه، چې دلته نسبت د دوه ناپیژندونکو مساواتو ته چې دوه ناپیوندونکی لري، روښانه ده، د (11 . 26) ښځه لاس ته راوړل کیږي:

$$Dx1 = D1 \,,\ Dx2 = D2 \,,\ Dx3 = D3 \qquad (11 . 29)$$

په داسی حالت کی چی Di داسي لاس ته راځي چی د ځله وونودیترمینانت (11 . 28) کی سړی i - م درځ یا ستن یا مټه د (11. 26) برابرون ښي لور ته ځای په ځای کړي.

$$D_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_3 & a_{33} \end{vmatrix};D_{13}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_3 \end{vmatrix};......(11,30)$$

موږ دا نتیجه بې له ښوونې ورکوو.
له (۱۱ . ۲۹) ځخه لاندې جملی لاس ته راځي:

جمله ۱۱ . ۴ (د کرامر قاعده) :
که د (۱۱ . ۲۶) د ځله وونودیترمینانتو(۱۱). ۲۷ ،په همدې ډول (۱۱ . ۲۸) لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$D \neq 0$ (11 . 31)

با وري وي ، نو (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم یوائځنی ځواب لري

$x1=D1/D$; $x2=D2/D$; $x3=D3/D$ (11,32)

جمله ۱۱ . ۵ :

که $D = 0$ مګر $Di |= 0$ کم له کمه د یوه i ($i = 1,2,3$) لپاره وي، نو د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم ځواب نه لري (په (۱۱ . ۲۹ کی تضاد دی)

جمله ۱۱ . ۶ :

که $D = D1 = D2 = D3 = 0$ وي، نو په (۱۱ . ۲۶) کی کم له کمه یو برابرون له ضرورته زیات دی او دا (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم کیدي شي چي د ۱۱ . ۲ . ۲ متودونو باندې ځواب شي (وړاندیز دی چی د ګاوس الګوریتم له متود ; چی په ۱ . ۲ . ۴ برخه کی ورکړ شوي ځواب شي.)

بیلګه ۱۱ . ۱۶ :

په لاندې سیستم

I x1 -x3 = -2

II x1 +x2 -x3 = 0

III 2x1 - x2 = 0

کی دی

$$D=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}-0.\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}+(-1).\begin{pmatrix}1&1\\2&-1\end{pmatrix}=-1-0-1.(-1-2)=2$$

$$D_1=\begin{pmatrix}-2&0&-1\\0&1&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}-0\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}=2;$$

$$D_2=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&0&-1\\2&0&0\end{pmatrix}=1.\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}-(-2)\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\end{pmatrix}-1.\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=4;$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&-2\\1&1&0\\2&-1&0\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}1&0\\-1&9\end{vmatrix}-0.\begin{vmatrix}1&0\\-1&0\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}=6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو یواځنی ټاکلی ځواب موجود دی.

$x1=D1/D=2/2=1,\ x2=D2/D=4/2=2,\ x3=D3/D=6/2=3$

بیلګه ۱۱ . ۱۷ :

په لاندې سیستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 + x2 + x3 = 0 \\ II & x1 \quad -x3 = 0 \\ III & 2x1 + x2 \quad = 1 \end{array}$$

کي دی.

دا بیلګه دې ګران لوستونکی پخپله وښایي ، چې اوبیونه نه شته ۰ دې ته باید ګوته ونیسم، $D = 0$ او $D1= -1 \neq 0$ ، چې ځواب نه لري۰

۱۱ . ۲ . ۴ د ګاوس الګوریتم

د ګاوس الګوریتم لومړی د (۱۱ . ۲۶) برابرونسیستم لپاره استعمالیږي. دا د دوه مساواتو لپاره چې درې ناپیژندونکي لري او همدارنګه د زیاتو مساواتو سیستم لپاره چې درې ناپیژندونکي لري د استعمال وړ دی.

د ګاوس د الګوریتم موخه په دې کی پرته ده چې (11 . 16) سیستم د ورته بدلونفورم له لارې په دریګوډیفورم را اوړي.

$$\begin{array}{lll} I & a11x1+a12x2+a13x3=a1 & (11 . 34) \\ II & b22x2+b23x3=b2 & \\ III & c33x3=c3 & \end{array}$$

بنسټیز حالت : که $a11 \neq 0, b11 \neq 0, c11 \neq 0$ وي نو یو په بل پسی سرې کړی شي چې له III $x3$, او له II $x2$, وشمیري. مګر په (11 . 34) کی ځانګړي حالتونه هم پیژندل کیږي:

-که $c3 \neq 0, c33=0$ وې، نو یو په ښتوالی یا تضاد مخ ته پروت دی، ځواب وجود نه لري

- که $c3=c33=0$ وی، نو III له ضرورتزیات دی سرې یواځی I او II څیړي.

- که $c33=c3=0$ او برسیره پر دې $a11 \neq 0, b11 \neq 0$ وي، نو $x3$ په خوښه ټاکل کیدی شي او $x2$ له II او $x1$ له I چی $x3$ ته اړ وي، شمیرلکیدی شي (ناپای ډیر ځوابونه)

-برسیره پر دې که $b22=b23=0,\ b2 \neq 0$ وي، نو ځواب وجود نه لري

-که نور هم ولرو چی $c33=c3=0$ او $b22=b23=b3=0$ وي ، نو II له ضرورت زیات دی او له $a11 \neq 0$ کیدی شي چی $x2$ او $x3$ په خوښه وټاکل شي، او $x1$ له I لاس

(c) ketabton.com: The Digital Library

ته راځي چې x2 او x3 ته اړ (په واك كې يا تابع) وي (ناپاي ډير ځوابونه ځوابونه) .
كه ټول ځلونه او د مساواتو ښی خوا صفر وي ، نو ناپاي ځوابونه موجود دی.

د گاوس الگوریتموس د دري ناپيژندونكو(11 . 26) سره له دوه پلونو(قدم) جوړ دئ
لومړی پل (قدم) : نيسو چی په (11 . 2 6)كی 0 =| a11 دی. دا د نمرې بدلولو په بنسټ هميشه لاس ته راوړی شو) بي له وركړ شووحالتونو) چی ټول aik = 0 وي) .
دلته I وركول كيږي، او له II د I دا a21/a11 - ځله او له III دا a31 / a11 - ځله د I كموي. ددې ښخه لاندې سيستم لاس ته راځي:

$$\begin{aligned} I \quad & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 35) \\ II \quad & b22x2+b23x3=b2 \\ III \quad & c33x3=c3 \end{aligned}$$

دويم پل (قدم) : د b22 |=0 نيوني سره په 'II او 'III باندې د ۱۱ . ۱ . ۴ برخې سره سم د گاوس الگوریتم استعماليږي : سړی 'II بي تغيره پريږدي اوله'III دا b32/b22-ځله د 'II كموي، له دې راپيداكيږي

$$\begin{aligned} I \quad & a11x1+a12x2+a13x3=a1 \quad (11 . 37) \\ II \quad & b22x2+b23x3=b2 \\ III \quad & c33x3=c3 \end{aligned}$$

د گاوس د شيما فورماليتي سره سم بيا دا شكل غوره كي

	x1	x2	x3	RS
I	a11	a12	a13	a1
II	a21	a22	a23	a2
III	a31	a32	a33	a3
II' = II-(a21/a11)I	b22	b23	b2	
III' = III-(a31/a11)I	b32	b33	b3	
III'' = III' - (b32/b22)II'		c33	c3	

$$x3 = c3 / c33$$

$$x2=(1/b22)(b2-b23x3)$$

$$x1=(1/a1)(a1-a12x2-a13x3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۱ . ۱۸ : دا سیستم ۰(مقایسه بیلګه ۱۱ . ۱۶)

I x1 -x3= -2

II x1 + x2-x3 = 0

III 2x1 -x2 = 0

د ګاوس الګوریتم سره په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	0	-1	-2
II	1	1	-1	0
III	2	-1	0	0
II'= II - I	0	1	0	2
III'= III - 2.I	0	-1	2	4
III'' = III' + II'	0		2	6

x3=6/2=3

x2=2……………………

x1=-2+x3=-2+3=1

بیلګه۱۱ . ۱۹: (پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I x1 + x2- x3 = 0

II x1 -x3 = 0

III 2x1+ x2 = 1

د ګاوس د الګوریتم په مرسته په لاندې ډول حل کیږي

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	0
II	1	0	-1	0
III	2	1	0	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

II'=II-I	0	-1	-2	0
III'=III-2.I	0	-1	-2	1
III''=III'-II'	0	0	0	1

دلته دی "0 = 1 " تضاد. سیستم نه اوبی کیږي یا حل نه لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۰: (مقایسه یا پرتله بیلګه ۱۱ . ۱۷) دا سیستم

I x1 +x2+x3 =3

II x1+2x2+3x3=6

III 2x1+3x2+4x3=9

په لاندې ډول د ګاوس په الګوریتم اوبیونه ده

	x1	x2	x3	RS
I	1	1	1	3
II	1	2	3	6
III	2	3	4	9
II'=II-I	0	1	2	3
III'=III-2I	0	1	2	3
III'' = III'-II'	0	0	0	0

=x3 په خوښه

x2 = 3 -2x3

x1=3-x2-x3=3-(3-2x3)-x3=x3

۱۱ . ۳ په خوښه ډیر مساوات ، په خوښه ډیر ناپیژندونکو سره

موږ په عمومي ډول د لاینیز سیستم برابرونونو په لار ښونی پیل کوو m (برابرون د nناپیژندونکو سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+....+a_{1n}x_n=a1..................(11,37)$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}+....+a_{2n}x_n=a_2$$
$$...$$
$$...$$
$$a_{nm}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+.....+a_{mn}x_n=a_m$$

دا په خوښه يا ازاد پرېږدو چی د برابرونونو ګڼون (تعداد) m د ناپيژندونکو n د ګڼون (تعداد) څخه لوي، کوچنی او که برابر دی. په څرګندو دندو يا وظايف موږ دلته له څلور ناپيژندونکو څخه نه پورته کيږو او يوائی لاندې دوه متودونه څيرو

۱۱ ۰ ۳ . ۱ دn - م درجی ديترمينانت او د کرامر قاعده

پيژند ۱۱ . ۵ :

د n رييل ګڼونو aik يوه منظم سيستم n- م درجي ديترمينانت

$$D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix};........................(11,38)$$

لاندې سرى لاندنې رييل ګڼ پوهيږي:

$$D=a_{11}A_{11}-a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}-a_{14}A_{14}+...\pm a_{1n}A_{1n}.....(11,39)$$

دلته aik غړي پورې مربوطه لاندې ديترمينانت Aik د (n-1) - م درجی ديترمينانت ده، چی پاتيږي، که په Dکیi - مه ليکه اوk - م درځ ، مته يا ستن (ليکه او درځ چی aikپه کی ولاړ وی) په کرښه لرې کړي يا کرښه پرې تيره کړي، يعنی ووهي.

په دې ډول د-n ام درجی ديترمينانت شميرل و- (n-1)-ام درجی ديترمينانت شميرلو ته راتيتيږي .

په ځانګړي توګه د څلورمی درجی ديترمينانت لپاره دا لرو

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{32}a_{33}a_{34} \\ a_{42}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};A_{12}=\begin{vmatrix} a_{21}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{33}a_{34} \\ a_{41}a_{43}a_{44} \end{vmatrix};....A_{1n}\,etc$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n برابرونونه د n ناپیژندونکو سره مخ ته ولرو) په) 11 . 37 (کی لرو) n=m د جمع تیورم په مرسته داسی سیستمونو لپاره لاندې نتیجه لاس ته راوړو

$$Dx_1=D_1, Dx_2=D_2, ...Dx_n= D_n \qquad (11 . 42)$$

د Di دیترمینانت داسی لاس ته راځي چی د ځله وونویا ضریبونو په دیترمینانت) ۱۱ . ۳۸ (کی د-i ام درځ متې یا ستن د برابرونسیستم د ښي لاس سره بدل کړي .

د بیلګی په توګه یوسیستم د ۴ مساواتو او۴ ناپیژندونکو سره (پرتله مقایسه ۱۱ . ۴۰)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 a_{12} a_{13} a_{14} \\ a_2 a_{22} a_{23} a_{24} \\ a_3 a_{32} a_{33} a_{34} \\ a_4 a_{42} a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} a_1 a_{13} a_{14} \\ a_{21} a_2 a_{23} a_{24} \\ a_{31} a_3 a_{33} a_{34} \\ a_{41} a_4 a_{43} a_{44} \end{vmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(11,43)$$

له(11 . 42) څخه لاس ته راځي

جمله ۱۱ . ۷ (د کرامر Cramer قاعده):

د ځله وونې یا ضریب دیترمینانت (۱۱,۳۸) لپاره د یوه مساوات سیستم د n مساواتو د nناپیژندوکو سره په (۱۱ . ۳۷) د m = n سره) باوري دی

$D \mid= 0$ (اصلي حالت) (11 . 44)

نو دا برابرونسیستم یواځنی ټاکلی ځواب لري(حل لري

$$x_1=D_1/D, x_2=D_2/D, ..., x_n=D_n/D. \qquad (11 . 45)$$

برعکس که , D = 0 مګر D1 |= 0 کم له کمه د یوه i لپاره نو دا سیستم حل نه لري . که D=D1=D2=...=Dn=0 وي، نو کم له کمه یو مساوات غیر ضروري دی (دلته د اوبیونې لپاره د ګاوس الګوریتم وړاندیز کوو)

بیلګه ۱۱ . ۲۱:

لا ندې سیستم دې حل شي

$$\begin{array}{llllll} I & x_1 & & +x_3 & & = 0 \\ II & 2x_1 & +x_2 & & +x_4 & =0 \\ III & & x_2 & & -x_4 & = 4 \\ IV & x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = -2 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$D=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&2\\0&1&0&-1\\1&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&0&-1\\-1&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&2\\0&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-3-3=-6$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&2\\4&1&0&-1\\-2&-1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&2\\4&1&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2&-1\\-2&1\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}4&1\\-2&-1\end{vmatrix}=-2-4=-6$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&0&0&2\\0&4&0&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&2\\4&0&-1\\-2&-1&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0&2\\0&4&-1\\1&-2&1\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}4&0\\-2&-1\end{vmatrix}+\left|2\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}\right|+2\begin{vmatrix}0&4\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=2.(4)+.2+2.(-4)=-12$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&2\\0&1&4&-1\\1&-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&4&-1\\-1&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}4&-1\\-2&1\end{vmatrix}+\left|2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}=4-2+2(-2+4)=6\right|$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&0&1&0\\2&1&0&0\\0&1&0&4\\1&-1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&4\\-1&-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&1&0\\0&1&4\\1&-1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&4\\-1&-2\end{vmatrix}+2.\begin{vmatrix}1&4\\-1&-2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&-2\end{vmatrix}=$$

$$=4+2.2-(-4)=12;$$

$$x_1=\frac{-6}{-6}=1;\ x_2=\frac{-12}{-6}=2;\ x_3=\frac{6}{-6}=-1;\ x_4=\frac{12}{-6}=-2$$

۱۱ .۳ . ۲ د ګاوس الګوریتم:

موږ ولیدل چې د ګاوس الګوریتم له لارې د مساوتو یو دریکوجشکل سیستم لاس ته راوستی شو، چې د هغي له مخې څرګندولی شو چې کوم حل)ځواب(مخ ته پروت دی .

دا په لاندي بیلګه څرګندوو

بیلګه ۱۱ . ۲ ۲ :

که په بیلګه ۱۱ . ۲۱ کې ورکړ شوی سیستم د ګاوس الګوریتم له لارې حل کړو، نو لاندني شیما لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

	x1	x2	x3	x4	Rs
I	1	0	1	0	0
II	2	1	0	2	0
III	0	1	0	-1	4
IV	1	-1	-1	1	-2
II'=II -2.I	0	1	-2	2	0
4III' = III	0	1	0	-1	4
IV' = IV-I	0	1	-2	1	-2
III'' = III' - II'	0	0	2	-3	4
IV'' = IV' +II'	0	0	-4	3	-2
IV''' = IV'' + 2.II''	0	0	0	-3	6

x4 = -2
x3=1/2(4+3.(-2))= -1
x2=0+(-1)(-2)= 2......
x1 = -(-1) = 1 ....

بیلگه ۱۱ . ۲۳:
دا برابرونسیستم

I	x1	+x2	+x3	+x4=4
II	x1	-x2	-x3	+x4=0
III	3x1	-x2	-x3	+x4=2

حل یا اوبیونه ی نه لرې، لکه د گاوس له شیما څخه چی لیدل کیږي:

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	2
II' = II-I	0	-2	-2	0	-4
III' = III-3.I	0	-4	-4	0	-10
III'' = III' - 2.II'	0	0	0	0	-2

دلته "III په ښتوالی یا تضاد خوندي لري " 0 = -2 "

بیلګه ۱۱ . ۲۴:

لاندې سیستم د ۵ برابرونونو او ۴ ناپیژندونکو سره

I x1 +x2 +x3 +x4= 4

II x1 -x2 -x3 +x4= 0

III 3x1 -x2 -x3 +3x4= 4

IV x1 +2x2 +3x3 +4x4=10

V 3x1 +x2 + x3 +3x4= 8

ګورو چی oe1 (ناپای ډیر) اوبیوني لري

	x1	x2	x3	x4	RS
I	1	1	1	1	4
II	1	-1	-1	1	0
III	3	-1	-1	3	4
IV	1	2	3	4	10
V	3	1	1	3	8
II' = II-I	0	2	- 2	0	-4
III'= III-3.I	0	-4	-4	0	-8
IV' = IV -I	0	1	2	3	6
V' = V-3.I	0	-2	-2	0	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

II"= II'+2.IV'	0	0	2	6	8
III'=III'+4.IV'	0	0	4	12	16
V" = V' +2.IV'	0	0	2	6	8
III''' = III"-2.II'	0	0	0	0	0
V'''=V"-II	0	0	0	0	0

ګورو چی III''' او V''' تضاد نه لري. سړی کړي شي چی x4 په خوښه وټاکي او لاس ته راوړي

له , x3=4-x4 II" له x2=6-2(4-3x4)-3x4=-2+3x4 IV' او لهI

x=4-x2-x3-x4=4-(-2+3x4)-(4-3x4)-x4=2-x4

نو x1=2-x4   په خوښه x4 ټاکو

او x2=-2+3x4   ، په خوښه x4 ټاکو

او x3=4-3x4   په خوښه x4 ټاکو

یادونه : هغه کڼ یا نوره هم ښه هغه ځله ووني، چې غواړو صفر شي یا له منځه وړو هغه مو شنه کړي۰

سړی د ګاوس شیما په دوم بلاك کی پیژندلی شي، مساوات، کوم چی په III' او V' پوري اړه لري، بل څه نه افاده کوي په غیر له هغی چی په II' اړه لرونکي دي. کیدی شو چی په III' او V' لیکو مو کرښه تیره کړې وی) له منځه وړې وی (. دریم بلا ك به یواځي له کرښی II' جوړ وی، او د ګاوس الګوریتم به له دې سره پاي میندلی وی.

۱۱ . ۴ هوموژین مساواتسیستم:

د n مساواتو یو سیستم د n نامعلومو سره چی د ټولو مطلقه غړي ورك شي، هموګین مساواتسیسمتم بلل کیږي   .

د n = 3 لپاره دا د مثال په توګه هوموګېن سیستم بلل کیږي

$$\begin{aligned} &\text{I} \quad a11x1+a12x2+a13x3= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\text{II} \quad a21x1+a22x2+a23x3= 0 \quad (11.\ 46 \\ &\text{III} \quad a31x1+a32x2+a33x3= 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

یو داسی هموژینسیستم تل یوه اسانه اوبیونه یا اسان حل لري

$$x1=x2=x3=...=xn=0 \qquad (\ 11.\ 47\ )$$

که د ځلوونو د یترمینانت (۱۱ . ۳۸) لپاره D |= 0 باور ولري، نو د جملی ۱۱ . ۷ شیما څخه یواځي اسان trivial اوبیونه یاحل موجود دی او باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۱. ۸ : یو هوموګین مساواتسیستم یواځ هلته سخت حل لري، که $D = 0$ باوري وي

بیلګه ۱۱ . ۲۵ :

دا هوموژین برابرونسیستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 \quad +x3=0 \\ II & x1 \ -x2 \quad =0 \\ III & x1 \ +x2 \ +x3=0 \end{array}$$

د

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (1+1) \neq 0$$

له امله یواځنی ساده اوبیونه $x1=x2=x3=0$ لري.

بیلګه ۱۱ . ۲۶:

دا هموګین مساواتسیستم

$$\begin{array}{ll} I & x1 \quad +x3 = 0 \\ II & x1 + x2 \quad = 0 \\ III & x1 + x2 + x3 = 0 \end{array}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0$$

د

له امله ناساده اوبنونه هم لري دا په لاندې ډول د ګاوس د الګوریتموس څخه لاس ته راځي: په لاندې کې RS د پاتې- یا باقي سیستم په معنا دی.

x1	x2	x3	RS			
0	0	1	I	1		
0	II		1	-1	0	
0	III		0	1	1	
II'=II-I		0	-1	-1	0	
III' = III		0	1	1	0	
II'' = II + III'		0	0	0	0	

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګورو چې II"تضاد نه لري x3په خوښه ټاکو، او له III' لاس ته راځيx3-=x2 او له I
څخه لاس ته راځي x3-=x1نوx3- =x1نو X3 په خوښه او x3- = x2 نوx3 په خوښه

. تمرینونه

د نامعلومو لپاره -لکه له ښوونځي چي ورسره بلد یو-پوهیږو او یا هم

۱ – کرښیز مساواتسیستم له دوه مجهولو سره.

مشوره مو داده، چې د دې تمرینونو د حل لپاره د مختلفو تګلارو څخه کار اخستلس شي، چې بیایې و ازمایو. د لته دې د زیاتون یا جمعي قانون او همداسې د ګاوس الګوریتم ته لومړیتوب ورکړ شي ا و د دیترمینانت سره شمیرنه دې یوه بله د استعمال لار وي.

۱ . ۱ – مساوتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

1.1.1. a) $2x_1 + 3x_2 = 8$, $3x_1 - 6x_2 = -30$ b) $x_1 = 3x_2 - 14$, $x_2 = 3x_1 - 22$

c) $51x - \frac{3}{20y} = 3$, $48x - \frac{1}{10y} = 2$ d) $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 3$, $\frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4$

1.1.2. a) $5(x_2 + 2) - 3(x_1 + 1) = 23$, $3(x_2 - 2) = 19 - 5(x_1 - 1)$ b) $3(2x_1 - x_2) + 4(x_1 - 2x_2) = 87$, $2(3x_1 - x_2) - 3(x_1 - x_2) = 82$

c) $4 - \frac{1}{3}(2x - y - \frac{9}{2}) = \frac{1}{8}(3x - 6 - 4y)$, $4 - \frac{x - \frac{1}{2}y + 3}{3} = \frac{2y - x - 6}{8}$ d) $3y - \frac{3(4x - 3y)}{2} = 2x - 3y - 1$, $3x - \frac{3(3x - 2y)}{5} = 5x - 3y - 1$

1.1.3. a) $\frac{1}{\frac{7}{2}x - 3} = \frac{1}{4y - 3}$, $\frac{1}{\frac{5}{2}x + 4} = \frac{1}{3y + 1}$ b) $\frac{1}{3x - 5} = \frac{4}{7y - 13}$, $\frac{1}{y - x} = \frac{8}{3x + y}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $\frac{1}{y-10} = \frac{25}{12x+19}$ d) $4 + y = x$

$\frac{1}{45-x} = \frac{8}{15y+1}$ $\frac{2}{5-3x} = \frac{3}{7-2y}$

1.1.4. a) $(x-1)(2y+5) = (y+1)(2x-1)$
$(2x+7)(y-2) = (2y-3)(x+2)$

b) $4(5y-3)(2x+1) = (10x+7)(4y-3)$
$2(2y+1)(x+4) = (2x+5)(2y+3)$

c) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x}+\frac{8}{y} = 3$

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6}$ $\frac{15}{x}-\frac{4}{y} = 4$

1.1.5. a) $\frac{9x_1}{2}+\frac{3x_2}{2} = 3$ b) $\frac{2x_2-5x_1}{6}+\frac{x_1}{6} = \frac{x_2-2x_1}{3}$

$3x_1 + x_2 = 2$ $\frac{5-3x_1}{3}-\frac{4x_2-1}{4} = \frac{6x_1+23}{12}-\frac{3x_1-4x_2}{2}$

c) $\frac{12}{4x_1+3x_2} - \frac{1}{3(3x_1-2x_2)} = \frac{1}{6}$ d) $3(x_1-2)+4(2x_2+\frac{3}{2}) = 0$

$\frac{5}{3x_1-2x_2} + \frac{6}{4x_1+3x_2} = 5{,}25$ $5(x_1+3)-3(x_2-\frac{1}{3}) = 16$

1.1.6. a) $3x_1 + 4x_2 = 8$
$5x_1 - 2x_2 = 9$
$7x_1 - 8x_2 = 10$

b) $6x_1 - x_2 = 1$
$9x_1 + 2x_2 = 5$
$3x_1 - x_2 = 1$

c) $5x_1 - 3x_2 = -3$
$3x_1 + 5x_2 = 5$
$3x_1 - 1{,}8x_2 = -1{,}8$
$0{,}9x_1 + 1{,}5x_2 = 1{,}5$

d) $2x_1 - 3x_2 = 10$
$-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = -\frac{5}{3}$
$x_1 - 1{,}5x_2 = 5$
$0{,}5x_1 - 0{,}75x_2 = 2{,}5$

۱ ، ۲ – مساواتسیستم د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x_1 + x_2 = a$
$ax_1 - x_2 = b$

b) $3x_1 - 2x_2 = 5a$
$2x_1 - 3x_2 = 5b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $10x + 6y = 4a + b$
$6x + 10y = 4a - b$

d) $14x - 15y = 24a$
$10x - 21y = 24b$

1.2.2. a) $\frac{x_1}{2a+b} - \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8ab}{b^2-4a^2}$
$\frac{x_1}{2a+b} + \frac{x_2}{2a-b} = \frac{8a^2+2b^2}{4a^2-b^2}$

b) $-(a+b)x_1 + (a-b)x_2 = 0$
$(a-b)x_1 + (a+b)x_2 - 4ab = 0$

c) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2 \cdot x - \left(\frac{b^2-a^2}{2b}\right)^2 \cdot y = a^2$
$\frac{a^2+b^2}{2b} \cdot x + \frac{b^2-a^2}{2b} \cdot y = b$

d) $\frac{x}{b+c} - \frac{y}{a+c} = a - c$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{b+c} = b - a$

1.2.3. a) $x + y = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$
$x - y = \frac{4ab}{a^2-b^2}$

b) $x + y = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$
$2x + 3y = \frac{2a^2+ab+3b^2}{a^2-b^2}$

c) $ax + by = 2a$
$a^2x - b^2y = a^2 + b^2$

d) $ax + by = a^3 + 2a^2b + b^3$
$bx + ay = a^3 + 2ab^2 + b^3$

1.2.4. a) $ax + by = 2a$
$x + y = \frac{a^2+b^2}{ab}$

b) $(a-b)x + (a+b)y = a + b$
$\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a-b} = \frac{1}{a+b}$

c) $\frac{x-a}{y-a} = \frac{a-b}{a+b}$
$\frac{x}{y} = \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$

d) $(a-b)x + y = \frac{a+b+1}{a+b}$
$x + (a+b)y = \frac{a-b+1}{a-b}$

۱ . ۳ – شي شمیرنه

۱. ۳. ۱ کوم دوه اعداد لاندې خویونه لري؟ که هرعدد په ۵ لوی شي، د مربع یا څلورئ کمون(تفریق) یې په ۱۰۰ لوییږي، په داسي حا لي جي ضرب یې په۳۲۵ زیاتیږي.

۱ . ۳ . ۲ د دوه عددونو جمعه یا زیاتون دومره لوي دی، لکه د تفریق مربع یې.

که ۴ لومړي عدد تع ورزیات شي او له دویم عدد کم شي، نو د مربع کمون د یا تفریق یې ۹۹ دی، وښایئ چې عددونه څومره لوی دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۳ د هرو دوه ګڼونو څخه هر یو یې په 2 لویږي، نو ګڼونه ځانونه نیسي لکه: 4 : 3 . که له هر یوه ددې دوه ګڼونوڅخه 3 کم شي ، نو داسې لاس ته راغلي ګڼې ځان نیسي لکه : 3 : 2 . دواړه ګڼونه کوم دي؟

۱ . ۳ . ۴ د دوه ګڼونو زیاتون 999 دی. که لمړی ګڼ په 9 وویشل شي او دوم په 6 ، نو د ویشونکو زیاتون 138 دی . هر یو ددې دوه ګڼونو څومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۵ د دوه ګڼونو زیاتون 1000 دی. که لمړی له 2 او دوم له 3 سره ځل یا ضرب شي، نو د ځلونو زیاتون یې 2222 دی. هر یو له دې ګڼونوڅومره لوي دی؟

۱ . ۳ . ۶ په دوه ګڼونو کې یو له بل په 0,909 لوي دی، زیاتون یې 3,191 دی. دواړه ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

۱ . ۳ . ۸ . د یوه دریکونجي د دوه اړخونواوږدوالي زیاتون 8,4 cm دی او پړیکشن یا پریوستون یې د دریکونجي په دریم اړخ 4 cm او 1,6 cm دی. د دریګوډي اړخونه څومره لوي دي؟

۱ . ۳ . ۹ . د یوه لوي ښار ترمنځ دوه کلي X او Y د ښار له مرکز Z سره یو دریګوډی جوړوي . له X څخه چې له Z څخه تیریږي ،Y ته اوږدوالي 12 cm دی، Y له مرکز Z څخه 2 km زیات لرې دی نسبت و X ته ، دواړه مخ کلي X او Y له مرکز Z څخه څومره لرېدي؟

۱ . ۳ . ۱۰ . د یوه فوټبال میدان څخه د څلورکونجي شکله د لرګیو راګرځیدلي دیوال، چې 420 m اوږد دی ، باید په اغزیو سیمانو بدل کړي. دلته یوه خوا په 5 m کوچنی کیږي، که بل اړخ په 10 m اوږده شي. له دې سره د سیمګرځی اوږده د هوارې دننه په $100\ m^2$ زیاتیږي. د څلورکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۱ . د یوه موټر ماشین یخی ۸ لیتره اوبه خونديږ کوي او دوه وتللارې لري، دا کیدی شي خالي شي، که د بیلګي په توګه لمړی 5 دقیقی او دوم 2 دقیقی واز کړي او یا دوم 6 دقیقي او لمړي 3 دقیقي واز شي. په هرنل کي څومره اوبه په یوه دقیقه کی وزي؟

۱ . ۳ ۱۲ . یو پلار له خوي څخه ۳۶ کاله زوړ دی په ۵ کاله کی پلارد خوي 1 / 4 عمرڅخه ور زیات 3 برابره د خوي عمر لري اوس پلار او خوي هر یو څومره عمر لري؟

۱ . ۳ . ۱۳ د شربت د ګډولو لپاره دوه ډوله شربتونه سره ګډیږي. که له لمړي دري بوتله واخستل شي او له دوم ۷ بوتله نو د یوه بوتل ارزښت دې ۲ مارکه وشمیرل شي. مګر که له لمړي ۷ بوتله او له دوم دري بوتله سره ګډ شي، د یوه بوتل ارزښت 40 , 2 الماني مارکه(DM) کیږي. د په کارونو شربتونو بوتل به څومره ارزښت ولري؟

۱ . ۳ . ۱۴ . یود 450 m^3 اوبو اوبه ډکی یا اوبه ساتی (بیلر) له دوه نلونو ډکیږي. که لمړی نل دري دقیقي او دوم یوه دقیه واز وي،نو په اوبه ساتي کی 40 m^3 اوبه جریان لرودی شي. مګر که لمړی یوه دقیقه او دوم نل ۷ دقیقي وازې وي، نو اوبه ساتي ته 60m^3 اوبه جریان لري. هر نل په یوه دقیقه کی څومره اوبه اوبه ساتي ته غورځوي؟ څومره باید هر نل له همغه یوه وخته واز وي چی اوبه ساتی ډك شي؟

۱ . ۳ . ۱۵ . دوه کارګرو ته د کندنی کار ور په غاړه کیږي. که دواړه یوځاي کار وکړي، نو ۱۲ ورځو ته ضرورت دی. که لمړی دوه ورځي او دوم دري ورځي کار وکړي، نو په دې وخت کی یواځي 5 / 1 برخه د کار کړه کیږي. څومره ورځی به له دوي هر یو ځانله د دې کار لپاره ضرورت ولري ؟ اړتیا ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ . ۳ . ۱۶ . د یوې ګردۍ په چاپیري چې ۱۰۰ متره اوږد دی، دوه بدنونه په حرکت راځي. هغوي هر ۲۰ دقیې حرکت کوي، که هغوي په همغه لور حرکت وکړي او هر ۴ دقیې، که هغوي یو د بل په خټ لور حرکت وکړي، هر بدن په یوه ثانیه کی څومره واټن تی کوي یا وهي؟

۱ . ۳ . ۱۷ . په یوه ګردۍ چې چاپري یې ۹۹۹ متره اوږد دی دوه بدنونه په همغه لور حرکت کوي او دا حرکت په هرو ۳۷ ثانیوکی. دواړو بدنونو سرعت څومره دی، که د لمړي سرعت څلور واره لوي لکه د دوم ګړی؟

۲

. کربنیز مساوات سیستمونه د درې مجهولو سره ۲ .

۱ – مساواتسیستم د ټاکلو ضریبونو سره

a) $$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ x + z &= 15 \\ y + z &= 16 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 18 \\ x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6,6 \\ x_1 - x_3 &= 2,6 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x + y + z &= 25 \\ 3x - 2z &= 1 \\ 20y - 16z &= 0 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x + 3z &= 13 \\ 3x - 4y &= 3 \\ 5y - 6z &= 9 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 12x + 24y - 42z &= 30 \\ 4x + 8y - 14z &= 10 \\ 6x + 12y - 21z &= 15 \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= 207 \\ 5x - 3y &= 37 \\ 3y - 2z &= 19 \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 14 \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 6 \\ 6x_1 - 16x_2 + 10x_3 &= 39 \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} 4x + 4\tfrac{1}{2}y - 6\tfrac{3}{4}z &= 20 \\ 2\tfrac{1}{5}x - 2\tfrac{1}{3}y + 1\tfrac{1}{2}z &= 5\tfrac{2}{3} \\ 1\tfrac{2}{3}x + 1\tfrac{3}{4}y - 4\tfrac{1}{2}z &= 3\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

k) $$\begin{aligned} \tfrac{2}{5}x - y &= 0 \\ \tfrac{2}{3}x - z &= 1 \\ -\tfrac{2}{3}y + z &= 2 \end{aligned}$$

۲ . ۲ – مساوات سیستمونه د ناټاکلو ضریبونو سره

a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2c \\ x_1 + x_3 &= 2b \\ x_2 + x_3 &= 2a \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2(a + b) \\ x_1 + x_3 &= 2(a + c) \\ x_2 + x_3 &= 2(b + c) \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} ax + by - z &= 1 \\ ax - by + z &= b \\ -ax + by + z &= a \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

d) $ax + y - cz = 2a$
$-ax + y + cz = 2c$
$ax - y + cz = 2ac$

e) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2a$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2b$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$

f) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{a}$
$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{2}{b}$

g) $x + \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = a$
$y + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = b$
$z + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = c$

h) $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{c-a} = a + b$
$\frac{y}{c+a} + \frac{z}{a-b} = b + c$
$\frac{z}{a+b} + \frac{x}{b-c} = c + a$

۳ . په خوبنه زيات مساوات د په خوبني زياتو مجهولو سره

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 7 \\ 0{,}5x_1 + x_2 + 1{,}5x_3 - 0{,}5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 10 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 &= 1 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 &= 10 \\ 6x_1 + 0{,}5x_2 + 5x_3 + x_4 &= 9 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 21 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 1 \\ 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 2x_5 - x_6 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 - 6x_6 &= 19 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 - 7x_6 &= -24 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 &= 3 \end{aligned}$$

هوموجين مساوات سيستمونه:

a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 20x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= 0 \\ -12x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 0 \\ 8x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 9x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . الجبري مساوات یا - برابرونونه

۱۲ . ۱ نالاینیز- یا ناکربنیز- یا ناخطي برابرونونه

ټول مساوات چی د نورمالفورم

$$A . x = a \qquad (12.1)$$

سره یوارزښته (اکویوالنت) نه وي ، نالاینیز – یا ناکربنیز مساوات بلل کیږي او عمومي فورم یی په لاندې ډول دی

$$F(x) = 0 \qquad (12 . 2)$$

دلته F (x) په x کی یوه ناکربنیزه یا ناخطي وېینه یا افاده ده . د (12 . 2) حل دا مانا لري چی ټول د xارزښتونه پیدا شي د کومو لپاره چی (12 . 2) باوري وي. باید په پام کی ونیول شي چی ایا یواځي رییل ارزښتونه پیدا کوو او که کمپلس ارزښتونه هم غواړو چی پیدا کړو. د بیلګی په توګه لاندې ناکربنیز یا لاینیز مساوات

$$x^2 - x - 2 = 0$$

لاندې دواړه رییل ځوابونه لري

$$x1 = -1 , x2 = 2$$

چی د ارزښتونو ځاي په ځاي کولو سره یې مساوات باوري کیږي .ددې په څېړ یا برعکس دا برابرون $x^2 + 1 = 0$ رییل ځواب نه لري (۵ -مه برخه دي وکتل شي)، بلکه لاندې ایماګینار ځوابونه لري : $x1= i , x2 = -i$

د دې حالت د ښه روښانولو لپاره دې (۱۵ برخه دې وکتل شي) د برابرون او فنکشن ترمنځ اړیکو ته پاملرنه وشي: اړیکو $y=F(x)$ ته فنکشنبرابرون او x ته متحوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، چې زه يې کله اووښتونی او کله ناپيژندونې بولم(ښه نومه ونه يې اوښتوني ده) په څېر يا برعکس (2 . 12) يو ټاکنمساوات دی او x هلته يوه ناپيژندونکی يا اوښتونی دی.
د (2 . 12) برابرون يا مساوات اوبيوني يا حل ته د برابرون د F (x) صفرځای يا د مساوات F(x)=0 جذر يا ريښه هم وايي.
هغه برابرون يا مساوات چې په (۱۲ . ۲) فورم نه دئ ورکړ شوی کيدی شي چې په دې لاندې فورم واړول شي. د بيلګي په توګه د دې برابرون لپاره :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = a; g(x) \neq 0 \quad \text{او} \quad f(x)=g(x)$$

نورمال فورم په لاندې ډول لاس ته راوړل کيږي

$$F(x)=f(x)-a.g(x)=0 \quad \text{او} \quad F(x)= f(x)-g(x)= 0$$

د نالاينيزو برابرونونو لپاره د لاينيزو برابرونونو په څير راغونډه (اختماميه، رابنده، راتړلی) تيوري نه شته. په پوليزه يا عمومي ډول څوك نور فرمول نه شي ورکولی، د کوم له مخې چې د صفرځاي معلوميدی شي. بايد په نومريکو (numerischen Methoden) متودونو يا ورپسې ګڼ متودونو په ورنزدې يا تقريبي ډول پيداشي

نالاينييز برابرونونه په دوه ټولګيو ويشل کيږی: الجبري او تراسځندنت چې په دې او راتلونکی څپرکي يا لکه چې ما استعمال کړې برخه کی يی څيړو، چې اوبيونې يی روښانه افاده شوې (explizit لاتين: واضح يا روښانه ، افاده شوی، اکسپليځښت) دي.

له ۱۲ . ۲ څخه تر ۱۲ . ۴ پورې الجبري برابرونونه څيړل کيږي چې په لاندې نورمال فورم يا – بڼه اړول کيدی شي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0 ....(12,3)$$

دلته په (2 . 12) کی يو نالاينيز بلواک يا – فنکشن (F (x د يوه n - م درجې پولينوم په څير مخ ته پروت دی . موږ په (۱۲ . ۲) کی د ضريبونو(ځله وونو) لپاره يواځی رييل ګڼونه پريږدو (په دې مانا چې ځلونه يواځي رييل وي، يواځی رييل ګڼونو ته اجازه ورکوو) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په (۱۲ . ۳) کی کېن اړخ ته n - م درجه پولینوم

$$F(x) = P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0 = 0..................(12,4)$$

ته ټول ریشنل (- ریښتونی) بلواک یا فنکشن هم وایي، ځکه چی د ریشنل شمیرله عملیو زیاتون، کمون، او ځل له لاري او نه په x واریابلی او ai د رییل ضریبونو، ځلونو یا فاکتورونو باندې د ویش کارونی کارولو (عملي استعمال) له لارې منځ ته راځي .ټولیز برانرون یا

$$b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0 = 0; b_n \neq 0..................(12,5)$$

کیدي شي په bn|= 0 ویش باندې په (۱۲ . ۳) نورمال فورم واړول شي .

که دا نه لاینیزفنکشن یا ۰ بلواک F (x) په (۱۲ . ۲) باندې په واریابلي یا اووښتوني x او ځلونو باندې ټول د شمیر کاروني یا عملیي او بالاخره دویش کارونه وکارول شي یا اجرا شي او رییل پارامتر (Parameterپه شمیرپوهنه کې ثابت (همغځ) او یا مرستندویه لوي ده) تشکیل شي نو فنکشنونو ته بیا مات ریشنل فنکشنونه ویل کیږي. دا تل د دوه پولینومونو یا ریشنل فنکشنونو د ویش په څیر انځوروړ دي

$$F(x) = R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1x + b_0}{c_mx^m + c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{n-2} + ... + c_1x + c_0}; .....(12,6)$$

په همدې ډول برابرون

$$F(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = 0; ....(12,7)$$

تل په (۱۲ . ۵) یا (۱۲ . ۳) برابرون اړول ور دي . دا باید په پام کی وي چی د (۱۲ . ۳) لپاره یواځنی هغه ځواب په پوښته کی راځي، د کوم لپاره چی باوري وي:

$$Q_m(x) \neq 0$$

که چیرې د نالاینیزبلواک یا - فنکشن جوړولو کی د ریشنل شمیرعملیو تر څنګ د توان (متې، په جګ) یا پوتنځ کول او جذر نیولوته هم اجازه ورکړل شي نو بیا سرې د الجري فنکشنونو څخه غږیږ. یعني داسي فنکشنونو ته الجبري فنکشنونه ویل کیږي او (۱۲ . ۲) برابرون بیا الجبري برابرون بلل کیږي ، دا ډول مساوات هم کیدی شي چی په (۱۲ . ۳) فورم واړول شي.

هره n - مه ریښه یا جذر $\sqrt{G(x)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د G(x) افادې یا ویینې له منځه وړل کیدی شي, که چیرې څوك دا برابرون په یوه خوا راوړي او بیا د برابرونونو دواړه خواوې دn په توان کړي یا د n پوتنځ یا مټ ته جګ کړي . دا په ۱۲ . ۴ برخه کی په څرګندو یا معلومو بیلګوڅیړل کیږي . په نومولو تګلارو د الجبري مساواتو ځیرنه د (۱۲ . ۳) فورم برابرونونو ته راکښته کیدلی شي. د الجبري مساواتو دا نورمال فورم د n - می درجي برابرون هم بلل کیږي. ټول نالاینیز برابرونونه چی الجبري برابرون نه دي، ترانسڅیندنت برابرون بلل کیږي . د ترانسڅیندنت رابرونونو درې تیوپونه، په نامه ، اکسپوننشل برابرونونه ، لوګاریتمي برابرونونه ، او ګونومتریکي برابرونونه دي چي په برخه ۱۳ کی به تر څیړني لاندې ونیول شي.

۱۲ . ۲ څلوری(مربع-) مساوات په توان(مټ، جګ) د ۲

۱۲ . ۲ . ۱ په جګ د ۲ مساوات په نورماله بڼه

د نالاینیزو الجبري برابرونونو ساده بڼه د ۲ په توان یا مټ (په جګ ۲ هم ویل کیږي) برابرونونه دي چی څلوری یا مربع برابرونونه بلل کیږي .د دې ټولیزه بڼه (عمومي فورم) داسی ده ۰ دی

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0; b_2 \neq 0; \ldots\ldots\ldots\ldots(12,8)$$

په b2 یي ویش په لاندې ډول یو ورته ارزښته (اکویوالنت äquivalent) نورمالبڼه یا نورمالفورم ورکوي

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0; (a_1 \neq b_1 / b_b; a_0 \neq b_0 / b_2); \ldots\ldots\ldots\ldots(12,9)$$

ددې حل د څلوری پوره کونې یا مربعتکمیل څخه په ګټه د بینوم په فورمل ودې کتل شي: ۱ . ۲ . ۲) ولاړ دی.

$$[x + a_a / 2]^2 = x^2 + a_1 x + \frac{a^2{}_1}{4}; \ldots\ldots\ldots(12,10)$$

په دې ډول کیدی شي چی (۱۲ . ۹) برابرون په لاندې فورم داسی واړول شي:

$$x^2+a1x+a0=(x+a1/2)^2+a0-a1^2/4 = 0 <=>$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

[x+a1/2]²=(a1²/4)-a0 (12,11)

که وي

(a1²/4)-a0>0 <=> a1² -4a0>0 <=> a1²>4a0 (12,12)

نو دوه امکانات شته دی، چی (۱۲ . ۱۱) برابرون پوره کړي:
داصدق کوي

$$x+\frac{a_1}{2}=\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};........................(12,13)$$

يا

$$x+\frac{a_1}{2}==-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};........................(12,14)$$

دا دواړه خواو په توان د ۲ څخه، د (۱۲ . ۱۳) او همداسی د (۱۲ . ۱۴) څخه (۱۲ ۱۲)برابرون او په دې ډول (۱۲ . ۹) برابرون لاس ته راځي (په پام کی دې وي چی a د ۲ اصلي برخی په بينا تل نا کميز يا نامنفي ګڼ پو هيدل کيږي، چی څلوری يا مربع يی a ده) . له (۱۲ . ۱۳) په همدې ډول له (۱۲ . ۱۴) څخه رييل ځوابونه لاس ته راځي،

$$x_1=-\frac{a_1}{2}+\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};x_2=-\frac{a_1}{2}-\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};........................(12,15)$$

او ددې لپاره دا هم ليکلی شو

$$x_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{(a_1^2/4)-a_0};........................(12,16)$$

په (۱۲ . ۹) کی د (۱۲ . ۱۵) په همدې توګه (۱۲ . ۱۶) ځاي پر ځاي کولو څخه پو هيدل کيږي چی دواړه ارزښتونه
x1 او x2
په رينښتونی څلوری برابرون يا مربع مساوات پوره کوي.
په لاندې حالت کی

$$(a_1^2/4)-a_0=0\Leftrightarrow a_1^2-4a_0=0\Leftrightarrow a_1^2=4a_0;.............(12,17)$$

د (۱۲ . ۱۶) له لارې تيك يو رييل اوبی لرو:

$$x_{1,2}=x_1=x_2=-(a_1/2)\pm 0=-a\ \ /2;................................(12,18)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۵) همداسی په (۱۲ . ۱۶) باندې په تکیه دا اوبی دوه واره دی یا په بل عبارت دوه واره رامنځ ته کیږي او په دې ډول د یوه دوه واره اوبیوني (۱۲ . ۱۸)څخه غږیږو.

که وي

$$(a_1^2/4)-a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2-4a_0<0 \Leftrightarrow a_1^2<4a_0;................/12,19)$$

نو (۱۲ . ۱۱) همداسی (۱۲ . ۹) رییل حل نه لري. که په کمپلس ګڼونو شمیرنه وکړو نو له ۵ - برخی څخه لاندې لاس ته راوړو

$$x+a_1/2=\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i} \wedge x+a_1/2=-\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

او په دې ډول د کونجوګیرت کمپلکس حل جوړه لاس ته راځي:

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i};...................(12,20)$$

له دې څخه هم چی په (۱۲ . ۹) ځای په ځای شي څرګندیږي چی د x1 او x2 ارزښتونه پیل برابرون یا مساوات پوره کوي.

که په (۱۲ . ۱۹) حالت کی لاندې څرګندونی ته پام وي

$$\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}=\pm\sqrt{(a_1^2/4)i-a_0};...................(12,21)$$

نو لاندې جمله ىی راغونډه داسی فرمولولی شو

جمله ۱۲ . ۱: (د څلوری یا مربع) په توان یا جګ د ۲) برابرونونو د اوبیوني فرمول) د څلوری- یا مربع برابرونونو(مساواتو) $x^2+a1x+a0=0$

$$x_{1,2}=-a_1/2\pm\sqrt{a_0-(a_1^2/4)i}$$

ټیك دوه ځوابونه لري

د $a_1^2>4a_0$

په حالت کی دوه مختلف رییل حلونه دی، د $a_1^2=4a_0$ په حالت کی یو رییل دوه برابره(ډبل) حل دی او د $a_1^2<4a_0$ په حالت کی یو جوړه کونیوګیرت - کنجوګیریکمپلکس حل شته دي.

په ساده ډول لاندې د ویپتا جمله هم د مربع مساواتو لپاره ښوول کیدی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۲ (د وييتا(Vieta)جمله) :

كه x1 او x2 د خلورې - يا مربع برابرونونو (۱۲ . ۹) همداسې د (۱۲ . ۸) اوبيونې وي نو باوري دى

$$a_1 = b_0 / b_1 = x_1.x_2;...........................(12,22)$$

$$a_2 = b_1 / b_2 = -(x_1 + x_2);....................(12,23)$$

حل : (۱۲ . ۲۳) فرمول په دريواړو حالتونو کی سم د لاسه له لاندې ښخه لاس ته راځي:

$$-(x_1 + x_2) = \left[\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] + \left[\frac{a_1}{4} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = a_i$$

د (۱۲ . ۲۲) فرمول د تصديق لپاره د بينوم دريم فرمول او i ² = -1 استعمال ښخه په په (۱۲ . ۱۲) حالت کی باور لري :

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}\right]^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1^2}{4} + a_0 = a_0$$

په (۱۲ . ۱۷) حالت کی لاس ته راځي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + 0\right]\left[-\frac{a_1}{2} - 0\right] = \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

په (۱۲ . ۱۹) حالت کی باوري دي:

$$x_1.x_2 = \left[-\frac{a_1}{2} + \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right].\left[-\frac{a_1}{2} - \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\, i\right] = \frac{a_1^2}{4} - \left[\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}\right]^2 i^2$$

$$= \frac{a_1^2}{4} - [a_0 - \frac{a_1^2}{4}].(-1) = \frac{a_1^2}{4} + a_0 - \frac{a_1^2}{4} = a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وييتا جملی په مرسته لاندې جمله باوري کيږي يا تصديقيږي

جمله ۱۲ . ۳ :

يو ۲ درجييز پولينوم کيدی شي چی په دوه لايني فاکتورونو يا ضريبونو يا ځله وونو بيل يا ټوټه يا تجزيه شي:

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2); ....(12,24)$$

په همدې ډول

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = b_2 (x - x_1)(x - x_2); ....(12,25)$$

چيرته چي x1 او x2 د څلوری برابرونونو يا مربع مساواتو (۱۲ . ۹) په همدې ډول د (۱۲ . ۸) دواړه ځوابونه دي

اوبيونه : له (۱۲ . ۲۲) ، (۱۲ . ۲۳) څخه د (۱۲ . ۹) همداسی د (۱۲ . ۸) په پام کي نيولو سره لرو

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 + a_1 x + a_0 =$$
$$= \frac{1}{b_2}(b_2 x^2 + b_1 x + b_0)$$

د جملی ۱۲ . ۳ څخه دې ته راځول کيږو چی د (۱۲ . ۱۷) حالت کی د دوه برابره ريښ اوبيو څخه خبرې وکړو (وغږيږو). د x1 = x2 له امله لاس ته راځي

$$x^2 + a_1 x + a_0 = (x - x_1)^2; a_1^2 = 4a_0; ....(12,26)$$

دا دري حالتونه(۱۲ . ۱۲) .(۱۲ . ۱۷) او (۱۲ . ۱۹) کيدی شي چی د فنکشن

$$y = p_2(x) = x^2 + a_1 x + a_0$$

څيرو يا شکلونو (ګراف) په مرسته د کتلو شي.

ګراف په بنسټيزه توګه پارابول انځوروي، چی پورته خوا ته سرواز دی. ځکه چی که x هرڅومره کوچنی شي)که x د کميز ناپای په جګ يا توان شي) او همدارنګه x هرڅومره لوي شي (که x د ∞ (ناپای) په جګ شي y لوييږي (ستريږي يا غټيږي) ، ځکه چیx² نسبت و x ته په توان يا قوي جګيږي له ټولو پولو(yد ناپای لور ته ځي)۰ د دې ډول پولو کره پيژند يا تعريف په ۱۹ - برخه کي لوستل کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په (۱۲ . ۱۲) حالت کی د x - محور په داړو رییلو ځایونو x1 او x2 کی غوځیږي؛ په (۱۲ . ۱۷) حالت کی په x1 = x2 ځای کی یي لمسوي او په (۱۲ . ۱۹) حالت کی ګډ ټکي ورسره نه لري یا نه وررسیږي (پرتله ځیره . ۱۲ . ۱)

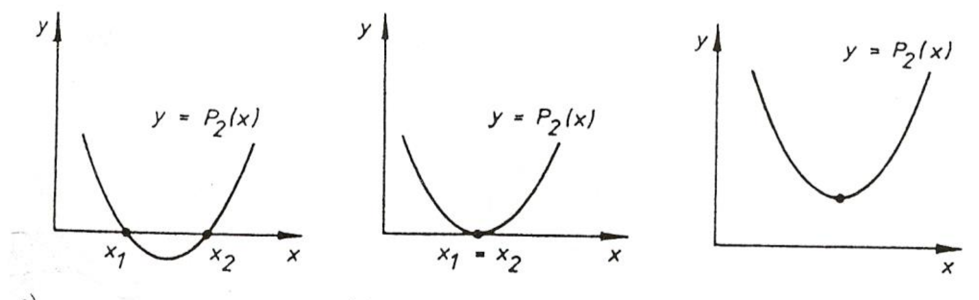


Bild 12.1

له جملی ۱۲ . ۱ تر ۱۲ . ۳ پوري به په درې ساده ډوله د (۱۲ . ۱۲) ، (۱۲ ، ۱۷ ، (۱۲ . ۱۹) سره مناسبو بیلګو روښانه شي.

بیلګه ۱۲ . ۱ :

په برابرون $x^2 - x - 6 = 0$ کی لرو

$a1 = -1$, $a0 = -6$ او د $a_1^2 - 4a_0 1 + 24 = 25 > 0$

له امله (۱۲ ، ۱۲) حالت مخ ته پروت دی.
دواړه له صفر مختلف ځایونه د جملی ۱۲ . ۱ څخه په لاندې فورم لاس ته راځي:

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 24/4} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2$$

$$\Rightarrow x_1 = 3; x_2 = -2$$

جمله ۱۲ . ۲ :

له لاندې لاس ته راوړنی یاتعقیب څخه باوري کیږي

$$a_0 = -6 = x_1 x_2 = 3(-2) = -6$$

$$a_1 = -1 = -(x_1 + x_2) = -(3-2) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له جملی ۱۲ . ۳ څخه لاس ته راځي: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

بیلګه ۱۲ . ۲ :

له مساواتو $x^2-4x+4=0$ لرو $a1=-4,a0=4$ او د $a_1^2-4a_0=16-4.4=0$

له امله (۱۲ . ۱۷) حالت مخ ته لرو ۰ دوه ئیز رییل حل په لاندې ډول له جملی ۱۲ . ۱
څخه لاس ته راځي $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-4}=2$ نو لرو $x1 = x2 = 2$

جمله ۱۲ . ۳ :
په لاندې ډول باوري کیږي

$$a_0=4=x_1.x_2=2.2=4$$
$$a_1=-4=-(x\ \ +x_2)=-(2+2)=-4$$

د جملی ۱۲ . ۳ له مخی لرو $x^2-4x+4=(x-2)^2$

بیلګه ۱۲ . ۳ :

له مساواتو $x^2-4x+13=0$ څخه لرو , $a1=-4$,$a0=13$ او د $a_1^2-4a_0=16-52-36$

له امله حالت (۱۲ ، ۱۹) مخ ته لرو.

د کونیوګیرت(کنجوګیري) کمپلکس جوړه اوبیونو یا حلونو له جملی ۱۲ . ۱ څخه په
لاندې بڼه یا فورم لاس ته راولو

$$x_{1,2}=2\pm\big)4-13=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$$
$$\Rightarrow x\ \ =2+3i;x_2=2-3i$$

د جملی ۱۲ . ۲ سره سم باور لري

$$a_0=-4=-(x_1+x_2)=-(2+3i+2-3i)=-4$$
$$a_1=13=x_1.x\ \ =(2+3i)(2-3i)=4-9i^2=4+9=13$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او د جملی ۱۲ . ۳ له مخې داسی دئ

$$x^2-4x+13=(x-2-3i)(x-2+3i)$$

د مربع مساوات (۱۲ . ۸) همداسی (۱۲. ۹) اوبی په ښکاره ډول ساده کیږي، که یو ځلی a0 اویا a1 ورك شي:

د a0 = 0 لپاره لرو

$$x(x+a_1)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-a_1$$

د a1=0 لپاره لرو

$$x^2+a_0=0$$

$$\Rightarrow x^2=-a_0; x_{,2}=\pm\sqrt{a_0}$$

۱۲ . ۲ . ۲ څلوری(مربع-)برابرون چی په نورمالبڼه

مخ ته نه دي پراته

که یو مربع مساوات په نورمال فورم (۱۲ . ۹) مخ ته نه وي پروت، له دې د مخه چی جمله ۱۲ . ۱ وکارول شي، نو باید په دې بڼه واړول شي.

بلیګه ۱۲ . ۴ :

$$2x-(x+2)^2=(x-2)^2-4(x+1)$$

$$2x-x^2-4x-4=x^2-4x+4-4x-4$$

$$-x^2-2x-4=x^2-8x$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=3/2\pm\sqrt{9/4-2}=3/2\pm\sqrt{9/4-8/4}=3/2\pm\sqrt{3/2}\pm\sqrt{1/4}=3/2\pm1/2$$

$$\Rightarrow x_1=2; x_2=1$$

که مجهول یا ناپیژندلی یا اوړیدونې x د مات لاندې رامنځ ته شي، نو باید په صفر ویش ناممکن یا ناشونوالی په پام کې ونیول شي.

بیلګه ۱۲ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

برابرون $(x^2+2x)/(2x^2+2x-4)=1$

ټيك هلته مانا لري، چې وي $2x^2+2x-4 \neq 0$

لومړی ورکړشوی برابرون اوبی کيږي او بيا ازمائل کيږي، چې ايا د ماتلاندې شرايط پوره دی، که نه.

$$x^2+2x=2x^2+2x-4$$

$$-x^2 = -4$$

$$x_{,2} = \pm 2; x \;= 2; x_2 = -2$$

د $x=x1=-2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8 + 4 - 4 = 8 \neq 0$$

او $x = x2 = -2$ لپاره په ماتلاندې کی لرو

$$2x^2 + 2x - 4 = 8-4-4 = 0$$

له دې امله $x1 = 2$ د پيل برابرون اوبی دی

۱۲ . ۲ . ۳ د n - م درجي ځانګړي برابرونونه ، چې په څلورئ يا مربع برابرونونو بيرته بدليدلی شي

د n - مې درجی مساواتو(۱۲ . ۳) يو څو ځانګړي حالتونه کيدی شي چې د څلورئ برابرونونو يا مربع مساواتو په مرسته ځواب شي يا اوبی شي۰ دا ځانګړی حالت موجود دی يا شته دی که باور ولري

$a_1 = a_1 = ... = a_{n-3} = 0$ (12 , 27)

دn- می درجی برابرون بيا داسی دي

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} = 0; ....(12,28)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$x^{n-2}(x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^{n-2} = 0 \vee x^2 + a_{n-1}x + a_{n-2} = 0; ....(12,30)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : په پورته کې له (۱۲ ، ۳۰) پورته برابرون (۱۲،۲۹) دئ
د دې برابرونونو دوهم برابرون یو څلورئ - یا مربع برابرون دی، چی د جملي ۱۲ . ۱ په بنسټ لاندې ځواب لري

$$x_{1,2} = -\frac{a_{n-1}}{2} \pm \sqrt{\frac{a_{n-1}^2}{4} - a_{n-2}}$$

لومړی برابرون دا اوبی یا حل لري $x = 0$ چی دا (n-2)- ځله رامنځ ته کیږي $x3 = x4 = ... = xn=0$

بیلګه ۱۲ . ۶:

برابرون $x^6 + 2x^5 - 3x^4$ د $x^6 + 2x^5 - 3x^4 = x^4(x^2 + x - 3)$
او $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$
لاندې اوبیونې لرو

$$x_1 = 1, x_2 = -3; x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$$

نور هم هغه حالت ساده دئ، که $a_{n-2} = 0$ وي، او باور ولري

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} = 0; x^{n-1}(x + a_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 - a_{n-1}, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0; ....(12,32)$$

یو بل ځانګړی حالت مخ ته لرو، که د برابرون (۱۲ ، ۳) درجه n جوړه ګڼ یا جفت - وي

$$n = 2k \qquad (12 . 33)$$

او فقط (ټیك) ځله ووني یا کوایفیڅینتونه a0 او ak له صفر سره برابر نه وي:

$$x^{2k} + a_k x^k + a_0 = 0; ....(12,34)$$

دلته داسی ځاي په ځاي کوو

$$y = x^k; ....(12,35)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره د y لپاره څلورې برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي:

$$y^2 + a_k y + a_0 = 0 \qquad (12, 36)$$

د لاندې ځوابونو سره (پرتله : جمله ۱۲ ، ۱)

$$y_{1,2} = -(a_k/2) \pm \sqrt{\frac{a_k^2}{4} - a_0};......................(12,37)$$

د(۱۲ ، ۳۵) له امله دې د لاندې دوه برابرونونو

$$x^k = y_2 \wedge x^k = y_1;..........................(12,38)$$

ټولې اوبيونې وځيرلی شي، چی د $k = 1$ لپاره ساده دی، د $k = 2$ لپاره(بيکوادرات برابرون) (د څلورۍ څلورۍ يا د مربع مربع) يا د ريبلو y1 او y2 لپاره د تراوسه څرګندو ميتودو سره تل کيدونکی دی . نور حالتونه ددې اوس وخت لپاره په ټوليزه توګه ستونځی لري.

بيلګه ۱۲ . ۷ :

لاندې بيکوادرات برابرون $x^4 + 5x^2 - 6 = 0$ کيدی د سوبستيچيوشن يعني بدلون له لارې $y = x^2$ په څلورۍ برابرون $y^2+5y-36=0$ باندې بدل شي. د جملی ۱۲ . ۱ په بنسټ لرو

$$y_{,2} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 36} = -5/2 \pm \sqrt{25/4 + 144/4}$$

$$= -5/2 \pm \sqrt{169/4} = -5/2 \pm 13/2$$

$$\Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -9$$

دواړه برابرونونه ، چی د بيرته بدلون(-سوبستيچيوشن) له امله لاس ته راوړو

$$x^2 = 4 , x^2 = -9$$

لاندې اوبی يا حل لري

$$x1 = 2 , x2 = -2 , x3 = 3i , x4 = -3i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ . ۲ . ۴ د برابرونسیستمونه چی بیرته په ځلوری برابرونونو بد لید لی شي

یوه د نالاینیزو مساواتسیستمونو لړۍ کیدی شي چي په ځلورۍ برابرون یا مربع مساواتو بیرته واړول شي. ددې لپاره دوه ساده بیلګي راوړو.

بیلګه ۱۲ . ۸:

$$x + y = 1 \qquad (12, 39)$$
$$x^2 + y^2 = 13 \qquad (12, 40)$$

لومړی برابرون د y په لور حل کیږي، y= 1-x، او دا حل په دوم برابرون کی اینوول کیږي:

$$x^2 + (1-x)^2 = 13$$
$$x^2 + 1 - 2x + x^2 = 13$$
$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1/2 \pm \sqrt{1/4 + 6} = 1/2 \pm \sqrt{25/4} = 1/2 \pm 5/2 \Leftrightarrow$$
$$x = 3, x_2 = -2$$

د (۱۲ ، ۴۰) له مخی په دې لاندې د y - ارزښتونه اړه لري

$$y1 = -2 , y2 = 3$$

نو دا نه لاینیز برابرون لاندي اوبیونې لري

x2 = -2 , y2 = 3 او x1 = 3 , y1 = -2

بیلګه ۱۲ . ۹ :

د لاندې مساواتو سیستم کی

$$ax + y = 1; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چی یواځي د $x \neq 0, y \neq 0$ لپاره موخه وریا هدفمند دی، دوم برابرون په xy ځلولو(ضربولو)سره په لاندې بڼه اړول کیږي:

$$y + x = xy \qquad (12,42)$$

لومړی برابرون د y په لور ځواب کیږي

$$y = 1 - ax \qquad (12, 43)$$

او په (۱۲ . ۴۲) کی ایښول کیږی یا ځای په ځای کیږي

$$1 - ax + x = x(1 - ax) = x - ax^2$$

$$, ax^2 - ax + 1 = 0 \qquad (12,44)$$

د $a = 0$ په حالت کی (۱۲ . ۴۴) برابرون مخامخوالی لري یا په ښتوالی لري یا تضاد لاس ته راکوي » $1 = 0$ « نو ځواب نه شته

د $a \neq 0$ لپاره د(۱۲ . ۴۴) ښخه لاس ته راځی $x^2 - x + 1/a = 0$

او د جملی ۱۲. ۱ له امله لرو $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} - \frac{1}{a}$

د

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.45)$$

لپاره مو (۱۲ . ۱۲) حالت مخ ته پروت دی . دوه برخی حالتونه باید په پام کی ونیول شي:

د $a > 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو , $a > 4$ او د $a < 0$ لپاره له (۱۲ ، ۴۵) ښخه لرو . $a < 4$ له دې امله د

$$a < 0 \text{ او } a > 4 \qquad (12, 46)$$

لپاره د (۱۲ ، ۴۴) دوه مختلف ریل ځوابونه موجود دي:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}, x_2 = 1/2 - \sqrt{1/4 - 1/a}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.47)$$

په دې پوروې د (۱۲ ، ۴۶) له مخی دواړه دy - ارزښتونه هم اړه لري

$$y_1 = 1 - a/2 - a.\sqrt{1/4 - 1/a}; y_2 = 1 - a/2 + \sqrt{1/4 - 1/a}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12.48)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باید وازمایيل شي چی د (۱۲ ، ۴۶) په حالت کی x1 , x2 , y1 ,y2 (ټول) نابرابر په صفر دي . تل 1 /2 < x1 دی. که x2 = 0 وی، نو باوري به وی

$$1/2 = \sqrt{1/4 - 1/a}; 1/4 = 1/4 - 1/a$$

دا د هیڅ a لپاره ممکن نه دی. له دې امله $x_2 \neq 0$ دی که y1= 0 یا y2 = 0 وی، نو لاندې به باور لرودی:

$$1 - a + a^2/4 = a^2/4 - 1 \Leftrightarrow 1 = 0$$

دا هم ناشونی یا ناممکن دی، نو دلته هم لرو $y_1 \neq 0;\ y_2 \neq 0.$ په (۱۲ ، ۴۶) حالت کی د (۱۲ ، ۴۱) د (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) سر ه سم، دوه

مختلف ریيل ځوابونه شته دی - غواړی- موجود دي x1 , y1 او . x2, y2

د

1/4-1/a=0 <=> a=4 (12 , 49)

لپاره(۱۲ ، ۱۷) حالت مخ ته پروت دی، او برابرون (۱۲ ،۴۴) ډبل ریيل حل لري

x1 = x2 = 1 /2 (12,50)

په دې پورې د (۱۲ ، ۴۳) له مخې هغه y - ارزښت ډبل ګڼ اوبی پورې هم اړه لري.

y 1 = y2 = 1 - 4. (1 /2) = -1

د (۱۲ ، ۴۹) په حالت کی پس د (۱۲ . ۱۹) یو ریل، ډبل ګڼلی حل موجود دی

x1=x2=1/2 , y1=y2= -1 (12 , 51)

د

1/4-1/a < 0 <=> 1/a > 1/4 (12 , 52)

لپاره (۱۲ ، ۱۹) حالت مخ ته پروت دی. د 0 < a لپاره (۱۲ ، ۵۲) د a<4 کتمت (ورته) دی، او د a< 0 لپاره دa>4 سره کتمت دی (له دې امله په ښتوالی یا تضاد) .

نو د(۱۲ ،۵۲) باور لري، د

0 < a < 4 (12 , 53)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره . په دې حالت کی (۱۲ ، ۴۴) کونجوګیري کمپلکس اوبیونې لري:

$$x_1 = 1/2 + \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; x_2 = 1/2 - \sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; ....(12.54$$

د (۱۲ ، ۴۳) له مخې په دې پورې د y - ارزښتونه اړه لري:

$$y_1 = 1 - a/2 - a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; y_2 = 1 - a/2 + a\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{4}}\, i; ....(12,55)$$

له دې ارزښتونو هیڅ هم صفر کیدی نه شي .پس په یوځاي شوي یا راټوله توګه لرو:
برابرونسیستم (۱۲ ، ۴۱) د $a = 0$لپاره اوبی نه لري، د $a < 0$, په همدې ډول $a >$ 4لپاره دواړه ریل اوبي (۱۲ ، ۴۷) ، (۱۲ ، ۴۸) ، د $a = 4$ لپاره رییل ډبل ګڼلي اوبۍ (۱۲ ، ۵۱) او د $4 > a > 0$لپاره دوه کونجوګیري کمپلکس اوبي (۱۲ ، ۵۴) ، (۱۲ ، ۵۵) لري.

۱۲ . ۳ دریمه درجه مساوات یا - برابرونونه

ددې لپاره چی په زړه پورې -n (ام (درجي مساواتو حلول ساده کړای شو نو لکه د مساواتو مربع سیستم جملو ته ورته جملی د دریمی درجی مساوات لپاره څیړو.
د دریمی درجی مساواتو نورمال فورم په د (۱۲ . ۳) سره سم په لاندې ډول دی.

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=0 \qquad (12,56)$$

دا پولینوم

$$y=P3(x)=x^3+ a2x^2+a1x +a0 \qquad (12 , 57)$$

لاندې بنستیز خویونه لري: که x ډیر لوي شي یعني ناپای په لور لاړشي $x \to \infty$ نو y هم د ناپای په لور ځي، ځکه چی دx^3 ارزښت نسبت د x^2 ارزښت ته په بیړه جګیږي او بیا همداسې و x ته هم . که a1 او a2 کمیز یا منفي هم وي نو y به د لویو -x ارزښتونو لپاره زیاتیز یا مثبت وي. داچي x^3 د کمیز x - ارزښت لپاره له صفر کوچنی دی، نو په همدې ډول

x->-o د y -> -o

لپاره .د دې ډول »پولوارزښت یا لیمس« لپاره کره تعریفونه بیا په ۱۹ برخه کی په پراخه توګه څیړل کیږي .د یو-x ارزښت) خورا کوچنی هم کیدی شي (شته چی د هغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره $y < 0$ وي اود یو x - ازښت) چی خورا لوي هم کیدی شي) ، د کوم لپاره چې $y>0$ دی. ددې دواړو ارزښتونو تر منځ باید د مساوات (۱۲ . ۵۶) یو رییل اوبی پروت وي.

په ډیرو لاندې بیلګو کی سړی کړی شي چی په ساده ډول د جدول په مرسته ازمائیلي حلونه پیدا کړي، په عمومي توګه بیا هم باید وشمیرل شي.

ددې لپاره یو څو بیلګی:

بیلګه ۱۲ ، ۱۰ الف:

د پولینوم

$$y = x^3 - 3x^2 -4x + 12 \qquad (12, 58)$$

لپاره لاندې د ارزښت جدول لاس ته راځي

$X = 0 , 1 , -1 , 2$

$Y = 12 , 6 , 12 , 0$

په دې توګه یو رییل صفرځاي پیدا شو

$$x_1 = 2 \qquad (12, 59)$$

په ۱۵-مه برخه کی به د هورنر شیما په بنسټ یو متود ورکړ شي ، دکومی له لار ې چی بیا د مټ(توان= لوړولو ته اړتیا نه پیدا کیږي او پولینومونو د فنکشن ارزښت ساده پیدا کیدی شي یا شمیرل کیدی شي

بیلګه ۱۲ . ۱۱ الف:

دا برابرون

$$2x^3 + 11x^2 + 12x - 9 = 0 \qquad (12,60)$$

لاندې نورمال فورم یا -بڼه لري

$$x^3 +(11 / 2) x^2 + 6x - 9/2 = 0 \qquad (12 . 61)$$

د صفرځاي پیداکولو لپاره دې د (۱۲ . ۶۰)مساوات لپاره د ارزښت جدول جوړ شي)ترتیب شي وشمیرل شي (، ځکه چی هلته ماتونه منځ ته نه راځي:

$X = 0 , 1 ,1 / 2$

$Y = -9 , 16 , \quad 0$

نو

$$x_1=1/2 \qquad (12, 62)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مساوات (۱۲ . ۶۰) په همدې ډول (۱۲ . ۶۱) یو رییل صفرځای دئ

بیلګه ۱۲ . ۱۲ الف:

د لاندې برابرون لپاره

$$x^3-9x^2+27x-27=0 \qquad (12, 63)$$

د ارزښت جدول

X = 0 , 1 , -1 ; 2 , -2, 3
Y = -27 , -8 , -64 , -1 , -25, 0

له لارې لاندې رییل صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 3 \qquad (12, 64)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۳ الف :

د برابرون

$$x^3 -9x^2 +27x -27 =0 \qquad (12, 65)$$

لپاره د جدول

X = 0 , 1
Y = -3 ; 0

سره لاندې صفرځاي لاس ته راځي

$$x = 1 \qquad (12, 66)$$

په ټولیزه توګه کیدی شي په کلکه څرګند شي ، چې د دریم درجې برابرونسیستم (۱۲ . ۵۶) لپاره تل یو رییل اوبې یاحل $x1$ شته دی. دا یو واقعیت دی چې بي له شوونې یی لیکو، چې دا پولینوم (۱۲، ۵۷) بي له پاتي په لاینیز فاکتور (x - x1) ویشل کیدی شي او یو دومه درج پولینوم ترې لاس ته راځي:

$$(x^3+a2x^2+a1x+a0):(x-x1)=x^2+b1x+b0$$

له دې امله داسی دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۱۲ . ۴ :

هر دريمه درجه برابرون (۱۲ . ۵۶) کم له کمه يو رييل اوبی x1لري او دا لاندې باوري دي

$$P_3(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x^2 + b_1x + b_0);.............(12,67)$$

دلته نو بيا نور د دريمي درجي مساواتو (۱۲ . ۵۶) دوه حلونه x2 او x3لاس ته راځي که څلورۍ برابرون يا مربع مساوات $x^2 + b1x + b0 = 0$ اوبی شي، او د جملو ۱۲ . ۱او ۱۲ . ۳ سره کيدی شي چی لاندې جمله فرمولبندې کړی شو

جمله ۱۲ . ۵ :

هر دريمه درجه برابرون درې اوبيوني يا اوبي x1 , x2,x3 لري او دا باور لري

$$x^3+a2x^2+a1x+a0=(x-x1)(x-x2)(x-x3) \quad (12 , 68)$$

دلته دا لاندني حالتونه ممکن دي

۱ - درې رييل مختلف حلونه x1 , x2 او x3 شته دی (موجود دي)

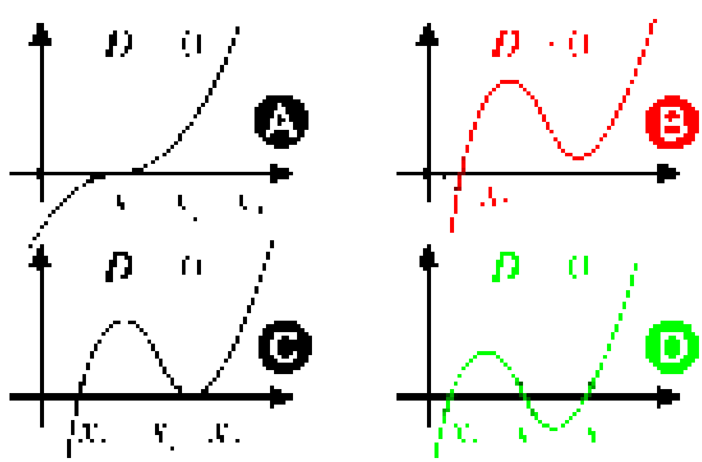
۲ - يو رييل حل x1 او ددې سره مختلف يو ډبل رييل حل x2=x3شته دی .

۳ - يو رييل درېګونی حل شته دی

$$x1 = x2 = x3$$

۴ - يو رييل حل x1 او يوه جوړه کونجوګيرت کملکس اوبيوني يا اوبي $x_2 = \overline{x_3}$ شته دی

دا لاندې څيره د ټولو راشنل فنکشنونو(۱۲ . ۵۷) تيپيکي تلنه د جملی ۱۲ . ۵ څلورو حالتونو کی ښايي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د (۱۲ . ۶۸) فرمول په مرسته د بني اړخ په ځلولواو فاکتورونو(ځله وونو) پرتلی یا انډول له لارې کیدی شي د دریمی درجي پولینومو لپاره د ویېتا جمله تصدیق کړي چی د جملی ۱۲ . ۲ سره سر خوري

جمله ۱۲ . ۶ :

که x1 , x2 او x3 د دریمي درجي برابرون (۱۲ . ۵۶) اوبیوني وي ، نو لاندې باوري دي

$$a0=-x1.x2.x3 \qquad (12,69)$$

$$a1=x1x2+x1x3+x2x3 \qquad (12,70)$$

$$a2=-(x1+x2+x3) \qquad (12,71)$$

جملی ۱۲ . ۴ په مرسته دې اوس د بیلګو ۱۲ . ۱۰ الف، تر ۱۲ . ۱۳ الف پورې د نورو دواړوx2 او x3 اوبیوني ولټول شي.

بیلګه ۱۲ . ۱۰ ب :

(۱۲ . ۵۸) برابرون د (۱۲ . ۵۹) برابرون له مخی x1 = 2 حل لري. سرې دا ځواب د ۱ . . ۲ ۴ . برخي له مخي د پارشل Partial- (ټوټه-(ویش په بنسټ لاس ته راوړي.

$$(x^3-3x^2-4x+12):(x-2)=x^2-x-6$$

$$..\underline{x^3+2x^2}$$

$$........-x^2-4x+12$$

$$.........\underline{-x^2+2x.........}$$

$$..............-6x+12$$

$$..............-6x+12$$

له $x^2 - x - 6 = 0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3}=1/2\pm\sqrt{1/4+6}=1/2\pm\sqrt{1/4+24/4}=1/2\pm5/2,$$

$$x2=3, x_3=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته د جملی ۱۲ . ۵ لومړی حالت لرو، د لاندې مختلفو ریيلو ځوابونو سره
، $x1 = 2 , x2 = 3 , x3 = -2$
او داسی دئ:

$$x^3-3x^2-4x +12 = (x - 2)(x-3)(x + 2)$$

بیلګه ۱۲ . ۱۱ ب :

(۱۲ . ۶۰) برابرون د (۱۲ . ۶۲) برابرونونو له مخی اوبی
$x1 = 1 / 2$
لري او داسی دئ:

$$(2x^3+11x^2+12x-9):(x-1/2)=2x^2+12x+18$$

او له $2x^2 + 12x + 18 = 0$

په همدې ډول یا (□) له $x^2 +6+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \Leftrightarrow x_2 = x_3 = -3$$

دلته د جملي ۱۲. ۵ دوم حالت مخ ته پروت دی د یوه ریيل حل او یو بل له دې حل مختلف ډبل ریيل حل سره، یعنی لرو $x1=1/2 , x2=x3=-3$ او داسی دئ

$$x^3+(1/2)x^2+6x-9/2)=(x-1/2)(x+3)^2$$

بیلګه ۱۲ . ۱۲ب :

(۱۲ . ۶۳) برابرون د(۱۲ . ۶۴) له مخی $x1 = 3$ ځواب لري. دلته باور لري

$$(x^3-9x^2+27x-27):(x-3)=x^2-6x+9$$

له $x^2-6x+9=0$ څخه لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3$$

نو دلته مو د جملی ۱۲ . ۵ د دریم حالت درې برابره ځواب مخ ته پروت دی یعنی

$$x_1 = x_2 = x_3 = 3$$

او داسی دئ

$$x^3+-9x^2+27x-27=(x-3)^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۲ . ۱۳ ب : (۱۲ . ۶۵) برابرون د (۱۲ . ۶۶) برابرونونو له مخې ځواب
x1 = 1 لري، او داسې دئ

$$(x^3 -5x^2 +17x-13):(x-1) = x^2-4x+13$$

له $x^2-4x+13 = 0$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm 3i$$

دلته د جملې ۱۲ . ۵ څلورم حالت د يوه رييل حل او يوه جوړه کونيوګيرت کملکس ځوابونوسره مخ ته پروت دي.

$$x1 = 1 , x2 = 2+3i , x3 = 2 - 3i,$$

او دا باوري دي

$$x^3-5x^2+17x-13=(x-1)(x-2-3i)(x-2+3i) \qquad =(x-1)(x^2-4x+13)$$

۱۲ . ۴ د ريښې (جذر) برابرون

په ۱۲ . ۱ برخه کې د ريښې رابرون وڅېړل شو. او دا هم څرګند شو چې څنګه د ريښې برابرون په ريشنل برابرونو اوله دې سره n- مې درجې برابرونو بدليدلي شي۰ دا دې دلته د بيلګو په څېر پاتي وي. يواځې رييل اوبيونې به و څېړل يا و پلټل شي.

جمله ۱۲ . ۱۴ :
د ريښې برابرون

$$7+3\sqrt{2x+4} =16;............................(12,72)$$

ډير ساده کيدی شي چې په لاينيزو برابرونونو واړول شي

$$3\sqrt{2x+4} =9; \sqrt{2x+4} = 3; 2x+4 = 9; 2x = 5; x = 5/2;........(12,73)$$

د ازمايلو لپاره که (۱۲ . ۷۳) برابرون په (۱۲ . ۷۲) برابرونونو کې خوندي شي، نو څرګنديږي چې دا دx-ارزښتونه په ريښتيا د مخه ورکړ شوي ارزښتونه پوره کوي

$$7+3\sqrt{5+4} = 7+3.3=16$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۵:

د ریښی برابرون یا مساوات

$$\sqrt{2x+19}+5=0;..........(12,74)$$

کیدی شي په ساده بڼه واړول شي

$$\sqrt{2x+19}=-5; 2x+19=5; x=3;.........................(12,75)$$

د ازمایني لپاره، که (۱۲ . ۷۵) د پیل په برابرون (۱۲ . ۷۴) کی خوندي شي، نو دا برابرون ورکوي

$$\sqrt{2x+19}=10\neq 0$$

له دې امله ارزښت $x = 3$ د برابرون (۱۲ . ۷۴) ځواب نه دی . په دې لاس ته راوړنو سره یا په دې تعقیب د پیل برابرون ځواب نه لري.) داسي کیدی هم نه شي، ځکه چي تل $2x + 19 > 0$ دی)۰

دا ساده بیلګی موږ ته را ښایي چی باید د ریښی مساواتو حل تل وازمایل شي چی ایا په ریښتوني دا ځواب دی او که نه، او دا په داسی ډول چی شمیرل شوي ارزښتونه په پیل مساوات کی کیږدي چی ایا مساوات پوره کوي که نه . دا عمل یواځي د ازمایلو لپاره نه دئ چي ګوندې تیك یا صحیح شمیرنه شوې او که نه، بلکه دا ځواب یو اړیین سما ندیز پل یا ضروری منطقي پل دئ .

په ټولیزه توګه باور لري: که برابرون:

$$f(x) = g(x) \qquad (12,76)$$

په یو ې نوي بڼه واړول شي

$$F(x) = G(x) \qquad (12,77)$$

چی د برابرون دواړو لورو ته یا یو څه ور زیات شي ، یا تری کم شي، یاداوړه خواوې په یوه ګڼ ځل (ضرب) شي او یا وویشل شي (په دې حال کی باید پرویشونی صفر نه وي، ځکه چی په صفر ویشل اجازه نه لرو) که دواړه خواوی د ریښی لاندې راشي او یاپه توان پورته شي نود پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) هر ابی بدل شوي برابرون (۱۲ . ۷۷) ځواب هم دی ، مګر نه په ښټ (برعکس، مخامخ). کیدی شي چی اړول شوی برابرون (۱۲ . ۷۷) زیات ځوابونه ولري نسبت و پیل برابرون (۱۲ ، ۷۶) ته . دا به په لاندې بیلګه کي روښانه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۲ . ۱۶:

د ریښې یا جذر برابرون یا مساوات

x-x-1=2x-1 (12 . 78)

څلوری یا مربع ته د جګولو له لارې دا بڼه غوره ګوي

$$x+(x-1)-2\sqrt{x(x-1)}=2x-1$$

x+(x-1)-2x(x-1)=2x-1 ,

نو $\sqrt{x(x-1)}=0$

په بیا څلوری یا مربع کولو سره سړی یو مربعمسوات لاس ته راوړي

x(x-1) = 0 (12 , 79)

چې لاندې اوبی یا ځواب لري :

x1 = 0, x2 = 1 (12 . 80)

دا د (۱۲ . ۷۹) اوبیونې دي، مګر باید و ازمایل شي چې ایا دا د (۱۲ . ۷۸) اوبیونې هم دي که نه.

د x = 0 لپاره په (۱۲ . ۷۸) کی دوه ریښی نه دې تعریف یا ددوه ریښو پیژند نه شته، نو x = 0 د (۱۲ . ۷۸) اوبیونه نه ده .

د x = 1 لپاره لاس ته راځي 1 - 0 = 1

له دې امله x = 1 د پیل بیلګی (۱۲ . ۷۸) یوګونی ځواب یا اوبی دی .

بیلګه ۱۲ . ۱۷:

د ریښی برابرون

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}-\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{2x^2-7x+3}=0,............(12,81)$$

کیدی شي چې په ورته ډول لکه (۱۲ . ۷۸) بڼه واړول شي:

$$\sqrt{x}.\sqrt{x-3}=\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{2x^2-7x+3} \Rightarrow$$

$$x(x-3)=(x^2-4x+3)+(2x^2-7x+3)+2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)} \Rightarrow$$

$$-2\sqrt{(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)}=2x^2-8x+6$$

$$(x^2-4x+3)(2x^2-7x+3)=(x^2-4x+3)^2;.........(12.82)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برابرون یا مساوات پوره دی، که $x^2-4x+3=0$ باور ولري، نو د لاندې لپاره

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1, x_1 = 3, x_2 = 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12,83)$$

د ټولو نورو x لپاره $|x^2-4x+3| = 0$ دی ، او (۱۲ . ۸۲) کیدی شي چي په لاندې فاکتور وویشل شي:

$$2x^2 - 7x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x3 = 0, x4 = x1 = 3$$

او په (۱۲ . ۸۱) کی ځاي په ځاي کولو سره ازمایل کیږي، چی کوم له لاندې ارزښتونو

$$x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 0$$

پیل برابرون ډکوي.(باوري کوي، پوره کوي)

د $x = 3$ لپاره باور لري:

$$\sqrt{3}.\sqrt{0} - \sqrt{9-12+3} - \sqrt{18-21+3} = 0$$

له دې امله $x = 3$ د پیل برابرون یا مساوات (۱۲ ۸۱) اوبی یا حل دی . د

$x3 = 0$ او $x2 = 1,$

لپاره ریښي پیژند نه لري یا تعریف نه دی، نو له دې امله د پیل برابرون (۱۲ . ۸۱)

اوبی حل $x = 3$ (12 . 85)

یواځني حل دی

۱۲ – تمرینونه

۱ – مربع مساوات

۱,۱- مربع مساواتدتاکلو ضریبونو سره

1.1.1.	a) $x^2 - 4 = 0$		b) $3x^2 + 27 = 0$
	c) $x^2 - 9x = 0$		d) $5x^2 = 125\ x$
1.1.2.	a) $(x + \frac{1}{3})(x - \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$		b) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = \frac{5}{16}$
	c) $(x - 6)(x + 5) = 0$		d) $(x - \sqrt{7})(x - \sqrt{5}) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.1.3. a) $x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^2 + 4x + 2 = 0$

c) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ d) $x^2 + 27\frac{1}{12} = 10\frac{7}{12}x$

1.1.4. a) $3x^2 - 20 = x$ b) $7x^2 + 23x = 84$

c) $(43 + 10x)^2 + (66 + 10x)^2 = (79 + 14x)^2$

d) $(3x - 5)^2 - (2x + 5)^2 = 0$

1.1.5. a) $\frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x-2}{6}$ b) $3x - \frac{3x-10}{9-2x} = 2 + \frac{6x^2-40}{2x-1}$

c) $\frac{5x-1}{6x-9} - \frac{9x-4}{8x+12} - \frac{3x+8}{4x^2-9} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{x-2} - \frac{8}{4-3x} = \frac{19}{2x+1}$

۱ . ۲ – مربع مساوات د ناټاکلو ضریبونو سره

1.2.1. a) $x^2 - a^2 = 0$ b) $x^2 - ax = 0$

c) $x^2 + \frac{4}{3}ax + \frac{1}{3}a^2 = 0$ d) $x^2 + \frac{1}{2}bx - \frac{1}{2}b^2 = 0$

1.2.2. a) $8x^2 - 10bx - 3b^2 = 0$ b) $12x^2 - 34ax + 10a^2 = 0$

c) $16x^2 - 8ax + a^2 - b^2 = 0$ d) $ax^2 + bx + c = 0$

1.2.3. a) $a^2 - x^2 = (a - x)(b + c - x)$

b) $(x - a + b)(x - a + c) = (a - b)^2 - x^2$

c) $(a + bx)^2 + (ax - b)^2 = 2(a^2x^2 + b^2)$

d) $(x + a + b)(x - a + b) + (x + a - b)(x - a - b) = 0$

1.2.4. a) $ax^2 - (a^2 + 1)x + a = 0$ b) $abx^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$

c) $a^2(a - x)^2 = b^2(b - x)^2$

d) $(a - x)^2 - (a - x)(x - b) + (x - b)^2 = (a - b)^2$

1.2.5. a) $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$ b) $x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$

c) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$ d) $\left(\frac{a-x}{x-b}\right)^2 = 8\left(\frac{a-x}{x-b}\right) - 15$

۱ . ۳ – مساوات سیتم، کوم مو مربع مساوتو ته لاربښودوي یا بیایي

1.3.1. a) $3x + 2y = 3$, $xy = 3$ b) $10x + y = 10$, $5x(15x + y) = 75$

c) $3x + 7y = 21$, $3x^2 - 7y = \frac{21}{2}$ d) $x^2 + xy + y^2 = 1372$, $2x - y = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.3.2. a) $x + y = a$, $xy = b$

b) $xy = a$, $\frac{x}{y} = b$

c) $x^2 + y^2 = c^2$, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

d) $ax^2 - \frac{b}{y^2} = 2(a^2 - b^2)$, $bx^2 - \frac{a}{y^2} = a^2 - b^2$

۱ . ۴ – د n-مي درجې ځانګړي مساوات، چېپه مربع مساوات بیرته اړول کیدی شي

۱ . ۴ . ۱ – بې مربع مساوات د ټاکلو یا معلومو ضریبونو سره

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b) $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40$

c) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$

d) $10x^4 - 21 = x^2$

۱ . ۴ . ۲ - بې مربع مساوات د ناټاکلو یا نامعلومو ضریبونو سره

a) $x^4 + a^4 + b^4 = 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$

b) $(a^2x^2 + b^4)(x^2 - a^2) = b^2(x^4 - a^4)$

c) $\frac{a^2b^2x^2}{a^3b + ab^3x^2} + \frac{ab - x^2}{x^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2x^2}$

d) $\frac{(a-b)x^4}{a^2 - b^2} + \frac{4x^2}{a+b} = x^2 + 4$

۱ . ۴ . ۳ – د n-مي رجې مساوات د $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-3} = 0$ سره

a) $x^{10} + 6x^9 + 5x^8 = 0$

b) $\frac{5}{2}x^5 + 7x^4 = -20x^3$

c) $abx^8 - (a^2 + b^2)x^7 = -abx^6$

d) $ax^{22} - a^2x^{11} + a^2 - a = 0$

۱ . ۵ – لاندې مساوات هم د x او هم د a پسې حل کړئ!

a) $x^2 + \sqrt{a}\,x - a = 0$

b) $x^2 - 2bx + 2(ab - \frac{1}{2}a^2) = 0$

c) $x^2 + 9ab = (a + b)(x + 2a + 2b)$

d) $(x + b)(x - b) = a(2x - a)$

۱ . ۶ . – شي شوالونه

۱ . ۶ شي سوالونه

۱ . ۶ . ۱ الف دوه ګڼونه ځان داسې نیسي لکه 1 : 3 . ددې ګڼونو د مربع زیاتون ۱۵۶۰ دی. دا ګڼونه څه نومیږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د درې يو په بل پسې ګڼونو د لوی ګڼ مربع دومره ده ، لکه د دوه کوچنیو ګڼونو د مربعو زیاتونونږ. دا ګڼونه څه نومیږي یا کوم دي؟

پ) د کوم مثبت ګڼ لسرځله د هغه د مربع څخه ۹۹۹ کوچنی دی؟

ت) مات 1/4 1 په دوه فاکتورونو a او b داسې تجزیه کړی، چې لاندې زیاتون $(a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ یې لاس ته راشي.

. ۶ . ۲ . الف) په یوه برابر برقجریان کی مقاومت په دیرش اوم Ω 30 لوییږي، په کوم کې چې د برقوه په همغه د 220 V (وولټه) شپانونګ په پنځه امپیر (1,65A) کوچنی‌شي . مقاومت او برقوه څومره دي؟

ب) دوه سیخونه چې مقاومت یې Ω 60 یو له بل توپیر لري، یوه د غبرګ چالانولوعمومي مقاومت Ω 22,5 کړي. دواړه برخه مقاومتونه څومره لوی دي؟

. ۶ . ۳ . الف) یوه د بایسکلځغلونی لار چې ۲۲۵ کیلو متره اوږده ده، د یوه موادو موټر څخه په دریتیم ساعته لنډ وخت کې وهل کیږي، چې د موټر په منځني سرعت چې 26, 25 km/h نسبت و بایسکلځغلونکي ته د موادو موټر او بایسکل ځغلونکي سرعت او د وهلو وخت څومره دی؟

ب) د سپورت جشن کې یو سپورتي چې له A و B ته په 5km/h سرعت ځغلي، له خپل منډپیل څخه یونیم ساعت وروسته له یوه بایسکلسپورتي څخه وروسته کیږي، کوم چې له مخامخ کیدو، نیم ساعت وروسته B ته رسیږي، او سملاسي بیرته ګرځي او په همغه وخت کې A ته رسیږي په کوم کې چې ځغاستی و B ته رسیږي، د $\overline{AB}$ کرښه څومره لري ده؟

پ) دوه ډبډبي ځغاستي یوبل باندې نیغ ولاړو سرکونو د څلورلاري په لور په ډبډبیو ځغلي. د لمړي سرعت ۵ متره په ثانیه کی، دوم څلور متره په ثانیه کی دي. دوي له ۳ ثانیو وروسته یو ۳۵ متره لریوالی یو له بل لري، دوي یو

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بل په سرچینه کې د څلور لارې څومره لرېوالی لروده، که لمړی له دوم ۴ متره ورته نژدې وو؟

ت) د ګادي يو لاین د موټرځغاست سرك لمړی برخې سره غبرګ غزیدلی. د یوه موټر ځغاستي پیل کې د یو مخته راتلونکي ګاډي واټن ۲۲۵ متره لرې دی. کله دوه ماشینونه په همغه جګوالي دي، که موټرځغاستی منظم تعجیل او یو تعجیل د $10 m/s^2$ کی لري، په داسی حال کی چی د ګاډی سرعت ثابت او $72\ km/h$ دی؟

ټ) په منځنی سرعت $v_m = 18km/h$ په ۶ بجو له لایپخیږ ښخه د دیساو په لور بایسکل ځغلیدونکی په ۸ بجو ، په همغه وخت کی له دیساو ښخه د لایپخیږ په لور راتلونکی بایسکل ځغاستی سره مخامخ کیږي. ورستنی ۱۰۰ دقیق د مخه دیساو ته راځي لکه دوم ولایپخیږ ته. د دیساو او لایپخیږ ترمنځ لرېوالی یا واټن څومره دی؟

۱ . ۶ . ۴ . الف) په ولاړنجيز دریڅګوډي کې ، کاتیتې څانونه داسې یوبل سره نیسي لکه 3:4 ، هیپوتینوزې ۵۰ سانتي متره ده ، کاتیتې څومره اوږدې دي؟

ب) د یوه ولاړکونجیز دریګوډي اړخونه څومره لوي دي ، که د دواړو کاتیتو زیاتون یې۱۷ سانتیمتره اود یوې کاتیتې او هیپوتینوزې زیاتون ۱۸ سانتي متره وي ؟

پ) د یوه سمکونجیز(ولاړکونجیز) دریګوډي کاتیتې څومره لويې دي، که د هغوي زیاتون ۴۲ سانتیمتره وي ، د دریګوډي هواردننه ۲۱۶ مربع سانتي متره وي ؟

ت) د یوه ولاړګوډي نیمی (قطر) ۳۵ سانتي متره اوږد دی، که د ولاړ ګوډي اوږد اړخ ۸ سانتي متره وغزول شي او لنډ اړخ ۶ سانتي متره وغزول شي، د نیمي اوږدوالی ۱۰ سانتیمتره لویږي. د سمکونجیز اړخونه څومره لوي دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) که د مربع یوه خوا ۷ سانتي متره وغزوي او بل اړخ په همدي ارزښت لنډ کړي،نو مربع او سمکونجیز دواړه د هواري دننه ۴۹۵۱ مربع سانتي متره لري. د سم اړخیز اړخونه څومره لوي دي؟ (یا ولاړ اړخ)

ټ) د یوې ګردۍ وړانګه ۱۶ سانتي متره اوږده ده. په ګرده کې دننځاي مربع اړخ څومره لوي دی؟ (یا څونډي مربع اړخ)

ج) د یوې ګردۍ نیمی باید څومره لوي، که په دننه منخشوې مربع اړخ ۱ سانتي متره د هغه د وړانګي څخه لوي وي؟

ح) که د یوې ګردۍ نیمی (قطر) ۳ سانتي متره لوي شي ،نو د ګردۍ هواره دوه برابره کیږي. د ګردۍ سرچینې نیمی څومره لویه ده؟

خ) د یوه نیمغونډي نیمی څومره دی، که د هغه د دیوال لویوالی ۳ سانتیمتره او او تشه کی یي ۵۰۱۶ مکعبسانتي متره وي؟

۲ – د دریمې او څلورمې درجې مساوات

2.1 a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ b) $x^3 + x^2 - 5x - 84 = 0$

c) $3x^3 - x^2 - 9x + 3 = 0$ d) $x^3 + x - 2 = 0$

12.5 Übungsaufgaben 1

2.2. a) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$ b) $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

c) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5 = 0$ d) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

۳ . ریښه مساوات:

ټول ارزښتونه x وشمیری، چې د لاندې مساالتو حلونه یا اوبیونې دي. د هرې پوښتنې د ټیکاوي لپاره ازماېښت وکړئ!

۳ . ۱ – ریښه مساوات د ټاکلو ضریبونو یا څلوونو سره:

3.1.1. a) $\sqrt{x} = 3$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

c) $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

d) $\sqrt[3]{x} = 5$

3.1.2. a) $(3\sqrt{x} - 5)(5\sqrt{x} - 3) = 5(3x - 31)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b) $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

c) $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-3}=7$

3.1.3. a) $\frac{\sqrt{x}-3}{7}-\frac{\sqrt{x}-25}{5}=7-\frac{2+\sqrt{x}}{4}$ b) $\frac{16-\sqrt{x}}{2}-\frac{10-\sqrt{x}}{3}=\sqrt{x}$

c) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=1$ d) $2\sqrt{x}-\sqrt{2x}=2+\sqrt{2}$

3.1.4. a) $10-\sqrt{x-2}=3$ b) $\sqrt{3x-5}+4=5$

c) $\sqrt[3]{7x-6}+6=10$ d) $4\sqrt[3]{5x-8}=3\sqrt[3]{9x+1}$

3.1.5. a) $9\sqrt{5x+1}=20+4\sqrt{5x+1}$ b) $\sqrt{7x+2}=\frac{5x+6}{\sqrt{7x+2}}$

c) $3\sqrt{4x-3}-\frac{10x}{\sqrt{4x-3}}=\frac{1}{\sqrt{4x-3}}$ d) $\frac{9x}{\sqrt{10x-9}}-\sqrt{10x-9}=\frac{2}{\sqrt{10x-9}}$

3.1.6. a) $\sqrt{9x^2-10x-55}=3x-5$ b) $x+1=\sqrt{2x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$

c) $17-4\sqrt{\frac{3x+5}{x-7}}=1$ d) $24-7\cdot\sqrt[3]{\frac{4x-1}{x-6}}=3$

3.1.7. a) $\sqrt{52-3\sqrt{5x+6}}=2\sqrt{10}$ b) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+3}}=1$

c) $\sqrt{37-7\sqrt{5x+4}}=4$ d) $\sqrt[4]{19-3\sqrt[3]{5x-9}}=2$

3.1.8. a) $\sqrt{9x-17}-3\sqrt{x-4}=1$ b) $2\sqrt{9x+4}-3\sqrt{4x-11}=1$

c) $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=\sqrt{4x-27}$ d) $\sqrt{9x+10}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+9}$

3.1.9. a) $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

b) $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}=\sqrt{x}+\sqrt{x-7}$

c) $\sqrt[3]{9x+10}-\sqrt{3x+4}=0$ d) $|\sqrt{3x+7}|+|\sqrt{4-x}|=3$

3.1.10. a) $\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}=\frac{2x}{9}$ b) $\sqrt[3]{76+x}+\sqrt[3]{76-x}=8$

c) $(\sqrt[3]{x}-1)^2+\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x}$ d) $\sqrt[4]{x^3}-2\sqrt{x}+x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۳ . ۲ – رېښه مساوات د نامعلومو ضريبونو سره

3.2.1. a) $\sqrt{x} = a$ b) $\sqrt[3]{x} = b$

c) $a - \sqrt[3]{x} = b$ d) $a\sqrt{x} - b = c\sqrt{x} - d$

3.2.2. a) $\sqrt{x - a} = b$ b) $\sqrt[3]{a - x} = b$

c) $\sqrt[4]{a^4 + x} = a$ d) $\sqrt[6]{a^6 - x} = b$

3.2.3. a) $(\sqrt{ax} + \sqrt{b})(\sqrt{ax} - \sqrt{b}) = (a+1)(a-1)b$

b) $(a - \sqrt{x})\,(b - \sqrt{x}) = (c + \sqrt{x})\,(d + \sqrt{x})$

c) $\dfrac{\sqrt{ax} - b}{\sqrt{ax} + b} = \dfrac{3\sqrt{ax} - 2b}{3\sqrt{ax} + 5b}$ d) $\dfrac{2a + 3\sqrt{bx}}{3a + 2\sqrt{bx}} = \dfrac{3b + 2\sqrt{ax}}{2b + 3\sqrt{ax}}$

3.2.4. a) $\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ b) $\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}} - \left|\dfrac{(x+a)^2}{a(x-a)}\right|$

c) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c + d}$ d) $\dfrac{a + b\sqrt{x}}{a\sqrt{x} + b} = \dfrac{c + d\sqrt{x}}{c\sqrt{x} + d}$

3.2.5. a) $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$ b) $x - \sqrt{ax(1+x) + 1 - x} = 1$

c) $\sqrt{x + a} = a - \sqrt{x}$ d) $\sqrt{x + a^2} - \sqrt{x} = b$

3.2.6. a) $\sqrt{a - x} + \sqrt{b - x} = \dfrac{b}{\sqrt{b - x}}$ b) $\sqrt{x + a} - \sqrt{5x - 3a - 4b} = \dfrac{2b}{\sqrt{x + a}}$

c) $\sqrt{x + a} - \sqrt{x - a} = \dfrac{x + a - b}{\sqrt{x + a}}$

d) $\sqrt{3a - 2b + 2x} - 2\sqrt{3a - 2b - 2x} = \dfrac{a + 2b + 2x}{\sqrt{3a - 2b + 2x}}$

3.2.7. a) $\dfrac{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$ b) $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 1} + \sqrt{3 - x^2}}{\sqrt{3x^2 - 1} - \sqrt{3 - x^2}} = \dfrac{a}{b}$

c) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{2a}$ d) $\sqrt[3]{a + x} + \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[3]{c}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۳ ، ۳ – مساوات سیستمونه، چې ريښه مساوات خوندي لري

3.3.1 a) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8$, $\sqrt{xy}=15$

b) $x+y=58$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=10$

c) $\sqrt{x-5}+\sqrt{y+2}=5$, $x+y=16$

d) $\sqrt{5-3x+x^2}+\sqrt{5-3y+y^2}=6$, $x+y=3$

3.3.2 a) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $xy=(a^2-b^2)^2$

b) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}=\dfrac{a}{b}$, $x^3-c^3=c^3-y^3$

c) $x\sqrt{x+y}=a$, $y\sqrt{x+y}=b$

d) $x\sqrt[3]{x^2+y^2}=a$, $y\sqrt[3]{x^2+y^2}=b$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یا - مساوات

لکه څنګه چی په ۱۲ . برخه کی دې ته ګوته نیول شوې وه، چی دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کېږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي.
دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتې اوبیونې یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیونې پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅېړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \text{............................}(13,1)$$

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| b |=e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$l\log_b x = c ....(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$:

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې ټولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c ....(13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وېینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کتمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کتمټ دي

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسی) $x^2+x+6=2^3= 8$

او لاندې اوبیونې لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; x_1 = -2; x_2 = 1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کیڼې لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وییبنه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x) + r_2.\log_2(x) + r_3.\log_b g_3(x) + ... = c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹) کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x) = \{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}...................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x - 1) + \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{1}{2}\log_3(x-1) = 2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x - 1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه ریښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1} = 9$ ،

د کوم له څلورئ یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{324}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{1}{2} \pm (\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1 = 9,515; x_2 = -8,515$$

ټیک دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $1<(b+3)/b-2)$ وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی
د. $b \leq 2$ لپاره د $b+3 \leq b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \leq 3$ لاس ته راځي اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \leq 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې ویینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)......................................(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$ په (۱۳،۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳،۵) لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,......... \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چی و ازمائیلی شو چی ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیونې یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳،۹) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x - \lg x - 2 = 0$ د سبستیټیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په ځلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .

د $y_1 = 2$ او $y_2 = -1$ ځوابونو سره

له $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$$x_1 = 10^2=100 \quad \text{او} \quad x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$

د $x>0$, مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې ($\lg x-1$)($\lg x+1$) سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$

$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$

$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې ځلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0\ ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

$$y_{1,2} = \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}} = \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3};\ y_1 = lox_1 = 5;\ y_2 = \lg x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_1 = 10^5;\ x_2 = x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په یوه برابرون کې لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بېلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1) + \log_4(x-1) - 1 = 0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1) = \frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1) + \frac{1}{2}\log_2(x-1) - 1 = 0,\ \log_2(x-1) = \frac{2}{3},\ x-1 = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4},$$

$$x = 1 + \sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4} + \log_4\sqrt[3]{4} - 1 = \frac{1}{3}\log_2 4 + \frac{1}{3}\log_4 4 - 1 = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{1}{3} - 1 = 0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x = b; a > 0, a \neq 1, b > 0 ....(13,14)$$

کیدی شي چې د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x = \log_a b = \lg_b / \lg_a = \ln b / \ln a \qquad (13, 15)$$

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بېلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(f (x اکسپوننتونه ياجګګنونه وي، نو:

$$a^{f(x)}=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b ....(13,17)$$

د کومو ځوابونه چی د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې څلورئ برابرون يا مربع مساوات ته بيايي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د 3- = $x_1 = 2 , x_2$ ځوابونوسره ، کوم چی د پيل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي٠

بيلګه ۱۳ . ۱۰ :

په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 , x_2 = -4$$

بيلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کيدی شي چی ناپيژندونکی د اکسپوننت يا په جګ څخه د دوه واره لوګاريتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ یا ډوی مساوات دي، ځکه چي باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg\frac{15}{7}}{\lg\frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چی د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;..................................(13,18)$$

څخه لاس ته راځي:

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + ... - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - .... = \lg c \qquad (13\,.\,19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x)سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0\ ;...................................(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13\,.\,21)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3; \ldots\ldots$ لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3\ldots\ldots \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x \, (y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}} - \sqrt{e^{x^2-1} - 1} = \sqrt{2e^{x^2-1} - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (13,25)$$

کې داسې بدلوو:

$$y = e^{x^2-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (13,26)$$

او لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow-2\sqrt{y(y-1)}=0 \Rightarrow y(y-1)=0$$
$$y_1=0; y_2=1$$

ټیک $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1 \qquad \ldots\ldots\ldots(13,28)$$

حل اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پیلبراړون پوره کوي۰
برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتمولو له لارې لاس ته راځي

$$\ln^2x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$ لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e-1=1/e , x2=e^2$

۱۳ . ۳ ګونومتریکي- یا کونجکچ برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګونومتري ساده برابرون لاندې څېره لري

sinx=a , cosx=a (13 . 29)

tanx=a , cotx=a, (13 . 30)

دلته فقط دواړه لومړي برابرونونه (۱۳ . ۲۹) ځوابونه لري ، که $1\geq a\geq -1$ باور ولري، نور ارزښتونه sin x او cos x نه شي غوره کولی(پرتله برخه ۶ . ۳) د جبشميرني سره د تکمو یا ګوټکونو په پرلپسی د (۱۳ . ۲۹) همداسی (۱۳ . ۳۰) یو ځواب لاس ته راځي

د(۱۳، ۲۹) لپاره

a F sin a F cos

د (۱۳،۳۰) لپاره

a F tan a 1/x tan

دا چي tan x او cotx پریودې همداسی 180°لري او په یوه اینتروال کی چي اوږدوالی همداسی 180°لري د(۳۰ ۱۳) ټیك یو ځواب پروت دی، لاندې جمله صدق کوي

جمله ۱۳ . ۱ :که x0 د(۱۳ . ۳۰) یو ځواب وي) چی د بیلګي په توګه د جبشميرنی په مرسته لاس ته راځي)، نو د (۱۳ . ۳۰) د لاندې بڼی ټول ځوابونه تر لاسه کوو

$$x_k = x_0 + k\pi = x_0 + k.180°; k = ... -3, -2, -1, 0 1, 2, 3, ...; .... (13,31)$$

په همدې ډول دې دلته هم د هندسی برخه په پام کی وي. چی د هغو له مخې په (۱۳ ، ۳۱) کی د بیلګي په توګه باور لري

$$x_k = \frac{\pi}{6} + k\pi = 30° + k.180°$$

د کونجونو فنکشنونه sin x او cos x پریودې(تل بېرته راګرځېدنه یا دوران)

$$2\pi = 380°$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لري. مساوات (۲۹.۱۳) ددې اوږدوالی اینتروال کی دوه حلونه لري. که چیرته د جبشمیرني سره یوه اوبیونه x_0 پیداشي، نو د sin x = a په حالت کی $x = -x_0$ هم یو حل دی، او $x = -x_0$ د cos x = a په حالت کی یو بل اوبی یا حل دی. پس لرو:

جمله ۱۳ . ۲ : که x0 د (۱۳ ، ۲۹) یو هغه اربیونه یا حل وي، چی د بیلګي په توګه په جبشمیروني لاس ته راځي، نو د sin x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;...................(13,32)$$

$$\bar{x} = \pi - x_0 + 2k\pi = 180° - x_0 + k.360°;..(13,33)$$

او د cos x = a ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځی

$$x_k = x_0 + 2k\pi = x_0 + k.360°; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3,....;...................(13,34)$$

$$\bar{x} = -x_0 + 2k\pi = -x_0 + k.360°;..(13,35)$$

بیلګه ۱۳ . ۱۶: د مساوات sin x = 0,23910 لپاره د جبشمیرني سره لاندې حلونه لاس ته راځي: (په درجه کچ یا ګراد اندازه) x0 =13,833427º
(په لینده کچ)0,24143 = 0,017453. 3,833427
د) ۱۳ . ۳۲ (،) ۱۳ ، ۳۳ (له امله په لاندې سره ټولې اوبیونې راکړ شوي دي

$$x_k = 13,833427 + k.360º = 0,24143 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = 166,16657º + k.360 = 2,9001 + k .6,28318.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۷ : د برابرون cos x = -0,682000 اوبیونه د جبشمیروني سره مومو

$$x0 = 133,00013º = 133º = 2,32125.$$

د (۱۳ ، ۳۴) او (۱۳ . ۳۵) له مخی ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$$x_k = 133° + k .360° = 2,32125 + k.6,28318,$$

$$\bar{x}_k = -133° + k.360° = -2,34125 + k.6,28318$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۸:

د برابرون $\tan x = -\sqrt{3} = 4,843000$ حل په جبشمیرني پیداکوو

$x_0 = -59,999988° = -60° = -1,04718$

له دې امله د) ۱۳ . ۳۱ (له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لاس ته راځي

$x_k = -60° + k.180° = -1,04718° + k.3,14159$

بیلګه۱۳ . ۱۹:

د برابرون $\cot x = 4,843000$ ټولې اوبیونې یا حلونه د جبشمیرني سره داسی

$x_0 = 11,666677° = 11,67° = 0,203675$

لاس ته راځي. په دې توګه د (۱۳ . ۳) له مخې ټول حلونه په لاندې ډول لرو:

$x_k = 11,67° + k.180° = 0,203675 + k.3,14159$

بیلګه ۱۳ . ۲۰ : مساوات $\sin x = \sqrt{2}$ د $2 > 1$ له امله اوبیونه ل نه لري .

د ګونومتري مساواتو نور تیپونه یا ډولونه، کوم چې تراوسه په څرګندومتودو یا لارو ځوابوړ دي، لاندې بڼه لري

$\sin f(x) = a , \quad \cos f(x) = a$ (13 . 36)

$\tan f(x) = a \quad , \cot f(x) = a$ (13 . 37)

دلته کیدی شي چې (f(x الجبري او یا ترانسځیندنته افاده وي‌که بدل (سوبستیتوتي) شي

$y=f(x)$ (13.38)

نو لاندې مساواتونه لاس ته راځي

$\sin y= a , \cos y = a$ (13 . 39)

$\text{Tan } y= a , \cot y = a$ (13 . 40)

دا کیدی شي د جملې ۱۳ . ۱ سره سم اوبې کړای شي. ددې اوبیونې یا حلونه دې

$y1, y2, y3, ...$ وي .

د (۱۳ ، ۳۷) سره سم د $f(x) = yi , \; i = 1,2,3,...$ ټولې اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي ددې لپاره دې بیلګه ورکړ شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۳ . ۲۱: $\sin(x-120°)/3=1/2$

د سبستيچيوشن يا بدلون $y=(x-120°)/3$ سره لاس ته راځي $\sin y=1/2$ د لاندې اوبيوني (حل) سره

$$y_k = 30° + k.360° \, , \, k = ...,-3,-2,-1, 0,1,2,3...$$

$$\overline{y}_k = 150° + k.360°$$

ټول د $(x - 120°)3 = y_k$, $(x - 120°)/3 = y_k$ اوبىونې (حلونهو په توګه لاس ته راځي:

$$x_k = 3y_k + 120 = 90°+3k.360°+120° = 210° + 3k.360°$$

$$\overline{x}_k = 3y_k + 120° = 450° + 3k \, . \, 360° + 120° = 570°+3k.360°$$

د ګونومتري فنکشنونو يو بل تيپ يا ډول ، له لاندې څخه لاس ته راځي

$$f(\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sin 2x,\cos 2x,\tan 2x,\cot 2x,$$
$$\sin 3x,\cos 3x,\tan 3x,\cot 3x, ...) \qquad (13 . 42)$$

دلته که د بيلګي په توګه بدل شي

$$y = \sin x \qquad (13 . 43)$$

د ۴ . ۵ برخى تريګونومتري فرمولونو په مرسته ټول په (۴۲ ، ۱۳) رامنځ ته شوي کونجفنکشنونه په y سره افاده کولی شو:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-y^2},$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}, \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}, \qquad (13.44)$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = \pm 2y\sqrt{1-y^2}, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2y^2 \quad (\text{usw.}$$

له دې سره برابرون (۴۲ . ۱۳)، په y ، يو برابرون بدليږي:

$$F(y) = 0 \qquad (13 , 45)$$

دا دې په همغه ډول حليدونکي وي او حلونه دې ....y3. y2 , y1 وي. نو بياد(۱۳.۴۳
)سره مناسب لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin x = y_i, i=1,2,3... \quad (13.46)$$

اوبی کړي او د ټولو اوبیونو سره، کوم چې په (۱۳ . ۴۲) کې ښول شي ، وازمایل شي، چې ایا دا هم پوره کوي، که نه په (۱۳ . ۴۲) کیدی د x په ځاي یوه افاده g(x) هم ولیکلی شي.

$$f(\sin g(x), \cos g(x), ...) = 0 \quad (13.47)$$

نو بیا سرې بدلوي

$$y = \sin g(x) \quad (13.48)$$

د پورته متود تشریح لپاره په لاندې ډول دوه ساده بیلګې ورکول کیږي

بیلګه ۱۳ . ۲۲:

برابرون

$$\sin x + \cos x = 1 \quad (13.49)$$

د (۱۳ . ۴۲) ، (۱۳ . ۴۴) سره ځان په رینه ببرابرون بدلوي

$$y \pm \sqrt{1-y^2} = 1 \iff \pm\sqrt{1-y^2} = 1-y \iff 1-y^2 = 1 + y^2 - 2y \quad (13.50)$$

$$\iff 0 = 2y^2 - 2y = 2y(y-1)$$

$$y_1 = 0, y_2 = 1 \quad (13.51)$$

اوس دې په یاد شي ، چې د y2=1 لپاره برابرون (۱۳ . ۵۰) او له دې سره سم برابرون (۱۳ . ۴۹) تل پوره دي. د دې په څنګ یا خلاف y1 فقط د (۱۳ .۵۰) حل دی ، که د
رینی له مخه زیاتیز یا مثبت نخښنه وي. دا حالت یوائې هلته مخ ته پروت دی، چې cos x>0وي.

دا هلته هم پام ته راځي، که د برابرون (۱۳ . ۵۱) سره برابرون (۱۳ . ۴۶)حل یا اوبی شي او
حل یا اوبونه یی په (۱۳ . ۴۹) کی کیښول شي:

$$\sin x = y_1 = 0, x_k = k\pi; \; k = ...-3,-2,-1,0,1,2,3... \quad (13.52)$$

$$\sin x = y_2 = 1, x_k = \pi/2 + 2k; \; k = ..,-3,-2,-1,0,1,2,3,... \quad (13.53)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (۱۳ . ۵۲) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي:

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 + 1$

د جوړه k لپاره $\sin x_k + \cos x_k = \sin k\pi + \cos k\pi = 0 - 1$

د پیلمساوات د زیاتځله حلونه یواځې جفت ګڼونه دي($x\pi = 2k\pi$) که(۱۳ . ۵۳) په (۱۳ . ۴۹) کېښوول شي، نو لاس ته راځي

$\sin x_k + \cos x_k = \sin(\pi/2 + 2k) + \cos(\pi/2 + 2k) = \sin\pi/2 + \cos\pi/2 = 1 + 0 = 1$

له دې وروسته ټول xk پیلبرابرون پوره کوي .

نو د (۱۳ . ۴۹) ټولې اوبیونې په لاندې بڼه لاس ته راځي

$$x_k = 2k\ ,\ x_k = \pi/2 + 2k\ ;\ k = ..-3,-2,-1,o,1,2,3,... \quad (13.54)$$

بیلګه ۱۳ . ۲۳ : د برابرون $\cos x + \cos 2x = 0$ (13.55)

سره کیدی شي د ریښنی مساوات څخه لار واړوو یت تیرشو. که چیرته $y = \cos x$ بدل کړي. د

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = y^2 - (1 - y^2) = 2y^2 - 1 \quad (13.57)$$

له امله له څخه (۱۳,۵۵) مربع مساوات لاس ته راوړو.

$$2y^2 + y - 1 = 0 \quad (13.58)$$

د دې حل سره : $y_{1;2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$,

$$y_1 = \frac{1}{2}\ ,\ \ y_2 = -1. \quad (13.59)$$

په (۱۳ . ۵۶) کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي

$$\cos x = y_1 = \frac{1}{2}\ ,\ \ x_k = 60° + k \cdot 360° = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\bar{x}_k = 300° + k \cdot 360° = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad (13.60)$$

$$\cos x = y_2 = -1, \quad \bar{\bar{x}}_k = 180° + k \cdot 360° = \pi + 2k\pi, \quad (13.61)$$

$$x = \begin{Bmatrix} 60° \\ 180° \\ 300° \end{Bmatrix} + k \cdot 360° = \begin{Bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{Bmatrix} + 2k\pi. \quad (13.62)$$

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټول ارزښتونه x وشميرئ، چې لاندې برابرونونه پوره کوي! پام دې وي، چې د هرې پ،ښتنې سره يې ازمايل يا ازماېښت اړيندی.

۱ - لوګاريتمي مساوات يا برابرونونه

1.1. a) $\log_4 (x + 1) = -3$ b) $4 - 3\lg 2x = 10$

c) $\lg \sqrt{2x} = 1{,}314$ d) $\ln (x - 1)^2 = 2$

1.2. a) $\lg (2x + 5) - \lg (3x + 1) = 2$ b) $\lg 4x + \lg 2x + \lg x = 6$

c) $\frac{1}{3}\ln x^6 = \frac{1}{2}\ln 81$ d) $\lg (x - 1)^2 = 6 \lg 2$

1.3. a) $\lg (x - 1) + \lg 3 = \lg (x^2 - 1)$

b) $\lg (x + 1)^2 = \lg 2 + \lg (x + 1) + \lg (x - 1)$

c) $\lg x - \lg 4 = \lg 35 - \lg (x + 4)$

d) $\lg (x - 2) - \frac{1}{2} \lg 4 = \frac{1}{3} \lg 125 - \lg (x + 1)$

1.4. a) $\lg x + \lg (x + 1) + \lg (x - 1) = \lg 24$

b) $\lg 3 + 2 \lg x = \lg (4 + x^3)$ c) $\lg (152 + x^3) - 3 \lg (x + 2) = 0$

d) $2 \lg^2 x^3 - 3\lg x - 1 = 0$

1.5. a) $\lg x + \lg (a - \frac{1}{a}) = \lg (1 - \frac{1}{a}) + \lg (1 + \frac{1}{a})$

b) $\lg (ax) - \lg a + \lg \frac{b}{a} = \lg b + \lg \frac{x}{a}$

c) $\lg x - \lg \frac{x}{abx - 1} = \lg (a - 1) + \lg (a + 1)$

d) $\log_a (2x + 1) = \log_a (x - 1) + 1$

1.6. a) $\frac{10}{\lg x - 2} - \frac{5}{\lg x + 1} = 4$ b) $\frac{1}{\lg x + 1} - \frac{3}{\lg x - 3} = 2$

c) $\frac{2}{\log_2 x + 1} - \frac{1}{\log_2 x - 5} = 1$ d) $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$

1.7. a) $\lg (x^2 + 1) = 2 \lg^{-1} (x^2 + 1) - 1$ b) $(\log_5 x - 2) \log_5 x = 25^{\log_5 \sqrt{3}}$

c) $\lg^2 x^3 - 10 \lg x + 1 = 0$ d) $\sqrt{\lg(1 - x)} + 5 \lg (1 - x) = 6$

1.8. a) $2\lg \lg x = \lg (3 - 2 \lg x)$ b) $\log_2 (x - 14) = 1 + \frac{1}{2} \log_2 (3x - 26)$

c) $4 \log_3^3 5x - 7 \log_3 15 x + 7 = 0$ d) $3 \lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

1.9. a) $x^{\lg x+2} = 1000$ b) $x = 10^{1-0,25\lg x}$
c) $x^{\log_5(5x)-4} = 625$ d) $x^{\log_a x} = a^2 x$

1.10. a) $x \lg \sqrt[5]{5^{2x-8}} - \lg 25 = 0$ b) $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$
c) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$ d) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$

1.11. a) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$ b) $\log_5[\log_2(\log_4 x)] = 0$
c) $2\log_x 27 - 3\log_{27} x = 1$ d) $\dfrac{\lg x}{\lg(x+1)} = -1$

۲ ـ اکسپوننشل مساوات

2.1. a) $(a^{x-2})^{x+2} = (a^{x+3})^{x-4}$ b) $a(a^{x-3})^{x+2} = a^{3x+5}(a^x)^{x-6}$
c) $\sqrt[3]{a^{2x+9}} = \sqrt[4]{a^{3x+5}}$ d) $\sqrt[x-2]{a^{11-x}} = \sqrt[9-x]{a^{x+3}}$

2.2. a) $10^{5x} = 3^{10}$ b) $0,375^x = 2576$
c) $\sqrt[x]{6,325} = 1500$ d) $\sqrt[x]{10,27} = \sqrt[4]{5}$

2.3. a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3x+5}$ b) $\left(\frac{6}{7}\right)^{3x+10} = \left(\frac{7}{6}\right)^{2x-3}$
c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{3x+4}$ d) $16\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-1} = 27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}$

2.4. a) $\left(\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{x}} = 24,24^{\frac{1}{10}}$ b) $\sqrt[2x]{3^{3x+2}} = \sqrt[3x]{2^{2x+3}}$
c) $3^{(2^x)} = 2^{(3^x)}$ d) $8^{(5^x)} = 4^{(7^x)}$

2.5. a) $4^{x^2-x+1} = 8^x$ b) $3^{9x+1} = 9^{3x-1}$
c) $\sqrt{9^{x(x-1)-0,5}} = \sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{3^{10x+5}}} = \sqrt[3x-9]{27^{3x-7}}$
e) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$ f) $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$
g) $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ h) $4^{\sqrt{x+1}} = 64\cdot 2^{\sqrt{x+1}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.6. a) $7^{2x+1} - 3^{x-1} = 7^{2x+3} - 3^{x+1}$ b) $2^{x+1} - 3^{x} = 2^{x+3} - 3^{x+2}$

c) $3^{2x-1} - 5^{3x-2} = 3^{2x+1} - 5^{3x+2}$ d) $5^{2x} - 3 \cdot 5^{x} + 2 = 0$

e) $5^{4\sqrt{x}} - 6 \cdot 5^{2\sqrt{x}} + 5 = 0$ f) $2^{\frac{3}{\sqrt{x}}} - 2^{\frac{2}{\sqrt{x}}+1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 2 = 0$

g) $3^{x+1} - 2 = 9^{x}$

h) $3^{x+1} + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 5^{x} + 5^{x-1} + 5^{x-2}$

i) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$ j) $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} = \frac{26}{3}$

k) $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$ l) $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^{x}$

2.7. a) $5^{x-3} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5{,}08$ b) $5^{\sqrt{x}} - 5^{3-\sqrt{x}} = 20$

c) $9^{\sqrt{x^2+3x}} + 0{,}5 + 9 = 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2+3x}}$ d) $2^{-2x} - 17 \cdot 2^{-(x+2)} + 1 = 0$

e) $2^{x^2} + 2^{1-x^2} = \frac{9}{2}$ f) $12\,\sqrt[2x]{3} - \sqrt[x]{3} = 27$

g) $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9 \cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$ h) $\sqrt{3^{x-56}} - 7 \cdot \sqrt{3^{x-60}} = 162$

i) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$

2.8. a) $\frac{3^{x} + 3^{-x}}{3^{x+1} - 1} = \frac{5}{12}$ b) $\frac{2^{x} + 1}{2^{x} - 4^{x}} = 6$

c) $4 + \frac{2}{3^{x} - 1} = \frac{5}{3^{x-1}}$ d) $\frac{2^{x} + 10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$

e) $x^{x} = x$

۳ – ګونومتريکي – یا کونجکچیز مساوات

3.1. a) $\tan x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\cot x = \frac{2}{5}$ d) $\tan x = -1$

3.2. a) $\sin(2x - \frac{\pi}{2}) = 0{,}309$ b) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 0{,}342$

c) $\sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{10}) = 0{,}809$ d) $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}471$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3. a) $5\sin^2 x - 10\cos^2 x - 1 = 0$ b) $\cos^2 x + \frac{1}{3}\sin x \cos x + \frac{2}{3}\sin^2 x = 1$

c) $\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x + 1 = 0$ d) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

e) $\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 8\cos^2 x = 0$ f) $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$

g) $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$ h) $\sqrt{1+\cos x} = \sin x$

i) $\sqrt{1+\sin x} + \cos x = 0$ j) $\sin^4 x = 2\cos^2 x - 1$

k) $\sqrt{\cos x} + \sqrt[4]{2}\sin x = 0$ l) $1 - \cos x = \sin x$

3.4. a) $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\sin 2x \cdot \tan x = 1$ d) $\cos 2x + 3\cos x = 1$

e) $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ f) $2\sin\frac{x}{2} - \cos x + 1 = 0$

g) $\cos x + \cos 2x = \sin x + \sin 2x$

h) $2\sin x \cos 2x - 1 + 2\cos 2x - \sin x = 0$

i) $3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x$ j) $\sin 2x + 2\cot x = 0$

k) $3\cos 2x - 20\sin x = 9$ l) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 0$

3.5. a) $2\sin^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 0$ b) $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos 2x = 1$

c) $\tan x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ d) $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$

e) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$ f) $3 - 2\sin^2 2x = 2\sin^2 x$

g) $5\cos 2x + 16\sin x + 14\sin^2 x + 7 = 0$

h) $3\cos 2x - 6\cos x + 4\sin^2 x = -3$

i) $2\cos x + 3 = 4\cos\frac{x}{2}$ j) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 0$

k) $\tan x + \tan 2x - \tan 3x = 0$

3.6. a) $\cos x \cos 2x = \cos 3x$ b) $\sin 5x \cos 3x = \frac{1}{2}\sin 8x - 0{,}5$

c) $\sin^2 x + \cos^2 2x = \sin^2 3x + \cos^2 4x$ d) $(\cos 8x)^2 \cdot 2 + \sin 16x = 1$

e) $2\cos^2 4x + \sin 10x = 1$ f) $2 - 6\sin x \cos x = \cos 4x$

g) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$ h) $\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

i) $\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2}$

j) $\cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{9x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

k) $\sin x - \sin 3x + \sin 5x - \sin 7x = 0$

l) $\cos x + \cos 3x = \cos 5x + \cos 7x$

3.7. a) $2\sin^3 x - 3\sin x \cos x = 0$

b) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$

c) $\tan^3 x + \tan^2 x \;\; 3\tan x - 3 = 0$

d) $\tan^3 x - \tan^2 x + \tan x = 1$

3.8. a) $\sqrt{3}\sin x + 3\cos x = 0$

b) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$

d) $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$

e) $1 - \sin x = \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

f) $2\sin^2\frac{x}{2} = \cos(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2})$

g) $1 - \cos 2x + \cos 6x - \cos 8x = 0$

h) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$

i) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 0$

j) $1 - \sin x \cos x + \sin x - \cos x = 0$

k) $\cos 3x + \sin 3x = \cos x + \sin x$

l) $\sin x \cos x - \sin^2 x - \cos x + \sin x = 0$

m) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x}$

n) $(\cos x)^{\sin x} = 1$

o) $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x} = \frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴. د نامساواتو یا نابرابرونونو او مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

۱۴ . ۱:نابرابرون(نامساوات)

۱۴ . ۱ . ۱ بنسټیزې کلیمی او شمیرقوانین

یو نابرابرون لاس ته راځي، که دوه ترمونه T1 او T2 د یوې اړیکنخښی<, ≥,> او ≤ له لارې یو د بل سره تړلي وي.
په لاندې کی به نابرابرونونه تر څیرنی لاندې ونیول شي، چی یوه یا دوه ریيلی واریابلی یا اوښتونی ولري . یو نابرابرون د دوه واریابلو(اووښتونو) سره د وینامنطق په بنسټ یو د وینا شکل ښايي، د هغو سره چی واریابلی هر ارزښت غوره کولی شي، د کومو لپاره چی ترمونه T1 او T2 څرګنددي . یو اوبی یا حل هر هغه ارزښت دی ، په همدې توګه هغه ارزښت جوړه ده، چی واریابل یا اووښتونې یی غوره کولی شي او په ترم کی د هغي ځاي په ځاي کیدو سره نابرابرون یوه ریښتونی وینا وي . د ټولو اوبیونو یا ځوابونو ټولګه په حلډیري L کی سره راټولیګي.
په لاندې برخه کی به ډیر د وینامنطق(ویناسم اندیز) سومبولونه چی په برخه ۱ ۰ ۲ (او د ډیري عملیو سومبولونه) چی په برخه ۲ . ۳ راغلي په کار واچول شي. د دې سومبولونو د اهمیت یا غوره والي سره دې سړی بیا هم ځان اشنا کړي.
د نابرابرونونو سره شمیرنه کی دې لاندې قاعدې په پام کي ونیول شي(مقایسه برخه ۳)، دلته دې a , b , c او dریيل ګڼونه وي. لاندې باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a<b \Leftrightarrow a \pm c<b \pm c, \qquad (14,1)$$
$$a<b \wedge c>0 \Rightarrow a.c<b.c \qquad (14,2)$$
$$a:b<b:c \qquad (14,2)$$
$$a<b \wedge c<0 \Rightarrow a.c>a.c \qquad (14,3)$$
$$a:c>b:c \qquad (14,3)$$
$$a<b \wedge c=0 \Rightarrow a.c=b.c \qquad (14,4)$$

د برابرونونو شمیرنی سره انډول کی دي دلته (۱۴ . ۳) قاعده ځانګړې تر پام لاندې وي.د منفی یا کمیز ګڼ سره ځل یا ویش عملیه کی دا د نابرابرون نخښه راکرځي یا را په ښټ کيږي یا که غواړئ برعکس کیږي. د بیلګي په توګه $4 < 3$ مګر که داوړه خواوې د 1 - سره ځل شي نو لاس ته راځي $- 4 <- 3$

ټول د شمیرلو لپاره ورکړ شوي قواعد د نابرابرون لپاره په ورته ډول د اړیکنخښو > سره باور لري دا په دې مانا چې$a \leq b$ دا چې په څرګند ډول د دوه ګڼونو ځل او ویش هلته زیاتیز (مثبت)دی چې دواړه ګڼونه همغه مخنخښه ولري او کمیز (منفي) که چیری مخنخښي یی توپیر ولري، او لاندې اړیکی باور لري:

$$a.b>0 \Leftrightarrow \qquad (14,5)$$
$$\Leftrightarrow a:b>0 \; (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0), \qquad (14,5)$$
$$a.b<0 \Leftrightarrow \qquad (14,6)$$
$$\Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0). \qquad (14,6)$$

دبرابرونونو شریکولو کی، په ځانګړي ډول د ویش لپاره، باید ونیول شي چی $b \mid= 0$ یعني د ځل او ویش لپاره دې توییریدونکو قاعدو ته پام وي . د بیلګي په توګه دي:

$$a.b \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (a \geq \wedge (a \geq 0) \vee (a<0 \wedge b<0) \qquad (14,7)$$
$$a:b \geq 0 \;\Leftrightarrow\; (a \geq 0 \wedge b>0) \vee (a \leq 0 \wedge b<0) \qquad (14,8)$$

۱۴ . ۱ ۱الف اینتروال

د واریابلو د څیړنو لپاره باید ټول معتبر ډیري ورکړل شي، د بیلګي په توګه د یوه فنکشن یا بلواك تعریف - او ارزښت ډیري.

پیژند ۴ . ۱ الف :
یو اینتروال یو د یوبل سره اړوند د رییلګڼونوR برخه ډیر) ده۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو اينتروال له دې امله، بې له تشوالي يا تشي ، د ګڼکرښې يوه ټاکلې برخه ده، چې له دوه ګڼونو a او b رابنديږي. که د غاړې ټکي په اينتروال کې دننه وي يا خونډې وي نو د بند

اينتروال څخه غږيږو او که اينتروال پورې اړه ونه لري، واز اينتروال دی، او په همدې ډول نيمبند او نيم واز اينتروالونه.
د اوبيډيرۍ په ورکولو سره په ګڼکرښې باندې، لاندې د انيتروال انځورونه په کار اچول کيږي.

لاندې ۱۱ د اينتروال مختلف تيپونه دي يا نې ، چې a او b له R دي او $a < b$ ده٠

1. $(a,b) = \{x \,|\, a < x < b\}$ واز اينتروا ، اخر تخري په اينترول اړه نه لير
2. $[a,b] = \{x \,|\, a \le x \le b\}$ بند اينتروال ، اخر توري په اينتروال ئوري اړه لري
3. $[a,b) = \{x \,|\, a \le x < b\}$ ښې واز اينتروال
4. $(a,b] = \{x \,|\, a < x \le b\}$ کيڼ واز اينتروال
5. $(a,\infty) = \{x \,|\, x > a\}$ښي لورته ناپاي او کيڼ لور ته واز اينتروال
6. $[a,\infty) = \{x \,|\, x \ge a\}$ښي لور ته ناپای او کيڼ لور ته بند اينترال
7. $(-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\}$ښي لور ته واز او کيڼ ورته ناپاي اينتروال
8. $(-\infty,b] = \{x \,|\, x \le b\}$ ښي لور ته بند او کيڼ لورت ناپاي اينتروال
9. $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ ناپای اينتروال ، ټول رييلګڼونه
10. $\{a\}$ د دې يوه توري ډيرۍ
11. $\varnothing$ تشډيرۍ

لاندې اينتروالونه د ناپای په لور هم رابند دي ياني په دې مانا، چې د ناپای ډيرۍ هم په اينتروال پورې اړه لري، ياني ناپای ډيرۍ ټولنه ورسره جوړوي٠

1. $[-\infty,b] = \{x \,|\, x \le b\} \bigcup \{-\infty\}$
2. $[-\infty,b) = \{x \,|\, x < b\} \bigcup \{-\infty\}$
3. $[a,\infty] = \{x \,|\, x \ge a\} \bigcup \{\infty\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a, \infty] = \{x \mid x > a\} \bigcup \{\infty\}$$

4. $[-\infty, \infty] = \mathbb{R}^+$

Alternative notationپورته ته الترناتيو يا بديلي ليكنبڼه

په نړيواله توګه يو بل ډول ليكنبڼۀ په لاندې ډول وركو لكيږي

$]a,b[= \{ x \mid a < x < b \}$

$[a,b] = \{ x \mid a \leq x \leq b \}$

$[a,b[= \{ x \mid a \leq x < b \}$

$]a,b] = \{ x \mid a < x \leq b \}$

يادونه : داپورته د اينتروال ډولونه د نړيوال جال څخه راكښته شوي، دا مې هم وغوښتل ګرانو لوستونكو ته وړاندى كړم

بند انيتروال : ۰۰۰۰ $[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$

نيم و از اينتروال :۰۰۰۰۰ $(a,b]=\{x|a<x\leq b\}$

نيم واز اينتروال :۰۰۰۰۰۰ $[a,b)=\{x|a\leq x<b\}$

واز اينتروال : ۰۰۰۰۰ $(a,b)=\{x|a<x<b\}$

ښى بند ناپاى اينتروال : (-oe,b]={x|x≤b}

كښ بند ناپاى اينتروال : [a,oe)={x|x≥a}

ښى واز ناپاى اينتروال :۰ (-oe,b)={x|x<b}

كيڼ واز ناپاى اينتروال :۰ (a,oe)={x|x<b}

ناپاى اينتروال : {x د ګڼكرښى تكى دى|x}=(oe، -oe)

بيلګه ۱۴ . ۱الف:

په بنستيزه ډيرى Rكى د لاندې برابرون پيژندډيرى غوښتنه منځ ته رااچوو.

$x - 2 = 1 + 7 - x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل : د دې ترم T1(x) = x - 2 پیژندډیرۍ ده:

D1 = [2 , oe)

په همدې توګه د ترم T2(x)=1+7-x پیژندډیرۍ ده: D2 =(-oe,7)

د برابرون دپیژندډیرۍ لپاره لاس ته راوړو:

$$D = D_1 \cap D_2 = [2,\infty) \cap (-\infty, 7] = [2,7]$$

لاندې څیره وګورې(متاسفانه، چې ښه څېره نه شم کښلی)

D2=(-∞;7]

D1=[2;∞]

۱۴ . ۱ . ۲ .نابرابرون د یوې مجهولی سره

د شمیرقاعدې لومړۍ د هغونابرابرونونو لپاره په کار اچول کیږي چې یوه اوښتونې یا مجهوله ولري، او اوبیونې یې په ټولیزه توګه د اینټروالونو له لارې انځوریږي.

(۱۴ . ۱) قاعده د په خوښه ترمونو د زیاتون او کمون داسې اجازه راکوي، لکه په برابرونونو کې.

بیلګه ۱۴ . ۱:

لرو 5x-6<4+9x دواړو لورو ته 6 + 9x- ورزیاتوو، نو لرو 10 > 4x-

دواړه خواوې په 4 - ویشو.

د (۱۴ . ۳) له مخې لاس ته راځي x > -5/2

د اوبیونې ډیر یا اوبیډیرۍ : L=(-5/2,oe)

که په یوه غوښتونکې حل یا ویش کې څله وونی، همداسې پرویشونی یو واریابل یا اووښتونی ترم وي، نو باید د (۱۴ . ۲) تر (۱۴ . ۴) سره سم ددې ترم د مختخښې په واك والې کې د حالت توپیرونه(ښه یې : توپیره ونه) تر پام لاندې ونیول شي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو اوبیډیریو پیداکولوپه هکله، په هر ډول چی وي، باید په پام کی ولرل شي، چی یواځي هغه د نابرابرون شمیرل شوي د x - ارزښتونه اوبیونې دي، چي ټول ىی سملاسي (په همدې وخت کی) هغه نیول شوی (فرض شوی) شرایط پوره کړي.

هر برخ اوبیډېرۍ یا برخحلډیرۍ کیدی شي چی د غوڅډیرۍ په څیر له همغه هرپورتني نماینده برخساحویا-ورشو(یا نوره هم ښه : -برخچاپیریالونو) واریابلی (اووښتونی) او د نابرابرون ډیرۍ شمیرل شوو واریابلو یا اووښتونکو ارزښتونو جوړ شي. د غوڅډیرۍ جوړښت، کیدی شي چی د یوګونو ډیریو د ګرافیکی انځورونو په څیر په ګڼوړانګه ساده شي. د نامساوتو ټولې اوبیډیرۍ د برخ اوبیډیري یوه د یوګونو حالتونو ټولنډیرۍ ده .

بیلګه ۱۴ . ۲:

$(3x-5)(x-2)<4(x-2)$

که په $(x-2)$ باندې وویشل شي، نو باید د شرایطو په پام کی لرلو سره سم

د $x > 2$ لپاره $(x-2)>0$

د $x = 2$ لپاره $(x-2)=0$

د $x < 2$ لپاره $(x-2)<0$

نابرابرن دې په درې برخه ساحو کی یو له بل بیل وڅیړل شي.

لومړی حالت:

$x > 2 <=> x \in (2,\infty)$

دلته د مخ ته پراته نامساوت لاندې ورته بڼه بدلون څخه لاس ته راځي

$3x-5 \le 4 <=> 3x \le 9 \Leftrightarrow x \le 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 3]$

له دې x - ارزښتونو څخه یواځي هغه د مخه ورکړ شوي نابرابرون ، چي په لومړي حالت کی راوړل شوي اوبیونې دي ، یواځي هغه x د

$x \in (2,\infty)$

سره د اوبیو یا اوبیونو په څیر نیسو. له دې امله د لومړي حالت اوبیډیري لرو:

$L_1 = (2,\infty) \bigcap (-\infty, 3] = (2,3]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم حالت:

$x = 2 \Leftrightarrow x \in \{2\}$

د لته په (2- x) باندې ویشل کیدی نه شي.

د x = 2 ارزښت لیکلو ربښتیا وینا $0 \geq 0$ لاس ته راځي او له دې امله

L2 = {2 }

دریم حالت:

$x < 2 \Leftrightarrow x \in \{-\infty, 2\}$

د 0 > 2 - x له امله د (۱۴ . ۳) له مخې پخپله د مخه ورکړ شوي نابرابرون لاندې ورته فورمونه ورکوي

$3x - 5 \geq 4 \Leftrightarrow 3x \geq 9 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, \infty)$

له دې x - ارزښتونو کوم یو نه شي کیدی چې په دریم حالت کی راوړل شي:

$L_3 = (-\infty, 2) \cap [3, \infty) = \varnothing$

د برخه اوبیدیریو ټولنی څخه ټول اوبیدیر) لاس ته راځي:

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,3] \cup \{2\} \cup \varnothing = [2,3]$

نو ټولې اوبیونې هغه x د ي د کومو لپاره چې لرو: 2< x < 3

په لاندې بیلګو کي نور دومره زیات توضیحات نه ورکول کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۳ :

(3x-1)/(2x+4)<2

د شرایطو 0=|2x+4له مخی، دا په دې مانا چی 2=| x د مات لاندې سره ځله ونې له امله

د x>-2 لپاره (2x+4)>0

د x<-2 لپاره 2>(2x+4)

سره سم یواځي دوه حالتونه توپیروو:

لومړی حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x > -2 \Leftrightarrow x \in (-2, \infty)$$
$$3x - 1 < 4x + 8 \Leftrightarrow x > -9 \Leftrightarrow x \in (-9, \infty)$$
$$L_1 = (-2, \infty) \cap (-9, \infty) = (-2, \infty)$$

ځیره ۱۴ ۱ الف: دا ځېره لاندې کښل شوی، په هغې کې چې بیا دا اوبېدیرې روښانه شو۰

دوم حالت:

$$x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$3x - 1 > 4x + 8 \Leftrightarrow x < -9 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -9)$$
$$L_2 = (-\infty, -2) \cap (-\infty, -9) = (-\infty, -9)$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, -9)$$

پورته اخر د نابرابرون یا نامساوات حل یا اوبی دی۰

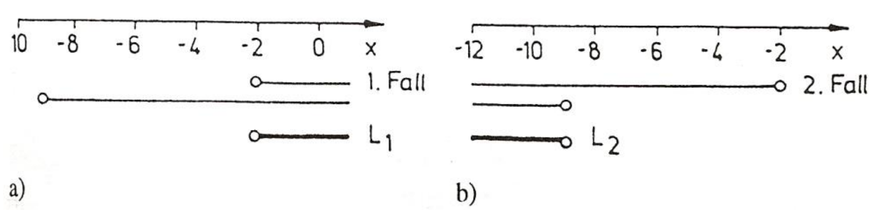


Bild 14 1

ځیره ۱۴ ا ب : دلته هم ګنونوکرښې شته، چۀ په هغې کې دا اوبېدیرې روښانه کاړل شوي دي۰ ، که ځیره مې ونه کاړله، نو داکار بچ ګران لوستونکی هم وکولای شي۰

د مخنخښی راوړلو په بنسټ د نابرابرن یوه ځانګړي بڼه یا فورم، چی په (۵.۱۴) تر (۸ . ۱۴) اړیکو کی استعمال شوي، اوبیونه ګټوره وښايي.

نابرابرونونه

دلته هم څو بیلګې راوړل کیږي، چې نابرابرونونه په کې اوبی شوي دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا برخه د نړیوالجال څخه راکښته شوي، له دې امله يي ليکښه د مخکنۍ ليکښې سره توپیر لري. دا لاندې لرو .

$ax + b > 0, \quad a \neq 0$;

$x^2 - 5 < 0$;

$|2x - 5| \leq x + 10$;

دلته اوبيونې اينتروالونه دي. ښول کيږي، چې اوبيډيرى څنګه پيداکيږي او د دې لپاره

اړيين شرايط کوم دي.

- په دواړو لورو همغه ګڼ زياتيدلی يا کميدلی شي
- که دواړه خواي د کميز ګڼ سره ځل شي يا په کميز ګڼ وويشل شي، نو مخنخښه تغير خوري. که زياتيز وي، نو دواړه خوا په توان کيدی شي او ريښج يې وستل کيدی شي، پام دې وي، چې برابرون بيا زياتيزه او که کميزه مخ نخښه غوره کوي او يا دواړه
- موږ 1.9:1(اوبی کوو

د $a > 0$ سره لورو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$

د لاندې حلسټ یا اوبيډيرى

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{b}{a}\} = (-\frac{b}{a}, \infty).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a < 0$ سره لرو

$$ax + b > 0 \Longleftrightarrow ax > -b \Longleftrightarrow x < -\frac{b}{a}$$

د لاندې اوبيډيرۍ سره

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{b}{a}\} = (-\infty, -\frac{b}{a}).$$

موږ 1.9:2(اوبی کوو :

$$x^2 - 5 < 0 \Longleftrightarrow x^2 < 5 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{5}$$

په اخرنې پل کې دې دې ته پام وي $\sqrt{x^2} = |x|.)$ د روابنه تشيرح لپاره يا شننې لپاره يو د حالت توپير رامنځ ته کوو :

په حالته $x \geq 0$ کې $|x| = x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ په ساده ډول $x < \sqrt{5}.$ مانا لري

په حالت ist $x < 0$ کې $|x| = -x,$ او $|x| < \sqrt{5}$ د , $-x < \sqrt{5}$ په مانا يا

ورته $x > -\sqrt{5}.$ نو لرو

$$|x| < \sqrt{5} \Longleftrightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

او اوبيډيرۍ

$$\mathcal{L} = (-\sqrt{5}, 0) \cup [0, \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, \sqrt{5}).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ 1.9:3 اوبی کوو د یوه حالت تو[پر سره

$$2x-5 \leq x+10, \quad x \leq 15, \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5 \geq 0 \quad x \geq \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x \geq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

(i) که وي $2x-5 \geq 0;$ نو دی $|2x-5| = 2x-5,$ او موږ لرو

له دې لاس ته راځي

$$\frac{5}{2} \leq x \leq 15.$$

(ii) $2x-5 < 0.$ نو دی $|2x-5| = -(2x-5)$ او لرو

$$-2x+5 \leq x+10, \quad \geq -\frac{5}{3}, \quad x \Longleftrightarrow \quad -3x \leq 5 \quad \Longleftrightarrow$$

$$2x-5 < 0. \quad x < \frac{5}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad 2x < 5 \quad \Longleftrightarrow$$

له دې لاس ته راځي:

$$-\frac{5}{3} \leq x < \frac{5}{2}.$$

د نابرابرون اوبیونډیری له دې امله ده

$$\mathcal{L} = [-\frac{5}{3}, \frac{5}{2}) \cup [\frac{5}{2}, 15] = (-\frac{5}{3}, 15].$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو څو تمرینونه ورکړ شوي، کۀ ګران مینه وال یې غواړي تمرین کړي۰

لاندې نابراړونونه اوبی کړی

(i) $\frac{3}{x+5} < 2$,

(ii) $\sqrt{x^2+x+2} > x$,

(iii) $|x+5| > |x-2|$.

بیلګه ۱۴ . ۴:

$1/(3-x)>2/(x+6)$, $x|=-6$; $x |= 3$

د اصلي ماتلاندې $(3-x)(x+6)$ سره د حٔل له امله باید بیا هم د هغه مخنخبنه په پام کی ونیول شي. شرایط، د کوموله مخی چی مات لاندې مثبت د ی، کیدی شي د (۱۴ . ۵) له لارې ومیندل شي:

$$(3\text{-}x)(x+6)>0 \Leftrightarrow (3\text{-}x)>0 \wedge x+6> \vee (3\text{-}x)<0 \wedge x+6<0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x>-6) \vee (x>3 \wedge x<-6) \Leftrightarrow -6<x<3$$

نو (۱۴ . ۶) شوونې کوي یا ممکنه وي، چی هغه ورشو(ساحه یا ډیری یا نه هم شهچاپیریال) پیدا کړو چیرته چی اصلي مات لاندې کمیز یا نفي دی:

$$(3\text{-}x)(x+6)<0 \Leftrightarrow (3\text{-}x) >0 \wedge x+6><0 \vee (3\text{-}x)<0 \wedge x+6>0$$
$$\Leftrightarrow (x<3 \wedge x<-6) \vee (x>3 \wedge x>-6) \Leftrightarrow x < -6 \vee x>3$$

له دې امله د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) په پام کي لرلو سره شمیرنه لاس ته راځي:

لمړی حالت :

$$-6 < x < 3 \Leftrightarrow x \in (-6 , 3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز ځله ووني یا مثبت فاکتور $(3-x)(x+6)$ سره ځلولو له امله د اړیکو نخښه ساتلی پاتیږي:

$$x+6 \geq 6-2x \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0,\infty),$$

$$L_2 = (-6,3) \cap [0,\infty) = [0,3)....(mape(zirah)14.2a)$$

دوم حالت : $x < -6 \vee x > 3) \Leftrightarrow x \in (-\infty,-6) \cup (3,\infty)$

دا چې د لته اصلي مات لاندې منفی دی، نو ځل د اړیکو نخښه باندې راګرځیدونی یا په څټ (چپه یا برعکس(تاسیر لري:

$$x+6 \leq 6-2x \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,0)$$

$$L_2 = [(-\infty,-6) \cup (3,\infty)] \cap (-\infty,0) = (-\infty,-6)....(mape(zirah)14.2b)$$

اوبیډیری $: L = L_1 \cup L_2 = [0,3) \cup (-\infty,-6) = (-\infty,-6) \cup [0,3)$

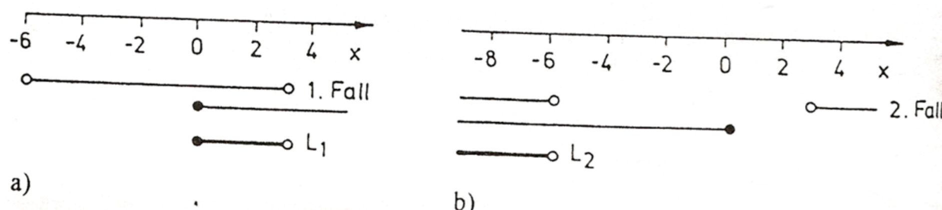


Bild 14.2 ځیره

د څلوری برابرون یا مربع نامساوات حل لپاره کیدی شي د څلوری ترم ځل انځورونی څخه کار واخستل شي.

بیلګه ۱۴ . ۵ : $-x^2+9x<0$

لومړی د (۱۴ . ۳) په پام کي نیولو سره دx^2 د مخ (کیڼ لور) کمیز- یا منفي ځلو,وونوباندې ویشل کیږي:

$$x^2 - (9/2)x + 2 > 0$$

ددې لپاره چی دا نامساوات د ځل په ځیر ولیکلی شو، د مربع مساواتو حل شمیرو، کومه چی د اړیکنخښي په ځاي د مساواتنخښی ځاي په ځاي کولووروسته منځ ته راځي.

$$x^2-(9/2)x+2=0 \Rightarrow x_1=4 , x_2=1/2$$

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-\frac{1}{2}) > 0 \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > \frac{1}{2}) \vee (x<4 \wedge x<\frac{1}{2})$$

$$\Leftrightarrow x>4 \vee x<\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره د (۱۴ . ۵) په کارولو د نابرابرون حل لاس ته راځي:

حلډېرى : $L=(-\infty;\frac{1}{2})\cup(4;\infty)=R\setminus\{\frac{1}{2};4\}$

په دې برسیره دې په یاد وي چې داډول نامساوات د مشهور مربع فنکشن د کرږې کښلو له مخې هم حل کیدی شي، په ځانګړي ډول هلته، چې اړوند مربع شکل رییل حل نه لري٠ بالاخره پهپای کې د وېش د مخنښي راوړلو یوه بیلګه ښایو.

بیلګه ۱۴ . ۶ : $\frac{x+5}{3x-2}\le 0,\ x\neq\frac{2}{3}$.

حل (۱۴،۸) ته ورته دی

$$\frac{x+5}{3x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x\ge -5 \wedge x<\frac{2}{3}) \vee (x\le -5 \wedge x>\frac{2}{3}) \Leftrightarrow -5\le x<\frac{2}{3}.$$

د سیستم حل ډېرى یا حل سټ: $L=[-5,\frac{2}{3})$.

۱۴ . ۱ . ۳ د نابرابرونسیستم د یوې ناپیژندونکی یا مجهولی یا اوښتونې سره

د یوه نابرابرون سیستم اوبیډیرى L د یوګونو نابرابرونونو اوبیډیریو غوځډیرى ده . ګټور یا موخه وربه وي (دا هدفمند دی)، که نابرابرون لکه په یوه برابرونسیستم کى په نمره کړى شي ، ددې لپاره چې دا یوګوني (دا په دې مانا چې یو یو) اوبى کړى شو.

بیلګه ۱۴ . ۷

$$5-2x\ge 3-x$$
$$x^2-5x-6<0$$
$$I.5-2x\ge 3-x \Leftrightarrow x\le 2 \Rightarrow L_I=(-\infty,2]$$
$$II.x^2-5x<0 \Leftrightarrow (+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow -1<x<6 \Rightarrow L_{II}=(-1,6)$$
$$\Rightarrow L=L_I\cap L_{II}=(-\infty,2]\cap(-1,6)=(-1,2]$$

د سیستم اوبیډیرى: Lدئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۴ . ۸

$$-2<\frac{4x-10}{x-1}<3, x\neq 1$$

د داسی نابرابرون ځنځیرونه یا یو بل سره تړنه د دواړو نابرابرونونو د سیستم سره په یوه مانا دی:

$$I. -2<\frac{4x-10}{x-1}$$

$$II. \frac{4x-10}{x-1}<3$$

د همغه فاکتور(x-1) سره د ځل اړیین یا ضروری حالت توپیریدنه کیدی شي د دواړو نابرابرونونو لپاره غبرګ د لیدوړ بڼی سره وڅیړل شي (مخ په وړاندې یووړ شي) :

(یادونه: په لاندې کې دې Fall(1) لومړې حالت او Fall(2) دویم حالت وي)

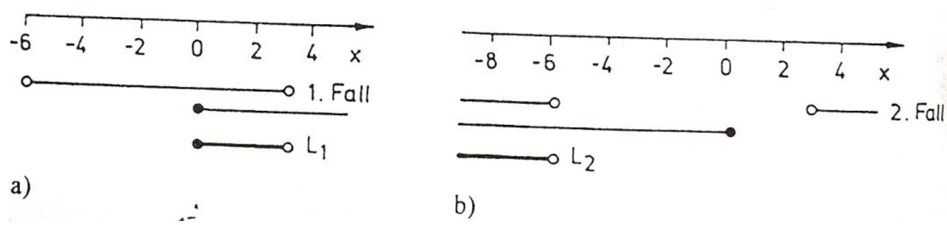
....I..II

	I	II
$1.Fall^{(1)}$ $x\in(1,\infty)$	$-2x+2<4x-10$ $\Leftrightarrow x>2 \Leftrightarrow x\in(2,\infty).$ $L_{I_1}=(1,\infty)\cap(2,\infty)=(2,\infty)$	$4x-10<3x-3$ $\Leftrightarrow x<7 \Leftrightarrow x\in(-\infty,7).$ $L_{II_1}=(1,\infty)\cap(-\infty,7)=(1,7)$
$2.Fall^{(2)}$ $x\in(-\infty,1)$	$-2x+2>4x-10$ $\Leftrightarrow x<2 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2).$ $L_{I_2}=(-\infty,1)\cap(-\infty,2)=(-\infty,1)$	$4x-10>3x-3$ $\Leftrightarrow x>7 \Leftrightarrow x\in(7,\infty).$ $L_{II_2}=(-\infty,1)\cap(7,\infty)=\varnothing$
	$L_I=L_{I_1}\cup L_{I_2}$ $=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$	$L_{II}=L_{II_1}\cup L_{II_2}$ $=(1,7)$

د LI او LII غوڅېدیرۍ جوړول بیرته کیدی شي چي د یوګونو اوبیدیریوګنوړانګه باندې د لیدنی شي)(څیره ۱۴ . ۳

د سیستم اوبیدیری:

$$L=L_I\cap L_{II}=(2,7)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ . ۱ . ۴ نابرابرون د دوه اووښتونو یا مجهولو(ناپیژندونکو) سره

د دوه نابرابرون - یا نابرابرونسیستمونو اوبیدیرۍ د یوه اوبیدیرۍ $R^2 = R \times R$ برخدیرۍ ده، چی د هوارۍ په څیر د لیدنی کیدی شي. له دې امله ګرافیکي ښوونه د ټکو ډیري په ځیر په یوه کواوردینات سیستم کی مساعد دی. په دې برخه کی به موږ یواځي د لاندې ډول لاینیزنابرابرون::

$$ax + by + c > 0 \ (\geq 0\ ,\ <0, \leq 0\ ) \qquad (14.9)$$

واریابلو یا اوښتونو x , y او ثابتو ځله وونو(ضریبونو)

$a,b,c \in R$

سره د شرایطو $a|=0 \lor b\ |=0$ سره سم تر څیرنی لاندې ونیسو.

که ددې اړیکو نخښه د برابرون سره بدله کړو نو د یوې کرښي برابرون $ax+by+c=0$ لاس ته راځي، کومه چی د پروتولاړ - یا کواوردینات سیستم په دوه نیمو هوارویا ستحو ویشي. د نابرابرونسیستم (۱۴ . ۹) ، چی ټیك په یوه له دې دوه هوارو کی باور لري، په راتلونکي بیلګه ۱۴ . ۹ کی ښوول کیږي. د اوبیدیرۍ په هواره کی د کرښونو یا کرښو کرښو کولو(د ډیرو کرښو کښلو) له لارې په نخښه کیدی شي. که په نابرابرون کي برابرون نه وي پرېښوول شوي یعني برابرون په کی نه وي ځاي شوي، نو راتلونکی کرښه د اوبیدیرۍ پورې اړه نه لري او کیدی شي یواځي ټوټه ټوټه کرښی (پرې لاین یا غوڅکرښو) په څیر په نخښه شي، لکه څنګه چی د ډیرۍ ګرافیکي ښوونه ورځنی یا بلده یا معمول ده. که برابرون ورپورې اړه ولري، نو کرښه د اوبیدیرۍ پورې اړه لرونکی برخی په څیر په نخښه کیږي.

بیلګه ۱۴ . ۹ :

$$2x+5y-10>0$$

که نابرابرون د y په لور اوبی شي، نو دې ته ورته نابرابرون $y>-(2/5).x+2$ لاس ته راځي، کوم چی په یوه کره نیولي x په روښانه توګه د لویو y - ارزښتونو لپاره پوره دی نسبت ورته برابرون ته . له دې امله دهوارې چی د کرښې $y=-(2/5).x+2$ څخه پورتنی نیمی هوارې ټول ټکی اوبیدیرۍ L جوړوي ش که څیره ون کښل شوه، نو پل په پل داکار ګران د شمیرپوهنې مینه وال کولی شوي ۱۴ . ۴)

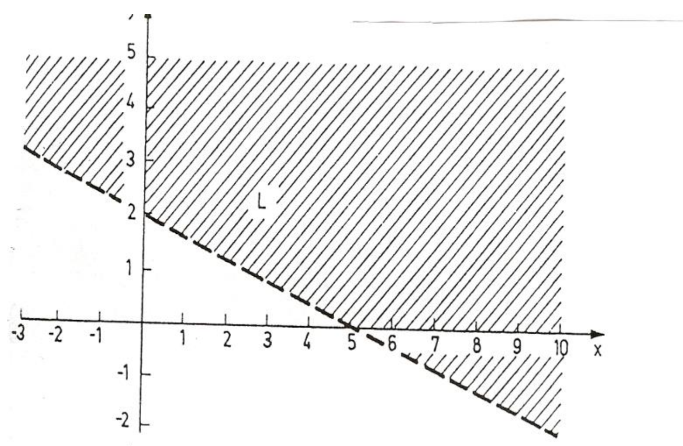
دا په بیلګه ۱۴ . ۹ کی تشریح تګلار په نابرابرون (۱۴ . ۹) کی د مخه نیسي چي $b|=0$ دی. په ټولیزه توګه یا عمومي ډول دا متود د استعمال وړ دی، چی د کواوردینات سیستم

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه په خوښه ټاکلې ټکی ځای په ځاي کولو کی ، چی په کرښه $ax+bx+c=0$ نه وي پروت.

ازمايو چي ايا دا نابرابرون په اړونده نيمه هواره کی باور لري او يا نه.که ممکن وي نو د شميرنی د ساده والي له امله ځانګړی ټکی(0.0) ټاکو. دا په بيلګه ۱۴ . ۹ کی ددې ټکی بدلون وروسته نا رينتيا وينا 10 - > 0 لاس ته راکوي او په دې ډول د اوبيډيری پيداشوی ځاي (ښه به پروتځاي وي خو د لنډونی له امله ځاي بسيا کوي) تصديقوي.
دلته يوه څيره کښل کيږي دلته د اوښتونو پرځاي ګڼونه ږدو او بيا کرښه باسو. په کواوردينات کې د هوارې هغه برخه، چې اوبيډيری ده کرښ کرښه کوو، دا په دې مانا، چې د کرښی هغه دکرښونو لور ته ابيډيری ده.

د يوه نابرابرونسيستم چی دوه مجهولی ولري، نو هر نابرابرون ځانله ځانله اوبی کيږی او بالاخر ه بي د يوګونو اوبيډيريو غوڅډيری نيول کيږي يا جوړيږي.



بيلګه ۱۴ . ۱۰:
I . $2x+y<6$
II. $4x-y>0$

(0,0) نابرابرون I پوره کوي او له دې امله په اړونده اوبيډيري LI کی پروت دی. دا چی په نابرابرون II کی د (0 , 0) سيده برابرون باوري دي، نو دلته بايد يو بل ټکی د بيلګي په توګه (1 , 0) کيښول شي، کوم چی د په څنګوالي يا تضاد په لور ځي، او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې امله اوبيډيرئ LII کی نه دی پروت. (؟؟؟ش ۱۴ . ۵ الف(. ش ۱۴ . ۵ ب دسیستم حلډیری L ښايي چي له دوه نيمكرښو بنديږي يا له دوه نيم كرښومحدوديږي.
د وړاندیزارزښت لري چی د تمرينونو په خپلواك كار كولو کی د غوښتونکو اوبيډيريو L د یوګونو نیمهوارو غوځډیری حتي تر غاړې پورې رنګينه يا کرښی کرښی راوکښل شي، چی په دې ډول یی یو کواورديناتسيستم د انځورولو لپاره بسیا وکړي .ش ۱۴ . ۵

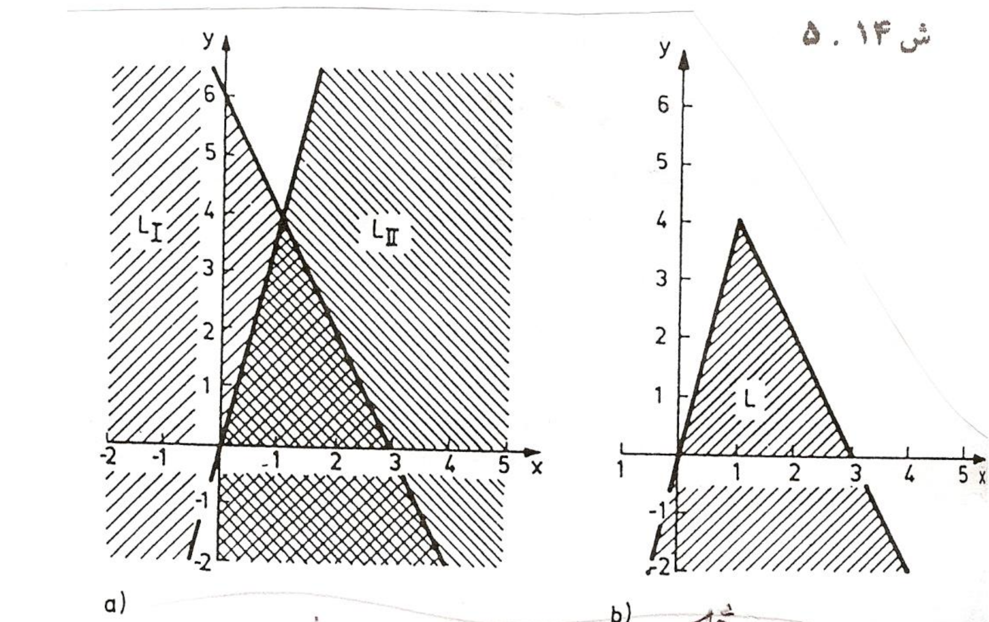


Bild 14.5

بيلګه ۱۴ . ۱۱:

I . x-3y-6<0 II. -x+y+1<0
III. x-6<0

دا اوبيډيرئ په ش ۱۴ . ۶ کی انځور ۱۲ کرښي
د پورته نابرابرونسيستم له مخهٔ د هر نابرابرون لپاره کرښه کشل کيږي، په يوه کواوردينات سيستم کې او بيا د هوارې هغه برخه، چې درېواړه کرو کې رابنده منهواره وي، هغه يې اوبی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

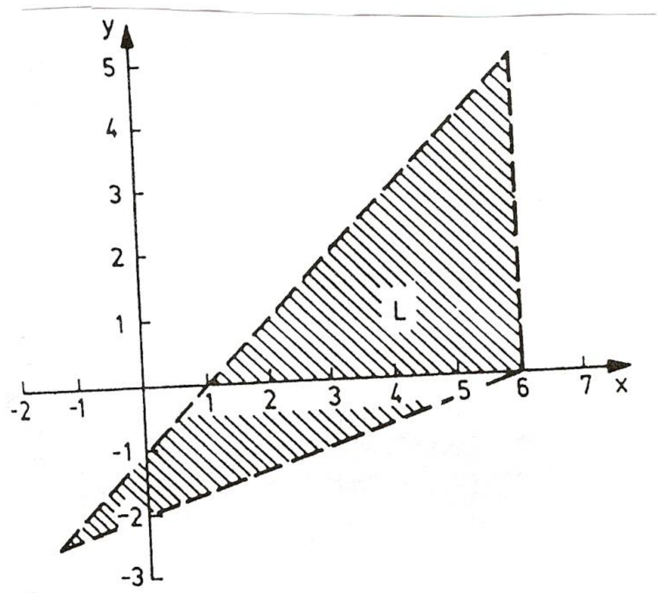


Bild 14.6 خاکه

۱۴ . ۲ برابرون او نابرابرون د مطلقه ارزښتونو سره

۱۴ . ۲ ۱ د مطلقه ارزښتونو سره شمیرنه

که په یوه براورن یا نابرابرون کی د ترمونو مطلقه ارزښتونه د مجهولی په څیر رییلي واریابلي یا اووښتونی وي، نو د مجهول په لور له ابیولو د مخه باید یو د مطلقه ارزښت خپلواك فورم پیداشي. داچي له برخی ۳ څخه څرگنده ده چی د یوه رییل کڼ مطلقه ارښت د

مخنخښی په واك په توپیري ډول جوړیږي نو د یوه ترم لیکل بي له مطلقه ارزښت، په پرینځیپ کی دوه حالتونه توپیریږي٠
داسی دي:

$T(x) = T(x)$ لپاره $T(x) \geq 0$ د (14,10)

$T(x) = -T(x)$ لپاره $T(x) < 0$ د (14,10)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که مطلقه ارزښت د صفر لوي یا په صفر برابر وي، نو کیدی شي چې د مطلقه ارزښت لرې پریښول شي، یا د نورو ترمونو سره په ترلو په نوکانو بدل شي. که مطلقه ارزښت متن منفي وي یعني د مطلقه ارزښت دننه، نو د مطلقه ارزښت نخښو په ځاي نوکان لیکل کیږي او دا نوکان بیا په (۱ -) ځلیږي. هغه ټکي چې په (۱۴ ، ۱۰) کی ورکړ شوي شرایط پوره کوي، نو پریښول کیږي چې ځانونه په قاعده کي په اینتروال وښایي، کوم چې دیسیونکت(پردي) برخه ډیرۍ د اوښتونوچاپیریالونه دي، د کوم لپاره چې (T(x ښوول شوی دۍ. د دواړو برخه چاپیریالونو ټولنډیري، باید بیرته د ټول هغه واریابلچاپیریال ورکړي، کوم چې د کنترول لپاره باید و ازمایل شي. په دې ځاي کی دې د ځله وونی او ویش مطلقه ارزښتونو لپاره قواعد ورکړ شي، چې د بدلون لپاره د ارزښت وړ دي.

که a اوb رییل ګڼونه وي ، نو لاندې باور لري کیږي٠

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$|a : b| = |a| : |b|$$ د $b \neq 0$ لپاره

۱۴ . ۲ . ۲ برابرون د مطلقه ارزښت سره

د یوه مطلقه ارزښت مساوات حل لکه چې د حالت توپیرولوکی توضیح شوی ، باید په هر حالت کی وازمایل شي چې ایا دا اوبیونې په نیول شوي یا فرض شوي اینتروال کي پراته دی او که یواځي د اوبې په څیر ښکاریدونکي رامنځ ته کیږي . یوګوني اوبیوني اوبیډیري L کی رایوځاي کیږي. د مقایسي یا انډول یا پرتلی لپاره د برابرونونو هغه کرافیکي اوبیوني شونی یا ممکن دی، په کوم کی چې هره لور یا اړخ د یو فنکشن تنظیم عملیي راوړل کیږي یا رانیول کیږي او په x , y - پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم

کی انځوریږي .

د دواړو فنکشنونو غوڅټکي x - کواوردیناتونه په همدې وخت کی د برابرونونو اوبیونې دي.

بیلګه ۱۴ . ۱۲:

$$|x+1|=(x/2)+2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$(x+1) \geq 0$ د $x > -1$ لپاره

$(x+1) < 0$ د $x < -1$ لپاره

$(14,11)$ د $x \geq -1$ لپاره $|x+1| = x+1$

$(14,11)$ د $x < -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

لومړی حالت

$$x \in [-1, \infty)$$

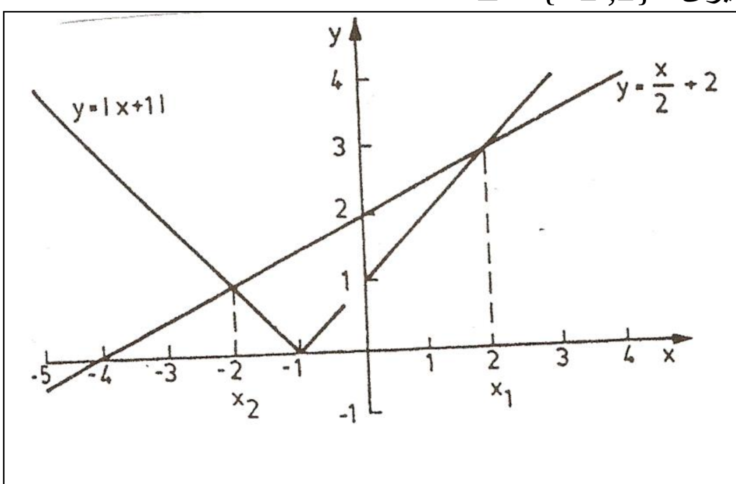
$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow x+1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = 2 \in [-1, \infty] \Rightarrow x_1 = 2$$

دوم حالت:

$$x \in [-1, \infty)$$

$$|x+1| = x/2+2 \Leftrightarrow -x-1 = x/2+2 \Leftrightarrow x = -2 \in [-\infty, -1] \Rightarrow x_2 = -2$$

د برابرون یا مساوات اوبیډیری $L = \{ -2, 2\}$



په داسی حال کی چی د ښی اړخ د ورکړشوي برابرون، $y = x/2 + 2$, ګرافیکی انځورونه، په څرګند ډول یوه کرښه ده، کیڼ اړخ، $y = |x+1|$ د (۱۴ . ۱۱) سره د دوه نیموکرښو په څیر منځ ته راځي.
اوبی : کیدی شي په ځ. ۱۴ . ۷ کی ولوستل شي

که یو برانرون د لاینیزو ترمونو زیات مطلقه ارزښتونه ولري، نو شووني یا مساعد ده چی لومړی د هغه ګنوړانګه په هغه ځاي کی وویشل شي، چیرته چی د ترمونو مخنخښنه د مطلقه ارزښت په دننه کی تغیر خوري او د هر یوه مطلقه ارزښت څرګندونه په داسی لاس ته راغلو برخه اینتروالونو کی د لیدلو وړ یوځاي راټول کړي.

بیلګه ۱۴ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

|1- x|-|2x+3|=1

د (۱۴ . ۱۰) پسی لرو:

د x<1 لپاره |1-x|=1-x

د x>1 لپاره =-1+x

او(لاندې او پورته هم لومړی له کیڼ وښی لو رته لوستل کیږي

د x>-3/2 لپاره |2x+3|=2x+3

د x<-3/2 لپاره =-1x-3

یوځاي راټول یا د ګډ فرمولولو لاندې تر پام یا تر تظر

	x<-3/2	-3/2<x <1	x>1
|-1+x|	1-x	1-x	−1+x
|2x+3|	2x+3	-2x-3	|2x+3|

له دې امله د برابرون اوبې کی درې حالتونه توپیروو. برسره پر دې باید کمیزه – یا منفي نخښه د دویم مطلقه ارزښت د مخه په پام کی ونیول شي:

لمړی حالت:

$$x \in (-\infty, -3/2)$$

$$1 - x - (-2x - 3) = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_1 = -3$$

دم حالت:

$$x \in [-3/2, 1]$$

$$1 - x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \in (-\infty. -3/2) \Rightarrow x_2 = -1$$

دریم حالت:

$$x \in (1, \infty)$$

$$-1 + x - (2x + 3) = 1 \Leftrightarrow -x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = -5 \notin (1, \infty)$$

په وروستی حالت کی شمیرل شوی ارزښت د نیونی سره په څټ یا تضادکی دی، چې x3 = -5

یواځي ښکارندډوله اوبی دی(دا په دې مانا چې یواځی د اوبي په څیر یا - غوندې ښکاریږي) .

اوبډیری : L = {-3,-1}

د ښکارندډوله اوبي منځ ته راتګ کیدی شي، چې د ګراف اوبي – یا حللارې له لارې څرګند

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي. د کينې اړخ يا لور مطلقه ارزښت خپلواك يا ازاد ښودل کيدی شی چی توته توته د مخه تيرشوي شميرنو په دوګونوحالتونو کی لاس ته راځی. له دې امله تعقيبيږي:

د $x > -3/2$ لپاره $=x+4$

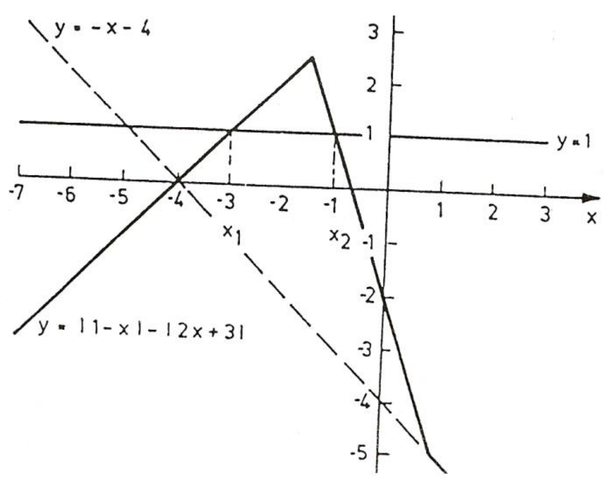
د $-2/3 < x < 1$ لپاره $|1-x|-|2x+3|=-3x-2$

د $x > 1$ لپاره $=-x-4$

ښی لور همغه - يا ثابت فنکشن $y = 1$ دی . د مخه شميرل شوو اوبيونو پرتلې له پرتلې مقايسي خيره شته، خو زما په ستونځو ګرانلوستونکی اوس بلد دي ۱۴ . ۸ ښايي، چی دواړه کرښې رينتيا د $x < -3/2$

او $-3/2 < x < 1$ لپاره ربنتيا هره يوه بله يوځل پرې کوي، مګر د $x > 1$ لپاره يو بل نه پريکوي. په دريم حالت کی د اړوند کرښی توټی $y = -x-4$ د اوږدوالی پرتکی راکوي، د کرښي $y = 1$ د حل په خير حل د نيول شوي اينتراوال د باندې دی خيره (شايد داخيره هم خيره نه شي، کهٔ کرانو مينه والو داکار پخپله وکړ ، نو نور به هم ګتور به وي)ش . ۱۴ . ۸

دلته هغه خيره بايد ريشی او يا راغلی وي، يا راغلې وی۰



که د مطلقه ازښت نخښنی په يوه ځلوري - يا مربع ترم کی له منځه وړل کيږي، نو کيدی شي چی د مخنخښي غوښتل شوي خيرنی چي په برخه ۱۴. ۱ . ۲ کی تر خيړني نيول شوې د مربع نامساوات د حل متود ګټه ترې واخستل شي.) بيلګه ۱۴ . ۵ دې مقايسه شي)

بيلګه ۱۴ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$|x^2 - 6x + 5| = 3$

د $x^2-6x+5>0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)>0 \Leftrightarrow x<1 \vee x>5$

او $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow (x-1)(x-5)<0 \Leftrightarrow 1<x<5$

سره لاس ته راځي

(14,12) د $x<1 \vee x>5$ لپاره $|x^2-6x+5|=x^2-6x+5$

(14,12) د $1<x<5$ لپاره $|x^2-6x+5|=-x^2+6x-5$

لومړی حالت: $x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty)$

$x^2-6x+5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+2=0,$

$L \Rightarrow x_1=3+\sqrt{7}=5,65 \in [5,\infty)$, $x_2=3-\sqrt{7}=0,35 \in (-oe, 1]$

دوم حالت $x \in (1,5)$:

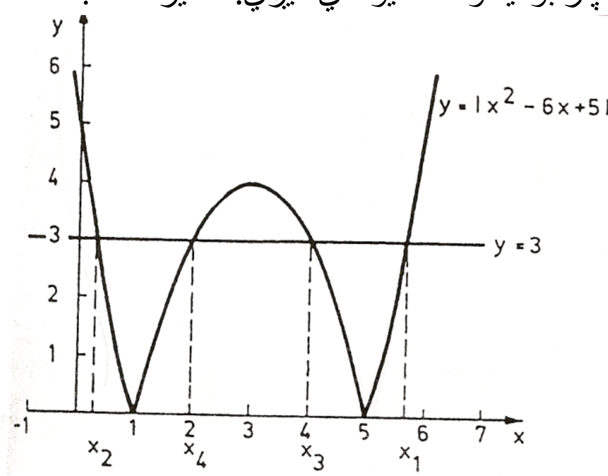
$-x^2+6x-5=3 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0,$

$L \Rightarrow x_3=4 \in (1,5)$, $x_4=2 \in (1,5)$

پام : که چیرې حل یا اوبی مو نه وو لیکلی او L مو لیکلی وو ، نو دا د اوبی په مانا دی المانی Lösung ورته وایي چی لند په L لیکل کیږي .

اوبیدیری: $L = \{3-\sqrt{7}; 2;4;3;3+\sqrt{7}\}$

خیره ۱۴ . ۹ د گراف له لاری اوبی بنایي. کیڼ لور $y=|x^2-6x+5|$ د (۱۴ . ۱۲) له امله د پارابوللیندو څخه یوځای کیږي. خیره ۱۴ . ۹



خیره ۱۴.۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټولیزه توګه د یوه برابرون اوبي کې ، په کوم کې چې n مختلف ارزښتوییني یا - افادې یعني $|T_i(x)|$, $i = 1,2,...n$ منځ ته راځي، 2^n حالتونه یو له بل توپیر کیږي. دا د هغه کیدونکو کیدنو یا ممکن امکاناتو ګڼون یا تعداد دئ ، کوم چې موجود دی ، چې د ترم $T_i(x)$د تیپ یا بڼې وي چې یا

$T_i(x)$ >0 او یا $T_i(x)$ 0>راکوي، یعنی د دوه توکو د واریيشن امکاناتو ټولګي ته (پرتله ۱۰ . ۴ . ۲ برخه) د ارزښت نخښې د له منځه وړلو له امله د (۱۴ ، ۱۰) قاعدې سره سم 2^n برابرونونه منځ ته راځي، چي په ټولیزه یا عمومي توګه دې اوبیوني $x_1,x_2,x_3,......$ ولرودئ شي. یوائې دا باید وازمایل شي ، چی ایا دا اوبي xi پیلبرابرون پوره کوي که نه.

د دې ټولیزې تګلار پسی موږ په بیلګي ۱۴ . ۱۳ کی د

T1(x)=1-x, T2=(2x+1)

سره، په لاندې $2^2 = 4$ حالتونو باندې کار کوو:

1. $T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) \geq 0$: $(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_1 = -1.$

2. $T_1(x) \geq 0 \wedge T_2(x) < 0$: $(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_2 = -3.$

3. $T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) \geq 0$: $-(1-x)-(2x+3)=1 \Rightarrow x_3 = -5.$

4. $T_1(x) < 0 \wedge T_2(x) < 0$: $-(1-x)+(2x+3)=1 \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{3}.$

پیلبرابرون د3- = x1=1, x2لپاره پوره دي مګر د x3 اوx4لپاره پوره نه دي.

۱۴ . ۲ . ۳ نابرابرون دمطلقه ارزښت سره

که په نابرابرونو کی مطلقه ارزښتونه منځ ته راشی، نو داسی دي لکه په برخه. ۱۴ .۲ ۲ کی د حالتونو توپیر سره ونیسی یعني د کارپیل په وکړي، کوم چې بي له مطلقه ارزښتنخښو د انځوروني لپاره ضرر یا غوښتونکي دي. د واریابلو یا اووښتونکو اړونده برخه چاپیریال په دننه بیا مختلف نابرابرون ۱۴ .۱ سره سم حل کوو، د کوم سره چي بیرته د حالت توپیر اړیین دئ

بیلګه ۱۴ . ۱۵ : |7-3x|>2

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت:

$$7-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 7/3]$$
$$7-3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 5/3]$$
$$L_1 = (-\infty, 7/3] \cap (-\infty, 5/3) = (-\infty, 5/3]$$

دویم حالت:

$$7-3x < 0 \Leftrightarrow x \in (7/3, \infty)$$
$$-7+3x \geq 2 \Leftrightarrow x \in [, \infty)$$
$$L_2 = (7/3, \infty) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$$
$$\Rightarrow$$
$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5/3] \cup [3, \infty) = R \setminus (5/3, 3)$$

په پورته کې دې د غشي څوکه له پامه کې نه راړل کیږي:

بیلګه ۱۴ . ۱۶: $|x-5|<|x+1|$

د یوګونو ترمونو انځورونه بې له ارزښتنخښې:

د $x > 5$ لپاره $|x-5| = x-5$

د $x < 5$ لپاره $|x-5| = -x+5$

او

د $x \geq 1$ لپاره $|x+1| = x+1$

د $x \leq -1$ لپاره $|x+1| = -x-1$

په یوه لید وړ توګه په لاندې توګه راټولیګي رایوځای کیږي یا راغونډیږي :

	$X > -1$	$-1 \leq x < 5$	$x \geq 5$
$\|x-5\| =$	$-x+5$	$-x+5$	$x-5$
$\|x+1\| =$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -1)$

$$|x-5|<|x+1| \Leftrightarrow -x+5<-x-1 \Leftrightarrow 0<-6$$

د هر $x<-1$ نابرابرون یوې ناریښتیا وینا ته لاربښودوي، چی په دې حالت کی کوم اوبه وي ، دا په دې مانا چې: $L1 = \emptyset$

دوم حلات $x \in [-1, 5)$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

|x-5|<|x+1|<=> -x+5<-x-1 <=> x>2<=>

$x \in [2, \infty]$

$L_2 = [-1,5) \cap (2,5) = (2,5)$

دریم حالت: $x \in [5, \infty)$

|x-5| < |x + 1| <=> x - 5 < x + 1 <=> 0<6

هر $x \geq 5$ نابرابرون پوره کوي، دا په دې مانا چې: L3 = [5 , oe)

حلډیری: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = (2,5) \cup ([5, \infty) = (2, \infty)$

بیلګه ۱۴ . ۱۷: |x²-4x-21|<24

د x²-4x-21≥0 <=> x<-3 v x≥7

او x²-4x-21<0 <=> -3<x<7

څخه لاس ته راځي:

د x<-3 v x≥7 لپاره |x²-4x-21|=x²-4x-21

د -3<x<7 لپاره = -x²+4x+21

لومړی حالت: $x \in (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

|x²-4x-21|<24 <=> x²-4x-21<24 <=> x²-4x-45<0

<=> -5 < x < 9 <=>

x ∈ (-5,9)

$L_1 = [(-\infty, -3] \cup [7, \infty)] \cap (-5, 9) = (-5, -3] \cup [7, 9)$

دویم حالت: $x \in (-3, 7)$

|x²-4x-21|<24 <=> -x²+4x+21<24 <=> x²-4x+3>0

<=> x < 1 v x > 3 <=>

$x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty),$

$L_2 = (-3, 7) \cap [(-\infty, 1)] \cup (3, \infty) = (-3, 1) \cup (3, 7)$

اوبیډیری:

$L = L_1 \cup L_2 = (-5, 1) \cup (3, 9)$

دا بیلګې د دې درس لپاره بسیا کوي، دا بیا دلته هم تکرار لیکم، که په کومه موضوع کې ګرانو لوستونکو څه زیات غوښتل هغه هم په پام کې نیول کیږي او کړی شو، چې په ګډه هره موضوع وغزوو٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی به په یوه بیلګه کی داسی نامساوات وڅیړو، په کومه کی چی مجهوله په مطلقه ارزښت افاده شوي وي او هم مات لاندې کی منځ ته راشی.

بیلګه ۱۴ . ۱۸: $|1+2x| / (1-x) < 1 , x \neq 1$

د (۱۴ ، ۱۰) له مخی د مطلقه ارزښت له منځه وړلاو د مات لاندې سره د نابرابرون ځله ونه د (۱۴ . ۲) او (۱۴ . ۳) له مخی په هر وخت کی د همغه ترم مخنخښه باید په پام کی ونیول شي. باور لري یا صدق کوي:

د $x \geq -1/2$ لپاره $|1+2x| = 1+2x$

د$x<-1/2$ لپاره $|1+2x|=-1-2x$

او

د $x< 1$ لپاره $(1-x)>0$

د $x > 1$ لپاره $(1-x) < 0$

دلته هم په همغه دوه تیریدونکو ځایونو کی ګنوړانګه سره بیله یا توټه کیږي، داسی چي په راتلونکو ګڼلو کی یا ځانیزه توګه درې حالتونه یو له بل توپیریږي.

	$X<-1/2$	$-1\leq x<1$	$x>1$
$\|1+2x\|$	$-1-2x>$	$1+2x$	$1+2x$
$=1-x$	>0	>0	<0

لومړی حالت: $x \in (-oe, -1/2)$

$-1-2x\leq 1-x \Leftrightarrow x\geq -2 \Leftrightarrow$

$x \in [-2 , oe)$

$L_1 = (-oe, -1/2) \cap [-2 , oe) = [-2 , -1/2)$

دویم حالت: $x \in [- 1/2,1)$:

$1+2x < 1- x \Leftrightarrow x<o \Leftrightarrow x \in (-oe,0]$

$L_2 = [-1/2 ,1] \cap (-oe,0] = [-1/2, 0)$

دریم حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x \in (1, oe)$

$1+2x \geq 1-x \iff x \geq 0 \iff x \in [0, oe)$

$L_3 = (1, oe) \cap [0, oe) = (1, oe)$

د حلونو سټ(اوبیډیری):

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-2;0] \cup (1,oe)$

د دوه ناپیژندونکو سره د یوه نامساوات ارزښت حلډیري پیدا کولو لپاره هم باید لمړی ارزښت له منځه ولاړ شي. مساوات (۱۴ . ۱۰) ته ورته د واریابلو یا اوښتونکو x او y سره، د یوه لایني ترم ارزښت سره، باور لري:

(14,13) د $ax+by+c \geq 0$ لپاره $= ax+by+c$

(۱۴ ، ۱۳) د $ax+by+c < 0$ لپاره $|ax+by+c| = -(ax+by+c$

د نیونو یا فرضیو سره $a \neq 0 \ v \ b \neq 0$

دواړه ښي لیکل شوي شرطونه په برخه ۱۴ . ۱ . ۴ کی د کارول شوي بڼی(۱۴ . ۹) نابرابرون
هم کارول شوي . له دې امله باید یو نامساوات د ارزښت افادي (۱۴ . ۹) سره، د کرښی $ax + by + c = 0$ له لارې ورکړ شوې، یو له بل بیلی یا جدا، د x,y-هوارې نیمه هوارې یو له بل بیلی اوبی کړی شي.

بیلګه ۱۴ . ۱۹:

$|x-y+1| > x-2x-4$

د (۱۴ . ۱۳) اړیکو باور لري :

د $-x-y+1 \geq 0$ لپاره $|-x-y+1| = -x-y+1$

د $x-y+1 < 0$ لپاره $= x+y-1$

لومړی حالت: $-x-y+1 > 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff -x-y+1 > x-2y-4 \iff -2x+y+5 > 0$

$L1 = \{(x,y) | -x-y+1 \geq 0, -2x+y+5 > 0\}$

دوم حالت: $x-y+1 < 0$

$|-x-y+1| > x-2y-4 \iff x+y-1 > x-2y-4 \iff 3y+3 > 0 \iff y < -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$L2=\{(x;y)|-x-y+1<0 ,y>-1\}$

له دې سره L1 او L2 د اوبیدیرۍ دوه نابرابرونونو غوڅدیرۍ ده او کیدی شي، لکه څنګه یو نابرابرون د یوه ګراف سره انځور شي (ځیره دلته هم په پوښتنه کې ده ۱۴ . ۱۰ الف) اوبیدیرۍ بیرته د ورکړ شوو نابرابرونونو برخ اوبیدیریو تولندیرۍ ده۰ (ځیره ۱۴ . ۱۰ ب) دلته هم همغه د مخه پام لرنه)۰

که په یوه نابرابرون کی دوه ارزښت افادې یا – ویینې د (۱۴ . ۱۳) بڼی رامنځ ته شي، نو د ارزښت ترپام نیولو سره څلور حالتونه یو له بل توپیر کیدی شي.

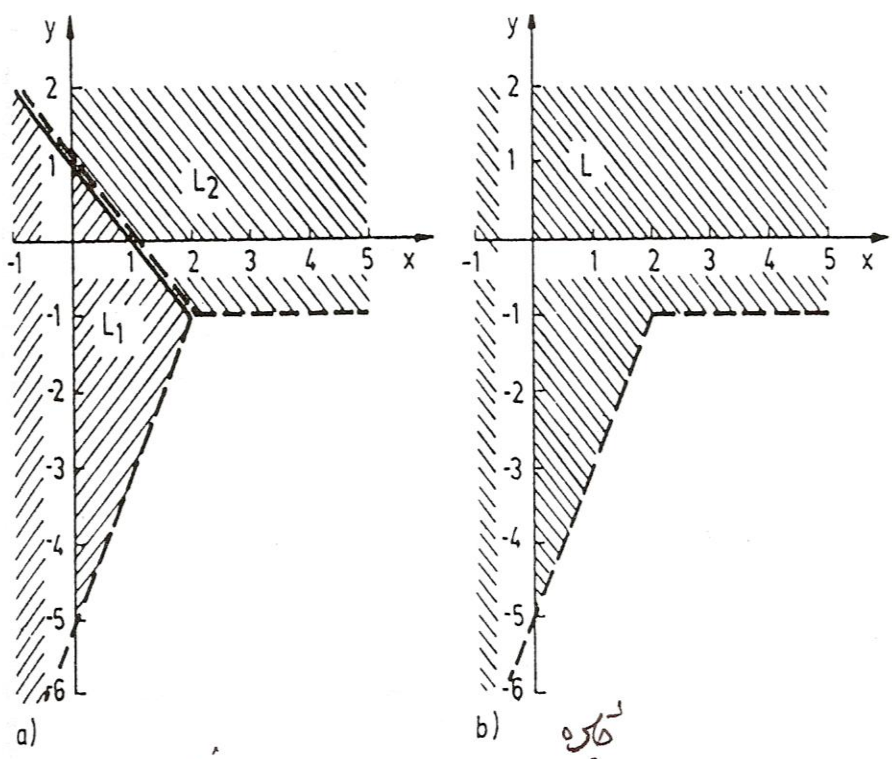


Bild 14.10 چاره

تمرینونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې نامساواتو حلېږي پيدا کړی

1. a) $8x-3<2x+9$ b) $5-7x\le 3x-10$

c) $\frac{x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{x}{9}$ d) $3(3x-2)\ge 4(3-2x)$

e) $\frac{8x-5}{5}\le\frac{2x+5}{3}$ f) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x>\frac{5}{4}x+\frac{1}{6}$

g) $\frac{8}{9}+6x\ge 2(\frac{5}{6}+3x)$ h) $\frac{1}{3}(\frac{x}{8}-6)<\frac{x}{6}-\frac{x}{8}+1$

2. a) $(3x+1)(2x-1)<(5x-3)(2x-1)$

b) $(8x-9)(3x+2)\ge(2+7x)(2+3x)$

c) $(7x-3)(5-7x)>(3-7x)(5x+3)$

d) $(5+2x)(7-5x)\le(10+4x)(2-3x)$

e) $x^2-x-6\le 2x+4$ f) $x^2+5x-6>3-3x$

g) $x^2+3x\ge -2x-6$ h) $x^2-4x+4<4x-8$

3. a) $\frac{3}{2x-4}\le 2$ b) $\frac{3x-4}{2-3x}\ge 4$

c) $\frac{2x-2}{2x+2}<2$ d) $\frac{5x+3}{x}<-2$

e) $\frac{4x+1}{3x-2}>5$ f) $\frac{9-3x}{x-3}>-3$

g) $\frac{4x+6}{2x+3}<3$ h) $\frac{3(4x-1)}{x-1}\ge 12-\frac{2(4x-5)}{x-1}$

4. a) $\frac{3}{4x-4}\le\frac{2}{x-6}$ b) $\frac{1}{5-3x}>\frac{1}{5x+4}$

c) $\frac{x+1}{x-3}<\frac{x-1}{x+2}$ d) $\frac{4x-3}{2x+1}\le\frac{2x+3}{x+2}$

e) $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x+1}{x-2}>4$ f) $\frac{x-3}{1-6x}-\frac{2x+1}{4x+3}\ge-\frac{2}{3}$

g) $\frac{2x+1}{2x-2}+\frac{2x-3}{3x-3}\ge 1$ h) $\frac{2-5x}{3-x}-\frac{2-6x}{1-3x}<\frac{3}{8}\cdot 27^{\log_3 2}$

5. a) $(2x-3)(3x-2)<0$ b) $(x+3)(7-x)\le 0$

c) $x^2+4x+3\ge 0$ d) $x^2-8x+7\le 0$

e) $x^2+4x+5<0$ f) $x^2-6x+10>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

g) $x^2-2x+1>\frac{5}{2}x-1$ h) $2x^2-3x-3<3(x-1)$

6. a) $(x^2-6x+5)(x^2+1)<0$ b) $(x^2-4x+5)(x^2+1)\le 0$

c) $(x^2-2x+2)(x^2+4)>0$ d) $(9-x^2)(x^2+3x+2)\ge 0$

e) $(x^2+4x-5)(x^2-4)>0$ f) $2x^4-x^3+10x^2-5x>0$

g) $-x^3-3x^2+16x+48\le 0$ h) $\frac{x^3}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\,x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}<0$

7. a) $\frac{x+4}{x+3}>0$ b) $\frac{x+3}{x-7}<0$

c) $\frac{2x+3}{3x-4}\le 0$ d) $\frac{x-2}{5x+1}\ge 0$

e) $\frac{6+9x}{4+6x}<0$ f) $\frac{2x-1}{8x-4}>0$

g) $\frac{3x-12}{x^2-4x}\ge 0$ h) $\frac{x^2-25}{2x+10}\le 0$

8. a) $x-8+\frac{7}{x}<0$ b) $x+3-\frac{4}{x+3}>0$

c) $8(x-2)\ge\frac{20}{x+1}+3(x-7)$ d) $\frac{3x-24}{4}-(2x-6)>-\frac{5}{x}$

د لاندې نامساواتسیستمونو حل ډېرى وټاکئ

9. a) $2+x\ge 2x-7$, $5(x-3)\ge 2(x-3)$ b) $x+6<14-3x$, $6+7x\ge 3x+5$

c) $\frac{2}{3}-\frac{x}{2}>\frac{x}{3}+\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}x<\frac{8-x}{3}$ d) $x+\frac{1}{3}\le 2x-\frac{7}{6}$, $5(x-\frac{3}{2})\le 2x-3$

10. a) $x^2-3x<0$, $2(x+2)<4x-1$ b) $x^2+6x+8<0$, $2(x+2)>x+3$

c) $x^2-9<0$, $x+2>2(x-1)$ d) $x^2-3x+3>0$, $4(x-1)<2(x+1)$

11. a) $x^2-4x-5\le 0$, $x^2+6x-16<0$ b) $x^2+2x-8<0$, $x^2-3x-4>0$

c) $x^2-5x>0$, $x^2-9>0$ d) $x^2-6x+5<0$, $x^2+8x+15<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

12. a) $3x + 2 > 2x + 1 > 3(x - 4)$ b) $-1 < \frac{7x-3}{8x-5} < 1$

c) $2 < \frac{5x+1}{2x-1} < 5$ d) $1 < \frac{x^2+4x+5}{x+1} < 4$

13. a) $3 - x < 2 - 4x$
$x+3 < \frac{1}{2}(x+1)$
$\frac{x}{2} > x + \frac{1}{2}$

b) $x+5 > \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$
$4(x-1) < 13 - \frac{1}{4}x$
$2x - 1 > x + 6$

د لاندې نامساواتو او همداسې د نامساواتسیستمونو حاډېرۍ په کارتیزې کواوردینات – یاپروتولاړ سیستم کې ګرافیکې انځور کړۍ.

14. a) $y \geq -\frac{3}{2}x + 3$ b) $y < -\frac{2}{3}x + 2$

c) $x < 2y + 2$ d) $x > -y + 3$

e) $4x - 5y > 12$ f) $-3x - 8y \leq 24$

g) $2(y - 3) \leq 6(x - 1)$ h) $5x - y + 2 > 3y - 3x - 10$

15. a) $2x + 3y > -6$
$x - y < 2$

b) $3x - y > 3$
$x + y > 4$

c) $x > 1$
$x + 2y < 4$
$y + 3 > x$

d) $x - 4y - 6 \leq 0$
$2x + y - 3 \leq 0$
$y - 5 \leq 0$

16. a) $-2 < x + y < 2$
$-2 < x - y < 2$

b) $x > 2$
$-3 < y < 2 + x$
$x + y < 5$

c) $x^2 - y^2 \leq 0$ d) $(2x + y + 1)(3y - x - 1) > 0$

د لاندې نامساواتو حاډېرۍ د شمیرلو او همداسې ګرافیکې لارې پیداکړۍ.

17. a) $|x - 3| = 5$ b) $|x + 2| = 7$

c) $|1 - \frac{x}{2}| = x + \frac{5}{2}$ d) $|x + 3| = |3x - 4|$

e) $|x - 4| = |2x + 3|$ f) $|9 - 3x| - |2x - 1| = 4 - 2x$

g) $|2 - 3x| - |x + 1| + |2x + 2| = 3$ h) $|x - 3| - |3x - 4| + |2x + 1| = 6$

18. a) $|x^2 - 2x - 8| = 7$ b) $|8 - 2x^2| = 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $|2x - x^2| = 8$ d) $|x^2 + 6x + 5| = 5$

e) $|x^2 - 4x + 3| = 1$ f) $|x^2 - 2x - 3| = 1$

g) $|4x^2 + 4x + 4| = 3$ h) $|x^2 - 3x + 7| = 4$

19. a) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$ b) $\left|\frac{2x-4}{x+3}\right| = 2$

د لاندې نامساتو حلېرې پیدا کړی

20. a) $|x - 2| < 3$ b) $|2 - 4x| \geq 1$

c) $2 - |1 - x| \geq 1 + x$ d) $|2x - 3| < x + 3$

e) $|3x - 5| > 2|x + 2|$ f) $|3x + 3| \geq \left|\frac{1}{2}x - 1\right|$

g) $|x - 4| + |2 - x| \leq 2$ h) $|3 - x| < 2 - |x - 5|$

21. a) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ b) $|x^2 - 6x + 8| \geq 3$

c) $|x^2 + 4x - 5| > 2$ d) $|15 + 2x - x^2| < 7$

e) $|x^2 - 6x + 11| < 1$ f) $|x^2 + 4x + 7| > 2$

g) $|3 + 6x + 3x^2| > 0$ h) $|x^2 + 4x| < 4$

22. a) $\left|\frac{x+3}{1-x}\right| > 3$ b) $\left|\frac{1-4x}{2-x}\right| > 4$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$ d) $\frac{\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}}{\left|\frac{3}{4} + \frac{x}{2}\right|} \leq \frac{5}{6}$

e) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$ f) $\frac{|x-1|}{2x+2} \geq 1$

د

لاندې نامساواتو حلېرې په یوه په یوه کواوردیناتسیستم کې انځور کړی او ا نځور یې وکاږی

23. a) $x + y < |3x + 2|$ b) $y + |x + 2| \leq 4$

c) $x + |y - 2| < 3$ d) $|2x + y - 3| \geq 2y - 3x + 4$

e) $|x + 3| + |y - 5| \leq 3$ f) $|x + y - 2| > |y - x + 1|$

g) $|x + y + 1| \leq |x - y - 1|$ h) $|x - y| > |x - 2y - 2|$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ فنکشنونه(بلواك يا تابع)

۱۵ . ۱ د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی ځیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د تابع(بلواك) او بیا زیاته د فنکشن په نامه ځموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع تر نامه لاندې هم بلد یو، ځما په اند یا فکر که دا موږ بلواك وبولو، نو هدفمند به مو نومولی وي. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی ځموږ د ځیرلو متن جوړوی

پيژند ۱۵ . ۱:

د یوې ریيلی واریابلی ریيل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن) د ریيلو ګڼونو ډیری باندې ، د یوې ډیری $D \subseteq R$ یوه یواځنی ځیرونه ده. D دپيژند ډیری نومیږي .
د ټولو ارزښتونو ډیرۍ چي y یی د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پيژنددیرۍ یا تعریف ډیري په دننه کی وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کیږي .
د ي وې قانونمندی f له مخی هر $x \in M$ یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظیمیږي:

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کیږي یا نومیږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن مختلف انځورډولونو ترمنځ سړی توپیروي. د فنکشن »کلیمه انځورونه« یوه په خوله ویونکی یا یو اعلانونکی ، له ماتماتیکي یا شمیریز سومبولیك څخه تیریدونکی یا په شمیریز سومبولیك صرف نظر کوونکی، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چی په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر ریبل ګڼ د همغه ریبلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمدل.

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګن او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شمیرپوهی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي (شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو ریبلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته : د $x<0$ لپاره $y=|x|$
دلته $D=R,W = [0,\infty)$ د $x>0$ لپاره $y=x^2$
پام دې وي چی په داسی حالت کي له کیڼ و ښي لور ته یا ګډوډلوستل کیږی یعنی داسی لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي. داسی لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و څرګند) explizitنومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ او ۱۵ . ۲ چی په یوه د yپه لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: $y =f(x)$ که چیرې داسي نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل $F(x,y)=0$ دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به $2y-x-1=0$ $D=R,W=R$,فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپیلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په

اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي. د بیلګی په توګه :
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتوني یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)

$$x = \varphi (t) \quad , y = \Psi (t)$$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oe به یوه پارامتري انځورونه وی او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.

زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2	
Y 2	0,5	1	1,5	2	

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...	
Y....3	2	1	0	1	4	9 ...	

د فنکشن ګرافیکی انځورونه (د یوې ټوټي) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرږې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو

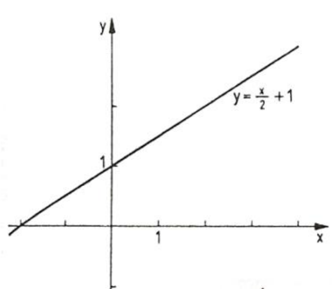


Bild 15.1 څېره

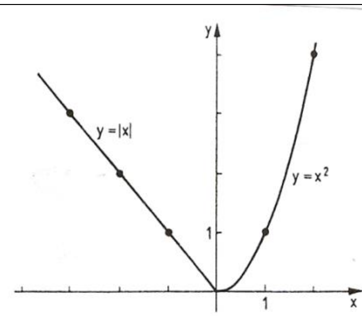


Bild 15.2 څېره

یا اووښتونوجوړې د x,y - هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي . څیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پيژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ايتروال]a,b [کی هلته او هلته یا تیك هلته مونوتون جگيدونکی
(مونوتون لويدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$$f(x1)\leq f(x2) \quad (f(x1)>f(x2))$$
که د برابروننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غړيږو.

وبيلگي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بيلگي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اينتروال) [oe,0] کي مونوتون تيټېدونکی یا -لويدونکی
او په اينتروال [oe,0) کی مونوتون جگيدونکی دی

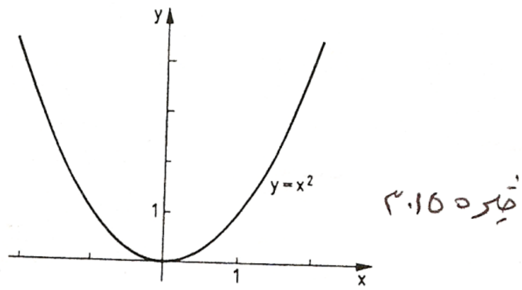
پيژند یا تعريف ۱۵ . ۳ :

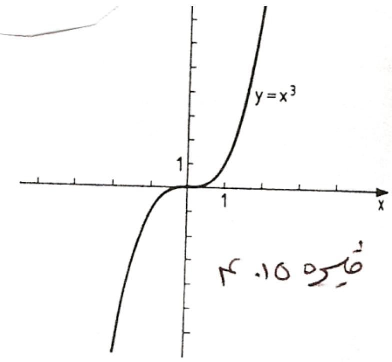
په یوه اينتروال] a,a-[کی یو تعريف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سيومتريك symetrisch,(ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتيسيومتريكantisymetrisch بلل کيږي چی باوري وي
$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$
د جوړه فنکشنونو څيرې اکسيال یا محوري سيومتريك و y - محور ته ځغلي) دلته هم څيره شته ، نو تل به همغه څه ليکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچينی ته منځني یا مرکزي سيومتريك ځغلي) بيا هم څيره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بيلگه ۱۵ . ۴
فنکشن $y= x^3 ,D= R$
یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :
$$(-x^3) = -x^3$$

بيلگه ۱۵ . ۳ :
فنکشن $y=x^2,D=R$
یو جوړه یا جفت فنکشن دی:
$$(-x)^2 = x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





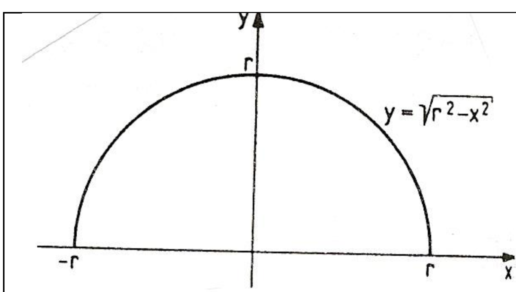
د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژنددیرئ ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که
یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري :
$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$

بیلګه ۱۵ . ۵:

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r, r]$
بند یا راګیر(محدود)(زه به دا له
دې وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم
یوونګردی ځیره ده
ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$



پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل
کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:
$f(x + p) = f(x)$
د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي
فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۶ :

ټول D ∈ x د f(x)=0 سره، د فنکشن f(x) صفر ځايونه بلل کيږي٠

د فنکشن صفرځايونه د مساوات f (x) = 0 د حل له لارې پيدا کيږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرېږ د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بيلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن y = 1/2 x + 1 صفرځايونه د مساوات x/2 + 1 = 0 اوبی x = -2 دیٔ (ځيره ۱۵ . ۱)

بيلګه٠ ۱۵ . ۶:

فنکشن y = x^2 - 4 دوه صفرځايونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$

فنکشن y = x^2 + 4 صفرځايونه نه لري.) بيا هم ځير ۱۵ . ۶)

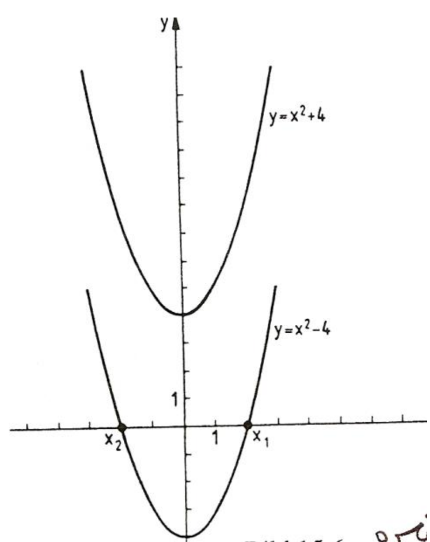


Bild 15.6 ځيره

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D$, $y \in W$ y =f(x),
یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی
وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y =
f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په څڅکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو
فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا
واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توگه لرو y=g(x) دا د
فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته
د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په څټ یا برعکس
فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کېمټ(- ورته) identic دی۰ د په څټ یا
برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$
کرافیکی څیره y = x په کرښه د y =f(x)(هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه
او لنډ یی: هندارونه) ده۰

بیلگي ۱۵ ، ۱ ته :

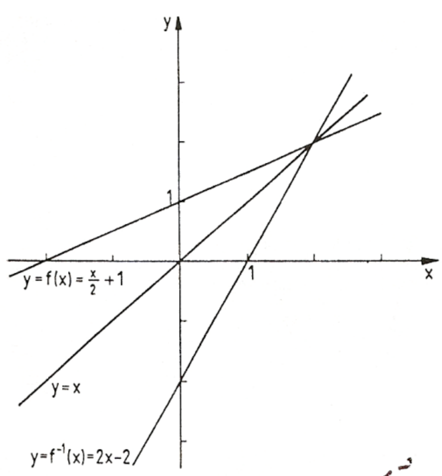


Bild 15.7a

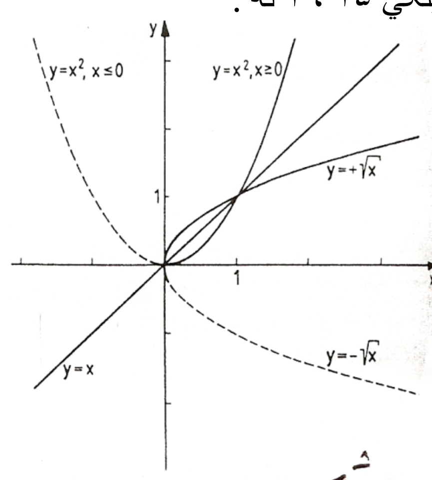


Bild 15.7b

د فنکشن y = f(x)= x/2 +1 چپه یا په څټ فنکشن داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$

سرېږ $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبې کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځيره. ۱۵ ۷ الف)

بیلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$,
ځیرره ش ۱۵ . ۳) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پورې دوه[-oe,oe] = $x \in D$ اړه لري، یعنی x=+yاو x=-y
مګر $y= x^2$کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یوائنی).

د $0 \geq x$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $0 < x$ لپاره. $y=x^2,x\geq0$
ته چپه- یا په ښې فنکشن $y=+ x$ دی، او $0 < y = x^2 , x$ ته چپه- یا په ښې فنکشن $y =$
x -دی. (ځیره ۱۵ . ۷ ب) .
په تولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که (x)y = fکلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په ښې فنکشن
$y = f^{-1}(x)$ موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټيز فنکشنونه تعريفيږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ يا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړدوله خويونو له مخې وڅيړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځيری - يا تړلي فنکشنونه) وڅيړل شي. د فنکشنونو ځيړل به د هغو ځانګړدوله يا کرکتریستیکي خويونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د ديفرنشل شميرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پيژند ۱۵ . ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N;\ a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو څیره(ګراف) یوه کرښه ده چې په y = n کی دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m = \tan\alpha$

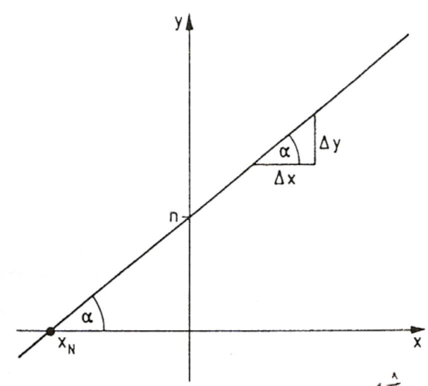


Bild 15.8 ځیره

لري (څېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي، دx - محور سره غبرګه څغلي . کرښه ،که $|m| = 0$ نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y = 0) لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښې برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرنټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا نوره ښه غږڅتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$

له مخی پیدا کوو او په دې توگه لاس ته راوړو
$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه تولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$
$y=ax^2+bx+c , a \neq 0$ (15 .3)
د مربع فنکشنونو څیره) گراف (پارابول دئ چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرگ ځغلي. کوایفیځینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.
موږ د مربع فنکشن یو څو ځانگړي حالتونه تر څیړنې لاندې نیسو.
1. $y=x^2 (a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$
(خ . ۱۵ . ۹)
2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q) (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د څلوری - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:
$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)
یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:
$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$

بیلگه ۱۵ . ۷:

$y=x^2+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6^2/2=1$
(خ،۱۵ . ۹)

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a| < 1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د $a < 0$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:

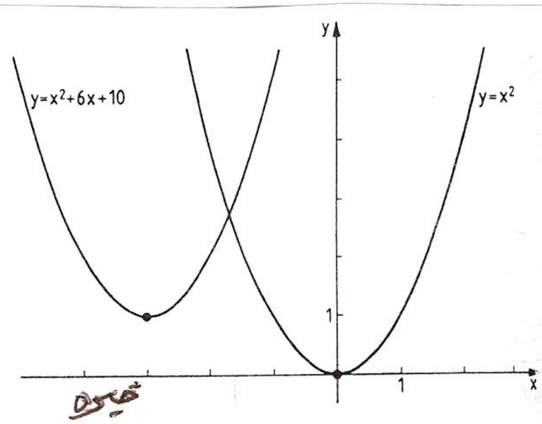
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$

(خ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$$



ش.9

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)

دککرۍ کواوردینات:

$$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

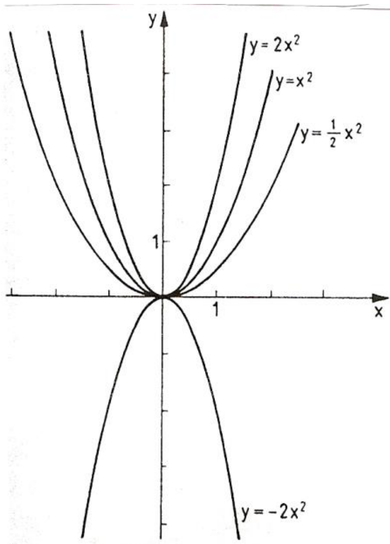


Bild 15.10 ځیره

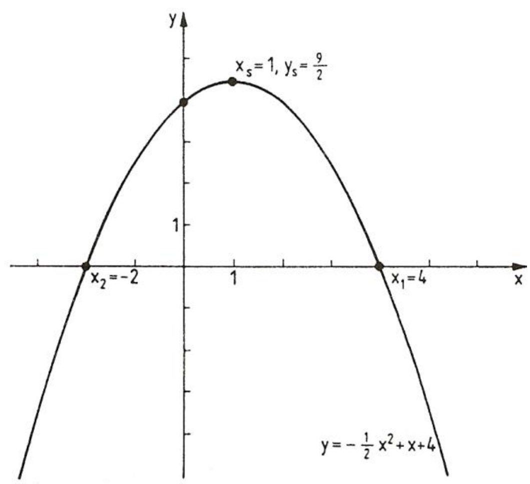


Bild 15.11 ځیره

د فنکشن y=ax²+bx+c د صفرځایونه د برابرون ax²+bx+c=0 اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : –(1/2)x²+x+4=0 ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (څیره ۱۵ . ۹) ته :
د x²+6x+10=0 یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته
راځي چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري .

فنکشن y = x² غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي
د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو
بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

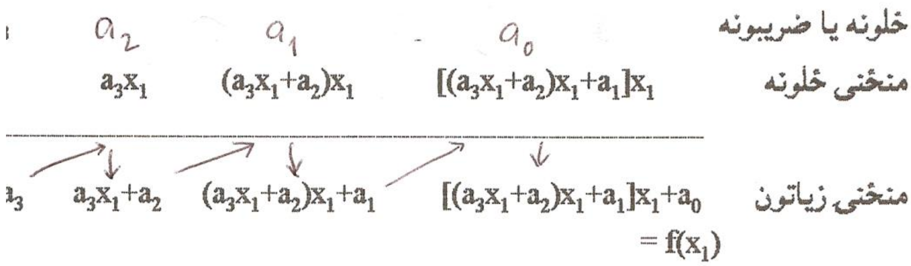
$$x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

$$y = [a_3 x^2 + a_2 x + a_1]x + a_0 = [(a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:

a3 له x1 سره ځل کيږي، دې سره a2 زياتيږي، زياتون يې له x1 سره ځل، او a1 ور زياتوو، زياتون د x1 سره ځل او a0 ور زياتوو. دا د عمليوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شيما (د هورنرشيما) له لارې په ليدوړ ډول مخ ته بيايو (څرکندوو)



ددې شيما پوهيدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهيدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بيلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شميرل کيږي.

يادونه: دا د هورنر شيمت زما په دې اوسنی د برينکمن ژباړه کې مفصل شته(ژباړی). اوبيونه) :

	1	-2	-14	-5
$x_1 = -2$		-2	8	12
	1	-4	-6	7 = f(-2)
$x_2 = 5$		5	15	5
	1	3	1	0=f(5)

لرو $f(-2) = 7$ او $f(5) = 0$ (صفرځايونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چرېِ ددریمی درجی ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چی د پولینوم ویش له لارېِ دا لایني فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دي امله لرو:

$$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړیَ کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $f(x_1)=0$ چی د $(x-x_1)$ سره د ځلونې له لارېِ دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د څلوریَ – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجي فنکشن د درې لایني فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولو n- م درجو ریشنل فنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ,..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا د لاینیز فاکتورونو د څلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیځینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي .

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :
5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن $y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه
$x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د څلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتې پولینوم $2x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي

$$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرني له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیټك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x)تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی

xn -> oe

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي

او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

(کږه له oe - څخه دoe په لور ځي) .

که n جوړه او a_nکمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty -$

کږه د oe - څخه د oe - په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$

کږه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$

کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۹ :

فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};.........(15,7)$$

$$n,m\in N_0;a_k,b_i\in R;Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی که $n\geq m$ ۰ نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه (ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$وي نو باور لري:

$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$

د $x = x_P$لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو ټوټې کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دئ (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = xL = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)
د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دئ (قطب)
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (ټیك ناپای ځای بللکیږي) xpکی کرہ داسیمپټوټي کربښي $x = xP$ ته نزدې کیږي .د یوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ یعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ویش ښخه لاس ته راځي:

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x ټول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x ټول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ښیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه ټولریشنل برخه .
د نااصل مات فنکشن ښیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل ټولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف: (y = x /(x²+1 د x0 = 0 په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول
یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او دx -> ± oe لپاره دx- محور (y = 0)
د اسیمپتوتی په څیر لري (څیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: (y=(x²+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2 صفرځایونه(x²+2x-3 =0) په x1 =-3
او x1=1 کی لري . تشځای نه لري او په x3 = -2 کی قطب لري دا په دې مانا چی x =
-2اسیمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن y = x اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی
کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

مور په دې پسی ځانله شوي ځانګړي ټول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیاتیززیاتیز یا مثبت ټولګڼ n لپاره یو ټولرشنل فنکشن دی. د جوړه ټولګڼ
nلپاره ټولریشنل فنکشن دی. د ټولګڼ n لپاره ټولی کرږ د تعریف ډیری(-) = D
oe,oe، د ارزښت ډیری(W=(0,oe او ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري. (څیره
۱٤ الف ۱۵) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (1-,1-) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څیره ۱۵ . ۱۴
ب)۰

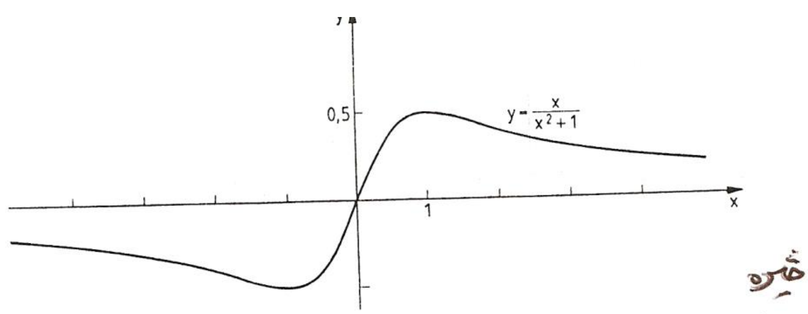


Bild 15.12

(c) ketabton.com: The Digital Library

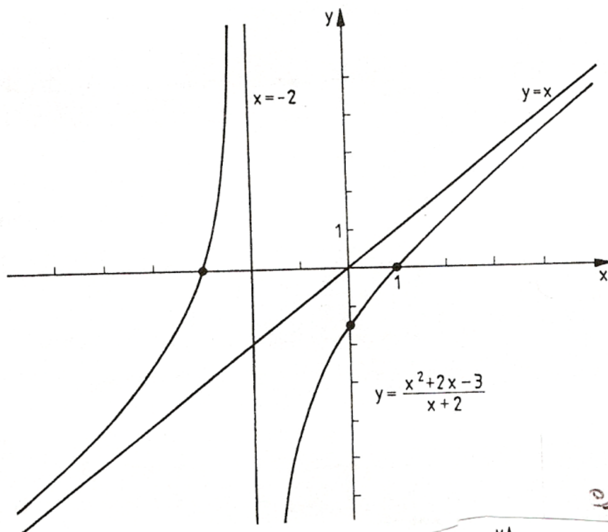


Bild 15.13

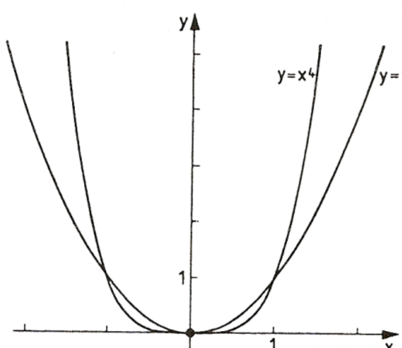


Bild 15.14a

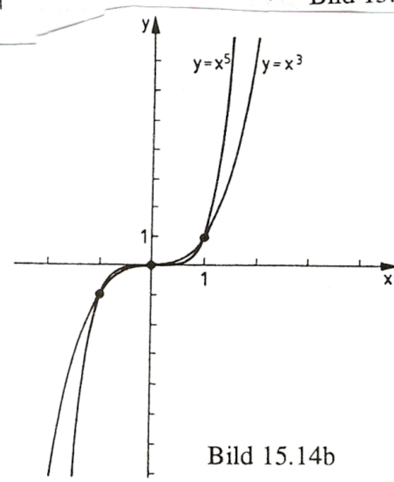


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دی په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوتی په څیر. د جوړه ګنون یا تعداد (کمیز n لپاره ټولی کرې د پیژند ډیري

$D = (-oe,oe)\setminus\{0\}$ د ارزښت ډیري($W = (0,oe$ لري اوګډټکي $(1,1), (-1,1)$

؟؟؟ څیره ش. ۱۵,۱۵الف) .

د ناجوړه ګنون (کمیز n)لپاره{ 0}\(D = (-oe,oe او(W=(-oe,oe او(1-،1-) (1,1) ګډ ټکی دی (څیره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه څیرې دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

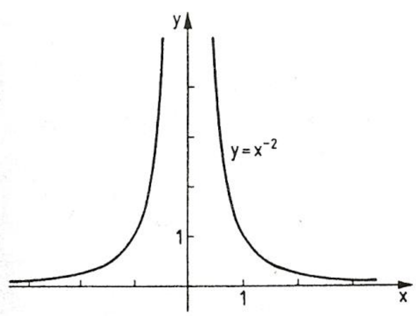


Bild 15.15a

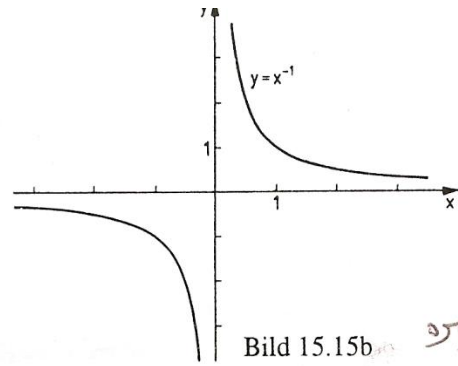


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$

چپه- يا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N \setminus \{1\}\ , D = [0,\infty), W = [0,\infty)$...............$(15,8_b)$

او رينه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0$ (15 . 8c)

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په څير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بيرته پوتنځ فنکشن دی.
ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رييلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

پيژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$y = x^{\alpha}\quad , \quad \alpha \in R\ , x > 0$ (15. 8d)

پوتنځ فنکشن نوميږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن

$y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}\ , x \geq 0$

$y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}\ , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښۍ فنکشن لرو

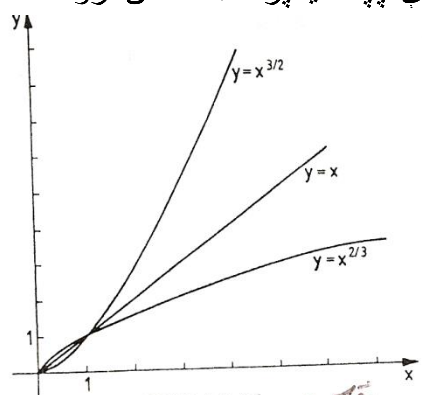


Bild 15.16a خیره ب)

(خیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2 , x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ٢ کی مو وویل چی یوائی د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښې فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په
پام کی وي. د بیلګي په توګه فنکشن
$y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی وی او له دې امله ټول په ښې کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژنددیری($D = [0,oe$ کی پر ښې فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د$y= x^3$ پرښې فنکشن د[$D= (-oe,0$
سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$y=a^x, a > 0, a \neq 1$..................................(15,9)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰
(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

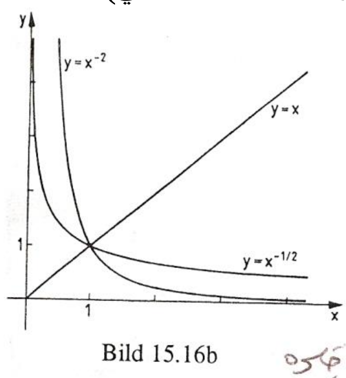


Bild 15.16b

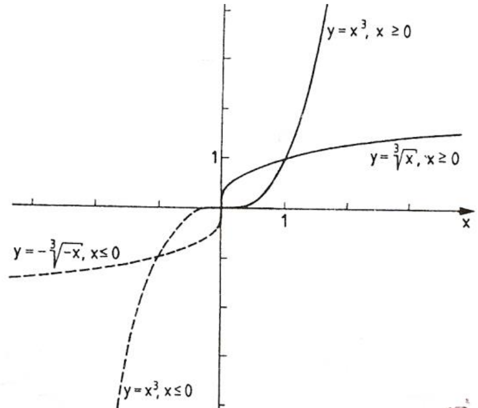
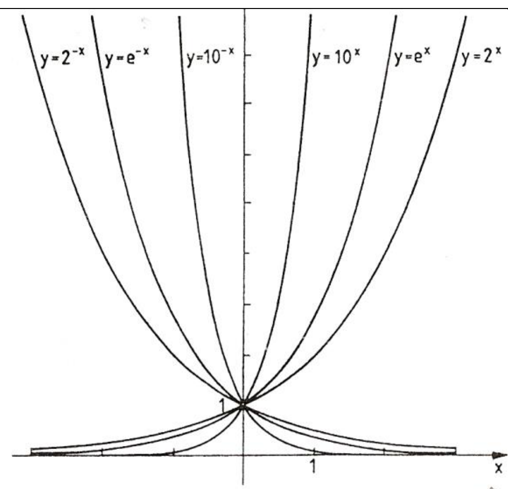


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژندېری(D=(-oe,oe او ارزښتډیری(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله تکی(0,1 () د ټولو کرو ګډ تکی دی

 Bild 15.18	د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکه یو غږیز- یا مونوتونجګیدونکی دئ اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کیږي .د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي . د اکسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګې (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10) په څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$y = \log_a x , a > 0 , a |= 1$ (15.10)

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندډیرئ
$D = (0.oe\ )$ او د ارزښتډیرئ($W=(-oe,oe\ )$ لري.

د $y = \log_a x$ کرږې د ګرو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ۰ ټکی$(1,0)$ د ټولوکرږو ګډ ټکی دی (څیره شته دی)

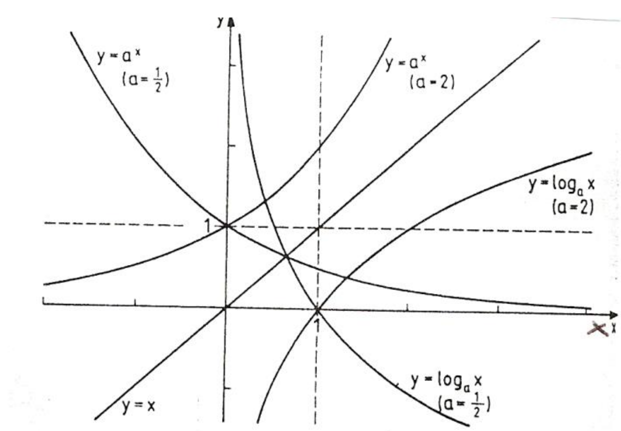


Bild 15.19 څېره

د $a>1$لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x->0$لپاره اسیومپتوتیك د کمیز y - محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعني $y = \log_a x$
د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي .
په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10}x = \lg x , y = \log_e x = \ln x$ ۰

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

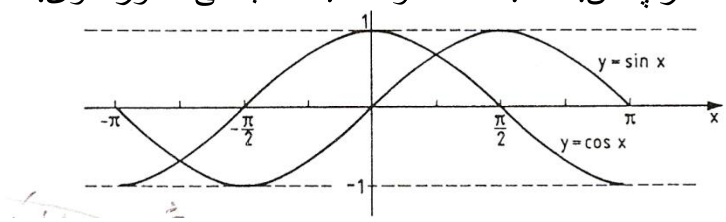
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$ ....(15,11$_a$)

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$ ....(15,11$_b$)

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....(15,11$_c$)

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$..........(15,11$_d$)

د دې کړوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x, y = \tan x , y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه $y=\sin x , y= \cos x$ پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin (x+2k \pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi)= \cos x , k\in Z$

لاندې فنکشنونه پریود π لري

$y=\tan x , y=\cot x$.دا په دې مانا چي

$\tan (x + k\pi) = \tan x, \cot (x + k\pi) = \cot x , k\in Z$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$ $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y = \cot x$, $y = \cos x$

لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري یعني $y = \tan x$

په $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ او $y = \cot x$ په $k\in Z$, $x_k=k\pi$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

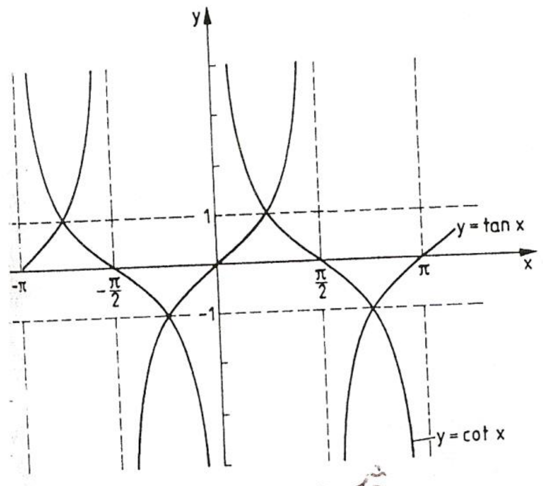


Bild 15.20b

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دئ او په انتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$ کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ لپاره y = sin x جګیدونکی یا پورته کیدونکی دئ

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی۰

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دئ

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونګی دئ

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي .فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15.11e)$$

هارموني فنكشن بلل كيږي.

يادونه: فنكشن (۱۵ . ۱۱ت) د پيژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی یا ځنځيري فنكشن دی. موږ ترڅيرني لاندې نيسو چي د سا ين فنكشن د مخه فاكتور a فاكتور د خپلواك واريابل tاو زياتوونكی د ساين فنكشن په خپلواك)Argoment(د كږېڅيره باندې څه تاسير اچوي.

۱ - د فاكتور a تاثير په فنكشن y = a . sin t د y = sin t فنكشن ارزښت باندې غزول يا راكشول دی كه (|a| > 1)او يا پړسول دي كه |a| < 1)وي y= a.sin x فنكشن ارزښت a - ځله د فنكشن ارزښت y = sin t دی، چيرته چی برسيره پردې د 0 > a لپاره په t - محور يوه اينه څيرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2) په فنكشن كی a امپليتودې Amplitude(جګوالی(نوميږي او د شوينګنګ Schwingungرپيدنی پراخوالی يا ښه : سور باندې تاثير اچوي.
څيره شته

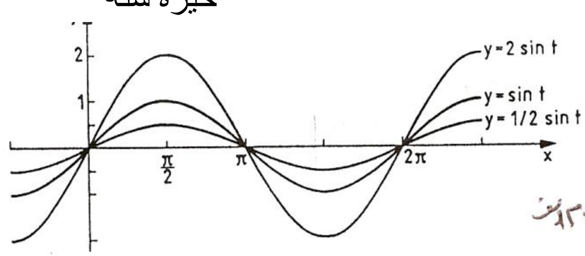
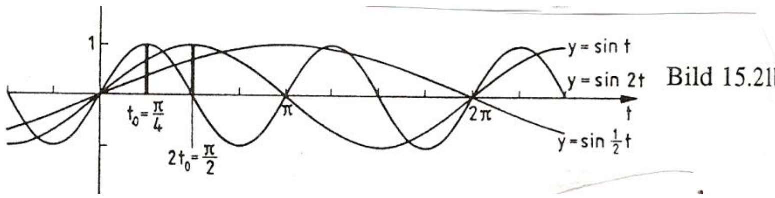


Bild 15.21

۲ - په فنكشن $y = \sin\omega t$ كی فاكتور ω په فنكشن y = sin t باندې يو وختني غزول كه $|\omega|>1$ يا پړسول كه $|\omega|<1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.
د يوه ټاكلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنكشن $y = \sin\omega t$ يوه فنكشن ارزښت، y = sin tد خپلواك ω -ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره كوي (څيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).
ګردی فركونڅ (Kreisfrequenz) بلل كيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او $y = \omega t$ پريودې $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



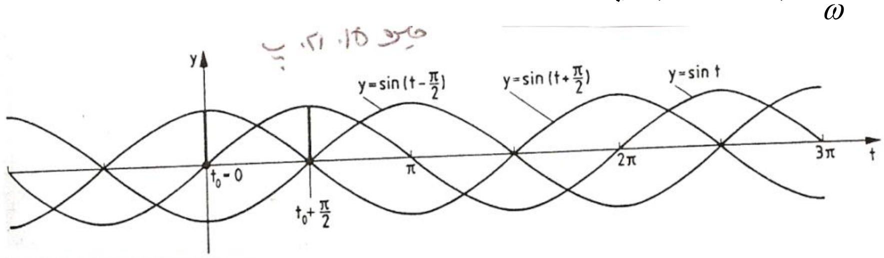
۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .
د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره٠
د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

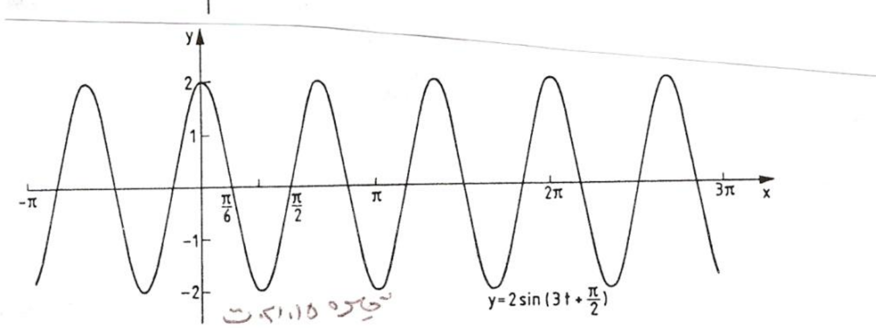
$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a . \sin\omega (t+\frac{\varphi}{\omega})$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کرښه $y = a.\sin\omega t$ د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.





(c) ketabton.com: The Digital Library

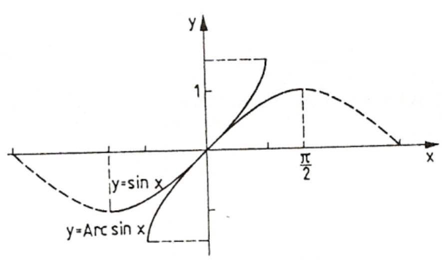
په پورته شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin(3t+\frac{\pi}{2})$ انځوردی. هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریودې یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کې د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

ځېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$

د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په ځتوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

پیژند .۱۵ ۰ ۱۴ :

(پام: ځیرې له تشریح د مخه راغلې، بله لار نه وه)



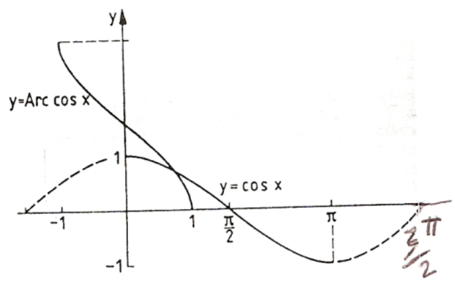
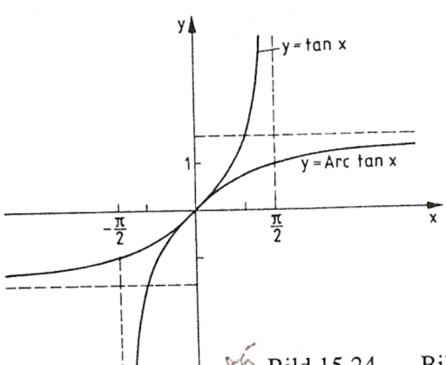


Bild 15.22 Bild 15.23



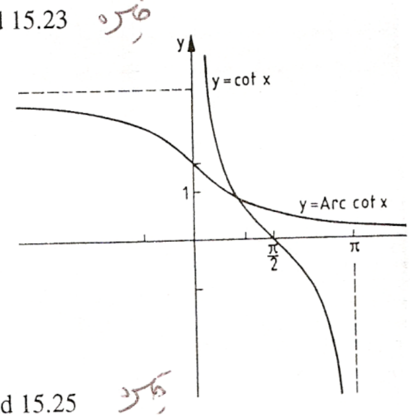


Bild 15.24 Bild 15.25

د لاندې فنکشنونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. $y = \sin x$,	$D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,	$W = [-1, 1]$	(15.12a)
2. $y = \cos x$,	$D = [0, \pi]$,	$W = [-1, 1]$	(15.12b)
3. $y = \tan x$,	$D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,	$W = \mathbf{R}$	(15.12c)
4. $y = \cot x$,	$D = (0, \pi)$,	$W = \mathbf{R}$	(15.12d)

پرڅېړ یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \text{Arc}\sin x$,	$D = [-1, 1]$,	$W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	(15.13a)
2. $y = \text{Arc}\cos x$,	$D = [-1, 1]$,	$W = [0, \pi]$	(15.13b)
3. $y = \text{Arc}\tan x$,	$D = \mathbf{R}$,	$W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	(15.13c)
4. $y = \text{Arc}\cot x$,	$D = \mathbf{R}$,	$W = (0, \pi)$	(15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخې په مونوتوني اینتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

۱۵ . ۴ ځنځیري (ترلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره پر دې د $z \in W$ لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x ترلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي۰

یادونه : یو ترلی فنکشن کیدی شي چی زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي په توګه $z = f(x$

د $x \in D, z \in W$ لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$ لپاره

او $y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،

نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو ترلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره ترلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کی $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی.
په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کي $z = \sin x$ د نننی - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$$, y = \cos w \;\; w = \sqrt{z} \;\; , \;\; z = 2x + 4,$$
سره ترلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په ترلي فنکشن $y=\mathrm{Arctan}1/(x-1)$ کی$z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\mathrm{Arctan}\, w$دباندنی فنکشن دی .

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی

له » دننه « پیل کیږي .

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته :
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$$
او
$$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942;y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1 \; ; \; w=1/z=1/1=1$
$$y=\mathrm{Arctan}w=\mathrm{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x\,)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که($f(x\,)$ له رییل ګڼونواو بستیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثبت وي او(Arc sin f(x همداډول(Arc cosf(x ټيك د $x \in [-1,1]$ لپاره پېژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي وېناو لپاره دې تعریفډیري پیداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 <=> x^2 \geq 3 <=> |x| \geq 3 \; (x \geq \sqrt{3} \;\; v \;\; x \leq -\sqrt{3})$

نو لرو $D = (-oe , -3] \cup [3 , oe]$

ب)($y=lg(x+2)+1/(3+2x-x^2$ له لمړي زیاتونی کی باید $Numerus > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 > 0 <=> x > -2$ ،

پس($D1=(-2,oe$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي ($=|$ 0) وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2 \; x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

د فنکشن تعریفډیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفډیري وي یعنی د D1 او D2

غوڅډیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2 , oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = Arc \sin (x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفډیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 <=> -5 \leq x-1 \leq 5 <=> -4 \leq x \leq 6 => D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 <=> x^2<4 <=> x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځوروني ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y= 2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسي او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اینټروالونه په تعریفډیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لو نه کړی.

a) $y=2x-3$ b) $y=-2x+3$ c) $y=x^2$

d) $y=-2x^2$ c) $y=2x^2+1$ f) $y=|x|$

۴ – پریکړه وکړی چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y=x$ b) $y=x+1$ c) $y=x-1$

d) $y=2x^2$ e) $y=2x^2+1$ f) $y=(x-1)^2$

g) $y=x^2/2$ h) $y=x^5$ i) $y=|x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2-x-2$

d) $y = 2x^2 -12x +18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [o,\infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1,\infty)$, $W = [0,\infty)$, d) $y = x^3/2$, $D = [o,\infty)$, $W = [0,\infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوې دي

a) $y = 0,4x -1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x +1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x -3y -7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالې کونج α دې پیدا شي. او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 -4x +3$ b) $y = x^2-8x+16$ c) $y = x^2 -6x +10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 -10x+12$ f) $y = 3x^2 +6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2}+x + 4$ h) $y = x^2/4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 +45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

۱۰ – د لاندې ټولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګنل شي. فنکشنونه دې د خلفورم باندې انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 -6x +5$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 -x^2 -(13/2)x -5$; $x_1 = 1/5$ $x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 +2x + 2x$; $x_1 = -2$ $x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 -x^3 -28x^2 32x +40$; $x_1 = 2$ $x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 -6x^2 +5x +6$; $x_1 = 1,5$ $x_2 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$ d) $y = \dfrac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \dfrac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځایونه دې وګټل شي، پول. تشخایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, $D = R$, $W = (0,\infty)$ b) $y = 2^x - 1$, $D = R$, $W = (-1,\infty)$

c) $y = \log_3 x$, $D = (0,\infty)$, $W = R$ d) $y = \ln(x-1)$, $D = (1,\infty)$, $W = R$

۱۳ – لاندې فنکشنونو ته مونوټوني اینټروالونه ورکړی او برخه په څټ فنکشنونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – ترلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$$y = f(w)\ ,\ w = h(z)\ ,\ z = g(x)$$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = \left(e^{x+1}\right)^2$ c) $y = \lg \sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan \sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan \sqrt{x} - 3$ i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln \sin \frac{x}{3}$ l) $y = \sin \ln (x + \frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\dfrac{1}{\sin x}}$ n) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \dfrac{1}{\sin \sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ - ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بيل کړی(د تعريف– او ارزښتڼيري باندې تيرونه کيدی شي)

a) $y = \left[\text{Arc}\cot\left(e^x + 1\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\text{Arccot}(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln\left(x^2 - 1\right) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې ښنيزويا سيرنيز (تحليلي) افادو لپاره تعريفڼيري پيدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3 - x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2 + x - 6}$ f) $y = \ln(2x + 5)$

g) $y = \text{Arc}\cos(2x - 4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلي او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې چې همدا اوس چاپ شوې دي:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي، را ژباړل شوي دي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې : همدا اوس ځنې چاپ شوي او ځنې چاپ ته چمتو دي.

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره :

دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

کتب په دوه برخو کې چاپ شوی دی

الف . لومړۍ برخه

ب . دویمه برخه

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګرېزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميړي شينواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان ميړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی. ده له ميرمن ښاپيرى سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې.

ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو اوو د ژباړې دنده يې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library