شمیر پوهنه

(ریاضي)

ستر کتاب

دویمه برخه

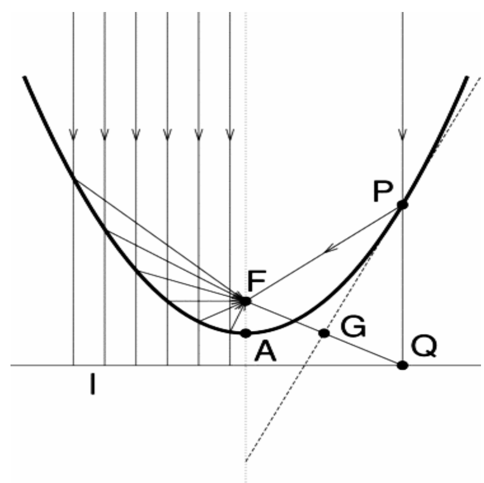
دویم غځېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان (میړی) شینواري

شمیرپوهنه

(رياضي)

ستركتاب



دویم غزېدلی چاپ

لیکونکی: ډاکتر ماخان میرږي شینواري

دلوي ښتن په نامه

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونده اخستې وي.

makhanshinwari@gmail.com

كتاب پيژندنه

د کتاب نوم: د شميرپوهنه ستر کتاب (دويمه برخه)

ليكونكى: ډاکتر ماخان،، ميرى،، شينوارى

د خپريدو لړى

خپرندوى: د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې

دانش خپرندويې ټولنې تخنيکي څانګه

makhanshinwari@gmail.com

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساینسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پیل کړې، تراوسه یې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هیواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په یوه مهمه غني ژبه بدلیدلای شي، چې د پوهې په ګانه سمبال شي او په علمي او اکاډمیکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بیلابیلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودرېږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووایو.

د اتحادیي له حوا د ډاکتر ماخان شینواري تراوسه زیاتو چاپ شویو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمیر پوهنې نویو ژباړو او لیکنو او دوه ټولنیزو لیکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې څکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساینسي اثارو د خپراوي په لړ کې د یوه مهم ګام په توګه ګڼل کیدای شي او هیله ده، چې د دې برخې مینه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کټه ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

د لیکونکي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لرې. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترمانوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار

۲۰۱۲ ز ک

نیولیک

نوې سریزه

سریزه

افغاني، یوناني ، لاتین الف ب

شمیرپوهنیزې نخښې

لومړۍ برخه

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ ته چمتو لیکنې او ژباړې

د ژباړي یا لیکونکي ژوند ته لنډه کتنه

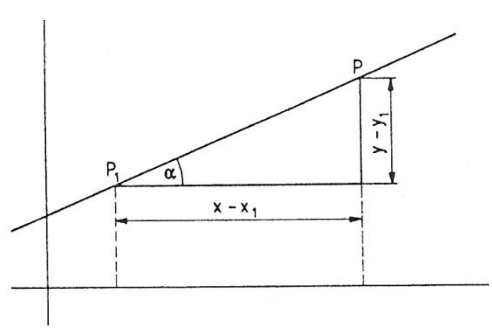
۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

په دې برخه کې يوځود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) څمککچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څيړل کيږي.د تحليلي هندسي بنستيزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونويې د هندسي خويونو جوړښت ښايي.

۱۶ . ۱ کرښه

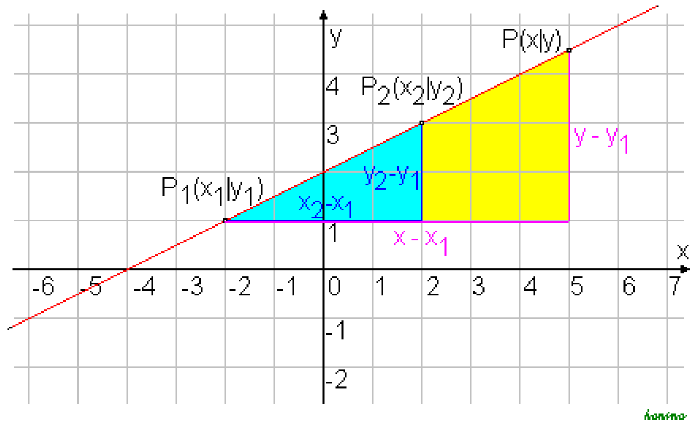
د هندسي ټاکندو توټو له لارې مختلف امکانات شته دي، چې يوه کرښه يواځنۍ کره تعين کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفی بڼی شته دې. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کيدي شي . (ټکی او د ټکی ميلان معلوم دې) .

دلته دې($P1(x1 , y1$)دا ټکي وي. دې د جګيدو کونج،وي، چې د کرښې $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او($P(x,y$ په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی٠



نو د کربنی د میلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته څېره دې وکتل شي(لاددې څېره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);....................(16,1)$$

پورته د کربنی ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: y - b = m (x - 0) په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کربنمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

یوه کربنه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

دا دوه ټکي دې(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څيره ش ۱۶ . ۲) د جګيدونکی یا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x\ \ -x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیزبرابرون

ځیره ده

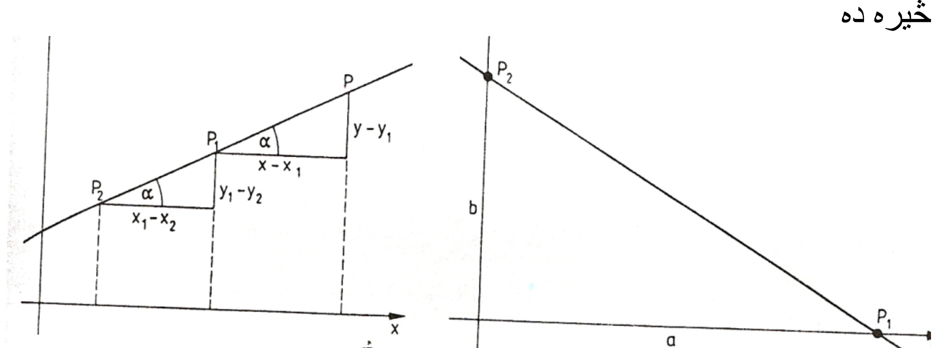


Bild 16.2   ځيره

Bild 16.3   ځيره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0
سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوځي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بڼه (داسی دی:

Ax + By + C = 0   (16 . 5)

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)

دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نیسي

y = y0 (A = 0 ,B|=0)

او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیرېږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30^\circ$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو(2-, P1 (3/2 او(4- , P2(1کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x - \frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1 - \frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(اته ناسم، په ځای يې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

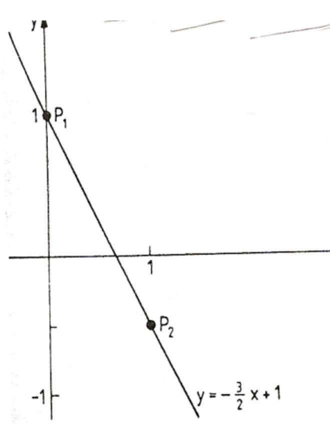
بیلګه ۱۶ . ۴ :

د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي٠
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2 وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ځیره . ۱۶ . ۵) داسی ده d =

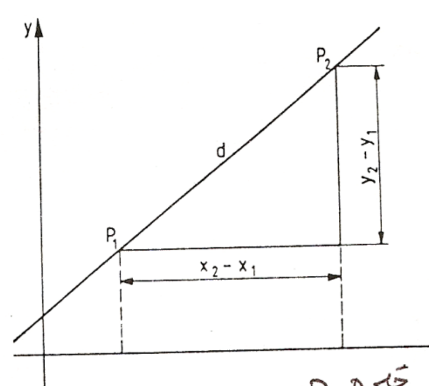
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};\text{..........................}(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ځیرې ۱۶ . ۴ او - ۵



ځیره ۴ :



ځیره ۵

بيلګه ۱۶ . ۵ :

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چې کونجټکي يې دادي(-)A(3,1),B(-1,1),C(2,5 ، په لاندې ډول دئ

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2+(5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2+(5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2+(1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښې (نه کښمتې) چې (يو د بلې سره) غبرګې نه وي ټيك يو غوڅټکی لري. دا چې دا ټکی په دواړو کواور ديناتو پروت دی ، نو د دواړو کواورديناتو برابرون برابرون بايد پوره کړي . په دې حالت کې د غوڅټکي کواورديناتو، د دوه لاينيزو برابرونونو سره چې دوه اوښتونې يا

ناپيژندونکی (مجهولی) ولري، د يوه سيستم يواځنی کره اوبيونه ترې لاس ته راځي.
په ټوليزه توګه دا باور لري: که يو برابرونسيستم چې د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او يو يواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښې يو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډيرې اوبيونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه يوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښې يوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بيلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښې پروتځای (موقعيت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څيرو
اوبيونه : د g1 برابرونونو څيره داسی بدليږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سيستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټيك يوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګنديږي چې ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دئ .

ب) د برابرونونو سيستم

$$3x - y = 2$$
$$3x - y = 1$$

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کرښې يو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم $3x-y=2$

$$-x+(1/3)y=-2/3$$

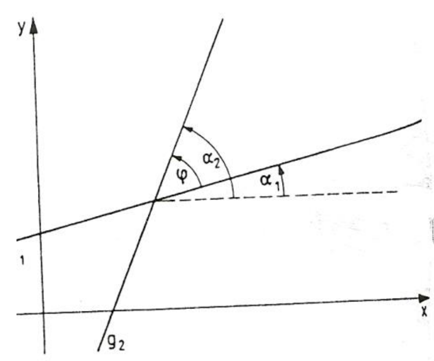
ناپای ډير ې اوبيوني يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کرښو

$$g1 : \quad y = m1x + b1 \qquad g2 : \quad y = m2x + b2$$

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (خ ۱۶ . ۶)



څېره ۱۶ . ۶

د کرښې له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنسټيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم ځخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};......................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دی.

دا په دې پورې اړه لري چی ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته څېړې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) ځخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4} - 1}{1 + 1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180 - \phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښی یوبل سره غبرګی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چی د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m - m)/(1 + m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

یعنی د $m2= -1/m1$ لپاره $(m1|=0,m2|= 0)$

په کرښه($y=y0\ (m1=0$ باندې کرښه($x=x0(m2=oe$ نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

$$m2 = m1 \qquad (16, 8)$$

د اورتوګونالیتی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

$$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$$

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی $g2$ برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي($P\ (2,-1$ تیریږي، او له کرښی $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) څغلي اوبوونه:

الف) د $g2$ کرښی میلان (جګوالی $m2 = m1 = -2$(دی. پام (۱ . ۱۶) ته دکرښي $g2$برابرون لپاره باور لري : $y+1=-2(x-2$ (همداسی $y = -2x +3$

ب) د $g2$ کرښي میلان یاجګیدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱ . ۱۶) سره سم د $g2$ کرښي برابرون دی: $y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2$

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د($P1(1/3,-1/6$ ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو($P2(-1,1$ او($P3(-2,-1$ تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له $P2\ ,P3$ ټکو تیریږي، و (۳ . ۱۶) ته په پام لاندې برابرون لري $y = 2x +3$ <=> $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱ . ۱۶) له مخی دي:

$y+(1/6)=-(1/2)(x-173) \iff y=-(1/2)x$

بېلګه ۱۶ . ۱۰ :

د $g1:2x-y-1=0$ او $g2: 3x+2y=5$ کرښو د غوڅېدو د ټکي S واټن له ټکي $P(6,13)$ څومره دئ او د کرښې برابرون څنګه دئ چې د کواوردينات له سرچینې تېرېږي او د S او P څخه تیریدونکې کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅېدو کواوردينات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي

$2x-y=1$

$3x+2y=5$

يعنی: $x_S=1 , y_S=1$

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخې د کرښې برابرونونه چې له S او P تېرېږي دي

$(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1) \iff y=(12/5)x-7/5$

(جګوالی: $m = 12 / 5$)

له S او P ټکو تیریدونکې کرښه باندې د ولاړې کرښې میلان

$m2 = -1/m = -5/12$

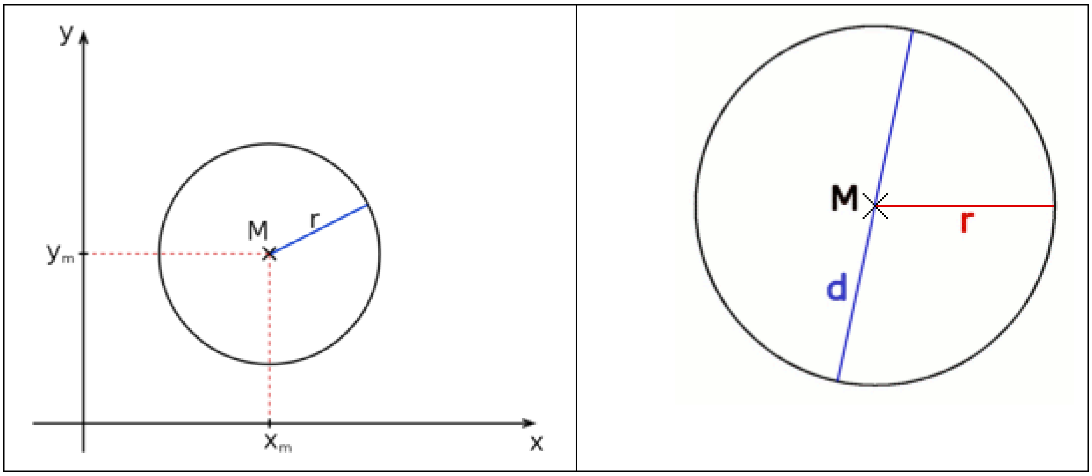
د $P0\ (0,0)$ څخه تیریدونکې کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخې لاندې برابرون لري

$y-0=-(5/12)(x-0) \iff y=-(5/12)x$

۱۶ . ۲ ګردی (دایره)

دایره(ګردی) د ټولو هغو ټکو ډېری(ست) ده، چې د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یې وړانګه وایو او په rیې په نخښه کوو. فورمال داسې ویل کیږي یا دا پيژند ورکوو، چې دایره (ګردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډېری(ستې) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$



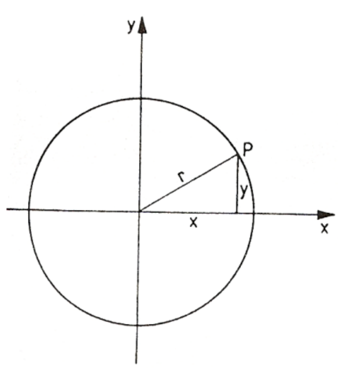


Bild 16.7 شکره

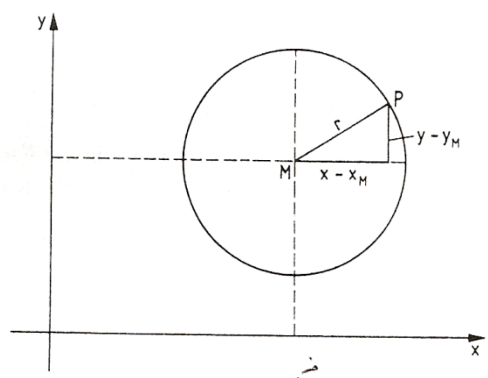


Bild 16.8 شکره

په شننیزه هندسه کې کيدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m,y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې ګردی ځانګړي حالت او د کواورديناتسيستم سره، چې منځټکی يې د کواوردينات
په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د ګردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (څیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د) پیوتاګوراس د جملی له مخی (د ګردي په خوښه ټکي (P(x,y لپاره باور لري

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (څیره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغیر ومومي) ، پس پیژندل کیږي چی د ګردیبرابرون د څلورۍ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په څیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې تولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) تولیز فورم یا تولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په تولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه څیرې پورته وګورۍ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردۍ برابرون دې په تولیزه - یا عمومي توګه وي:

$$2x^2+2y^2+4x-12y=0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلوری پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y+9=3+4+9$

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2=16$

ګردۍ منځټکی($M(-2,3$ او وړانګه $r=4$ لري.

بیلګه ۱۶ . ۱۲ :

د ګردۍ برابرون ولیکی چی منځټکی یی($M(2;0$ وي او په کوم چی ټکی($P(6,4-3$ روت دی؟

اوبیونه : د($M(2,0$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دئ

$$(x-2)^2+y^2=r^2$$

د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2=r^2$

له دې څخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r=8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:

$$(x-2)^2+y^2=64$$

ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي

۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سیکانتې)

۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)

۳ - کرښه ټوله له ګردۍ دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)

د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (ځلورئ برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:

کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ (او لاندې کرښی و یو بل ته لري؟

$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د گردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به g1 د گردي غوڅوونی یا (Sekantسکانت) وي .
که $g2: y=-2x+12$ د گردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$
د ډبل اوبونې $x1,2 = 4 , y1,2 = 4$ سره g2 یو تانجنت دئ .
که $g3 : y=2x+6$ د گردئ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2<=> 5x^2+x+8=0$
دا څلورئ برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g3 له گردئ k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.

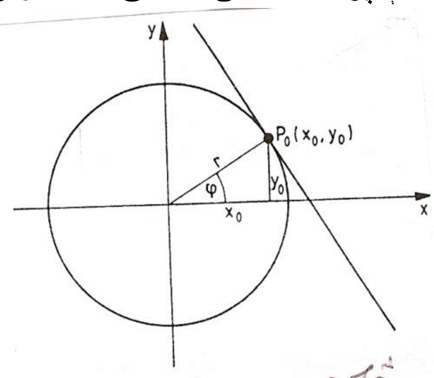


Bild 16.9

په گردي $(x^2+y^2 = r^2)$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی(P0(x0,y0دد مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانگه نیغ ولاړ دئ
د مماسوړانگه دا میلان یا جگوالی لري $\tan\phi = \dfrac{y_0}{x_0}$ او
له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت
$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0;..........(16,13)$$

د تنجنت یا جگې برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

---

y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0²+y0²=r²

$$xx_0 + yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه(P0(±r,0او(P0(0,±r په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(ځېره . ۱۶ . ۱۰)

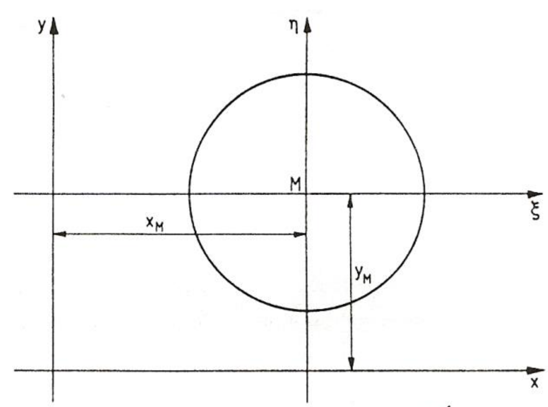


Bild 16.10 ځاره

يادونه : که له دې مخ ته يا وروسته x0,y0 يا xM,yMاو x_0, y_0 يا x_M, y_M ګورو نو کېمټ دي

بيلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبيونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پيداکوو. دا بايد دګردۍ برابرون پوره کړي . ټکی P1 بايد په تنجنت پروت وي يعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) بايد پوره کړي.
نو باور لري
$x_0^2+y_0^2 = 16$ او $-12x_0 + 4y_0 = 16$

که دا لاينيزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي يو ځلورئ برابرون يا مربع مساوات لاس ته راځي

$$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبيونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$$y_{01}=4 , y_{02}=-16/5$$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو $P_{01}(0,4)$ او $P_{02}(-12/5,16/5)$ د (۱۶ . ۱۴) له مخې په لاندې ډول دي

$$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$$

او

$$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$$

د ګردئ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځټکي $M(x_M,y_M)$ سره د ζ,η -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ څيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري.

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;..................................(16,15)$$

د ζ,η -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي .

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;..........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بيا دا د y,x -کواوردينات سيستم ته ترانفورميرکوي(کشوي يا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي $P_o(x_0,y_0)$ کی د ګردئ تنجنت برابرو په ګردئ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلګه ۱۶ . ۱۵:

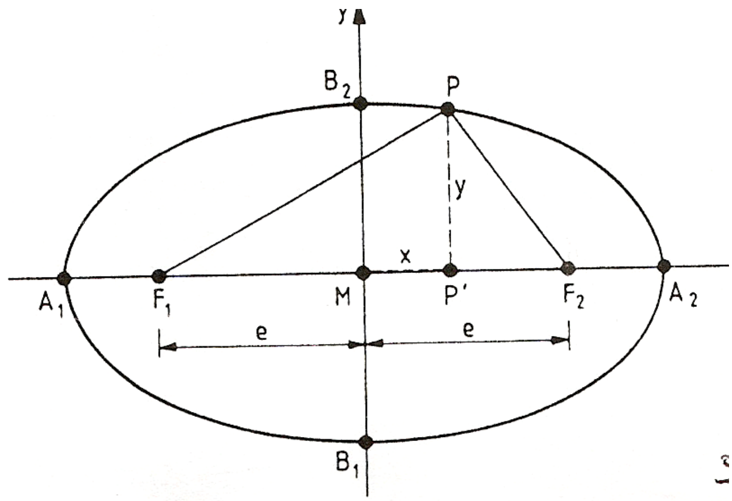
په ګردۍ چې برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، دx - محور باندې، په ټکو
$x1 = x2 =-5$
سره تنجنت وکا ږو(کيږدو). برابرون يې څنګه دي؟
اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:
$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$
$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$
او له دې لاس ته راځي
$$xM = -8 , yM = 2 , r = 5$$
د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه
$$x1 = x2 = -5$$
د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کې ځايوو:
$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره څلوري‌برابرون يا مربع مساواتو د دواړو اورديناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي
$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$$
او
$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$$

۱۶ . ۳ بيضوي(هګۍ) يا ايليپسی Die Ellipse

بيضوي يا ايليپسی د ټولو هغو ټکو P ډيرۍ ده، د کومو واټن چې له دوه ټينګ په ځايټکو، داسې په نامه د ايليپسی د سوزونټکويا محراق $F1$ او $F2$ څخه ثابت وي. دا سوزونټکی د څيرې ۱۶ . ۱۱ سره سم د -y محور سره سيومتريك دx - محور باندې ځايوو يا ږدو او د ثابت واټنزياتون ليکو:
$$\underline{PF}1 + \underline{PF}2 = 2a \qquad (16. 18)$$

د سوزونټکو واټن دې وي:
$$\underline{F}1F2 = 2e;$$



څېره ۱۶ . ۱۱

دا e لايني اکسځنتريځيتي(Exzentrizität دا يوناني کليمه ده چې په اليپسی هوپربول او پارابول کی د همدغه تعريف لپاره ټاکل شوې) بلل کيږي .
د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي:

$$\underline{PF}_1 = \sqrt{(e+x)^2 + y^2}$$

او

$$\underline{PF}_2 = \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

او له دې سره له (۱۶ . ۱۸)

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a.\sqrt{(e-x)^2 + y^2} + e^2 - 2ex + x^2 + y^2$$

(څلورې يا مربع ته جګيږي)

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$ (رېښه رابيليږي

(څلورې يا مربع کوو)

$$e^2x^2 - 2exa^2 + a^4 = a^2(e^2 - 2ex + x^2 + y^2)$$

ترتيب اوړون $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$

په ځاي کوو

$$a^2 - e^2 = b^2 \qquad (16.19)$$

او لاس ته راوړو

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad <=>$$

$$(x^2/a^2) + y^2/b^2) = 1 \qquad (16,20)$$

د منځټکي($M(0,0$سره د ايليپسی منځټکي مساوات

د $y=0$ لپاره دی $x=\pm a$، د $x=0$ لپاره دی $y=\pm b$. ايليپسی (ځيره ۱۶ ، ۱۱)

د x - محور په ټکو $A1(-a,0), A2(a,0)$ او د y - محور په ټکو $B1(0.-b), B2(0,b)$ کی پرې کوي، aاو b د دواړو نيمحورونو اوږدوالی دی

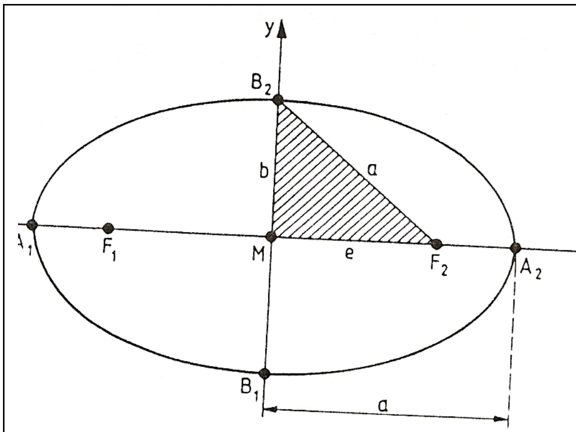


Bild 16.12

لکه د اليپسی د هرټکي لپاره، همداسی د Bلپاره هم اړيکی (۱۶ ، ۱۸) باور لري:

$$\underline{F1B2} + \underline{F2B2} = 2a$$

د $\underline{F1B2} = \underline{F2B2}$ له امله له $\underline{F2B2} = a$ دې لاس ته راځي

(ځيره ۱۶، ۱۲)

له دې سره په دريګوډي $MF2B2$ کی د اړيکو (۱۶ ، ۱۹) هندسي ارزښت پيژندل کيږي.

که منځټکی M کواوردينات Mx ; My ولري او د ايليپسی محورونه د کواورديناتو سره غبرګ وځغلي، نو د ايليپسی د يوه خوښې ټکي($P(x,y$لپاره باور لري:

$$(x-xM)^2/a^2+(y-yM)^2/b^2=1 \qquad (16 , 2 1)$$

د ايليپسی د منځټکي مساوات د منځټکي $M(x_M, y_M)$ سره

د پورته فرمول څلولو وروسته د ايليپسی ټوليز(عمومي) جوړښت پيژندل کيږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16, 22)$$

د ايلپسی مساواتو ټوليزه بڼه يا - فورم

د ګردې برابرون سره په توپير(پرتله يا مقايسه ۱۶ . ۱۲) د x^2 او y^2 څله وونی يا ضريبونه يو له بل توپير لري، مګر همغه مخنخښه لري($A.B > 0$)

بيلګه ۱۶ . ۱۶ :

د د ايليپسی منځټکی، نيممحور، او سوزونټکي لټول کيږي، که دا برابرن

$$9x^2 + 25y^2 -54x +100y -719 = 0$$

مو مخ ته پروت وي.

اوبښونه : د ايلپسي برابرون د منځټکي بڼه يا فورم (۱۶ . ۱۲) باندې اړول کيږي:

$$9(x^2-6x)+25(y^2+4y) = 719$$

څلوری پوره کونه يا مربعتکميلونه

$$9(x^2-6x+9)+25(y^2+4y+4) = 719+9.9+25.4$$

$$9(x-3)^2 +25(y+2)^2 = 900$$

(په ۹۰۰ ويش)

$$(x-3)^2 / 100 + (y+2)^2 / 36 = 1$$

د لاس ته راوړلو مساواتو څخه منځټککواوردينات

$$xM = 3 , yM= -2$$

لوستلکيږي او د نيممحور لپاره $a^2=100$, $a=10$ او $b=6$, $b^2=36$ لوستل کيږي.

د (۱۶ . ۱۹) سره سم لاس ته راځي:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

او له دې سره منځټکي (پرتله څيره ۱۶ ، ۱۱)

$$F_1(x_M - e, y_M) = F_1(-5,-2), F_2(x_M + e, y_M) = F_2(11,-2)$$

بيلګه ۱۶ . ۱۷ :

د ايلپسي برابرون د منځټکي (M(-1,3 سره لټول کيږي، په کوم چی ټکي(P1(-3,3 او $P_2(0,3+\frac{3}{2}\sqrt{3})$ پراته وي.

اوبونه : د (۱۶ ، ۲۱) سره سم د منځټکي(M(-1,3 سره د ايلپسي براورن داسی دي

$$(x-1)^2 / a^2 + (y-3)^2 / b^2 = 1$$

ټيکي P1 او P2 بايد د ايليپسي برابرون پوره کړي:

$$\frac{(-3+1)^2}{a^2}+\frac{\sqrt{(3-3)^2}}{b^2}=1, \frac{(0+1)^2}{a^2}+\frac{(3-3-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1$$

د دې برابرونونو له لومړی څخه لاس ته راځي $4/a^2 + 0 = 1$ همداسی(< = >)
$a = 2$ او له دې سره د دويم برابرون څخههمداسی < = >

$$\frac{(0+1)^2}{4}+\frac{(-\frac{3}{2}\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{9}{4}.3}{b^2}=3/4 \Leftrightarrow b=3$$

د ايليپسی لټونکی برابون داسی دی:

$$(x+1)^2/4 + (y-3)^2/9 = 1$$

بيلګه ۱۶ . ۱۸ :

د کرښو

الف) $y = x + 2$

او ب) $y = x - 2$

غوڅټکي د ايلپسی $9x^2+y^2+54x+72=0$ سره لټول کيږي.

اوبيونه : كه الف) $y=x+2$ د ايلپسى برابرنونو كى خوندي شي، نو لاس ته راځي

$$9x^2+(x+2)^2+54x+72=0 \iff 10x^2+58x+76=0$$

د څلورى - يامربع برابرونونو اوبى :

$$x1=-2\ ,\ x2=-3{,}8$$

د غوڅټكي ابسڅيز يا پروتمحور دى. په دې پورې اوردينات يا ولاړ محور

$$y1=0\ ,\ y2=-1{,}8$$

اړه لري.

ب) دy رامدځ ته شوې څلورى(مربع) برابرون

$$9X^2+(x-2)^2+54x+72 \Leftrightarrow 10x^2+50x+76=0$$

رييل اوبيونه نه لري. كرښه $y=x-2$ د ايليپسې څخه دباندې پرته ده

۱۶ . ۴ :هوپربول Die Hyperbel

پيژند:

هوپربول يا هيوپربل د ټولو هغو ټكو ډيرى ده، د كومو لپاره چې د كمون يا كمښت مطلقه ارزښت واټن، د دوه كره په ځاي ټكوF1 اوF2 ،دا په نامه د هوپربول سوزونټكو

يامحراقونو، څخه ثابت وي. دا سوزونټكي ، لكه په ايليپسى كى دلته هم موږ كره ټاكو (څيره ۱۶ . ۱۳) .

د ثابت واټنكمون يا واټنكمښت| $|\underline{PF1}-\underline{PF2}|=2a$ او (ځيره ۱۶ . ۱۳)

د سوزونټكوواټن) $\underline{F1F2}=2e$ (څيره ۱۶ . ۱۳)

$$e^2-a^2=b^2 \qquad (16.23)$$

په پورته كې يا بل چيرې، چې كوم څه لاندې كرښيز شوي وي، دا په زياتو ادبياتو كې پورته كرښيز شوي، دې ته دې پام وي، چې لاندې كرښيز شوي وي او كه پورته، توپير نه لري يا همغه څه دي٠

يو ايليپسى برابرون ته ورته تلنه (برخۀ ۱۶ ، ۱۳) مو لاندې ته لاربښودوي:

$$(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1 \qquad (16.24)$$

د هوپربول منځټكي برابرون د منځټكي (M(0,0 سره

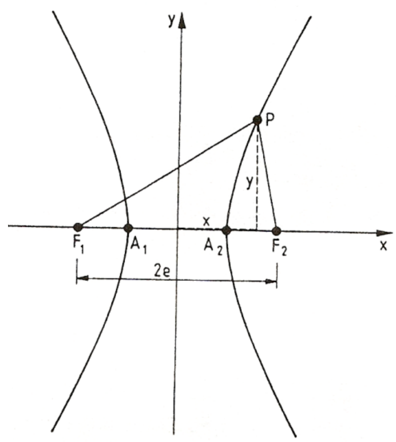


Bild 16.13 ځېره

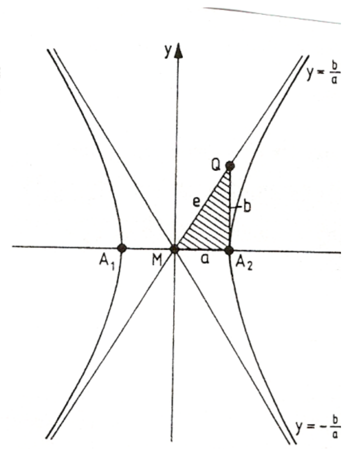


Bild 16.14 ځېره

د $y=0$ لپاره $x=\pm a$ دی ، دا په دې مانا چې هوپربول د x - محور په ټکي

(A1(-a,0 او(A2(a,0کې غوڅوي. دا ټکی ککری ټکی بلل کيږي٠ ګورو چې
دا دککری ټکی دی .(د ناپای سره ځاننيونی په هکله: که (۱۶ . ۲۴) د y په لور
حل شي، نولاس ته راځي:

$$y = \pm b.\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm\frac{b}{a}.x.\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

د x -> ± oe لپاره $-a^2/x^2$ له منځه ځي. پس هوپربول ځان کرښی $y = \pm(b/a).x$ ته
نږدې کوي (خيره ۱۶ . ۱۴)
له دې امله لاندې برابرون

$$y = \pm(b/a)x \qquad (16,25)$$

د هوپربول اسیمپټوتی بلل کړي.
د (۱۶ . ۲۳) له امله $MQ = e$ دی .
که منځټکی M کواوردينات xM ,yM ولري او سیومتريك غبرګ د کوردیناتو محور
ته ځغلي، نو د يوه په خوښه هوپربول ټکي(P(x,y لپاره باور لري:

$$(x-x_M)^2/a^2-(y-y_M)^2/b^2=1 \qquad (16,26)$$

د هوپربول منځټکي برابرون ($M(x_M, y_M)$ سره.

د پورته مساوات د ځلولو وروسته، په لاندې ډول د هوپربولمساوات تولیز جوړښت جوتیږي.

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0 \qquad (16,27)$$

دهیوپربول برابرون تولیزه بنه یا فورم
دلته د ایلیپسی سره په مخامخ (همدا برعکس دئ) یا په ځنې ډول د x^2 او y^2 ځله ووني بدله مخنښه لري
($A . B < 0$) تولیز برابرون هم کولی شي چی موږ لاندې منځټکي برابرون ته لاربنود کړي،

$$(y-y_M)^2/b^2-(x-x_M)^2/a^2=1 \qquad (16,26')$$

د کومو څیره چی یو پورته لور او کښته لور ته واز هوپربول دئ.

بیلګه ۱۶ . ۱۹:
د لاندې هوپربول منځټکی او سوزونټکی لټول کیږي

$$-25x^2 -150x+144y^2 -188y +144 = 0$$

اوبیونه: د ورکړشوي هوپربولمساوات بنه په منځ ټکي (۱۶ . ۲۶) اوړي یعني فورم یی بدلیږي:

$$-25(x^2+6x)+144(y^2+2y) = -144$$

(د څلوری پوره کونه)

$$-25 (x^2+6x+9)+144(y^2-2y+1) =-144-225+144$$

$$-25(x+3)^2 + 144(y-1)^2 = -225$$

(په 225 - ویشنه)

$$-25(x+3)^2+144(y-1)^1 = -225$$

$$+(x+3)^2 / 9 -(y-1) /(25/16) = 1$$

د لاس ته راغلومساواتوڅخه لاندې لوستل کیږي:

$$x_M = - 3 ,y_M = 1 ,a^2 = 9 , a = 3 ,$$

$$b^2 = 25 /16 , b = 5/ 4$$

او د دې سره سم د (۱۶ . ۲۳) له امله لرو:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{144/16 + 25/14} = 13/4$$

د هوپربول منځټکی (M(-3,1دی ، سوزونټکي یې
(F1(xM-e,yM)=F1(-25/4,1 او(F2(xM+e,yM)=F2(1/4,1 دي.

بیلګه ۱۶ . ۲۰ :

د هوپربول $9x^2-4y^2=36$ اسیمپټوتي یو له بل سره کوم کونجونه تړي یعنی جوړوي یا اسیمپټوتی په کومو کونجونو کی یو بل پریکوي؟

اوبیونه : هوپربول د منځټکي بڼه (فورم) له (۱۶ . ۲۴) سره سم په لاندې ډول ده $x^2/4-y^2/9=1$ یا د $a=2$,$b=3$ سره

له دې سره سم دواړه اسیمپټوتی د(۱۶ . ۲۵) له مخی $y=(3/2)x$
او $y=-(3/2).x$ دي.

د لومړی اسیمپټوتی اوx - محور ترمنځ کونج φ د $\tan\varphi = 3/2, \varphi = 56{,}31°$ څخه لاس ته راځي.

له دې امله د اسیمپټوتو ترمنځ کونج ψ باور لري $\psi = 2\varphi = 112{,}62°$
داکونج کیدی شي د هوپربول د وازونکونج په نامه ونومول شي.

بیلګه ۱۶ . ۲۱ :

د ایلیپسی $x^2/64+y^2/16=1$ غوځټکي د هوپربول سره لټول کیږي چی منځ ټکي یی په سرچینه او ککرټګي یی د ایلیپسی په سوزونټکو پراته وي او همغه ارزښت b لکه ایلیپسی ولري.

اوبیونه : د ایلیپسی نیممحور په a1 او b1 سره او لاینیزه اکسڅینتریڅیتي یی په e1سره ښایو.

نو باور لري: $a1=8$, $b1=4$ او د (۱۶ . ۱۹) سره سم دی.

$$e_1 = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

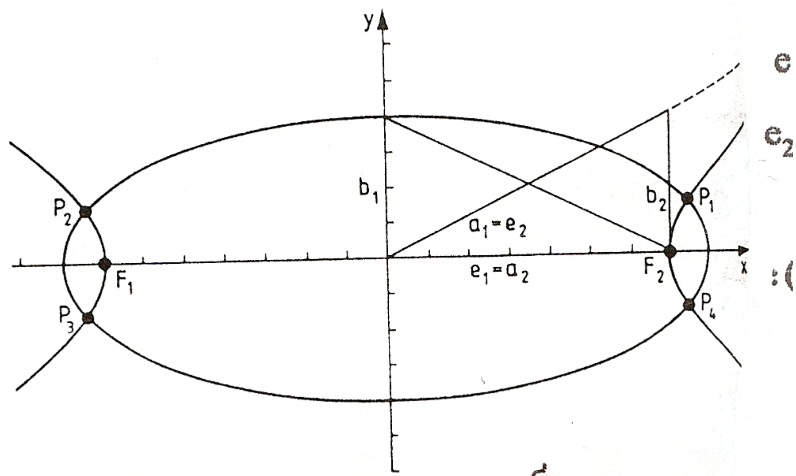


Bild 16.15 ځېره

د هوپربول لپاره نخښې e_2, a_2, b_2
استعمالوو:
باورلري (پرتله ځیره ۱۶ . ۱۵) :

$$b_2 = b_1 = 4, a_2 = e_1 = 4\sqrt{3}$$

او د (۱۶ . ۲۳) سره سم دئ

$$e_2^2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 8 = a_1$$

د هوپربولبرابرون داسې دی:

$$x^2 / 48 - y^2 / 16 = 1$$

د غوڅټکو کواوردینات د ایلپسی- او هوپربولمساوات پوره کوي. که داوړه مساوات سره زیات شي نو لاس ته راځي

$$(\frac{1}{16} + \frac{1}{48})x^2 = 2, x^2 = 348/7, x_{1,2} = \pm 8\sqrt{\frac{6}{7}}$$

د ایلیپسي او هوپربولبرابرونونو څخه لاس ته راځي

$$y^2 = 16(1 - x^2/64) = 16/7 \Leftrightarrow y^2 = 16(x^2/48 - 1) = 16/7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm 4\sqrt{1/7}$$

او د دې سره سم د دوارو کرو غوڅټکي دي:

$$P_1(8\sqrt{6/7}), P_2(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, 4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_3(-8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}}), P_4(8\sqrt{\frac{6}{7}}, -4\sqrt{\frac{1}{7}})$$

۱۶ . ۵ پارابول Die Parabel

پارابول د ټولو هغو ټکو P ډيرئ ده، چې واټن يې له يوه کلك په ځاي ټکی، د پارابول سوزون ټکیF، او يوې کلك په ځاي کرښی، د پارابول ترمخکرښی l (داپه ښيره کی جوته ده چې دا کومه کرښه ده) سره مساوي دي(ښيره ۱۶ . ۱۶) د سوزونټکی او مخکرښی ترمنځ واټن نيم پارامتر p بلل کيږي، Sککری ټکی دی،کرښه چې له S او F تيريږي د پارابول محور دی.

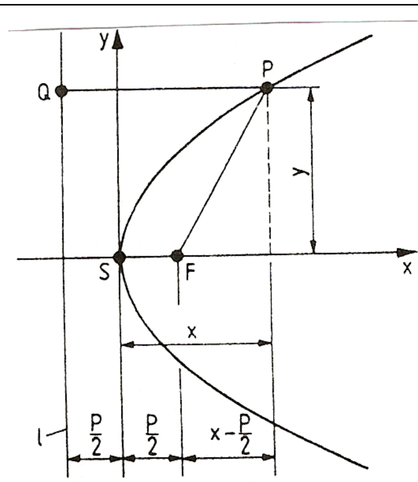


Bild 16.16 ښيره

له پيژند – يا تعريف برابرونونو = PF PQښخه لاس ته راځي

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x+\frac{P}{2}$$

او له دې ښخه د مربعکولو او د ټولګی ښخه لاس ته راځي

$$(x-p/2)^2 + y^2 = (x+p/2)^2,$$

$$x^2-px+p^2/4+y^2 = x^2+px+p^2/4$$

پس لرو

$$y^2 = 2px \qquad (16,28)$$

د پارابول ککربرابرون د ککرټکي S(0,0) سره، پورته لور ته واز ($x > 0$)

په همدې ډول:

$$y^2 = -2Px \qquad (16 , 29)$$

هغه وکیڼ لور ته واز پارابول دی‌د واریابلو د بدلون څخه لاس ته راځي:

$$(16 . 30) \qquad x^2 = 2py$$

د پارابول ککرمساوات د ککرټکي($S(0,0$سره، پورته واز پارابول ($y > 0$)

په همدې توګه:

$$x^2 = -2py \ \ (Y<0) \qquad (16.31)$$

پورته لور ته واز پارابول دی.

که ککرټکي S کواوردینات xS , yS ولري او د پارابول محور د x - محور ته غبرګ ځغلی په همدې ډول د y - محور ته هم غبرګ ځغلي، نو د یوې په خوښه پارابول ټکی لپاره باور لري:

$$(16. 32) \qquad (y - yS)^2 = 2p(x-xS)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرۍ ټکی($S(xS,yS$ سره، چی ښۍ لور ته وازوي($x>xS$)

$$(x - xS)^2 = 2p(y - yS) \qquad (16.33)$$

د پارابول ککرییرابرون د ککرټکي($S(xS,yS$سره، چی پورته لور ته واز وي ($y> yS$)۰

په همدې ډول:

$$(y - yS)^2 = -2p(x - xS) \quad (x<xS) \quad (16.34)$$

$$(x -xS)^2 = -2p(y - yS) \ (y<yS) \quad (16.35)$$

هغه کښې لور او همداسی کوزې یا لاندې لور ته واز پارابولونه دي

د فرمول (۱۶ . ۳۲) همداسی (۱۶ . ۳۳) ځله ونو څخه وروسته د پارابول ټولیز (عمومي) جوړښت پیژندل کیږي:

$$Ay^2+Bx+Cy+D= 0 \ , B \mid=0 \qquad ((16, 36)$$

همداسی($< = >$)

$$Ax^2+Bx+Cy+D=0 , C\mid=0, \qquad (16 . 37)$$

د پارابولمساوات ټولیزه (عمومي) بڼه (فورم)

بیلګه ۱۶ . ۲۲ :

د پارابول برابرون دې له ککرېټکی ، له نيمپارامتر او وازلورې څخه پيداشي:

الف $S(,0,0), P = 6$)کيڼ، ب $S(2,1)$;$P= 0,5$) پورته

پ $S(-3,-5), P = 4$) لاندې ت $S(4,-2)$,$P= 2 /3$) ښی

اوبيونه يا حل:

الف) $y^2 = -12x$ ب) $x-2)^2 = y-1$ (

پ) $(x+3)^2 = -8(y+5)$ ت) $(y + 2)^2 = (4 /3) (x-4)$

بيلگه ۱۶ . ۲۳ :

د پارابول د لاندې مساوات سره دې د پارابول د ککرېټکي کواوردينات ، نيمپارامتر او د وازون لور وټاکل شي $a) (x^2 + 4y +20x + 10 = 0, b)$ $y^2 -18x + 12 y -36 = 0$.

اوبيونه : د پارامترټوليزه بڼه (فورم) دې په ککرېبرابرون (۱۶ ، ۳۲) همداسی(۱۶ ، ۳۳) همداسی (۱۶ ، ۳۴) همداسی (۱۶ ، ۳۵) کی وازمايل شي (څلوری پوره کيدنه يا مربع تکميليدنه) . د ککرېبرابرون څخه ککرېټکي ، نيم پارامتر او وازلور

لوستوږ دي.

a) $x^2 + 20x +100 = -4y -100 + 100$

$(x+10)^2 = -4y$ $S(-10 , 0)$, $P = 2$

پارابول لاندې لور ته و از دی

b) $y^2 + 12y +36 = 18x +36 + 36$

$(y+6)^2 = 18(x+4)$

$S(-4,-6)$, $P = 9$

پارابول ښی لور ته واز دی

۱۶ . ۶ ټولگه:

دا له ۱۶ . ۱ نيولی تر ۱۶ . ۵ پورې څيرل شوې دهوارې کږې (کږی په هوارې يا سطحه کی)

-کرښه
-ګردۍ
-ایلیپسی چې د کواوردینات محور سره غبرګ ځغلي، ټول د لاندې مساوات
-هوپربول
-پارابول
په څیر انځورېږي:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \qquad (16\,,\,38)$$

فاکتورونه، ضریبونه یا ځله وونې A او B د کږی د توکو لپاره پرېکنده دي.
برابرون (۱۶،۳۸) لاندې روښانوي
د $A.B > 0\,,\,A\,|=B$ لپاره ایلیپسی ،
د $A = B$ لپاره ګردۍ
د $A.B < 0$ لپاره هوپربول، که $A > 0\,,\,B < 0$ وي، نو کینې لور ته واز،
که $A < 0\,,\,B > 0$ وي، نو پورته او لاندې لورته واز
د $A.B = 0\,,\,A = 0\,,\,B\,|= 0$ لپاره یو پارابول، چې محور یی د x - محور سره غبرګ دی د $A \neq 0$ ، $B = 0$ یو پارابول ، چې محور یی د y - محور سره غبرګ دی
د $A = B = 0$ لپاره یوه کرښهکه په (۱۶ . ۳۸) یو بل ګډوله(یو د بل سره ګډ شوی) ځلوری توکي رامنځ ته شي، نو دا د کږې یو ځلورۍ برابرون یا مربع مساوات ښکاروي (توضیخ کوي) ، د کومو محورونه چې نور د کواوردیناتو محوورونو سره غبرګ نه دي.

بیلګه ۱۶ . ۲۴ :
له لاندې مساواتو سره کومی کږې انځوریدلی شي ؟

a) $x^2+y^2+4x-8y-5=0$ b) $3x^2+24x+15y+138=0$

c) $16x^2+y^2-96x=0$,d) $2x^2-2y^2+16x+10y-105/2=0$?

اوبیونه : (یادونه : لکه د نورو ځایونو په څیر دلته هم الف د a په ځاي لیکم ، ځکه چې د پښتو لپاره کرښنه په لاتین حروفو له ښي لور نه شي پیل کیدی)
الف یاa) که $A = B = 1$ وي ، نو ګردۍ
ب یا b)که $B=0$ پارابول چې محور یی د-y محور سره غبرګ وي
پ c)که $A \neq B$, $A.B > 0$، نو ایلیپسی
تd)که$A.B < 0$ ، نو هوپربول

---

۱۶ . ۷ تمرينونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تيرېږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30^o$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45^o$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120^o$, d) $P_1(4,4)$, $= 0^o$

e) $P_1(0,0)$, $=150^o$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90^o$

۲ – ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تيرېږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅې(لنډ: محورغوڅې) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې يو له بل يې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – يو دريګوډی دا لاندې ګوډټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دريګوډيو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دريګوډي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برختوټېنه يا –فورم څنګه دئ؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتخاي د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وڅېړئ.

۷ – د لاندې کرښو د غوڅېدو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$ b) $y = (1/2)x + 1$ c) $y - x = 7$

$3x - y = 5$, $y = -2x + 6$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$ e) $6x - 2y + 10 = 0$ f) $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$, $y = 3x + 6$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅېدو ټکي $P(0,5)$ څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ ټکو $A(-4,-1), B(2,-2), C(1,3)$ سره د درېګوټي دننه کونجونه څومره لوی دي ؟ (پیلونه: درېکونجي وکارئ) یا (درېګوټی)

۱۰ – د ولاړېریوتې کرښې یا زوړندې مساوات له ټکي $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دي؟

۱۱ – د ولاړ کرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنګه د

۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیریږي، څنګه دي؟

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2\ 9y = 0$, d) $4x^2 + 4y^2 + 32x - 8y + 67 = 0$

e) $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y - 23 = 0$, f) $x^2 + 2x + y^2 + 2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وخیږئ

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لري او له سرچینې تیریږي

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5 -3)$, $P_3(5 + 3, -1)$ یې د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11), P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4/3)x + 13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x - 19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتځایونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,

d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتځاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5,y_0)$ چی په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چی په ګردی $(x - 1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګردیو منځټکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومې چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

۲۰ – د ایلیپسې مساوات وټاکې، له

a) $M(0,0)$, a 11, $c = 8$, B) $M(0,0)$, $b = 4$, $c = 6$,

c) $M(-3,7)$, $c = 4$, $b = 5$, d) $M(4, -5)$, $e = 7$, $a = 10$!

---

۲۱ – د لاندې ایلیپسیمساواتوڅخه د نیممحورونو اوسوزونټکو منځټکی او اوږدوالی راپیداکړئ:

a) $x^2 / 100 + y^2/ 64 = 1$ b) $(x+3)^2 / 81 + (y-1)^2 / 56 = 1$

c) $3x^2 + 4y^2 -24x >= 0$, d) $5x^2 +9y^2 -10x + -90y + 50 = 0$,

e) $4x^2 -13y^2 -208 = 0$, f) $4x^2 +9y^2 +54y -227 = 0$!

۲۲ – د هغو ایلیپسو مساوات راپیداکړئ، کومې چې

الف) چې منځټکی M (0,0) او لاینې ایکسڅنتریخیتي e = 6 لري او تکی P(10.0) څخه تېرېږي،

ب) له منځټکی M (1,1) او لاینې ایکسڅنتریخیتی e = 4 لري او له ټکو ۷ څخه تیرېږي،

پ) د نیممحور اوږدوالی a = 9, b = 6 لري او له ټکو $P_1(2,8), P_2(2,-4)$ څخه تیرېږي!

ت) د نیممحوراوږدوالی a = 2 , b = 6 لري او له ټکو $P_1(-1,-4), P_2(-5,-4)$ څخه تیرېږي!

۲۳ – د لاندې ایلپسو او کرښو ترمنځ غوڅټکي پیدا کړئ

a) $x^22 +4y^2 -20 = 0$, $x+2y-6 = 0$,

b) $3x^2 +4y^2 -24x =$, $y = 3 .x$,

c) $(x-3)^2/ 9 +(y-1)^2 / 4 = 1$, $y = x+1$,

d) $x^2 + 4y^2 +16y +12 = 0$, $y = x-2$!

۲۴ – د هوپربول مساوات له

الف) b M(0,0) , a = 4 , e = 5 , ب) M(-3,2), b = 4 , e = 6 ,

پ) M(1,1) او هوپربولټکو $P_1(-3,1)$, $P_2(6 , 7 /4)$!

ت) a = 3 , b = 2 , x = -1 او د هوپربولټکي P(-4,-2) وټاکئ !

---

۲۵ – د هوپربولونو

a) $x^2 / 144 - y^2 / 36 = 1$, b) $9x^2 - 64y^2 = 576$

نیمحورونواوږدوالی او اسیمپتوټې راپیدا کړی !

۲۶ – د لاندې هوپربولونو منځټکي او د نیممحور اوږدوالی پیداکړی

a) $9x^2 - 64y^2 - 36x - 540 = 0$, b) $x^2 - 9y^2 + 54y - 90 = 0$,

c) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$, d) $x^2 - y^2 - 2x + 10y - 28 = 0$!

۲۷ – د لاندې مساواتو سره دکړو غوڅټکي وټاکی:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{1}{5}x$,

b) $4x^2 - 9y^2 = 144$, $x^2 - 24y = -28$,

c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, $y = -\frac{2}{3}x - 5$,

d) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 68 = 0$, $9y^2 - 36y - 72x + 8 = 0$,

e) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$, $x^2 - y^2 = 16$!

۲۸ – د لاندې پارابولونو ککرټکو اوسوزونټکو کواوردینات وټاکی:

a) $5y^2 + 4x = 0$, b) $2y - (1/2)x^2 = 0$ c) $4y + (1/3)x = 0$,

d) $2y^2 - 12x = 0$, e) $y^2 - 2y - 10x - 9 = 0$, f) $x^2 - 7x - y + 12 = 0$

g) $y^2 - 6y + 6x - 3 = 0$. h) $x^2 + 4x + 12y\ 52 = 0$

۲۹ – د پارابولمساوات له لاندې ککرټکو او سوزونټکو وټاکی:

S (0,0), F(0,1) , b) S(0,0), F(-1,0), c) S(1,1) , F(2,1),

S(-1,-1), F(-2,-1), e) S(2,-3), F(2,-2), f) S(-2,3), F(-2,2)

۳۰ – یو پارابول د ککرې پروت ارزښت $x_S = 3$ لري، کرښه $y = 8$ د محور په څ

ټکي $P(7,4)$ تیریږي. ددې مساوات څنګه دي؟

۳۱ - يو پارابول د ککرکواوردينات $y_s = -3$ لري، کرښه $x = 2$ د محور په څير او له ټکي $P(4,-4)$ تيريږي. د هغې مساوات څنګه دي؟

۳۲ - کوم پروتځاي اړيکې د

الف) پارابول $y^2 = -4x$ او کرښې $y = x-1$

ب) پارابول $x^2 = 5y$ او کرښې $y = x-4$

پ) پارابول $x^2 = -3y$ او کرښې $y = x + 5/12$

ت) پارابول $y^2 - 6x - 2y + 7 = 0$ اوکرښې $y = x$

ټ) پارابول $y^2 = 7x$ او کرښې $9x + 12y + 28 = 0$

ترمنځ پرتې دي؟

که موجود وي ، نو غوڅټکي همداسې لمستکې يې ورکړئ!

۱۷ وکتور شميرنه او په ځمککچ کی د هغه په کارونه

۱۷ . ۱ د وکتور پيژند ،

په کارتيزي کواودينات سيستم کی د وکتور انځورونه

په پيداينښتي پوهنو يا طبيعي علومو او تخنيك کی موږ لويی پيژنو چی د ريیل ارزښتونو په ورکولو سره يوائځنی ټاکلي دي، لکه وخت، ګرمي، توان ، وزن . داډول لويو ته سکالار لويې وايو .نورې لويی لکه زور ، چټکتيا(سرعت)، بيړه (تعجيل)، د برقي او مقناطيسي چاپيريالزور برسيره په ارزښت (مطلقه ارزښت) د لور ورکونه هم غواړي، په کومه چی تاسير اچوي. موږ دې لويو ته وکتورونه وايو.
د وکتور له لارې کيدی شي چی دهندسي شيانو ځان نيونه هم تشريح کړای شو. په فضا هوا کی يو ټکی کيدی شي چی د هوا کواوردينات سيستم کی د سرچينی څخه د دې ټکي په لور لوريزشوې کرښه (په دې مانا چي مطلقه ارزښت او لوری لري) تشريح کړی شي يعنی له سرچينی څخه يی په دې ټکي بريد وي يا دا ټکی په نخښه کړای شي يا يې د غشي څوکه د دې ټکي په لور لوريزه وي.

يادونه : ما وکتورونه a,b, ښوولي، ښه به يې $\vec{a},\vec{b};....$ وای، ډيرو کتابونو کې پنډ **a,b,..** ليکل شوي، خو ما د وکتور سره تل د وکتور کلمه ياده کړې، چې د ناتيکپوهنې څخه مو ژغوري٠

پیژند ۱۷ . ۱ : یوه لویه a چې د یوه مطلقه ارزښت (|a| چې داوږدوالي کچګڼ یی هم بولو) او یوې لورې له مخی ټاکل شوی وي، وکتور بلل کیږي٠

(لنډ: یوه لویه چې لور ولري، وکتور دی. موږ کړی شو چې دې لویي ته غشی هم ووابو. زه یی همدا وکتور بولم)

یو وکتور په هوا کي د یوه لور لرونکی کرښی(غشي) په څیر انځورکیدی شي. د تعریف ۱۷ . ۱ له مخی ټول مساوي اوږده او په یوه لور لوری-، لوریزې- یا لورونی کرښي همغه وکتور انځوروي، په یوه بریدټکي باندې تړل یی په نظر کي نه دي نیول شوي . سرېی ویلی شي: یو وکتور کیدی شي په هوا کی په خوښه غبرګ (موازی) وخوځول شي یا راکښل شي، موږ په راتلونکي کی د داسی ازادو وکتورو سره سر او کار لرو. نورې په وکتور انځور شوې لویي، بر سیره په مطلقه ارزښت او لور، په نورو ټاکونټوټو هم اړه لري. د بیلګي په توګه یوه قوه یا زور د همغه خپل تاثیرلیکی یا بهتره برید لیکی په اوږدوالي له یوه ځایه بل ته راکښل کیدی شي(په غبرګ یا موازی راکښنون یی تاثیر تغیر کوي) دلته په لیکه راکښونکو وکتورو باندې غږیږو. هغه یو ټکی انځورونکی وکتور په کواوردیناتسیستم په سرچینې (د برید - یا حملی ټکی) پورې تړلی. داسی وکتورونه ځاي وکتورونه(په ځاي تړلي -) بلل کیږي .ځنی په لاندې کی د فرمول بندي شوې شمیرقاعدې له مخې کیدی شي دې ډول وکتورونو ته هم پراخه شي.

پیژند ۱۷ . ۲ :

دوه وکتورونه **a** او **b** برابر بلل کیږي　　**a** = **b**

که دواړه وکتورونه په مطلق ارزښت او لور یو په بل سر وخوري یا پریوځي.

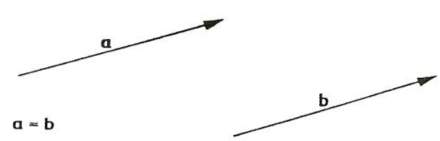


Bild 17.1

ټولي برابرې اوږدې او برابرې – یا همغه لوریزې کرښی، لکه چې وویل شو همغه وکتور ښایی.

پیژند ۱۷ . ۳ :

یو وکتور **a** د مطلقه ارزښت 0=|**a**| سره 0 یا صفر وکتور بلل کیږي. صفر وکتور لور نه ټاکي یا تعینوي. یو وکتور **ea** چی د a لور او مطلقه ارزښت 1=|**e**|لري، نو په وکتور a پورې اړوند یوونوکتور(۱) بلل کیږي.

(1)Einheitsvektor,unit vector یوونوکتور یاني ارزښت یې یو یوون دی یا واحدوکتور(؟)

پیژند ۱۷ . ۴ :

دوه وکتوره اورتوګونال (Orthogonal) بلل کیږي، که دوي یو په بل نیغ ولاړ (عمود) ولاړ وي، کولینیار(kollinear) بلل کیږي، که دواړه د همغی یوې کرښې سره غبرګ وي، کومپلانار (komplanar) بلل کیږي ، که د همغي یوې هوارې سره غبرګ وي.

د وکتورونو سره شمیرلو لپاره باید مطلقه ارزښت او همدارنګه لور شمیرنیز ډوله لاس ته راوړل شي. ددې لپاره یوه نسبي سیستم ته اړتیا حس کیږي، دلته هوایي یا فضایي کارتیزي کواوردینات سیستم استعمالیدی شي. د کواوردینات سیستم انځورونولپاره لاندني روښانه ونې یا توضیحات یعنی د وکتور ځله ونه یاضرب د یوه ریبل ګڼ سره او د وکتورونو زیاتون مخ ته پراته دي.

پیژند ۱۷ . ۵ :

د یوه وکتور ځله ونه یا ځل د یوه سکالار سره:

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}, \lambda \in R$$

یو وکتور دی چی د $|\lambda|$ - ځله دa مطلقه ارزښت لري او د $0 < \lambda$ لپاره همغه لور لري لکه a، په ښڅ یا برعکس که $\lambda < 0$ وي نو د a مخامخ لور یا په ښڅ لور لري

جمله ۱۷ . ۱:

د ریبل ګڼ سره د وکتور د ځل د شمیرقاعدې

کوموتاتیف قاعده،اسوشیاتیو ضانون او د صفر وکتور سره ځل

$$\lambda.\vec{a} = \vec{a}.\lambda; ....Kommutativ$$

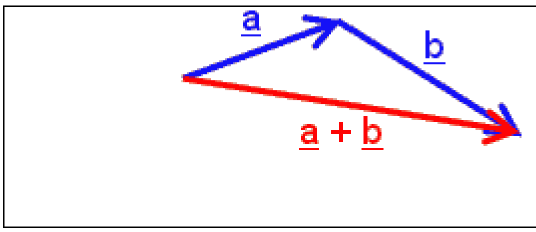
$$\lambda(\mu.\vec{a}) = \eta(\lambda.\vec{a}) = \lambda\mu.\vec{a}; ....Ass.$$

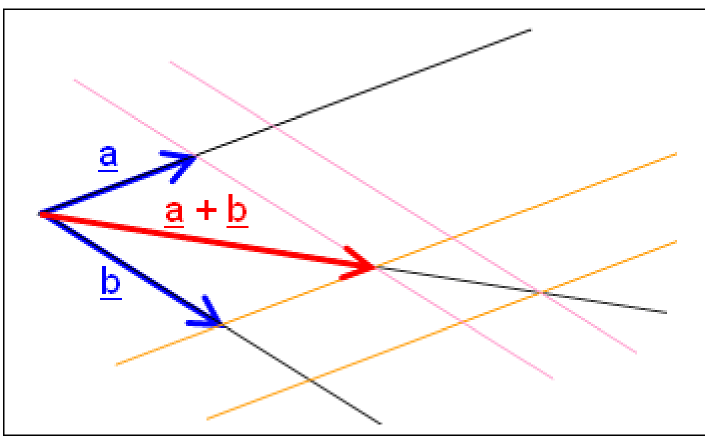
$$|\lambda.\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|, 0.\vec{a} = \vec{0}, \vec{0} = 0$$

ددې ځل یاضرب د پیژند سره ممکن کیږي چی هر وکتور a د یوه رییل ګڼ (ددې وکتور مطلقه ارزښت) او په هغه پورى تنظیم یا ترتیب شوی یوونوکتور د ځل په ډیر انځور کړو: $a = |a|.e_a$

پیژند ۱۷ . . ۶ :

(د وکتورونو زیاتون)
د دوه وکتورونو a , b زیاتون (جمع) a+b د دواړو وکتورونو a او b څخه غزیدلی غبرګ اړخیزې(موازي الاضلاع) لوریز دوه کونجتړې (قطر) ده. ډیره . ۱۷ ۲)

	د وکتورنو زیاتون (جمع) د قوو یا زورونو د زیاتون په ځیر دی او دا د شمیر قاعده ساده د لیدو کیدی شي

	ډیره شته دغبرګ اړخیزه پورته نیمه یا له تعریف ۱۷ . ۶ څخه پورته ډیره یا مخامخ ډیره

جمله ۱۷ . ۲ :

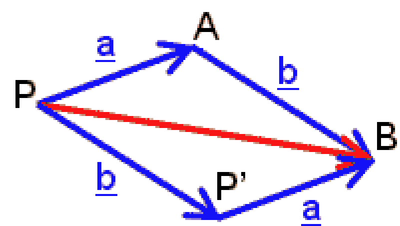
(د وکتورونو د جمع لپاره د شمیرقاعدې)
$a+b=b+a$ (کوموتاتیف قاانون)
$(a+b)+c=a+(b+c)$ (اسوسیاتیف قانون)

دیستریبوتیوو او وربسي یه لاندې نظم اړیکي

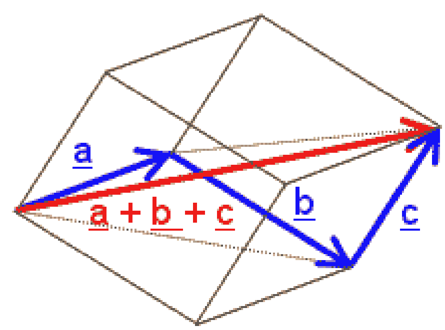
$$(\lambda+\mu).\vec{a}=\lambda.\vec{a}+\mu.\vec{a};...........Distrib.$$

$$\mu(\vec{a}+\vec{b})=\mu.\vec{a}+\lambda\vec{b};...........Distr.$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$$



د زیاتون دې قانونو سره موږ ته ممکن کیږي چی هر وکتور، د بیلګي په توګه د وکتورونو د کواوردینات محور په لور ښودونکو وکتورونو د زیاتون په څیر انځورکړای شو یا ولیکو. په دې ډول بریالي کیږو چی دواړه د وکتورونو لپاره موخه وره یا هدفمنده شمیرنه په کواوردینات سیستم کی انځور کړو



پورته څیره کي د درې وکتورونو زیاتون

پیژند ۱۷ . ۷ :
په کواودینات سیستم کی د وکتور a انځورونی لاندې
a=(a1,a2,a3)   (17 . 1)
موږ په یوه ولاړکونجیز
-x1 , x2 , x3
کواوردینات سیستم کی د وکتور انځوره ونه پوهیږو، د نخښی یا مخ نخښی په نظر کي

نیولوسره او د ai پرویکشن یا پریوستون له لارې په هر xi - محور(i = 1 , 2 , 3)

پرویکشن (Projection) د دوه اړخونو لپاره انځورونه (په څیره ۱۷ . ۳ کی)
داسی ai د a وکتور i - م کواوردینات بلل کیږي

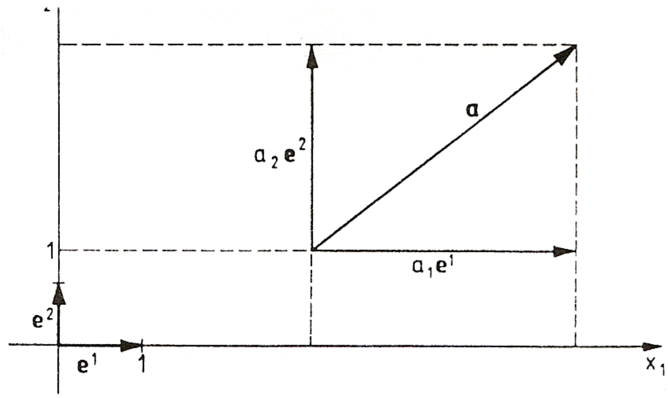


Bild 17.3 څېره

یادونه:
موږ دلته که د وکتورونو پورته ځه لیکو نو هغه د وکتور پوتنځ په مانا نه دی بلکه هغه وکتور ښايي چی په کومه کواوردینات اړه لری. دلته د لیکنی له لورې پوره جوت دی. د xi- محورونو په لور په کواوردیناتشکل د یوونوکتورونو څرګندونه په لاندې ډول ده

$$e^1 = (1 , 0 , 0)$$
$$e^2 = (0 , 1 ,0) \qquad (17 . 2)$$
$$e^3 = (0 ,0 , 1)$$

د وکتور aانځورونه د کواودیناتو $a^i; i = 1 , 2 , 3,$ او د یوونوکتورونو(۱۷ . ۲) د استعمال له لارې، د تعریفونو ۱۷ . ۵ او ۱۷ . ۶ په بنسټ د کمپوننتو له لارې یا مرسته لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۳: (د کمپوننتو (جوړختبرخو) له لارې د وکتور a انځورونه)
لرو:

$$\vec{a} = a_1\vec{e^1} + a_2\vec{e^2} + a_3\vec{e^3};............................(17,3)$$

د دوه پراخیدونې یا دوه بعدیز یا دوه دیمنزیون انځورونه. (څېره . ۱۷ . ۳)
دلته, $a^i e^i$ چی i=1,2,3 وي، د a وکتور i - م کمپوننت یا جوړخت برخه بللکیږي
د جملو ۱۷ . ۲ او ۱۷ . ۳ په مرسته کیدی شي لاندې جمله لاس ته راشی:

جمله ۱۷ . ۴:

د رييل ګڼ سره د يوه کتور ځله ونه او يا د وکتورونو زياتون کواوردينات ډوله يا په ځير صورت نيسي، دا په دې مانا چې لاندې باوري کيږي::

$$a=(a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\mu a = (\mu a_1, \mu a_2, \mu a_3) \qquad (17.4)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3) \qquad (17,5)$$

بيلګه ۱۷ . ۱ :

د($a=(-2,3,-5)$, $b=(1,-6,4)$ لپاره لرو

$2a+3b=(2-2,3,-5)+3(1,-6,4)=(-1,-12,2)$.

د وکتورونو کمون د وکتورونو د زياتون په ځير (تعريف ۱۷ . ۶) صورت نيسي يا ځان نيسی

پيژند ۱۷ . ۸ :

د a - b کمون يا کمښت د وکتور a او وکتور b ته مخامخ - يا په څټ وکتور يعني -b زياتون دی: $a-b=a+(-b)$ (څېره۱۷ . ۴)

له تعريف ۱۷. . ۸ لاس ته راځي : وکتور a ، کوم چې له $x1$ ټکي x^2 ټکی ښايي (د دوه اړخؤنويا بعدونو انځورونی لپاره .ش ۱۷ . ۵) داسی دی

(پاي ټکی ترې کم پيل ټکی یانې د پايټکي او پيلټکی کمښت): $a = x^2 - x^1$

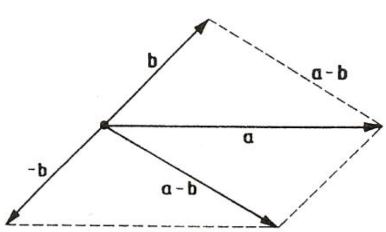


Bild 17.4 څېره

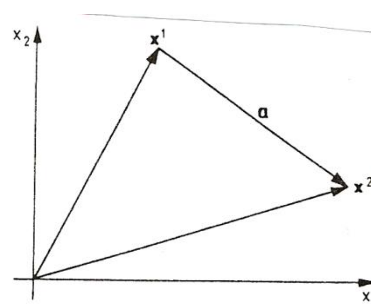


Bild 17.5 څېره

بيلګه ۱۷ . ۲:

هغه وکتور چی له $x^1 = (-1,-3,1)$ ټکي څخه($x^2=(2,-1,5$ ټکی ښايي(په ګوته کوی یه ګوتنیوونی کوي) داسی دئ :

$$a = x^2-x1 =(2,-1,5)-(-1,-3,1)=(3,2,4).$$

۱۷ . ۲ د دوه وکتورنو سکالار ځله ونه یا ضربونه

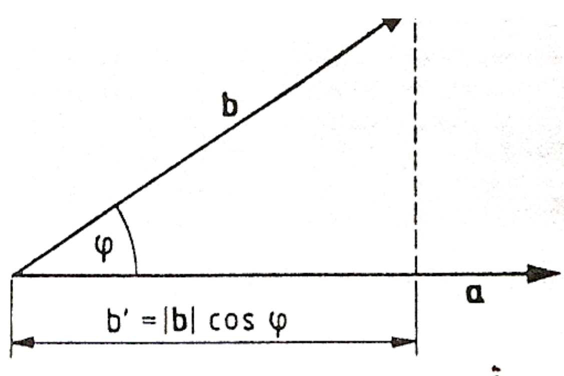
پيژند ۱۷ . ۹ :

د دوه وکتورونو a , b سکالار ځل a . b د دواړو وکتورنو د مطلقه ارزښت او له دي دواړو وکتورونو منځ ته راغلی کونج کوساین ځل یا ضرب دی، یانې

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi; ....(17,7)$$

د سکالار ځل یا ضرب نتيجه سکالار ده

په (۱۷ . ۷) کی فاکتور $\vec{b}' = |\vec{b}|.\cos\varphi$ په هندسی مانا د (مخ) نخښني ساتلو سره (د کوساین د پيژند له مخی) په وکتورa دوکتور b پرویکشن یا پریوتل یا پریيستل دي (ځیره ۱۷ . ۶)



په فزيك کی د سکالار ځل یا- ضرب بيلګه :

که a هغه لار وي چی د هغي په اوږدوالی د b زور تاثير اچوي، پس A = a. b له دې زور له لارې کړ شوی کار ښايي) د لار اوږدوالی چي د لار په لور د زور د پرويکشن سره ځل دئ) .

جمله ۱۷ . ۵ : (د سکالار ځل شمیرقاعدې)

a.b=b.a (کوموتاتیو قاون)

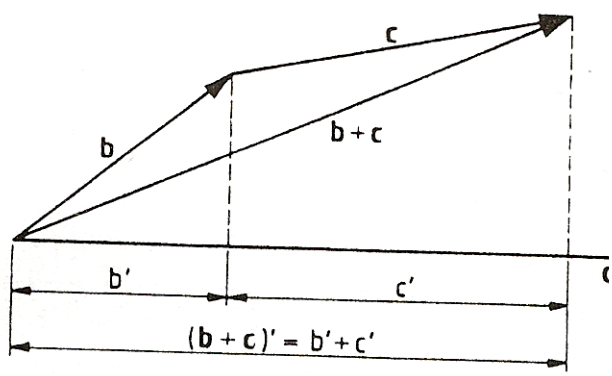
a(b+c)=a.b+a.c (دیستریبوتیو قانون)

a.b=0 که a اوb یوپه بل اورتوګونال یا عمود وي (۱۷ ، ۸)

$a.a=|a|^2$ (17 . 9)

د پورته شمیرقاعدو جوتونه: کوموتایو قانون د (۱۷ . ۷) پسی ترلی لاس ته راځي.
دیستریبوریوقانون په (ځیره ۱۷ . ۷) کی لیدل کیږي.

د اورتوګونالوکتورونو لپاره باور لري: که $a.b = 0$ نو $\cos\alpha = 0$ او(۱۷ . ۸)
له (۱۷ . ۷) څخه لاس ته راځي .
همداډول (۱۷ . ۹) له (۱۷ . ۷) او داچی $\alpha = 0°$ د a او a ترمنځ دی(، نو لاس ته راځي $\cos\alpha = 1$



پورته ځیره ۱۷ . ۷

جمله ۱۷ . ۶ :
د دوه وکتورونو سکالار ځل کواوردیناتډوله صورت نیسي یعني د
a = (a1 ,a2 ,a3), b = (b1 ,b2 ,b3)
د ځله ونی یا ضرب څخه لاس ته راځي :

a.b=a1b1+a2b2+a3b3 (17 . 10)

اوبیونه : د یوونوکتورونو (۱۷ . ۲) لپاره لاندې باور لري

د (۹ . ۱۷) سره سمر د i = j لپاره $e^i.e^j = 1$ د(۹,۱۷) سره سم د j =|iلپاره $e^i.e^j = 0$ له دې لاس ته راځي:

$$\vec{a}.\vec{b} = (a_1e^1 + a_2e^2 + a_3e^3)(b_1e^1 + b_2e^2 + b_3e^3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

يادونه : د لته د وکتورونو په تواندول چی څه ليکل کيږي د توان مانا نه لري په يوونوکتورونو کي ددې لار ې ښوول کيږي چي دا دکوم کواودينات يوون وکتور دئ او د نورو وکتورنو لپاره دا مانا لري چي کوم يو وکتور مو مطلب دئ او نه چی په کوم توان . دې ته د مخه هم گوته نيول شوې ده.

بيلګه ۱۷ . ۳ :

وکتور(a=(2,-3,1 دي له لاندې وکتورونو سره ځل شي

a) b1=(3,1,4),b) b²=(3,2,-2), c) b³=(3,3,3)

اوبنونه يا حل: بيا يا انينترنيت

a) a . b1 = 2.3 - 3.1 + 1.4 = 7

b) a . b² = 2.3 - 3.2 +1.(-2) = -2

c) a . b³ = 2.3 - 3.3 +1.3 = 0

دلته c (په دې مانا ده چی وکتورونه a او b³ اورتوګونال يا عمود دي ددې لپاره ليکو:

$a \perp b^3$

جمله ۱۷ . ۷:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};............................(17,11)$$

اوبيونه : له (۱۷ . ۱۰) لرو : $a . a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

بيلګه ۱۷ . ۴ :

د وکتورونو(a=(2,-3,1) , b=(3,0,-4 مطلقه ارزښت (اوږدوالی) دئ

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+0+16} = 5; |\vec{a}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{4}$$

جمله ۱۷ . ۸ :

د دوه وکتورونو aاو b ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کيږي

$$\cos\phi = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};................(17,12)$$

اوبیونه یا حل : (۱۷ ، ۱۲) له (۱۷ . ۷) ، (۱۷ . ۱۰) او (۱۷ . ۱۱) څخه لاس ته راځی

بیلګه ۱۷ . ۵ :
په بیلګه ۱۷. . 3کی د $\vec{a} \wedge b^1, b^2, b^3$ تر منځ کونجونه د شمیرلو دي.
اوبیونه:

$$\phi_1 = \measuredangle (\vec{a}, \overrightarrow{b^1}) = \frac{2.3 - 3.1 + 1.4}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+1+16}} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{26}} = 0,3669; \phi_1 = 68,48°$$

$$\phi_2 = \measuredangle (\vec{a}.\overrightarrow{b^2}) = \cos\phi_2 = \frac{2.3 - 3.2 + 1(-2)}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+4+4}} = \frac{-2}{\sqrt{4}\sqrt{17}} = -0,1296, \phi_2 = 97,45°$$

$$\phi_3 = \measuredangle (\vec{a}.\overrightarrow{b^3}) = \frac{2.3 - 3.3 + 1.3}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{9+9+9}} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}} == 0, \phi_3 = 90°$$

۱۷ . ۳ د دوه وکتورونو وکتوري ځلونه یا ځل

پیژند ۱۷ . ۱۰:

ددوه وکتورونوa,bکتورځل یا وکتوریز ځل یو وکتورc دی د کوم لپاره چی لیکو
$a \times b = c$ او لاندې خویونه لري:
۱ - د c مطلقه ارزښت دی

$$|c| = |a||b|.\sin\phi; ....(17,13)$$

دا دهندسي له مخی د a او b وکتورونو لخوا غزیدلي غبرګ اړخیز منځهواري په مانا دی.(خ. ۱۷ . ۸)
۲- د c وکتور a او b باندې نیغ ولاړ یا اورتوګونال دی.
۳– دلته a , b , c یو ښي سیستم جوړوي، دا په د مانا چی که دښي لاس غټه ګوته او د ښوولو ګوته د aاوbلور وښايي نو کونججوړونکي د منځ ګوته دوکتورc-
لور ښايي (څیره ۱۷ . ۹)

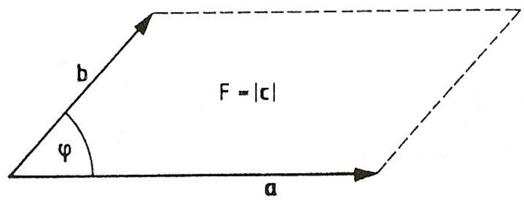


Bild 17.8

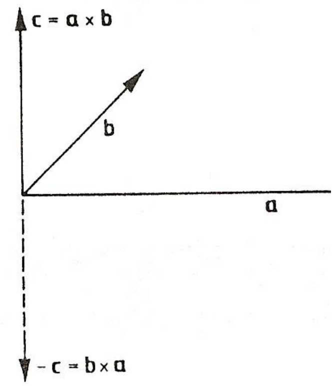


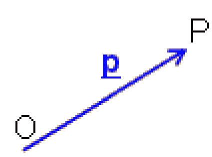
Bild 17.9

دا لاندې ښيرې د فرمولونو سره موږ ته ټکی، کرښه او هواره را په ګوته کوي او د یوه وکتور مطلقه ارزښت.

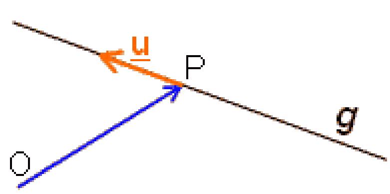
$$|\underline{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$$

ټکی $P(p_1|p_2|p_3)$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

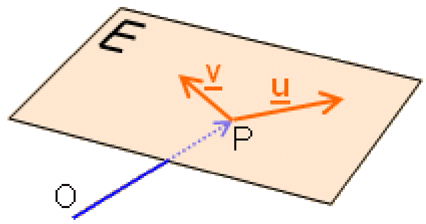


کرښه g



$$g: \underline{x} = \underline{p} + t \cdot \underline{u}$$

هواره E



E: $\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{p}} + r\cdot\underline{\mathbf{u}} + s\cdot\underline{\mathbf{v}}$

وکتورځله ونه یا وکتور ځل یواځي د دری اړخیزي هوایا فضا لپاره تعریف دی.

د وکتورځل بیلګه په فزیك کی :

که F قوه یا زور وي چي په یوه کلك ځرخیدونکي بدن (جسم) د Q په ټکي د r په مرووند چی د r سره کونج جوړوي، برید یا حمله کوي او هغه د P په ټکي ځرخوي (څیره ش.
۱۷ . ۱۰) نو ځرخون مومنتDrehmoment منځ ته راځي $M = r \times F$

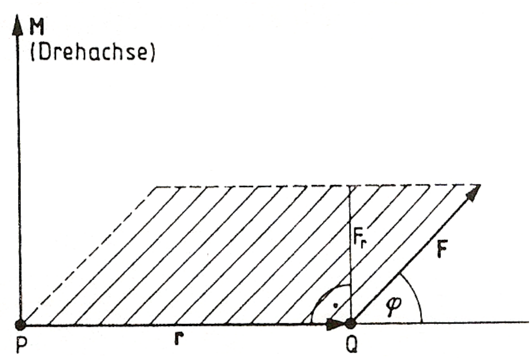


Bild 17.10

د مطلقه ارزښت له مخی د ځرخونمومنت د اوږدوالی | r | د اړم مټ او مطلقه ارزښت
$F_1 = |F|\sin\phi$

چی د اړم په مټ (نیغ) ولاړ د قدرت یا قوت زور کپوننت (جوړونکی) دی:
$M = |r||F|\sin\phi$

جمله ۱۷ . ۹: (د وکتورضرب لپاره د شميرقاعدې)

$$a \times b = - b \times a \qquad (17 . 14)$$

ديستريبوتيو قانون)

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c) \qquad (17.15)$$

$a \times b = 0$ د کولينيار وکتورونو لپاره) (17 . 16

د پورته شميرقاعدو ښه څرگندونه يا توضيح : (۱۷ . ۱۴) د غوښتونکي ښي سيستم له مخې (پيژند .۱۷ . ۱۰ ،څ. ۱۷ . ۹)

د کولينيار وکتورونو لپاره $\phi = 0$ پس لرو: $\sin\phi = 0$ له دې سره د (۱۷ . ۱۳) له مخې (۱۷ . ۱۵) لاس ته راځي. په ديستريبوتيو قانون په ليدنوالي (پيچي دئ) دلته صرف نظر کيږي، ليدوړ والی يی نه څرگندوو. د وکتورځل شميرلو لپاره د وکتورکواوردیناتږولو ښودنی سره د يوون وکتورونو e^1 , e^2 , e^3 وکتورځل ته اړيو.د (۱۷ . ۱۵) شمير قانون له يوې خوا او له بلی خوا د وکتور ځل پېژند ۱۷ . ۱۰ څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۱۷ . ۱۰ (د يوونوکتورونو وکتورځل)

$$e^i \times e^i = 0, i = 1,2,3; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17,16)$$

$$e^1 \times e^2 = e^3, e^2 \times e^3 = e^1, e^3 \times e^1 = e^2; \ldots\ldots\ldots(17,17)$$

$$e^2 \times e^1 = -e^3, e^3 \times e^2 = -e^1, e^1 \times e^3 = -e^2; \ldots\ldots\ldots(17,17)$$

د دريمی درجی ديترمينانت کليمی لاندې (پېژند۱۱ . ۲) او که څوك يوون وکتورونه د ديترمينانت د توکو په څير ومنلی شي، کيدی شي چی د وکتورځل a×b د a , b کواوردیناتو په څير انځور شي

جمله ۱۷ . ۱۱ : د وکتورونو

$$b =(b1,b2,b3),a=(a1,a2,a3)$$

وکتوريز ځل يا وکتوري ځله ونه په لاندې کې د ماتريکس په توگه ده:

$$a \times b = \begin{bmatrix} e^1 e^2 e^2 \\ a_1 a_2 a_2 \\ b_1 b_2 b_3 \end{bmatrix}; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17,18)$$

اوبیونه یا حل : د وکتور $a=(a_1e^1+a_2e^2+a_3e^3)$ ځل د وکتور
$b=(b_1e^1+b_2e^2+b_3e^3)$

د توکوډوله(توګي په توکي) وکتوري ځل د جملی ۱۷ . ۱۰ کارونه، دا لاندې ورکوي
$$a\times b=e^1(a_2b_3-a_3b_2)+e^2(a_1b_3-a_3b_1)+e^3(a_1b_2-a_2b_1)$$
دا ضرب ارزښه یه دا لاس ته راوړنه یا نتیجه د دیترمینانت (۱۸ . ۱۷) د شمیرلواود پېژند ۱۱ . څخه هم ترلاس راځي

بیلګه ۱۷ . ۶:
a × b دې وشمیرل شي، که وي
الف) a=(-2,1/2,-1), b=(1/2,-2 ,1)
ب)
$$a=e^1-3e^2+e^3, b=-e^1-2e^2+3e^3$$
اوبیونه یا حل الف) ب) د دې بیلګې اوبیونه دې ګان لستونکي او مینه وال په غاړه واخلی، دا له مخه تیرې جملي له مخی پوره روښانه دی۰
وکتوري ځل د خپل مطلقه ارزښت (۱۷ . ۱۳) هندسي اهمیت په بنسټ د وکتورونو a , bڅخه خورې شوې منځهوارې Fp غبرګ اړخیز ه همداډول د a او b څخه خورشوي یا غزیدلي دریګوډی منځهوارې FD شمیرلو لپاره خورا مساعد دی . باور لري
$$F_P=|a\times b|; F_D=\frac{1}{2}|a\times b|; ....(17,19)$$

بیلګه ۱۷ . ۷ :

د وکتورونو(a=(1,1,0) , b=(2,0,1 څخه خورې شوې هوارې منځ یا دننه په لاندې ډول ده
$$a\times b=\begin{vmatrix} e^1e^2e^3 \\ 110 \\ 201 \end{vmatrix}=(1,-1,-2), F_P=|a\times b|=\sqrt{1^2(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

بیلګه ۱۷ . ۸ :

د دریګوډې ABC منځهواره (د هوارې دننه) دې وشمیرل شي چې کونجتکي یي وي :

A=(2,1,1) , B=(4,0,0) , C=(1,-1,2)

ابیونې :

دریګوډې له لاندې وکتورونو څخه غزیږي

a=B-C=(3,-1,-2),

b=A-C=(1,2,-1) او

د a او b وکتوري ځل په لاندې ډول دی

$$a \times b = \begin{vmatrix} e^1 e^2 e^3 \\ 31-2 \\ 12-1 \end{vmatrix} = 3e^1 + e^2 + 5e^3 = (3,1,5)$$

د درېګوډې ABC د هوارې دننه یا منځهواره په لاندې ډول ده

$$F_D = \frac{}{2} | a \times b | = \frac{1}{2}\sqrt{3^2+1+5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{35}$$

۱۷ . ۴ شپات ضرب (غبرګهواریزځل موزی سطحیز ضرب)

یادونه : دا یو شپږ خواییز تن دی چې مخامخ هوارې یی سره غبرګی او یو په بل ضرور نیغ ولاړ نه وي . لاندې شکل ۱۷ ۱۱. یی بیلګه او د مسئلی دحل انځورونه ده

پیژند ۱۷ . ۱۱ :

د درې وکتورونو غبرکهواریز ځل یا شپاتځل[a , b , c] لاندې ځل یا ضرب دی

[a,b,c]=(a×b) (17 . 20)

دلته وکتورونه a او b وکتوریز ځل کیږي او نتیجه یي بیا د cسره سکالار ځل کیږي، یعنی لاس ته راوړنه یا نتیجه یي سکالار ده.

غبرکهواریزځل ځمککچیز هندسي لیدونکی اهمیت لري. د سکالارځل (پیژند ۱۷ . ۹) سره سم باور لري

$$\left[a,b,c\right]=(a\times b).c=|a\times b|.c=|a\times b|.|c|.\cos\alpha$$

دلته الفا د وکتورونو a × b او c څخه رابند شوی کونج دی .(څیره ۱۷ . ۱۱)

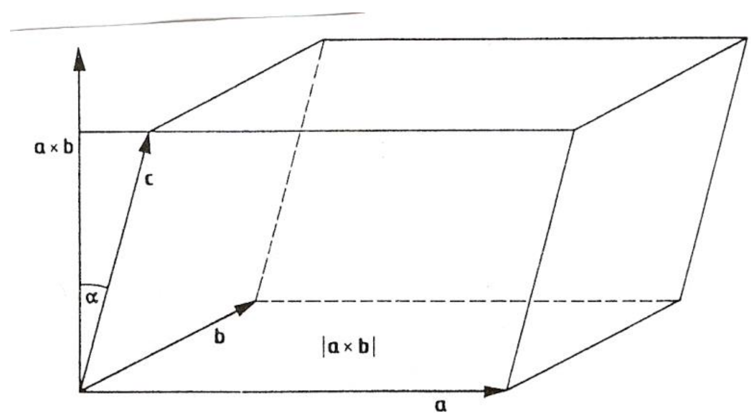


Bild 17.11

دلته د وکتورځل تعریف سره سم (پیژند ۱۷ . ۱۰) |a×b| د a او b غزیدلي غبرگ اړخیز دی . برسیره پر دې $|c|.\cos\alpha$ پرتله برخه ۱۷ . ۲ (په وکتور a×b باندې د وکتور c پروجکشن یا پریوستون په مانا دی. یعني د a,b او c څخه غزیدلی غبرگهوارې یا

شپات جگوالی ښایي. پس[a,b,c] هندسي د وکتورونو a,b,c څخه غزیدلي غبرکهواریزې ډکي (حجم) په مانا دی.
دغبرگهواریز په مطلقه ارزښت (د غبرگهواریز ډکي یا-حجم) کی تغیر نه راځي که چیرې د وکتورونو پرلپسی ترتیب بدل شي. د غبرگهواریزې ډکی زیاتیز یا مثبت دی، که ورکړ شوي ترتیب یو ښی- سیستم جوړ کړی٠

جمله ۱۷ ۱۲۰:

$$[a,b,c\,] =[b,c,a] = [c.a.b]=-[a,c,b]=$$
$$=-[c,b,a]=-[b,a,c] \quad (17 . 21$$

که وکتورنه په یوه هواره کی پراته وي)کومپلانار وي(نو یو شپات د صفر جگوالي سره لاس ته راځي. نو بیا لاندې جمله باور لري

جمله ۱۷ . ۱۳:

(22 . 17) د کومپلانار وکتورونو لپاره باور لري$[a,b,c]=0$

د غبرګهواریز یا شپاټ ځل شمیرلو لپاره د وکتورونو په کواوردیناتتوګه انځورونه بیرته دیترمینانت انځورونه په کار اچول کیږي

جمله ۱۷ . ۱۴:

د وکتورونو
$a=(a1,a2,a3),b=(b1,b2,b3),c=(c1,c2,c3)$
غبرګهواریز ځل په لاندې ډول دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 b_2 b_3 \\ c_1 c_2 c_3 \end{vmatrix};.........(17,23)$$

اوبیونه : وکتور ځل $a\times b$ د جملی ۱۷ . ۱۱ سره سم لاندې اوبیونه لري
$a.b=(a_2b_3-a_3b_2)e^1-(a_1b_3-a_3b_1)e^2+(a_1b_2-a_2b_1)e^3$
د $a \times b$ سکالارځل د c سره کواوردیناتډوله په لاندې توګه صورت نیسي.
$(a\times b).c=[a2b3-a3b2,-(a1b2-a2b1),a1b2-a2\ b1].(c1,c2,c3)$
$= c1(a2b3-a3b2)-c2(a1b3-a3b1)+c3(a1b2-a2b1)= a1(b2c3-b3c2)-a2(b3c1-b1c3)+a3(b1c2-b2c1)$
دا نتیجه د دیترمینات (۱۷ . ۲۳) شمیرلو له لارې هم لاس ته راځي.

بیلګه ۱۷ . ۹:
د وکتورنو$a=(0,1,2)$, $b=(2,0,1)$, $c=(1,1,0)$
غبرګهواریز - یا شپاتځل$[a,b,c]$ په لاندېډول دی:

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix} 012 \\ 201 \\ 110 \end{vmatrix}=0(0-1.1)-1(0-1.1)+2(2.1-0)=5$$

بیلګه ۱۷ . ۱۰:
وکتورونه(a=(1,2,3) ,b=(3,6,1), c=(0,0,1کومپلانار دې او شپاتڅل يې په
لاندې ډول دی(دا اوبیونه دې ګران لوستونکي او مینه وال په غاړه واخلي)

بیلګه ۱۷ . ۱۱ :
د تیترایدر(دریګوډي اړخیزه ، لاندې شکل دی) ډکی(حجم) دې وشمیرل شي
(څیره. ۱۷ . ۱۲)

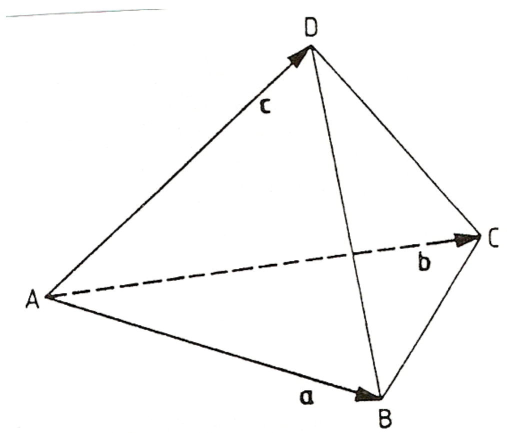


Bild 17.12

د لاندې کونجټکو یا ګوډټکو سره
A=(1,1,0) , B=(2,0,1)
C=(3,-1,2) , D=(1,0,3)

یادونه : دا پورته په ختِه کې ککرټکي دي، څکه چې دا څېره څلور ککرې لري
اوبیونه : دا غوښتونکی ډکی د لاندې وکتورونو څخه خور تیترید ۶/۱ برخه ده
a=B-A=(1,2,0),b=C-A=(2,1,0) , c=D-A=(0,1,2)
دا تیترئیدر یو اهرام دی چې ډکی یا حجم یی ۳/۱ ځل بنسټیزهواره ځل جګوالید تیترائند
جګوالی د شپاټ جګوالي سره مساوي دی او د دریګوډیهواره یی د شپاټ نیم د وکتورونو
a , b , cکمیز یا منفي دی

$$[a,b,c]=\begin{vmatrix}110\\201\\012\end{vmatrix}=-5$$

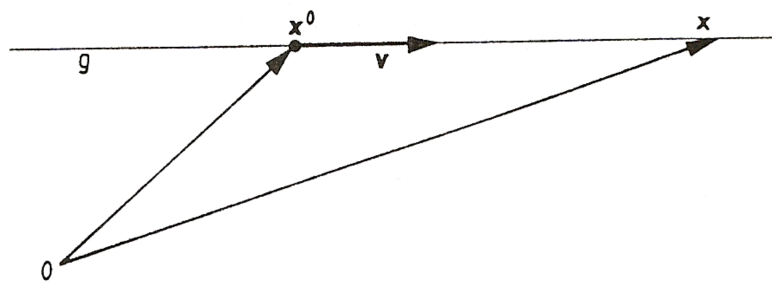
د کچګڼ لپاره مطلقه ارزښت نیول کیږي: V=(1/6).|[a,b,c]|=5/6

۱۷ . ۵ په شننیزه (تحلیلي) څمککچ کی د وکتورونو کارونه

په دې برخه کی څموږ هدف دئ چی وګورو چی د تحلیلي هندسی پرابلمونه او بیا په ځانګړي ډول تحلیلي هندسي په هوا کی وکتوري مطالعه) د ۱۶ -برخي سره په توپیر(څنګه کیږي٠

۱۷ . ۵ . ۱ د یوې کرښی وکتوریزه انځورونه

په فضا یا هوا کي د یوې کرښی ځای د یوه ټکي او لور له لاری یواځنی ټاکلی دئ. په کرښه ودې نښتی ټکی د ځاي وکتور x0 په مرسته (چی د کواوردینات سیستم د O څخه دا ټکی ښايي)، لور یي په وکتور V (څیرې۱۷ . ۱۳



څیره ۱۷ . ۱۳

که λ یو پارامتر وي چی د ریيلګڼونو ډیری کی ځغلي، نو د کرښی g یو په زړه پور ټکی x د وکتور زیاتون یا - جمع له لارې په لاندې فورم (بڼه) ښوول کیږي

$$x=x^0+\lambda.v,-\infty<\lambda<\infty;......................(17,24)$$

د وکتور v په لور په ټکي x0 کی د کرښی g برابرون (پارامتر فورم)

که پارامتر λ په ریل ګڼونو کی وځغلي نو x د کرښی ټولو ټکو کي یا د ټکو ترمنځ

ځغلي. د هر ټکي $x \in g$ لپاره يواځني يوه $\lambda \in R$ شته يا موجود دهوکتور مساوات (۱۷ ، ۲۴) لاندې درې سکالار برابرونونه نه دي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda.v, x_2 = x_2^0 + \lambda.v, x_3 = x_3^0 + \lambda.v; ....(17,25)$$

که کرښه g په دوه ټکو $x0, x^1$ ورکړ شوې وي، نو د لور وکتوریی دی $v = x^1 - x^0$ او په دې ډول يې د کرښې برابرونونه دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0); ....(17,26)$$

بېلګه ۱۷ . ۱۲ :

په لاندې ټکو($x^1=(1,3,2), x0=(1,2,3$ ورکړ شوې کرښه د $(1 -) = (0,1,-1) = v = x^1 - x^0$ له امله په لاندې توګه ليکل کيږي

$$x = x^0 + \lambda.v = (1,2,3) + \lambda(0,1,-1)$$

دا لاس ته راوړنه يا نتيجه موږ ته لاندې درې سکالار برابرونونه په ګوته کوي

$$x_1 = 1, x_2 = 2 + \lambda, x_3 = 3 - \lambda$$

دکرښی برابرونونو (۱۷ . ۲۴) پارامترفورم په هواره کی د کرښي ځانګړی حالت خوندي لري: x,x0 او v وکتورونه دي، هر يو د دوه کومپوننتو سره.

بېلګه ۱۷ . ۱۳ :

په يوې هوارې کي د يوې کرښي د مساواتو فورم:

$x = (1,2) + \lambda(1,-1)$ سکلار برابرونونه په ګوته کوي. $x_1 = 1 + \lambda, x_2 = 2 - \lambda$

له دې څخه سرې کولی شي چې پارامتر λ له منځه يوسي:

$$\lambda = x_1 - 1, x_2 = 2 - (x_1 - 1) = 3 - x_1$$

که د x1 په ځاي x او د x2 په ځاي y وليکو نو لاس ته راځي$y=-x+3$ د

کرښي د برابرونونو نورمال فورم (16 . 2 .) که غواړو چې معلومه کړو چې ايا ټکی x^1 په کرښه g پروت دی، نو بايد وڅيړو چې کواوردينات يی برابرون (۱۷ . ۲۵) پوره کوي، که نه. دا په دی مانا چی ايا دده لپاره يو د λ - ارزښت موجود دی .

بیلګه ۱۷ . ۱۴ :

لاندې ټکي $1)...x^1=(-1,4,3), 2)...x^2(2,-2,1)$ په کرښه $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,2,1)$ پراته دي که نه ؟

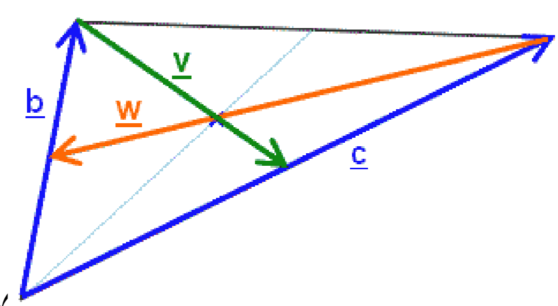
اوبیونه : ۱) د دې درې برابرونونو $-1=1-\lambda, 4=0+2\lambda, 3=1+\lambda$ له جملې د دوهم څخه لاس ته راځي $\lambda=2$ او دا ارزښت لومړی او هم دریم مساوات ډکوي) پوره کوي $-1=1-2, 3=1+2$ له دې امله ټکی x^1 په کرښه g پروت دی.

۲) ددې درې برابرونونو $2=1-\lambda, -2=0+2\lambda, 1=1+\lambda$ له دویم لرو $\lambda=-1$ دا ارزښت لمړي مساوات پوره کوي، مګر دریم مساوات نه: پس x^2 په کرښه g نه دی پروت.

که د دوه کرښو $g_1: x=x^1+\lambda v; g_2: x=x^2+\mu w$ غوڅټکی xS ، موجود وي باید د دواړه کرښو مساوات پوره کړي. په دې مانا چې باید باوري شي:

$$x_S = x^1+\lambda v = x^2+\mu w$$

دا وکتوربرابرون درې سکالار برابرونونه دي چې د هغو له دوه وو څخه سړی پارامتره $\mu \wedge \lambda$ شمیرلی شي. که لاس ته راغلي ارزښتونه دریم مساوات پوره کړي، نو یو پریټکی مخ ته شته، که ناپای زیات حلونه مخ ته پراته وي ، نو دواړه کرښې یو په بل پرتې دي.



بیلګه ۱۷ . ۱۵ : د لاندې کرښو غوڅټکی دې پیدا شي :

$$g_1: x=(1,1,0)+\lambda(1,3,-2), g_2: x=(1,2,2)+\mu(-1,-2,4)$$

حل یا اوبیونه : غوښتکي باید دواړه برابرونونه پوره کړي::

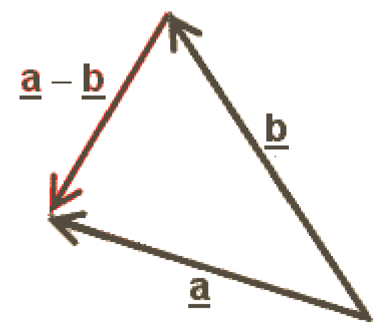
$$1+\lambda=1-\mu, 1+3\lambda=2-2\mu, -2\lambda=2+4\mu$$

د درې سکالار برابرونونو له لومړي مساوت څخه لرو $\lambda=-\mu$ ددې له مخی او له دوهم برابرون څخه لاس ته راځي : $\mu=-1$ نو لرو $\lambda=1$. په دې ډول دریم برابرون هم پوره کیږي د غوښتکي کواوردینات سیستم د کرښي g1 د $\lambda=1$ سره لاس ته راځي:

xs =(1,1,0)+1.(1,3,-2)=(2,4,-2).

۱۷ . ۵ . ۲ د هوارې یا سطحې وکتوریزه انځورونه

د یوې هوارې E ځای په هوا کی په یوه ټکي x0 او دوه نا غبرګو وکتورونو v او w یوائځنی ټاکلی دی. د وکتورونو v او w پیلټکي کیدی شي په x0 پراته ونیول شي‌یا پراته فرض شي) ش؟؟ څیره شته . ۱۷ . ۱۴) .



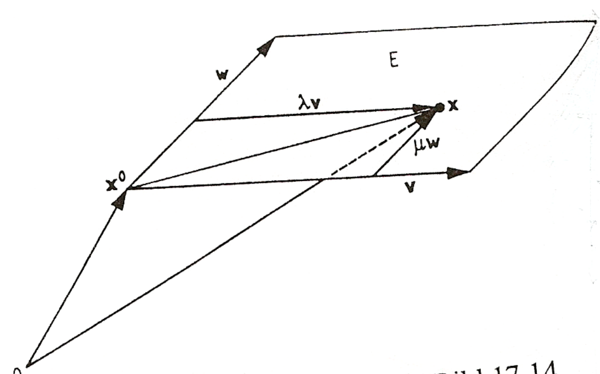


Bild 17.14

که $\lambda\wedge\eta$ پارامترونه وي چې یو له بل خپلواك د ریيل ګنونو ډیري کی ځغلي، نو کیدی شي د هوارې Eپه خوښه ټکی xپه لاندې ډول انځور شي $(17,27)$ $x = x^0 + \lambda v + \mu w, -\infty < \lambda, \mu < \infty$;.................. .

د هوارې E مساوات چی دx0 ټکي کی، له وکتورونو v,w غزیدلي (پارامترفورم)

هر جوړه اربښت $\lambda, \mu \in R$ یواځنی یو $x \in E$ ښایي. وکتوربرابرون (۱۷ . ۲۷) لاندې سکالاربرابرون ځرګندوي

$$x_1 = x_1^0 + \lambda v_1 + \mu w_1, x_2 = x_2^0 + \lambda v_2 + \mu w_2, x_3 = x_3^0 + \lambda v_3 + \mu w_3;............(17,28)$$

که چیرې هواره په دري ټکو $x0$, x^1 , x^2
چي په یوه کرښه نه دې پراته ورکړ شوي وي، نو کیدی شي چی د هوارې غزوونکي وکتورونه په لاندې ډول انځورشي: $v=x^1-x0$, $w=x^2-x0$ له دې سره د هوارې مساوات داسی دي:

$$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) + \mu(x^2 - x_0);................(17,29)$$

بیلګه ۱۷ . ۱۶:
په درې ټکو($x0 =(-1,2,5),x^1=(2 ,3,-6),x^2=(1,-4,3$ کې د هوارې E ورکړ شوي برارون د $v=x^1-x0=(3 ,1,-11)$,$w =x^2-x0=(2,-6,-2)$له امله په لاندې ډول دي:

$$x = x^0 + \lambda v + \mu w = (-1,2,5) + \lambda(3,1,-11) + \mu(2,-6,-2)$$

ددې نتیجی څخه لاندې سکالاربرابرون لاس ته راځي:

$$x_1 = -1 + 3\lambda + 2\mu, x_2 = 2 + \lambda - 6\mu, x_3 = 5 - 11\lambda - 2\mu$$

۱۷ . ۵ . ۳ :د هواروبرابرون یا- مساوات سکالارفورم(-بڼه)

یوه هواره د یوه ټکي x0 او یوه په هواره نیغ ولاړ وکتور n له پلوه یاله لارې هم یواځنی ټاکلی ده یا، چی عمودي یا نورمال وکتور (Normalvektor(یي بولي) ؟؟؟ څیره شته ش . ۱۷ . ۱۵
په هواره E کی دې x یو په خوښه ټکی وي .نو دا له x0 و x ته بریدي وکتور x-x0 هم په دې هواره کی پروت دی او وکتورونه n او x-x0 یو په بل نیغ ولاړدي.

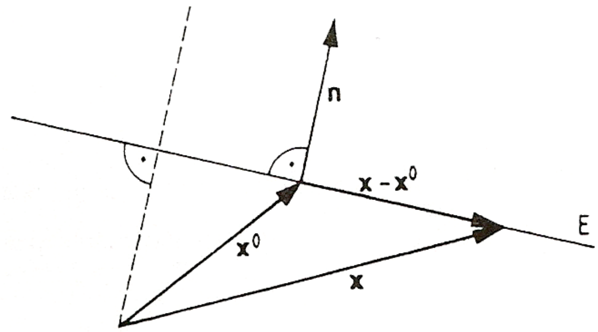


Bild 17.15

په يو بل نيغولاړو) اورتوګونال (وکتورونوڅخه جوړ شوي سکالارځل صفر دی څيره (ځ. ۱۷ . ۸ دې برتله شي) دا په دې مانا چی باوري کيږي :

$$n(x-x0)=0,nx=nx0= c \qquad (17 . 30)$$

دهوارې برابرونونو سکالار فورم ، n- عمودوکتور، د هوارې x0 په ټکی.

بيلګه ۱۷ . ۱۷ :

د هوارې برابرون چی ټکی(2,-1,5)= x0په پروت دی او په هغه وکتور(n=(2,-2,1 (نيغ)ولاړ دی

د c=nx0=(2-2,1).(2,-1,5)=4+2+5=11 له مخې په لاندې ډول دی:

(2,-2,1).x=11 <=> 2x1-2x2+x3=11.

د هوارې مساواتو پارامترفورم (۱۷ . ۲۷) په يوه سکالارفورم اړول بدلول (۱۷ . ۳۰) د پارامتر د له منځه وړلو له لارې لاس ته راځي.

بيلګه ۱۷ . ۱۸ :

د هوارې مساوات دې په پارامتر فورم وي:

$$x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$$

دا وکتور برابرون لاندې درې سکالار برابرونونه خوندي لري يا په بر کي لري يا ځايوي:

$$x_1 = 1+\mu, x_2 = -2+\lambda-\mu, x_3 = 4-\lambda+2\mu$$

له لومړي لاس ته راځي: $\mu = x_1 - 1$

له دې سره دا نور دوه برابرونونه داسې دي

$$x_2 = -2 + \lambda - x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -1 + \lambda \wedge$$
$$x_3 = 4 - \lambda + 2x_1 - 2 \Leftrightarrow -x_1 + x_3 = 2 - \lambda \Leftrightarrow$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

د هوارې برابرونونو سکالار فورم: (-1,1,1)x=1

که غواړو چې څرګنده کړو چې ایا یو ټکی x1 په هواره E پروت دی چې برابرون یی په پارامتر فورم ورکړ شوي ، نو باید مطالعه شي چې ددې کواوردینات (۱۷ . ۲۸) برابرون پوره کوي که نه (بیلګه ۱۷ ، ۱۵ : د کرښې مساواتوته ورته) . او یا سړی پارامترفورم په سکالارفورم بدلوي او څیړي چې د ټکي کواوردینات دا مساوات پوره کوي، که نه .

بیلګه ۱۷ . ۱۹ :

ایا ټکی(x^1=(2,-2,5 په هواره $E: x = (1,-2,4) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,-1,2)$ پروت دی ؟

اوبیونه : : دلومړي دوه برابرونونو $2 = 1 + 0\lambda + \mu, -2 = -2 + \lambda - \mu, 5 = 4 - \lambda + 2\mu$

څخه لاس ته راځي $\lambda = 1 \wedge \mu = 1$

دا دواړه ارزښتونه دریم برابرون پوره کوي: 5=4-1+2.1 ، دا په دې مانا چې x1 په هواره E پروت دی. که د هوارې برابرون په سکالرفورم واړول شي: - (x1+x2+x3=1بیلګه ۱۷ . ۱۸ دې وکتل شي (، نو د ټکي x^1 کواوردینات دې یواځې د x1,x2,x3لپاره ځاي په ځاي شي ، چې معلوم کړو چې x^1 په هواره E پروت دی : - 2+(-2)+5=1

د یوې هوارې: n.x=c:E او د یوې کرښې $g: x = x^0 + \lambda v$ ترمنځ غوڅټکی xs(که شته وي)(نو هم پهE پروت دی او هم په g .له دې امله د هوارې په برابرونونو کی د x لپاره $x^0 + \lambda v$ ځاي په ځاي کوو(ږدو) او په دې ډول یو برابرون د λلپاره لاس ته راځي.که دا برابرون یواځنی یو اوبی ولري نو غوڅټکی موجود دی ، که اوبی شته نه وي یا موجود نه وي نو کرښه g د هوارې E سره غبرګه ځغلي، که ناپاي ډیر ې اوبیونې شته وي نو کرښه g په هواره E پرته ده.

بيلګه ۱۷ . ۲۰ :

د کرښو $g: x=(1,0,1)+\lambda(-1,1,1)$ پروت ځاي يا موقعيت دې لاندې هوارو ته وټاکل شي:

$$a).....x_1+2x_2+3x_3=4, b)...2x_1+x_2+x_3=3, c)...2x_1+x_2+x_3=4$$

اوبيونه : دا چې لټونکی غوڅتکی xsد کرښي برابرون پوره کوي نو باوري دي:

$$x_1=1-\lambda, x_2=\lambda, x_3=1+\lambda$$

$$a)\ x_1+2x_2+3x_3=(1-\lambda)+2\lambda+3(1+\lambda)=4\lambda+4=-4,\ \lambda=-2$$

$$x_S=(1+2,-2,1-2)=(3,-2,-1)$$

$$b)\ 2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=3$$

لمدا λ په خوښه، gپه E پرته ده

$$c)\ 2x_1+x_2+x_3=2(1-\lambda)+\lambda+(1+\lambda)=0.\lambda+3=4$$

حل نه شته ، نوکرښه gد سطحې E سره غبرګه ځغلي.

ددوه سطح

$n^1.x = c1$: E1

او E2 هوارې: $n^2.x = c2$ غوڅکرښه دواړه برابرونونه پوره کوي(دا دوه برابرونونه دي، هر يو د درې نامعلومو x1 ,x2 ,x3 سره). دوه امکانات شته دي چې کرښه g (که شته وي) را پيدا کړی شو.

۱ – سرې يوه واريابله يا اووښتونې په خوښه وټاکي $x_i=\lambda$ (ازاد پارامتر)، نور دواړه $x_j, j\neq i$ له دواړو هوارمساواتو څخه په λ کې د کرښيزو افادو يا وييونو په څير راپيدا کوي. او په دې ډول کرښيز مساوات لاس ته راځي.

۲ – سړي د کرښې دوه مختلف ځانګړي ټکي x^0 او x^1 راپيدا کوي او په دې ډول د کرښې g مساوات لاس ته راولي:($x=x_0+\lambda(x^1-x_0)$.

بيلګه ۱ ۷ . ۲۱ :

د دوه هوارو E_1 او E_2 پريکرښه g غواړو پيدا کړو. هوارې دې وي :

$$E_1: x_1-x_2+x_3=3, \qquad E_2: 2x_1-x_2-3x_3=0$$

حل ۱): $x_1=\lambda$ په خوښه

$$E_1:\ -x_2+x_3=3-\lambda,\ E_2:\ -x_2-3x_3=-2\lambda.$$

کمون یا تفریق : $4x_3 = 3 + \lambda$,

په E_1 کی دې ځاي په ځاي شي :- $-x_2 + 3/4 + \lambda/4 = 3 - \lambda$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$

نو لاس ته راځي $x_1 =$, $x_2 = (5/4)\lambda - 9/4$, $x_3 = (1/4)\lambda + 3/4$

په وکتور لیکدود : $x = (0, -9/4, 3/4) + \lambda(1, 5/4, 1/4)$

همداسی (<=>) له $\tilde{\lambda} = (1/4)\lambda$ سره لرو

$x = (0, -9/4, + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

حل(اوبی) ۲ : په E_1 او E_2 ځاي په ځاي کوو: $x_3 = 0$, پس لاس ته راځي $x_1 = -3$, $x_2 = -6$, سره حل د لاندې $x_1 - x_2 = 3$, $2x_1 - x_2 = 0$

پس $x^0 = (-3, -6, 0)$ په هوار کې ځانګړي تکی دی,که ولیکو $x_2 = 0$ پس له $x_1 = 9/5$, $x_3 = 6/5$: لاندې حل لرو $x_1 + x_2 = 3$, $2x_2 - 3x_3 = 0$ او په دې ډول د ه کربښې g دوم تکی : $x^1 = (9/5, 0, 6/5)$

په تکو x^1 ، x^0 د کربښې g مساوات (مقایسه ۱۷ . ۲۶) داسې دي

$x = x^0 + \lambda(x^1 - x^0) = (-3, -6, 0) + \lambda(24/5, 6, 6/5)$

<=> د $\tilde{\lambda} = (6/5)\lambda$ سره :

$x = (-3,6,0) + \tilde{\lambda}(4,5,1)$

دا په حل (اوبی) ۱ کی پیداشوې کربښې g یوبل ډول انځوردي، ځکه چی د لورو وکتورونه یو بل ته ورته دي. : $v = (4, 5, 1)$ او د $\tilde{\lambda} = -3/4$ لپاره په حل ۱ کې د کربښې تکی د حل ۲ x^0 دا تکی لاس ته راځي

$x = (0, -9/4, 3/4) - (3/4)(4, 5, 1) = (-3, -6, 0)$

تمرینونه؛

۱ – وکتورونه $a = (1,0,-2)$, $b = (-3,-5,0)$, $c = (4,-1,7)$ ورکړ شوي دي.

جوړکړی :

$-a$, $a+b$, $a-c$, $2a - b + 3c$!

۲ – وکتور a چې له ټکي $x^1 = (3,-5,7)$ څخه د ټکي $x^2 = (-2,4,-1)$ لور ته لاربښودوي، څنگه دی؟

۳ – وکتور $a = (3,21)$ دې پیلټکي $x^1 = (1,2,3)$ ولري. وڅیرئ چې پایټکی x^2 یې کوم کواوردینات لري؟

۴ – لاندې وکتورونه کوم مطلقه ارزښت لري؟

$a = (4,-3,12)$, $b = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$, $c = (3,3,3,)$?

۵ – وکتورونو $a = (2,-1,3)$, $b = 7,0,0$ پورې اړوند یا مربوط یوونوکتورنه کومې کواوردیناتی لري؟

۶ – د لاندې وکتورونو یو په بل ولاړوالی یا اورتوگونالیتي دې وښول شي ؟

$a= (1,2,3)$, $b = (3,0,-1)$!

۷ – دلته دې a_1 , b_1 او c_1 څومره لوي وي، چې وکتورونه

$a = (a_1,3,2)$, $b = (-4,b_1,2)$, $c = (3,-2,c_1)$

په وکتور $d = (2,1,-3)$ (نیغ) ولاړ وي؟

۸ – د

a) $a = (-2/3, 1/2, 5/4)$, $b = (3\ 74,-1/3, 2/3)$,

b) $a = e^1 - e^2 + e^3$, $b= 2e^1 + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره دې $a . b$ وشمیرل شي!

۹ – وکتورونه $a = (3,-4,12)$ او $b = (-6,8,0)$ یو له بل سره کوم کونج جوړوي!

۱۰ – د گوډ – یاکونجټکو

$A = (-2,0,3)$, $B =(-6,4,-1)$, $C(4, -1,2)$

سره، د دریگوډي کونجونه څومره لوي دي؟

۱۱ – وښايي چې وکتورونه $a = (2,4,-6)$ او $b = (-1,-2,3)$ يو بل ته کولايني دي!

۱۲ – د

a) $a = (-4,-1,3)$, $b = (5,-2,7)$

b) $a = e - e^2 + 2e^3$, $b = 2e + (1/2)e^2 - (1/4)e^3$

لپاره $a \times b$ وشميرئ!

۱۳ – د دريګوټي هواره څومره لويه ده، چې کونجونه يې په لاندې توګه راکړ شوي وي

$A = (-2,0,3)$, $B = (-6,4,-1)$, $C = (4,-1,2)$?

۱۴ – د هغه غبرګ اړخيز هواره څومره لويه ده چې له وکتورونو

$a = (-3,2,1)$, $b = (5,-3,2)$

څخه غزيدلي وي ؟

۱۵ – د وکتورونو

$a = (-2,1,-3)$, $b = (1,-3,6)$, $c = (1,2,-3)$

څخه غزولشوې غبرګهوارې کوم ډکې يا حجم لري؟

دا نتيجه هندسي روښانه کړئ!

۱۶ – څلورګوټې د لاندې ګوټونو (لارښوونه : څلور اړخې [دا د اهرام شکل دی])

$P_1(2,1,4)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(-3,6,4)$, $P_4(2,2,2)$

سره کوم ډکې ياحجم لري؟

۲۳ – د لاندې هوارو

الف) E_1 چې له ټکي $x^o = (0,1,2)$ تيريږي او د لاندې وکتورونو

لور لري: $v = (0,2,1)$, $w = (2.3,-5)$

ب) E_2 چې له ټکو $x^o = (o,1,2)$, $x^1 = (2,-3,4)$ او

ټکي $x^2 = (7,-9,-3)$ څخه تيريږي.

پ) E_3 چې د نورمال وکتور $n = (0,2,1)$ سره له ټکي $x^o = (0,.1.2)$ تیریږي، مساوات څنګه دي؟

۲۴ – له تمرینو۲۳ الف او ب څخه د هوارې مساواتو سکالارینه څنګه ده؟

۲۵ – ودی ښیول شي چې ایا ټکي $x^1 = (1.3.-6)$ همداسی $x^2 = (5,-5,4)$ په هواره

a) E_1: $\mathbf{x} = (0, 2, -1) + \lambda(1, -3, 5) + \mu(2, -2, 0)$,
b) E_2 : $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$

پراته دي!

۲۶ – د کرښو

a) g_1: $\mathbf{x} = (1, 1, 1) + \lambda(-2, 3, 1)$,
b) g_2: $\mathbf{x} = (-1, 1, 1) + \lambda(-1, -1, 1)$,
c) g_3: $\mathbf{x} = (3, -2, 0) + \lambda(-1, -1, 1)$

پروتخاي د هوارې $E : 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 18$ سره وټاکې!

۲۷ – د هوارو

الف) $E_1 : 2x_1 + x_2 - x_3 = -1$ او $E_2 : -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4$

ب) E_1 $-5x_1 - 2x_2 + 9x_3 = 4$ او $E_2 : x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -8$

غوڅکرښه دې راپیدا شي !

۱۸ پرلپسی او لړۍ پرلپسی (لنډ: لړۍ) (sequences and series)

یا ترادف او د ترادف سلسله

۱۸ . ۱ پيل

د میلاد څخه دري سوه کاله د مخه يوه يوناني جنګسالار(نوم يې راڅخه هير شوی، ددې بخښنه غواړم) د خپلو عسکرو څخه وپوښتل چې ، »دا د ده له مخه کيشپ چې سل متره يې ترمنځ واټن دی، کله نيولی شي، که دی له دې کيشپ سل ځله تيز ولاړشي؟« دې ته طبعاً د لوستونکو فکر شته چې وخت بايد په نظر کي نه وي نيولشوی . ځوابولو ته دې ګران لوستونکی پخپله فکر وکړي.

موږ د دې برخې څېرنی سره لوړې شميرپوهنی ته راځو. داسی هم نه ده، ځکه چې موږ د رييل اعدادو يا - ګڼونو تعريف سره سم چې هلته مو د اينتروالبندولو باندې خبرې کړي او په دې توګه مو عدد تعريف کړی دی، د شميرپوهني لوړه څېرنه وه. همدا ډول د لاينيزو برابرونونو يا - مساواتو شميرل او داسی نورې پوره دلوړې شميرپوهني بيلګي لرو، خو دلته دا په ګوته کوو چې له دې ځايه د شميرپوهنی هغه ځاي پيل کيږي چې شميرپوهنيز فکر مو په پراخه توګه په کار اچولو ته راهڅوي او له دې امله مو د وړاند نيونه(لنډ: نيونه) يا فرضيه اړيينه وه چې دا برخه د لوړو شميرپوهنو پيل په څير وښايو يا وبولو.

له دې ځایه هغه اعداد چې موږ ورسره مخ کیږو، ځموږ لپاره د ځیرنی کیږي چې هغوي یوې پولی(حدLimit) ته هڅه کوي. دا قوانین هم پوره ځیړل کیږي چې وروسته بیا په دیفرنځیال شمیرنه کی کار اخستلو لپاره ترې تیریدنه ناشونی ده.

په راتلونکی برخه کی لاندې کنځیپتونه (خیال، چې یو څه څنګه وشي) ځموږ لپاره د هڅی وړ ګرځي

۱ - د کلیمی لیدوړه یا په خیال کی لرودونکی پیلونه

۲ - د لیدوړوالي یا فکر کی راوړیدونکی د ټولو په غوره شننه (تحلیل)

۳ - د شمیرپوهنیزو پېژندو یا تعریفونو ټیکوالی،

۴ - هغو وړاندنیونو یافرضیو ته پاملرنه چی د شمیرپوهنی قوانینو د باوریتوب (اعتبار)لپاره وي،

۵ - د پرلپسی شننه، چی پوله ارزښت یی په پام کي ونه نیول شي،

۶ - د ګڼو دندو حل ، په ځانګړي توګه د دیفرنځیالولو او اینتګرالولو

۷ - بالاخره د پرلپسی لړئ چی په لنډه توګه ىی لړئ بولو ځیړنه .

دلته هم د دې موضوع د پوره ځیړلو ستونځي په کتاب کی د ځاي کموالي له امله شته. داچی دا برخه یوه بنسټیزه برخه ده، نو پیل یی د یوې ساده او پوهوړې بیلګې له لارې کوو چې ماته خورا په زړه پورې هم ښکاریږي.

۱۸ . ۲ دګڼونو پرلپسی (لنډ: پرلپسی) یا د اعدادو ترادف کلمه

پیلبیلګه :

پاي جمعه یا - زیاتون $s = 3+7+11+...+395+399$ څنګه ټاکل کیدی شي؟

کیدی شي چي دا د پوره ستونځو سره د یوګونو ګڼونو یو د بل سره جمعي یا یو په بل زیاتون له لارې وشمیرل شي ترڅو چي د دې اعدادو د ترادف (ګڼونپرلپسی) قانونیت پیداشوی وي:

هر دوه ګاونډې توکي یوله بله په۴ + توپیر کیږي یعنی کمون یا کمښت یي ۴ + دئ.

کیدی شي چي دا کارونه (استعمال) په یوه شکلی او سپماوړ لاره هم مخ ته لاړه شی او دا په لاندې ډول :

که لومړی (۳) او اخر(۳۹۹) ، دویم (۷) او له اخر دویم (۳۹۵) دریم (۱۱) او له اخر دریم (۳۹۱) د جمعې اجزا یا زیاتوني او داسی نور سره زیات شي. دا په

دې ټولو حالتونو کی همغه زیاتون ارزښت یا د جمع لاس ته راوړنه ورکوي یعنی ۴۰۲ .

اوس دې د یوګونو د جمعې اعزاوو د جمعې ارزښت(زیاتوونو زیاتون ارزښت) راپیداشي:

دویم غړی له لومړی غړي داسی لاس ته راځي چی لومړي غړي ته ۴ ور زیاتیږي او همداسی ورپسی تر n غړي پورې چی دلته و (n-1) ته 4 ور زیاتیږي ، یعنې:

.n = (n-1)+4:

که له دې لاس ته راوړنی لومړی غړی له اخر غړي کم کړو یعنی3- 399 = 396 ، نو ددې کمون سره د (n-1) دا 4 ځله ترې لاس ته راځي. داچی 99 = 396:4 دي، نو باید n او له دې امله د پرلپسي د غړو شمیر 100 وي. په دې لاس ته راوړنو سره باید 100 ګڼونه سره زیات شي. که چیرې په پورته توګه 2 زیاتووني یا د جمعې اجزاوې سره زیات شي، نو باید له دې سره 100:2 = 50 یعني 50 -ځله زیات 402 ترې لاس ته راشي« له دې امله د ټولو رامخ ته شوو د پرلپسی غړو زیاتون دا دی:

.20100 = 402 . 50

دا لوستونکو ته په روځنی ژوند کی هم څرګنده ده لکه د یو ټولګي د زدکوونکو په ګڼه (نمره) ترتیب، یا په یوه سیالی یا مسابقه کی د بریالیو ترتیب او داسی نورموجود دي، موږ کوښښ کوو چی دا مسئلی د شمیرپوهنی له لارې وڅیړو او وګورو چی په شمیرپوهنه کی ترادف یا پرلپسی څه شی دي.

یادونه: موږ له دې وروسته د رادف په ځا یواځي ترادف لیکو.

موږ طبیعي اعداد یا ـ ګڼونه ۱، ۲، ۳، ۴، ..... لرو (دلته ټکي ټکي دا مانا لري چی دا پرلپسی ناپای اوږدیږي)

که چیرې دا هر پیدایښتي یا طبعي ګڼ په یواځنی یو رییل ګڼ ترتیب شي یا یواځنی ترتیب رییل ګڼ وښاېي یعنی $a_1, a_2, a_3, ...$ ، نو د لته د طبعي اعدادو او حقیقي اعدادوتر منځ یو ترتیب منځ ته راځي. داچی دلته هر طبیعي عدد n په یواځنی حقیقي عدد a_n ترتیب شوی نو دا ترتیب یو فنکشن دی چی د فنکشن پیژندډېرۍ (تعریفډیری یا تعریفسټ) دطبعي اعدادو ډیرۍ N ده او ارزښتډیرۍ یی د حقیقي اعدادو ډیرۍ R ده.

دلته د پرلپسی هر توکی an د ځای ګڼې (نمرې) n په بنسټ یواځنی ټاکلی، چی n ته په مسلکي نړیواله پیژندل شوې ژبه ایندکس Index (زیات یې Indices)، چې مانا یې : پیژند نخښه ده ، وایي. (Index پیژند دخښه)

پیژند تعریف) :۱۸ . ۱ الف :

د پرلپسی غړو $a_1, a_2, a_3, ... a_k$ د یو ترتیب قانونیت یا قانونمندي $a_n = a(n)$ لاس ته راځي ، که دnلپاره پرلپسی طبعي اعداد1, 2,3 ...k,ځای په ځای شي.

پرلپسی کې a_1 د پرلپسی پیل غړی بلل کیږي. که د پرلپسی اخر غړي پای وي نو پرلپسی پای او که نه نو پرلپسی ناپای ده.

بیلګی

(دا ورپسې مخ کې بیلګې نورې هم روښانه دي)

$$I-;...a_n = n^2, a_1 = 1; a_2 = 4;....; a_{10} = 100,..; a_k = k^2;..$$

{چیرته چې a_n یو څلوری (مربع) ګڼ دی}D=N;W= a_n |

$$2-\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}; a_1 = 1; a_2 = \frac{1}{2};...a_{10} = \frac{1}{10};...\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}$$

$$3- \quad \{a_n\}=\{(-1)\} => a_n = (-1)^n; a_1 = -1; a_2 = 1;$$
$$a_3 = -1,...a_{17} = -1;...a_{22} = 1$$

د دې پرلپسی غړي بدلی نخښی لري، له دې امله پرلپسی بدلیدونکی Altrnating بلل کیږي

$$4-\{a_n\} = \{3+\frac{1}{n}\}; 4, 3+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{4},...a_k = 3+\frac{1}{k},..., a_n = 3+\frac{1}{n}$$

د ترتیب – یا نظمقاعدې څخه مختلفی ګڼونپرلپسی یا د اعدادو پرلپسې منځ ته راځي ۰ دا مو په لنډه توګه پرلپسی ونومولی. چی پیژند یی یو ځل بیا دلته په بل ډول رالنډوو.

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۱ :

که هر یو طبیعي ګڼ..... n=1,2,3,4,5 په یوه یو یوائځني رییل ګن باندې ترتیب یا تنظیم شي، نو په ترتیب ګڼونه .... $a_1, a_2, a_3,.....$ یوه د ګڼونو پرلپسی جوړوي، چی لنډ پرلپسی یی نوموو او ددې لپاره سړی داسی لیکي: $\{a_n\}$.

دې a_n ته د پرلپسې $\{a_n\}$ n-م غړی ویل کیږي.

سړی کړی شي چی د رییلګڼونو یا اعدادو د نمره کولو یا ګڼې لپاره له 0 یا 2 او حتی له 1 - یا 2 - څخه پیل وکړي، یعني:
a-1,a0,a1,a2.....یا او a2,a3,a4.... یا....a0,a1,a2

ګورو چی د پرلپسی لیکلو لپاره ځانګړي متودونه په کار اچول کیږي، کله دا بسیا کوي چی د پرلپسی تعریف لپاره د پرلپسی لومړي څو غړي ولیکل شي

بیلګه ۱۸. ۱ : د بیلګي په توګه لیکو:

$$\{a_n\} = 1, 2, 3, ...$$

او د طبعي اعدادو پرلپسی موخه یا مطلب دی، د جوړولوقانون an = n سره ، نو

$$\{a_n\} = \{n\}$$

$\{an\}:1,4,9,16,25...=> = \{a_n\} = \{n^2\}$

دا په دې معنا چی(<=)

{an}:2,3/2,4/3,5/4,6/5 ....=>

یا په دې مانا چی{an}={(n+1)/n}

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6 ...=>

په دې مانا چی $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$

{an}:1,1/2,1/3,1/4,1/5,.. =>

یانې په دې مانا {an}={(n+1)/n}

پیلبیلګه:

دشمیرپوهنی یوه ښوونکی لپاره په ښونځي کی یو ځاي تش یا خالي دئ. ددې ځاي لپاره دوه کسانو الف او ب ځانونه کاندید کړی. دوي ته لاندې پوښتنه ورکړ شوي چی اوبی یا حل یی کړي:

پنځه ګڼونه ۱،۳،۷،۱۵،۳۱ ورکړ شوي. درې نور ګڼونه باید داسی ور واچوی چی دا ګڼونپرلپسی موخه وره یا هدفمنده مخ ته ولاړه شي، یا مخودیزه شي.

دواړه کاندیدان دا دنده یا پوښتنه په بیلو ډولونو اوبی کوي ۰

کاندید الف داسی فکر کوي ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ کاندید ب داسی فکر کوي

لومړی ګڼ ۱ د۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ۰ لومړی ګڼ له ۲ څخه په ۱ کوچنی دئ: 1 - 2

دویم ګڼ لاس ته راځي، که د لومړي ۰۰۰۰۰۰۰ دوم ګڼ له ۴ څخه ۱ کوچنی دئ :

عدد دوه ځله ته ۱ ورزیات کړو : ۰۰۰۰۰۰۰۰ $2^2 - 1 = 4 - 1$

$2.1 + 1 = 3$

دریم ګڼ لاس ته راځي که د دوم ۰۰۰۰۰۰۰۰ دریم ګڼ له ۸ په ۱ کوچنی دئ:

ګڼ دوه ځله ته ۱ ور زیات شي۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$2^3-1=8-1$

$2.3 + 1 = 7$

۶- ام ګڼ لاس ته راځي که د پنځم۰۰۰۰۰ ۶ -ام ګڼ له ۶۴ څخه په ۱ کوچنی دئ :

ګڼ دوه برابره ته ۱ ور زیات کړو: ۰۰۰۰ $64 - 1 = 2^6 - 1 = 63$

$2.31 + 1 = 63$

اوم ګڼ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ اوم ګڼ دئ: $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$

$2.63 + 1 = 127$

ګڼ ۸ دئ ۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰ ګڼ ۸ دئ

$2^8 - 1 = 256 - 1 = 255$ $2.127 - 1 = 255$ ....)

د شمرپوهنی له مخی دا پنځه له مخه ورکړشوي ګڼونه د یوې پرلپسی لومړني پنځه توکي دي. دا پنځه توکي له

a1 , a2 , a3 , a4 , a5,

سره ښایو.

اوس زموږ په دې بیلګه کی داسی لرو: a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31

که وغوښتل شي چی د دې پرلپسی نور توکي دې هم ورکړ شي، نو دا به تصادفي توکي نه وي، بلکه یوه جوړه شوې قاعده یا لاس ته راوړې قاعده به ورکړي، لکه څنګه چی یو په بل پسی راتلونکی توکی د پخوانی او یا له وروستني توکي څخه د مخه توکی په لاس راځي.ددې تثبیت یا ازمویني وظیفی شمیرپوهنیزه فرمولبندې په لاندې ډول ده:

د ګڼونپرلپسی یا د اعدادو ترادف دې د a1=1,a2=3,a3=7,a4=15,a5=31 سره ورکړ شوي وي. یوجوړښتقانون یا قانونمندي او توکي a6,a7,a8 وټاکی.
د دواړو کاندیدانو د اوبیوني -یا حللارې کیدی شي چی په لاندې توګه انځور شي:

ب	الف
$a_1 = 2 - 1$	$a_1 = 1$
$a_2 = 4 - 1 = 2^{2-1} = 3$	$= 2.1+1=3 a_2$
$a_3 = 8 - 1 = 2^3 - 1 = 7$	$a_3 = 2.3 + 1 = 7$
..	.
$a_6 = \quad 2^6 - 1 = 63$	.
	$a_6 = 2.31 + 1 = 63$

په تولیزه (عمومی) توګه لاس ته راځي

$(k \in N)$ k-م غړی $(k \in N \wedge k \geq 2)$ k -م غړی
په کوم کی چی .... په کوم کی چی
د(k-1)- م غړي دوه برابره ته 1 زیات شي ..... 1 له $a_k = 2^k$ کم شي

$$a_k = 2.a_{k-1} + 1 \qquad\qquad a_k = 2^k - 1$$

دواړو کاندیدانو پرابلم سم حل یا اوبی کړ. کله چی د پرلپسی ۲۰ - م غړي پوښتنه وشوه ، نو کاندید ب په کټه کی دی . ولی؟
دواره کاندیدان کولی شي چی د پرلپسی هر په خوښه توکی پیداکړي، له دې امله دوي دا پرلپسی یواځنی وټاکله. کاندید الف دا پرلپسی داسی حل کوي چی تل باید له مخه غړي ځخه ورپسی توکی لاس ته راوړي، یعني $a_k = 2.a_{k-1} + 1$

.

دا باید هر د پرلپسی د مخه توکی وپیژني. دې ډول شمیرلو ته د پرلپسی رکورزیو(recursive لاتین، له recure په ښت ځغاسته) انځورونه وایی . مګر ب کاندید دا خورا ساده او زر شمیرلی شي، دی چې کوم توکي غواړي پیدا کړي، هغه سملاسي لاس ته راوړی شي یعني $a_k = 2^k - 1$
دې ډول ښوونلار ته ایکسپلیځیت explizite (لاتین خورول، روښانوول) یعنی روښانه انځورونه وایي.
د لوستونکو لپاره دې دا لاندې د کور کار وي:
د پرلپسی ۲۰ - ۱م غړی وشمیری ، رکورسیو او ایکسپلیځیت. یانی د الف او ب په ځیر.

بیلګه:
یوه پرلپسی د a1 = 5 او $a_{k+1} = {a_k}^2 + 1$ سره ورکړ شوې. ددې پرلپسی لومړنی پنځه توکي وشمیری.
حل:

$$a_1 = 5$$
$$a_2 = a_1^2 + 1 = 25 + 1 = 26$$
$$a_3 = a_2^2 + 1 = 676 + 1 = 677$$
$$a_4 = a_3^1 + 1 = 458329 + 1 = 458330$$

بیلګه :
یوه پرلپسی د a1 = 1 او $a_{k+2} = a_{k+1}.a_k$ سره ورکړ شوې ده.
ددې پرلپسی لمړني پنځه غړي وشمیری .
اوبښونه:

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2$$
$$a_3 = a_2.a_1 = 2.1 = 2$$
$$a_4 = a_3 . a_2 = 2.2=4$$
$$a_5=a_4.a_3 = 4.2=8$$

پوښتنې:

د هرې لاندنۍ پرلپسۍ لمړني ۱۰ غړي وشمیرۍ پرلپسې رکورزیو ورکړ شوې

a) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$

b) $a_1 = 0,\ a_{k+1} = a_k^2 + 1$

c) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{a_k} + 1$

d) $a_1 = 1,\ a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k + 1$

e) $a_1 = 2,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{2}{a_k}\right)$

f) $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$

g) $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_{k+2} = a_{k+1}^2 \cdot a_k$

h) $a_1 = 1,\ a_2 = -2,\ a_{k+2} = a_k : a_{k+1}$

بیلګه :

یوه پرلپسی د $a_k=k^2/(k+1)$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی لومړني پنځه توکي وشمیرۍ

اوبی:

$$a_1 = \frac{1^2}{1+1} = \frac{1}{2} \qquad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3} \qquad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5} \qquad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

بیلګه :

پرلپسی د $a_k = \frac{(-1)^k + 1}{k}$ سره ورکړ شوې ده .د دې پرلپسی ۳ -م، ۸ -م ۱۵ -م او ۲۰ -م توکي وشمیرۍ

اوبی یا حل:

$$a_3 = \frac{(-1)^3 + 1}{3} = 0$$

$$a_8 = \frac{(-1)^8 + 1}{8} = \frac{1}{4}$$

$$a_{15} = \frac{(-1)^{15} + 1}{15} = 0$$

$$a_{20} = \frac{(-1)^{20} + 1}{20} = \frac{1}{10}$$

پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو لومړني پنځه توکي ، ۲۰ -م او ۴۵ -م توکي وشمیری

$$a)a_k = 2k+1; b)a_k = k^2+k; c)a_k = \frac{k^2+1}{k+1};$$

$$d)a_k = \frac{k^2-1}{k+1}; e)a_k = (-\frac{1}{10})^{k-1}; f)a_k = 1-(1/2)^k;$$

$$g)a_k = 1+(-1/2)^k; h)a_k = 1.2.3....k$$

په کارتیزي کواوردیناتسیستم کی د یوې پرلپسی د گراف انځورونه لاس ته راوړو، که هر توکی د x -کواوردینات باندې د پرلپسی هر توکی د توکي نمرې kسره کیښول شي او د y- کواوردینات باندې هر غړی د غړي د نمرې ak سره و کښل شي

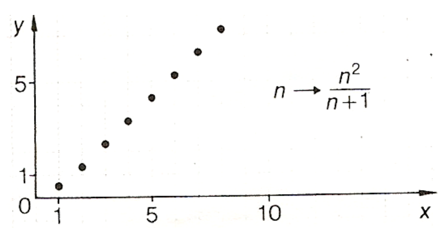


Bild 4

پوښتنی :

د لاندې پرلپسیو گراف په کارتیزې کواوردیناتسیستم کی وکاږی.

له دې ځایه وروسته بیا پیل دی

a) $a_k = \frac{5k}{k+2}$　　b) $a_k = 3k+2$　　c) $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{12}{k}$

d) $a_k = \sin\frac{k\pi}{2}$　　e) $a_1 = \frac{1}{2}, a_{k+1} = 1-2a_k$　　f) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{k+2} = a_{k+1} \cdot a_k$

۱۸ . ۲ . ۱ یوغېزیزې یا مونوتونی پرلپسی

بیلګه : د غړو ak = 2k - 1

(ما کله کله توکی او کله کله غړی نومونه کارولی، په په پرلپسی کې یو غړی د پرلپسی غړی ،دی او د یوې ډیری یو د هغې ډیری توکی دی، دې ته به د گرابو لوستونکو پام وي)

سره پرلپسی هر توکی د مخته تیرشوي توکي لوي دی . دا باور لري:

$a_{k+1} > a_k$ د ټولو $k \in N$ لپاه

حل یا ثبوت :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2^{k+1} - 1 \\ &= 2.2^k - 1 \\ &= 2^k + 2^k - 1 \\ &= 2^k + (2^2 - 1) \\ &= 2^k + a_k \\ &> a_k \end{aligned}$$

تعریف ۱۸ . ۲ الف:

یوه پرلپسی(strictly monotonic increasing)
په کلکه – یا کره مونوتون جګیدونکی ده یا کره مونوتون جګیږي، که دا لاندې باور ولري :

د ټولو $k \in N$ لپاره ak+1> ak

که د یوې پرلپسی لپاره باوري وي

د ټولو $k \in N^*$ لپاره ak+1 $\geq$ ak

نو دلته د مونوتون جګیدونکی monotonic increasingپرلپسی څخه غږیږو

بیلګه :

د پرلپسی د توکو

ak = 10 - 4k

سره هر غړی د مخ ته تیر غړي څخه کوچنی دئ.

لرو:

ak+1 < ak د ټولو $k \in N^*$ لپاره

اوبنونه::

ak+1 = 10 - 4(k+1)

=10 - 4k – 4

$=(10-4k)-4$

$= a_k - 4$

$< a_k$

پیژند(تعریف) ۱۸ . ۳ :

یوه پرلپسی په کلکه مونوتونتیټېدونکی یا - لویدونکی strictlymonotonic decreasingده، که لاندې باور ولري:

د ټولو $k \in N$ لپاره $a_k < a_{k+1}$

که په یوه پرلپسی کي باور ولري(په پورته کي او همداسي که ورپسي داسي څه راشي کا د ان توکی دی)

د ټولو $k \in N$ لپاره $a_1 \leq a_{k+1}$

نو دلته د یوغړیز-یا موتون لویدونکی- یا مونوتون ټیټېدونکی monotonicdecreasing پرلپسی څخه خبرې دي.

پوښتنه:

د یوې پرلپسي دوه ګاوندیو غړو توپیر یا کمون یاکمښت $a_{k+1} - a_k$، کوم شرطونه باید پوره کړي، چی دا لاندې صدق ولري

الف) کلکه مونوتون جګیدونکی وي

ب) کلکه مونوتون ټیټېدونکي یا –لویدونګې وي

پ) مونوتون جګیږي

ت) مونوتون لویږي؟

ددې دندې د اوبیونې په مرسته کیدی شي، چی د توکي $a_K=(k+1)/(k+2)$سره د پرلپسی مونوتونی په لاندې ډول وښوول شي:

$$a_{k+1} - a_k = \frac{(k+1)+1}{(k+1)+2} - \frac{k+1}{k+2} = \frac{k+2}{k+3} - \frac{k+1}{k+2}$$

$$= \frac{(k+2)^2 - (k+1)(k+3)}{(k+3)(k+2)} = \frac{(k^2+4k+4) - (k^2+4k+3)}{(k+3)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{(k+3)(k+2)} > 0 \quad \text{لپاره} \; k \in N^* \quad \text{د}$$

له $a_{k+1}-a_k>0$ همداسی(<=) $(a_{k+1})>a_k$

--- --------------------------

د ټولو $k \in N^*$ لپاره لاس ته راځي، چې ورکړ شوې پرلپسی په کلکه مونوتون جګیږي.

۱۸ . ۲ . ۲ اریتمیتیکي پرلپسی

د پرلپسی ..... 14;11;8;5;2 هرغړی د خپل مخکښ غړي څخه په 3 لوي دی.
ددې پرلپسی لپاره ورکړی
الف(یوه رکورزیف انځورونه
ب) (یوه اکسپلیڅیت انځورونه.

ځنی پرلپسي د ډیرې پاملرني ارزښت لري، په دې ډول چې د دوه په خوښه ګاونډیو غړو ak او ak+1 ترمنځ یو ثابت (تل همغه) بلواك یا تابع موجود دی
غواړو چې دداسی دوه مهمو پرلپسی تیپونه (ډولونه ، رقمونه) په ځانګړې توګه څرګند راوباسو یا بهتره تر څیړنی لاندې ونیسو:

پیژند (تعریف) ۱۸ . ۴ :
په یوه اریتمیتیکي- یا ګنونشمیرنیزې پرلپسي یالند: شمیرنیزې پرلپسی کي د درې توکو منځنی توکی د دواړو دباندنیو توکو اریتمیتیکي منځ دی:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په یوې ځمککچیزې لپسی(ټاکونی یا پیژند وروسته راځي) کی د درې یو په بل پسی توکو منځ غړی د دوو نورو دباندنیو غړو ځمککچیز یا هندسي منځ دی:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1}.a_{n+1}}$$

لومړی اریتمیتیکی یا شمیرنیزه پرلپسی څیړو:
غوښتنه(ثبوت): یوه پرلپسی ورکړی، چی لومړی توکی يي ۵ او هر ورپسی راتلونکی توکی یی له مخ غړي څخه په ۱۲ کوچنی وي
الف) ددې پرلپسی لومړي پنځه توکي وشمیری
ب) د پرلپسی رکورزیف انځورونه ورکړی
پ) د پرلپسی اکسپلیڅیت انځورونه وکړی
ت) د پرلپسی ۲۰ -م (۲۵ ، ۳۵،۵۰، ۱۰۰) توکي وشمیری.

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۵ :

یوه پرلپسی an اریتمیتیکي پرلپسی بلل کیږي، که د دوه پرلپسی توکو کمون یاکمښت تل ثابت یا همغه وي: $a_{n+1} - a_n = d \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$

بیلګې:

۱ - لاندنی پرلپسي ...;2;5,8;11;14;...;29;32;35
یوه اریتمیتیکي Arithmeticپرلپسی ده چې لومړی توکی یی a1 = 2
او ثابت یا همغه کمون یا کمښت یا فرق یی d = 3 دی.
۲ - دا پرلپسی ...;34- ,23- , 12- , 1- ; 10 اریتمیتیکي پرله پسی ده چې لومړی توکی یي a1=10 دی او d=-11 ده

که په هر پل(قدم) کی فنکشن $n \in N$; n—>an په همغی زیاته وونې d زیاتیږي یا همداسی کمیږي d=0 (لپاره ثابت دی) نو باید اریتمیتیکي پرلپسی یو لاینیز فنکشن(لاینیز بلواك) وي (D = N) د d په جګوالي . دا د لاندی اند لاس ته راوړنه یا فکر لاس ته اوړنه ده:

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1).d = a_1 + d.n - d$$
$$f(n) = d.n + (a_1 - d)$$

د لاینیز فنکشن جګوالی d دی او ثابت یا همغه توکی a1 -d نومیږي(یادیږي یا بلل کیږي)
دلته an=2n+1 دلاینیز فنکشن په څیر دی، د d=2 په جګیدو او دy - محورغوځی a1-d=1

له دې سره د پرلپسی د هر توکي د شمیرلو امکانات ورکړ شوي دي:

تعریف ۱۸ . ۶ :

په اریتمیتیکي- یا شمیریزه پرلپسی کی n- م توکی د قاعدې له مخي داسي ورکړ شوی:
$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1).d$

بیلګی:

۱ - اریتمیتکي پرلپسی ... 53 , 2,19,36 ورکړ شوې.
غوښتونکي a_{20} ده.
داسی لرو: $a_1=2, d=17, n=20$
نو $a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow a_{20}=2+19.17=325$
۲ - ورکړ شوې دې وي
$a_1 = -0,5$ او $a_{10} = -44,5$
غوښتونکې d ده:
$a_n=a_1+(n-1).d \Leftrightarrow (a_n-a_1)/(n-1)=d \Rightarrow$
$d=(-44,5+0,5)/(10-1)=-44/9$

۱۸ . ۲ . ۳ځمککچیزې – یا هندسي پرلپسی

اوس غواړو هغه د مخه ویل شوی ،د یوه ثابت ((تل) همغه ارزښتیز) فنکشن سره، د پرلپسی ۲ -م تیپ د دوه غړو ترمنځ تر څیړنی ونیسو

پیلبیلګه :

یو هوښیار زدکړی غواړي په رسختی کی یوه میاشت کار وکړي(۲۰ د کار ورځی(. دې کارورکوونکی ته وایي، چی دی ارزانه کار ورته کوي او لاندې وړاندیز ورته مخ ته کوی » د لمړی ورځي معاش دې 0,05 ډالره وي د دویمی دې دوه ځله د دریمی ورځی د دویمی ورځي دوه ځله څلورمه ورځ د دریمی ورځی دوه ځله او داسي نور، یعنی لمړی ورځ که 0,05 وي نو دومه ورځ 0,10، دریمه ورځ 0,20 او څلورمه ورځ 0,40 ډالره معاش کیږی او داسی نور

پوښتنه : د

الف) د ۱ –می یا لومړۍ ورځی
ب) د ۱۵ - می ورځی
پ) د ۲۰ - می ورځی
معاش څومره کیږي. اندازه ګڼ(عدد) که په ډالرو وشمیرل شي، لاندې پرلپسی جوړوي:

0,05;0,1; 0,2; 0,4;0,8; 1,6; 3,2,......

پوښتنه :

ددې پرلپسی لپاره
الف) رکورزیف انځورونه
ب) اکسپلیڅیت انځورونه ورکړی

پیژند ۱۸ . ۷:

(ځمککچیزې یا هندسی پرلپسی) یوه پرلپسی an هندسي بلل کیږي، که د دوه یوبل پسی غړو ویش ثابت((تل) همغه) q وي:
یا په بل ډول یا په بل عبارت : یوه پرلپسی چی لومړی غړی $a_1 \neq 0$ وي اود همغه ګڼ یعنی ثابت ګڼ q سره د تل ځلونی څخه لاس ته راشي، ځمککچیزه یا هندسي پرلپسی بلل کیږي.

$$n \in N; q \in \{R\} \setminus \{0\} \quad \text{د ټولو} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = q; a_{n+1} = a_n.q \quad \text{لپاره}$$

یو ځل بیا یوځای +d +d +d +d
اریتمیتیکي پرلپسی ...a1 a2 a3 a4 a5
هندسي پرله پسی..... a1 a2 a3 a4 a5
.q .q .q . q

د هندسي پرلپسی دوهم غړی دلومړي غړي سره د q ځل یا ضرب څخه لاس ته راځي، او دا د ټولو وروسته راتلونکو غړو لپاره باوري دي. له دې امله هندسی پرلپسي ‹— n an اکسپونینشل فنکشن یا د جګګڼ بلواک ښنایي چی q د بنسټ په توګه لري:

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1.q$$
$$a_3 = a_2.q = a_1q^2$$
$$a_4 = a_3.q = a_1.q^3$$
.
.
.
$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

$$f(n) = a_1.q^{n-1}$$

جمله ۱۸ :

په هندسي پرلپسی کی n- م توکی د لاندې قاعدې له مخي شمیرل کیږي

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-1}$$

بیلګی:

1 - a1=3 , q=2 ,n=15 => $a_{15} = 3.2^{14} = 29152$

2 - a1=19,q=1,01,n=100 ;

= 50,8826363919.1,o1^{99} a100=

جمله :

یوه ځمککچیزه پرلپسی د زیاتیز یا مثبت پیلتوکي سره د $q > 1$ لپاره کلك مونوتون جګیدونکی ده د $0<q<1$ لپاره کلك مونوتون لویدونکی ده

غوښتنه :

د لاندې پرلپسیو ۱۰ لومړني غړي وشمیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k+2}$ b) $a_k = \sin\frac{k\cdot\pi}{6}$ c) $a_k = \frac{1}{2}[1+(-1)^k]$

d) $a_k = 1-\left(\frac{1}{10}\right)^k$ e) $a_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ f) $a_k = \cos\frac{k\cdot\pi}{2}$

g) $a_k = k^k$ h) $a_k = (-1)^{k-1}\cdot k^2$

i) $a_1 = 3;\quad a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{4}{a_k}\right)$ k) $a_1 = 1;\quad a_2 = 2;\quad a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1}\cdot a_k}$

l) $a_1 = 3;\quad a_{2n} = a_{2n-1} - 3;\quad a_{2n+1} = a_{2n} + 4\ (n \in \mathbb{N}^*)$

m) $a_k = 2k - 1 + \frac{1+(-1)^k}{2} + (-1)^{\frac{(k+3)(k+4)}{2}}$ n) $a_k = 3 - \frac{1}{2^{k-2}}$

غوښتنه :

پرلپسی د مونوتون خویونو له پلوه وڅیرئ

a) $a_k = \frac{k-2}{k}$ b) $a_k = \frac{k+4}{k}$ c) $a_k = \frac{3k}{2k-1}$

d) $a_k = \frac{1-k^2}{k}$ e) $a_k = 2^k$ f) $a_k = 1 - \sin\frac{\pi}{k+1}$

۱۸ . ۲ الف لړی

د هغه کارپلټونکی زدکړي وړاندیز ته بیرته پام راګرځوو، چی د لمړی ورځي 0,05 اجوره د دویمې ورځي 0,1 د دریمی ورځي 0,2 ، د څلورمی ورځي اجوره یی 0,4 ډالره وه او داسی نور.

په هغه وخت کی داسی پوښتنه رامنځ ته شوې:

د k - می ورځي لپاره زدکړی څومره اجوره اخلی ؟

دا مو یوې ځمککچیزې لړی ته لاربنودوي د $a_k = 0{,}05.2^{k-1}$ سره.

د هغي k - م توکی دk- می ورځي اندازه ګڼ یا د اجورې معیار دی.

دا په دې مانا چی زدکړی دk - می ورځي لپاره $0{,}05.2^{k-1}$ ډالره اجوره یا معاش اخلي.

که غواړو چی وښایو چی زدکړی په لومړیو پنځو ورځو کی څومره اجوره اخلی ، نو باید د لومړیو ورځو اجورې ځککچیزه پرلپسی، د $a_k = 0,05.2^{k-1}$ سره، یو بل سره زیاته کړو

$$0,05+0,1+0,2+0,4+0,8 = 1,55$$

دا زدکړی د لومړیو پنځو ورځولپاره 1,55 ډالره معاش اخلي‌که د لومړیو n ورځو اجوره په Sn سره وښایو ، نو یوه لړۍ د لاندې غړو سره لاس ته راځي :

$$s_1 = \quad 0,05\ .2^0 \quad = 0,05$$
$$s_2 = s_1 + 0,05.2 = 0,05+0,1 = 0,15$$
$$s_3 = s_2 + 0,05.2^2 = 0,15+0,20 = 0,35$$
$$s_4 = s_3 + 0,05.2^3 = 0,35+0,40 = 0,75$$
$$s_5 = s_4 + 0,05.2^4 = 0,75 + 0,80 = 1,55$$
$$s_6 = s_5 + 0,05.2^5 = 1,55+0,160 = 3,15$$

غوښتنه:

پرلپسی ته د ۱۵ - م توکي پورې پر مخ وده ورکړی(مخ ودیزه کړی)۰ که د ورکړ شوې پرلپسی ، چی توکي یی a1,a2,a3 ....

دي، دتوکو یو په بل پسی جمعه یا زیاتون جوړ شي

$$s_1 = a_1 \qquad = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2 \qquad = s_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3 \qquad = s_2+a_3$$
$$.$$
$$s_{20}=(a_1+a_2+\ldots+a_{19})+a_{20} \qquad =s_{19}+a_{20}$$
$$.$$
$$s_{n-1} =(a_1+a_2+..+a_{n-2})+a_{n-1} \qquad =s_{n-2} + a_{n-1}$$
$$s_n= (a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+a_n \qquad =s_{n-1} +a_n$$
$$s_{n+1}=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+a_{n+1} \qquad =s_n +a_{n+1}$$
$$.$$
$$.$$

نو یوه پرلپسی...S1,S2,s3, لاس ته راځي٠

پیژند یا تعریف ۱۸ . ۸:

د یوې پرلپسی ...;a1; a2; a3 څخه جوړه شوې پرلپسی ...S1;S2;S3
د رکورزیف انځورونی $s_1 = a_1; s_n = s_n + a_{n+1}$
سره پرلپسې لړۍ (د پرلپسیو لړۍ) یا لنډ : لړۍ بلل کیږي.

بیلګه :
د ak = 2k سره جوړې شوې پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 2^1 = 2$$

$$s_2 = s_1 + 2^2 = 2^1 + 2^2 = 6$$
$$s_3 = s_2 + 2^3 = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$
$$s_4 = s_3 + 2^4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$
$$\vdots$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

بیلګه :

د ak = (2+3k)/(k+1) سره جوړه پرلپسی څخه جوړه شوې لړۍ، په لاندې ډول ده:

$$s_1 = \frac{5}{2}$$

$$s_2 = s_1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} = \frac{31}{6}$$
$$s_3 = s_2 + \frac{11}{4} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} = \frac{95}{12}$$
$$s_4 = s_3 + \frac{14}{5} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} = \frac{643}{60}$$

$$s_n = s_{n-1} + \frac{2+3n}{n+1} = \frac{5}{2} + \frac{8}{3} + \frac{11}{4} + \frac{14}{5} + \dots + \frac{2+3n}{n+1}$$

پوښتنې:

د لاندې پرلپسیو څخه جوړه شوې لړۍ توکي Snورکړۍ

a) $a_k = 2 \cdot 5^{k-1}$ b) $a_k = -3 \cdot 2^{k-1}$

c) $a_k = 5 \cdot 0{,}2^{k-1}$ d) $a_k = 4 \cdot (-3)^{k-1}$

پیژند ۱۸ . ۹ :

د اریتمیتیکي پرلپسی توکو یو له بل سره زیاتون یا جمعه په پام کی نیسو، دا څه چی لاس ته راځي، هغه اریتمیتیکي لړۍ پرلپسي (لنډ: لړۍ) بولو:

sn = a1 + a2 + ... + an

موږ دلته بیا پیل بیلګه را اخلو، چی د اریتمیتیکي لړۍ (داد پرلپسی زیاتون پرلپسی ده چی د لړۍ پرلپسي یی غواړو ونومو او په لنډه توګه یی له دې وروسته »لړۍ « و بولو) زیاتون او په تولیزه توګه لړی زیاتون وشمیرو. تاکونکی زیاتون له مختلفو لورو موږ دوه واره لیکو، چی دواړه هغي پسی زیات کړی شو یا یي زیاتون ونیولی شو:

$s_{100} = 3+7+11+\dots +395 + 399$

$s_{100} = 399+ 395+\dots + 11 + 7 + 3$

$s_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots +a_{n-1} + a_n$

$s_{100} = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \dots + a_2 + a_1$

$$2s_n = (a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\dots+(a_n+a_1)$$

$$2s_n = (a_1+a_n) + (a_1+ d + a_{n-1}) +\dots + (a_1 + (n-1).d + a_1)$$

$$2s_{100} = 402 + 402 + 402+.. +402 + 402 \qquad 2s_n = (a_1+a_n)+(a_1+a_n)...+(a_1+a_n)$$

$$2s_{100} = 100.402 \qquad 2s_n = n.(a_1+a_n)$$

$$s_{100} = 50.402$$

$$s_{100} = 20100 \qquad s_n = n(a_1 + a_n)/2$$

د پورته شمیرني سره سم د اریتمیتیکي لړی زیاتون دی: $s_n = \dfrac{n(a_1 + a_2)}{2}$

که دلته د an=a1+(n-1)d ځاي په ځاي شي او د اسانتیا لپاره کموتاتیو قانون وکارل شي، دا په دې مانا چي n /2 ښي خوا ته راوړو، نو لاس ته راوړو:

$$s_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d)n}{2} = n.a_1 + \frac{(n-1)dn}{2}$$

بیلګې:

لومړی: $a_a = 3; d = 7; n = 50 => s_{50}(2.3 + 49.7)50/2 = 8725$

کنترول: $a_{50} = +49.7 = 346$ او له دې

$$s_{50} = \frac{(3+346)50}{2} = 8725$$

دویم- یو میراث د شپږو ورونو ترمنځ داسی ویشل کیږي چی هر یو مشر د ورپسی مشر ورور څخه 470 0افغاني زیاتي اخلي، د ځوان ورور 17000 افغانی رسیږي. معلوم کړئ چی میراث څومره دئ او هر یو ورور څومره میراث اخلي؟

a1=17000;d=4700 ,s6=6/2(2.17000+5.4700)=172500 افغانئ

ورونه په لاندې ډول پیسی اخلي

17000 افغانی ،21400 افغانی، 26400 افغانی ،
31100افغانی ، 35800 افغانی او 40500 افغانی.

لکه څنګه چی د اریتمیتیکي لړی زیاتون پیداکیږي، همداسی د هندسي لړی زیاتون هم پیداکیدی شي. عمومي فرمول به په پورتني ۱ - بیلګه کی ځانګړی یا ځانیزشي

(مشخص). د زیاتون فرمول لاس ته راوړلو لپاره د لړی sn څخه په q پراخه شوې لړۍ کموو. په دې ډول لړی لړو توکو ته لرېږي:

۱۸ . ۲ الف . ۱ ځمککچیزې یا هندسي لړیپرلپسي (لنډ: لړی):

د ځمککچیزې پرلپسی څخه جوړه شوې لړی ځمککچیزه لړی بلل کیږي.
د هندسي پرلپسی د $a = 3.2^{k-1}$ څخه جوړه هندسي لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = 3.2^0 = 3$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 3.2^0 + 3.2^1 = 3+6 = 9$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 3.2^0+3.2^1 + 3.2^2 = 3+6+12=21$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 3.2^0+ 3.2+3.2^2+3.2^3+..+3.2^{n-1}$$
$$\cdot$$
$$\cdot$$

جمله : (اکسپلیڅیت انځورونه):

د ځککچیزې پرلپسی د ak = a1 +(k- 1).d توکي سره جوړې پرلپسی څخه جوړې شوې هندسی لړۍ لپاره صدق کوي:

Sn = a1+a2q+a3q²+...+a1qn-1=a1(qn-1)/(q-1);

q|=0;Sn=n.a1 q = 1

اوبی: د $q \neq 1$ لپاره باور لري:

$$\begin{aligned}
s_n &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \\
s_n \cdot q &= \phantom{a_1 +{}} a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n
\end{aligned}$$

$$s_n - s_n \cdot q = a_1 \qquad - a_1 q^n$$
$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$
$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$$

غوښتنه: اوبی د $q = 1$ لپاره د ګرانو لوستونکو د کور کار دی.

دلته یو بل ډول ښوونه پلی کوو: پرلپسی د-n ام غړي $an = 3.2n-1$ سره ورکړ شوې.
دلته په دې توګه د لړۍ غړي لړو غړو ته رالبړیږي.

$$s_{15} = 3 + 6 + 12 + \dots + 24576 + 49152 \qquad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_{n-1} + a_n \qquad +$$

$$s_{15} \cdot 2 = 6 + 12 + \dots + 49152 + 98304 \qquad s_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \qquad -$$

$$s_{15} - s_{15} \cdot 2 = 3 - 98304 \qquad s_n - s_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15}(1-2) = 3 - 98304 \qquad s_n(1-q) = a_1 - a_n \cdot q$$

$$s_{15} = (3-98304)/(-1) \qquad s_n = (a_1 - a_n \cdot q)/(1-q) = (a_1 - a_1 \cdot q^n)/(1-q)$$

$$s_{15} = 98401 \qquad s_n = a^1 \cdot (1-q^n)/(1-q)$$

له کمون یا کمښت وروسته د لړۍ په کښه لور تیك(یواځی) پورته لیکی لومړی توکی او د لاندې کرښی اخرنی توکی پاتیږي، نور ټول توکی یوبل سره لرې کوي، د بیلګي په توګه $a2-a1.q=0$ او یا $an-an-1.q=0$
دا روښانه ده چی q نه ارزښت صفر او نه ارزښت ۱ اخستلی شي ، په لومړي حالت که به مو پرلپسی

$a1,0 , 0 , 0 , 0 \dots\dots$

لرودی او په دوهم حالت که مو د پرلپسي $a1, a1, a1 ,a1$ سره سر او کار وي

بیلګي:

$$1 - 7 ; -21 ; 63 ; -189 : \dots\dots q = -3; a_1 = 7$$

غوښتونکی s_7

$$s_7 = 7 \cdot ((-3)^7 - 1) / -3 - 1 = -15316 / -4 = 3829$$

کنترول:

$$a_7 = a_1 . q^6 = 7 . (-3)^6 = 5103 \quad , s_7 = 5103.(-3)^7 - 1/(-3)^7 - (-3)^6 :$$
$$= 5103.2188/2916 = 3829$$

۱۸ . ۲ الف ۲ اریتمیتیکي لړی

دلته غواړو چی یو ځل بیا لنډ مګر د یوه لوي سرلیك په څیر اریتمیتیکي لړۍ ته یو نظر واچوو .یوه د اریتمیتیکی پرلپسی منځ ته راغلی یا جوړه شوې لړی اریتمیتیکی لړی نوموو. د

$ak = 15 + (k - 1).4$

سره جوړه اریتمیتیکي پرلپسی څخه جوړه شوې لړی په لاندې ډول ده:

$$s_1 = a_1 = 15$$
$$s_2 = s_1 + a_2 = 15+(15+4)=15+19=34$$
$$s_3 = s_2 + a_3 = 15+(15+4)+(15+2.4) = 15+19+23=57$$
.
.
$$s_n = s_{n-1} + a_n = 15+(15+4)+(15+2.4)+..+(15+(n-2).2+(15+(n-1).4$$
.
.
.

جمله : (د اریتمیتیکی لړی اکسپلیځیت انځورونه):

د $ak = a1+(k-1).d$

سره اریتمیتیکی پرلپسی څخه جوړه شوې لړی sn اریتمیتیکي لړی لپاره صدق کوي:

$$s_n = a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+..+(a_1+(n-1)d = (n /2) (2a_1 + (n-1)d)$$

اوبی:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-3)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d)$$
$$s_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-3)d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$
$$s_n + s_n = [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + \ldots + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d] + [2a_1 + (n-1)d]$$
$$2 \cdot s_n = n \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$
$$s_n = \tfrac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot d]$$

غوښتنه:

وښايي چی sn=(n/2)(2a1+(n-1)d د sn=(n /2)(a1+an)
سره په يوه مانا دي

۱۸ . ۶ د پرلپسی او لړيو پولی

موږ تراوسه داسی لړيو سره سراو کار لروده چی اخرنی توکي يی لاس ته راوړونکي وو. داسی لړی پايلړی بلل کيږي. داسي فکر هم کيدی شي چي د لړی اخرني غړي موجود نه وي، يعني لړی دې په خوښه دوام پيدا کولی شي. په عمل کی داسی پرابلمونو سره مخامخ کيږو چی دا مو ناپای لړيو ته هڅوي. دا څرگنده ده، چي داسی لړی اريتميتيکی لړی نه دي، کم له کمه به ی اخرنی غړی په پوښتنه کی راتلی او يا د پاىډيرو غړو زياتون، په اريتميتيي لړی کی بي مفهومه دی، څکه چي دواړه لويي د nد ارزښت سره په ټولو پولو لويږي په هندسی لړيو کی هم په يوه ناپای لړی کی د اخرني غړي او يا زياتون پوښتنه بي مفهومه ده. دا روښانه ده چی د پيل غړی د|q| سره څل له امله تل جگيږي. دا د مثبت او همداډول د منفی q لپاره باور لري.

بيلگي:

۱ - اريتميتيکي لړی 2+3+4+5+..... يو لاس ته راوړونکی د زياتون يا جمعی ارزښت نه لري، څکه چی هر راتلونکی زياته وونی د ټولو پولو لوييږي ياجگيږي۰

۲ – څمککچيزه يا هندسي لړی 2+3+4,5+6,75+10,125+15,1875+...... د لومړي توکي 2 = a1 او د ويش q = 1,5 سره په ټولو پولو لوييږي. يا جگيږي نه اخر توکی او نه د جمع ارزښت معلوميدی شي. د پای توکوگڼ زياتون sn او اخرنی توکی an شميريدونکی دی.

---

۳ - ناپای ځمککچيزه یا هندسي لړۍ
1,5-3+66-122+24-48+966-....... د $a1 = 1,5$ او $q = -2$ -2 =q
سره پای ارزښت زیاتون نه لري، ځکه چې د توکو مطلقه ارزښت د هر مخکي پولی ښخه جګیږي یا لویيږي .له دې سره به ځرګنده شوې وي چی کله د ناپای هندسي لړۍ د زیاتون ارزښت پای دی.

پیلبیلګه :
یو سخی سړی غواړي د معیوبو هستوګنځی ته بسپنه ورکړی . په لمړۍ میاشت کی دی ۱۰۰۰ افغانی بسپنه ورکوي او په نورو راتلونکو میاشتو کی د هغی د مخه میاشتی نیمايي یعنی په دومه میاشت کی ۵۰۰ افغانی او په دریمه کی ۲۵۰ افغانۍ او داسی نور.
دلته $a1=1000$او $q=1/2$دي. دوخت د کموالي له امله دا لړی باید پای لړۍ وي ، مګر موږ دې پوښتنی ته تیوریتیکي ځواب ورکوو.
د پای ځمککچیزو لړیو لپاره کیدی شي دلته د زیاتون له
فرمول $s_n = 1000(1\text{-}0,5^5)/(1\text{-}0,5)$ ښخه کار واخستل شي، که چیرې n یو ناپاي لوي ارزښت نیولی شوی. که په دې فرمول کی موږ ته معلوم ارزښتونه کیښول شي، نو لاس ته راځي:

$$s_n = 1000(1\text{-}0,5^5)/(1\text{-}0,5)$$

اوس کیدی شي ولیکو $s = 1000(1\text{-}0,5^n)/(1\text{-}0,5) = 2000.(1\text{-}(1/2)^n)$

که n له ټولو پولو تیر شي، باید د $(1/2)^n$ له امله دا مات (1/2) تل کوچنی شي.
دې مات (1/2) باندې کیدی شي، چی د لویو n توکو لپاره، بالاخره صرف نظر وشي.
دلته روښانوي چی په دې توګه د زیاتون ارزښت یوه ناپای هندسي لړۍ
1000+500+250+125+65,50+32,75+......
جوړوي، کومه چی ځان و 2000 ته نزدي کوي او هغه ته هیڅ نه رسیږي. دا سړی زیات له زیاته کیدی شي 2000 افغانی خیرات ورکړي.

یادونه : هغه د دې برخې په سر کې پوښتنه هم په همدې توګه ځواب کیدی شي٠

پرلپسی او د پرلپسی لړۍ په لوړو شمیرپوهنوکی غوره رول لوبوي« ډیرې ښوونی (اوبښونې) په دې ولاړې دي، چی ایا یوه ټیك ټاکلی پرلپسی یوې معلومی یا ټاکلی پولی ته هڅه کوي او که نه؟ چی په اول حالت کی پرلپسی(konvergent لیمټ لرونکی

یاپوله لرونکي(بلل لکیږي او په دوهم حالت کی پرلپسی (divergent لیمټ یا پوله نه لرونکی) بلل کیږي.

بیلګه :
د ... مخ په اول او په درېمې بیلګو کی راوړل شوې پرلپسی دیورګنت یا پوله نه لرونکی ، په ۲ –مه بیلګه کی پرلپسی کونورګنت یا پوله لرونکی ده او د صفر لور ته هڅه کوي یا صفر ته کونورګنت ده یعني ددې پرلپسي پوله صفردی. او ۴ -مه بیلګه کی پرلپسی پوله لري او د ۳ لور ته هڅه کوی، یعني پوله یی ۳ دی.

پرلپسی شته چی د جګیدو سره یوه ټاکلی ګڼ ته په خوښه ورنزدې کیدی شي.د دې پرلپسی د په خوښه لویو غړو او د دې ګڼ کمون ترمنځ بالاخره دومره کوچنی کیږي، چی په جبشمیرني باندې هم نه شي شمیرل کیدی .
موږ د پرلپسیو دا ډول ځاننیونی، بی له جب شمیرنی یا جبشمیري، په لاندې بیلګو کی څیړو.
د پرلپسیو غړي

1 ; 1 /2; 1 /3 ; 1 /4 ;....| 0 ; 1 / 3 ; 2 / 4 ; 3 /5 ; 4 /6;.. | 3 /29 /4 ; 15 /8 : 33 /16

1;1/2;1/3;1/4;..|0;1/3;2/4;3/5;4/6;..
|3/29/4;15/8;33/16

د لاندې سره

$a_k = 1/k$ | $a_k = (k-1)/(k+1)$ | $a_k = 2+(-1/2)^k$

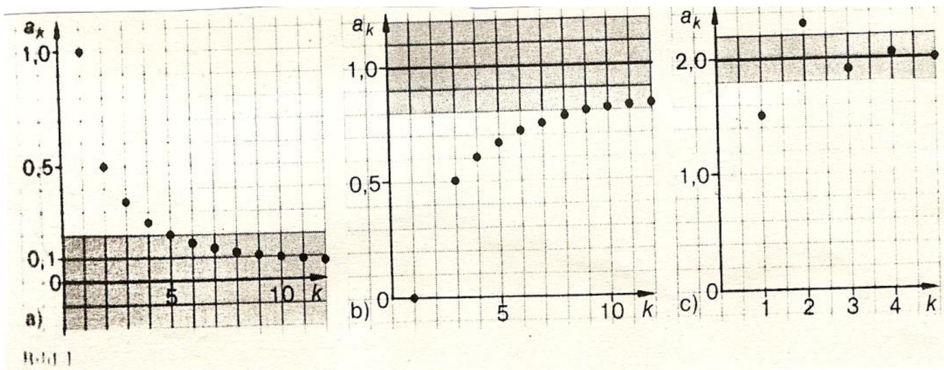
د k د جګیدو سره تل دا پرلپسځانونه ځانونه لاندې ګڼونو ته نزدي کوي

$g = 0$ | $, g = 1$ | $g = 2$

د ګراف ټکي یی تل د جګیدونکی غړی نمرې k سره د
دx - محور سره غبرګ | دx - محور سره غبرګ | x -محور ته
د y = 2 سره | د y=1 سره او په ریښتونی
له لاندې او پورته بدل | له لاندې راتلونکي
له پورته راتلونکي
راتلونکی
که په کرښه یو دواړو لورو ته پټی وکښل شي

د $y = 2$ سره — د $y = 1$ سره — د $y = 0$ سره

نو د پوره لويي k نمره توکي سره د پرلپسی ټول غړی په دې پټی کی دننه پراته دي.



دا لاندې ديفرنځ يا کمون

$\lvert a_k - 2 \rvert$	$\lvert 1 - a_k \rvert$	$\lvert a_k - 0 \rvert$

دا مانا لري، چی د جګيدونکی k نمرې توکيه خورا کوچنی کيدی شي. دا پوښتنه مو چی د کوم غړی ak لپاره دا کمون د بيلګي په توګه له 0,0001 کوچنی کيدی شي، لاندې ناسمساوات ته را هځوي

$y=2$:

$$|a_k - 2| < 0{,}0001$$
$$\left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right| < 0{,}0001$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^k < 0{,}0001$$
$$k \cdot \lg\tfrac{1}{2} < \lg 0{,}0001 \| : \lg\tfrac{1}{2} < 0\ (!!)$$
$$k > \frac{\lg 0{,}0001}{\lg\frac{1}{2}}$$
$$k > \frac{-4}{-0{,}3010}$$
$$k > 13{,}29$$

$y=1$:

$$|1 - a_k| < 0{,}0001$$
$$\left|1 - \frac{k-1}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{(k+1)-(k-1)}{k+1}\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{2}{k+1} < 0{,}0001$$
$$\frac{2}{0{,}0001} < k+1$$
$$19999 < k$$

$y=0$:

$$|a_k - 0| < 0{,}0001$$
$$\left|\frac{1}{k} - 0\right| < 0{,}0001$$
$$\frac{1}{k} < 0{,}0001$$
$$k > 10000$$

دا په دې مانا، : د ټولو پرلپسی غړو د

$k > 10000$ | $k > 19999$ | $k > 13$

سره کمون | a k - g | له 0,0001 کوچنی دی .
د ګراف لپاره باور لري، چی دا ټول ټکي د یوې پټۍ   یا تسمې په دننه کی پراته دي
سور یي 2.0,0001 په کرښه د مساوات

$y = 0$ | $y = 1$ | $y = 2$

$y = 0 \quad y = 1 \quad y = 2$

سره پروت وي   .
که دا د 0,0001 په ځاي کی یو په خوښه کوچنی رییل ګڼ   ورکړ شي، او وله
دې وغوښتل شي چی کمون یی له دې ګڼ کوچنی دی نو په ورته توګه مو
لاندېنامساواتو ته لاربنودوي.

$\lvert a_k - 0 \rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 1 \rvert < \varepsilon$	$\lvert a_k - 2 \rvert < \varepsilon$
$\left\lvert \frac{1}{k} - 0 \right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{k-1}{k+1} - 1 \right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 2 \right\rvert < \varepsilon$
$\frac{1}{k} < \varepsilon$	$\left\lvert \frac{(k-1)-(k+1)}{k+1} \right\rvert < \varepsilon$	$\left\lvert \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\rvert < \varepsilon$
$k > \frac{1}{\varepsilon}$	$\left\lvert \frac{-2}{k+1} \right\rvert < \varepsilon$	$\left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon$
	$\frac{2}{k+1} < \varepsilon$	$k \cdot \lg\frac{1}{2} < \lg\varepsilon \,\|\, : \lg\frac{1}{2} < 0$ (!!)
	$\frac{2}{\varepsilon} < k+1$	$k > \frac{\lg \varepsilon}{\lg \frac{1}{2}}$
	$\frac{2}{\varepsilon} - 1 < k$	

دا په دې مانا چی : د ټولو پرلپسیو لپاره د

$k > 1/\varepsilon$ | $k > 2/\varepsilon - 1$ | $k > \log \varepsilon / (\log(1/2))$

سره کمون $\dfrac{q^n}{1-q}$ دی .
پرلپسی له دې خویونو سره کونورګنت بلل کیږي او ګڼ g یی پوله.

پیژند ۱۸ .۱ :

یوه پرله پسی کونورګنځ Konvergent (لاتین convergere یو د بل په لور ور ځغلیدل یعني یو بل ته ورنزدېکیدل(بلل کیږي یعني د یوې ټاکلی پولی په لور هڅیږی، کله چی د هغی غړي د جګیدونکی ایندکس n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي. یوه لړۍ کونورګنت یا پوله لرونکی بلل کیږي، کله چی د برخه زیاتون پرلپسی د جګیدونکی n سره یوې پولی ته په خوښه نزدې شي.

هغه پرلپسی چی د صفر په لور هڅیږي صفرپرلپسی یی بولو هغه پرلپسی چی یوې ټاکلی پولی ته نه هڅیږي .دیورګنت بلل کیږی ») دا وروسته ه تر څیړنی لاندې نیول شوي دي.

جمله :

د ځمککچیزې یا هندسي لړی پولې تج ت لنې یا کونور ګنت لپاره شرطونه:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|q|<1$$

که $|q|<1$ وي ، پس د پای ځمککچیزې لړی لپاره د زیاتون فرمول داسی دی

$$s_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

د q^n ارزښت څخه تېرېدی شو یعني ترې صرفنظر کیدی شي، که n پوره لوي وټاکل شي.

جمله :

دناپای ځککچیزې لړۍ ...+a1+a1.q+a1.q²+a1.q3 د زیاتون sn سره پوله s = a1 / (1-q) تیك هلته لري، کله چی|q|<1

$$n=n_0(\varepsilon);..(18.7)$$

وي.

جمله :

هره پرلپسی د $(b \in R; n, k \in N)$ $a_k = \dfrac{b}{k^n}$ سره یوه صفر پرلپسی ده

جمله:

هره پرلپسی د $a_k = cq^n (c \in R$ سره د1>|q| لپاره یوه صفرپرلپسی ده۰

دلته غواړو چې دا د پرلپسی د پولی کلیمه لږ نوره هم زوره کړو.
د یوې پرلپسی د غړو an ځاننیونی څېړنه د تل جګیدونکي n لپاره،وایو چې:
که n د oe (ناپای) په لوروهڅیږي او یا لنډ n—›oe ، نو دا مو د پولی ارزښت کلیمي ته بیايي او یا کونورګنځ (convergence). موږ پرلپسی{ an}={1/n } په پام کی نیسو، د جګیدونکي n سره، ګورو چې د پرلپسی غړي تل 0 ته په خوښه یا په زړه پورې ور نزدې کیږي .
که سړی هرڅومره کوچنی ګڼ ε >0 وټاکي د یوه معلوم($n = n_0(\varepsilon)$ د لته) $n_0(\varepsilon)$ د ε په واک کې دی) څخه وروسته ټول ګڼونه د0 په ε -چاپیریال کی پراته دي

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall\, n > n_0 (\varepsilon). \qquad (18.1)$$

سړي کړی شي چی دا n دلته په ساده ډول ورکړي. د) ۱۸ . ۱ (له امله دی

$$n_0 (\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\ . \qquad (18.2)$$

د

100 / 1 =

لپاره . n0 = 100 نو | an | < 1 / 100 د ټولو n > 100 لپاره، یعني د n = 101, n
=102 , n = 103........لپاره. د = 1 / 1000000 لپاره لرو = ( ) n0
1000000پس, | an | < 1/ 1000000 د ټول n > 1000000 لپاره

په لاندې حالت کی سړی وایي: چی پرلپسی
/n{ 1 {
کنورګنت ده. هغه د پولې a = 0 لور ته کونورګنت کیږي. د دې لپاره لیکو)

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ او یا په ساده ډول

$$\frac{1}{n}\to 0 \qquad (18.3)$$

(د 1/n لیمس د n—>oe لپاره په 0 مساوي دی او یا ساده 1/n د0 په لور ځي)

د $\{a_n\}=\{(-1)^n(1+\frac{1}{n})\}$ لاندې پرلپسی په څېړنه کره لاس ته راځي: د جوړه یا جفت n لپاره پرلپسی an د+1 لورته نزدې کيږي او د ناجوړه یا طاق n لپاره پرلپسی د1- لورته نزدې کيږي. د لته سړی د دوه پولو +1 او 1- څخه نه غږيږي بلکې دپرلپسی ددوه ډیرئ شوو ټکو یا ځاي راټولشوو ټکو څخه . پرلپسی کونورګنت نه ده بلکه دیورګنت (divergence(ټیګ : ناټاکلی دیورګنس)ده ۰

پرلپسی {an}={n2} هم دیورګنت ده. دا چي an د جګیدونکی n سره د oe یا ناپای لورته ځي پس د هرڅومره لوي ارزښت K څخه اوړي یا جګیږي، نو سړی د oeپه لور د ټاکلی دیورګنت څخه غږیږي.

$$\lim_{n\to 0} n^2=+\infty \vee n^2\to+\infty;\ldots\ldots\ldots\ldots(18.4)$$

په پورته کي V د یا لپاره ځای په ځای ده

له دې پیل یادونوڅخه اوس باید د پولو(حدونو) کلیمی کره وپیژندل شي:

پيژند ۱۸ . ۲ :

یو پرلپسی $\{a_n\}$} an { پوله یا حد a لري

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow a_n\to a;\ldots\ldots\ldots\ldots(18.5)$$

که د هر یوه (هرڅومره کوچنی هم) $\varepsilon>0$

<0

لپاره یو $n_0=n_0(\varepsilon)$

داسی موجود وي چی باوري وي

$$|a_n-a|<\varepsilon;\ldots\ldots\ldots\ldots(18.6)$$

د ټولو $n=n_0(\varepsilon);\ldots\ldots\ldots\ldots(18.7)$

وایو چی پرلپسی } an { کونورګنت یا په بل عبارت پرلپسی } an { د پولی a په لور کونورګنت کیږي .که پرلپسی داسی پوله ونه لري، نو دیورګنت بللکیږي(یا دیورګنت کیږي) .

که یوې دیورګنتی پرلپسی } an { و هر (په خوښه لوی) ګن K لپاره یو)n0 = n0(K
داسی موجود وي چی باوري وي

$$a_n > K \quad \text{یا} \quad a_n < -K \qquad (18.8)$$

د ټول

$$n > n_0(K) \qquad (18.9)$$

نو د پرلپسی ځرګند یا معلوم دیورګنت بلل کیږي د + oe په لور اویا - oe په لوراو ددې لپاره لیکي

$$\lim_{n\to\infty} a = +\infty \iff (\text{په همدې ډول}) \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \qquad (18.10)$$

یا لنډ:

$$a_n \longrightarrow +\infty \Rightarrow (\text{یا په همدې ډول}) \; a_n \longrightarrow -\infty \qquad (18.11)$$

که یوه پرلپسی دیورګنت او ټاکلی دیورګنت نه وي، نو ناټاکلی دیورګنت بلل کیږي.
ددې پرلپس، $\{a_n\} = \{ n / n+1\}$ ځخه او د لاندې فورم بدلولو

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

اتکل کیدی شي چی دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، یعني $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$

اوس باید د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي :

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \iff n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کيدی شي چې تصديق کړو چې: هر $\varepsilon > 0$ ته يو $n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$
داسې موجود دی چې $|a_n - 1| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$ لپاره دی.

دا ساده بيلګه د تعريف ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعريف جوړونکی نه دی، دا نه وايي چې پوله څرنګه پيداکيدی شي .مخکي له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته ضرورت دی . مخکي له دې چې کونورګنځ اټکل کيدی شي چې دا پرلپسی پوله $a = 1$ لري، يعني

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n/n+1) = 1$$

اوس بايد د (۱۸ . ۵) تر (۱۸ . ۷) وښوول شي . دا $n/(n+1) < 1$ له امله لاس ته راځي:

$$|a_n - 1| = |[n/(n+1)] - 1| = 1 - n/(n+1) = (n+1-n/(n+1) = 1/(1/n) < 1/\varepsilon$$

د $n+1 > n \Longleftrightarrow n > (1/\varepsilon) - 1 = n_0(\varepsilon)$ لپاره .

د $= 1/100$ لپاره لرو $n_0(\varepsilon) = 99$. نود ټولو $n > 99$ لپاره داسې دی

$$|[n/(n+1)] - 1| = 1/(n+1) < 1/100.$$

ددې پورته سره کيدی شي چې تصديق کړو چې: هر $\varepsilon > 0$ ته يو $n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$
داسې موجود دی چې $|a_n - 1| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$ لپاره دی.

ددې پورته سره کيدی شي چې تصديق کړو چې: هر $0<$

$\varepsilon > 0$ ته يو $n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$
$|a_n - 1| < \varepsilon$ ،
داسې شته دی چې

د ټولو $n > n_0(\varepsilon) = (1/\varepsilon) - 1$ لپاره دی .

دا ساده بيلګه د پيژند ۱۸ . ۲. پرابلم په ګوته کوي. دا تعريف جوړونکی نه دی، دا دا نه وايي چې پوله څرنګه پيداکيدی شي .مخکي له دې چې پولې ته تګ (کونورګنځ Konvergenz) وښوولی شو، نو پولې a ته اړتيا شته دی . مخکي له دې چې

کونورګنځ (ټولې تج تلنه) وښايو نو بايد پوله مو پيژندلي وي يا کم له کمه مو ګومان په راغلی وي.

په ټوليزه(عمومي) توګه د $n_0(\varepsilon)$ شميرل هم د ستونځو ډك دي. د پولی عملي شميرلو لپاره داسی عمليو يا کاره ونو ته اړتيا ده، چی بی د پيژند ۱۸ . ۲ د هر وار استعمال څخه ټولی راپيدا کړی شو. له دې پرابلم سره ۱۸ . ٤ -امه برخه ځان مشغولوي.

کله کله دا بسوالی يا بسيا کوي چی سړی دومره پوه شي چی ايا پوله وجود لري يا شته دئ (ايا کونورګنت کيږی) بی له دې چی هغه وپيژني او يا يی وشميري. داسی د موجوديت ويناوي يواځي د کونورګنځ کريتيرين (- خويونه) کولی شي، له کومو څخه چی لاندې يو ورکول کيږي. دې ته بايد ګوته ونيسو چی دا کريتيرين د مخه د پولی پو هيدل ضرور نه نيسي) دا د مخه نيونه نه ده يعني فرضيه نه ده) .

جمله ۱۸ . ۱:

هره بنده (محدوده) مونوتون پرلپسی an کونورګنت ده ٠

دا کريتيريوم څرګند د ليدلو دی. که يوه پرلپسی تل جګيږي (کميږی ،ټيټيږي) او ټاکلی يا معلوم پای ارزښت K څخه نه اوړي(K څخه نه ټيټيږي) نو بايد an يوځاي کی راپنډ شي. دا د مونوتوني له امله يواځي په يوځاي کی کيدی شي.

يادونه : څه ګنونه چی په يوځاي کي سره ډير راټول شي ما ورته ډيری ليکلي، دا ښه نه ده، ځکه، چی ډيری مي د ډيری ياني د سيټ لپاره کارولی ، نو دلته ليکم، چې »راپنډ» شي٠

جمله ۱۸ . ۱ د بيلګي په توګه په دريمه برخه کی راوړلشوي، د طبعي لوګاريتم بنسټ په څيرګڼ e سره اړيکو يا رابطو کی استعمال لري . سړی د يو څه ستونځو سره ښوولی شي چی لاندې باوري دی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3.$$

له دې امله دا پرلپسی

$$\{a_n\} = \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$$

مونوتون او بنده (محدوده) ده او د جملی ۱۸ . ۱ له امله کونورګنت ده.

ددې پوله $e = 2,71828$ ده (پرتله یا مقایس برخه ۳ . ۱)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{18.12}$$

۱۸ . ۴ د پولی شمیرنه

په دې برخه کی غواړو چی قاعدې ورکړو د کومو په مرسته چی د پیږندلشوو پرلپسی د کونورګنت څخه د نورو کونورګنت لاس ته راوستی شو، او همداسی، چی د هغی په مرسته د پیژندلشوو پرلپسیو د پیژندل شوي پولی ارزښت په مرسته د نورو پرلپسیو پولی ارزښت شمیرل کیدی شي.
لاندې بنسټیزه جمله ښاي چی د ځانګړو شرایطو لاندې د ګڼونو پرلپسیو سره همداسی شمیرل کیدی شي لکه پخپله د ګڼونو سره.

جلمه ۱۸ . ۲ :

که پرلپسی $\{a_n\}$ او $\{b_n\}$ (پای)پوله ارزښت a اوb ولري ، یانې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \tag{18.13}$$

وي، نو باوري دي

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b, \tag{18.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b, \tag{18.15}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b},\ b_n \neq 0, b \neq 0, \tag{18.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b,\ a_n > 0, a > 0, \tag{18.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \log a_n = \log a,\ a_n > 0, a > 0. \tag{18.18}$$

دا جمله دوه ګوني وینا کوي: که د پرلپسیو غړو an او bn د کونورګنت عددونو پرلپسي د جمعې، تفریق، ضرب (زیاتون کمون ، ځل) او ویش، پوتنځ یا لوګاریتم نیولو ، د یوې نوې پرلپسي یا ترادف غړي لاس ته راولي نو دا نوې پرلپسي (ترادف) کونورګنت ده او

د پولی ارزښت یی په ترتیب د کونورګنتو پرلپسیو یا ترادفون جمعه،تفریق،ضرب(زیاتون، کمون، ځل)، ویش ، پوتنځ او لوګاریتم دی.
په لاندې کی غواړو یواځی اړیکی (۱۸ . ۱۴) وښایو. د ښوولو لپاره یی د پولی ارزښت پیژند ۱۸ . ۲ څخه غواړوکار واخلو (استعمال کړو) . نیونی (۱۸ . ۱۳) دا مانا لري، چی هر
< 0
ته یو
($n1$) (او یو $n2$)
داسی شته دی، چي باوري کوي $|a_n - a| < \varepsilon$ دتولو $n > n_1(\varepsilon)$، لپاره ،
$|b_n - b| < \varepsilon$ د ټولو $n > n_2(\varepsilon)$، لپاره‌پس معتبر دي
$|a_n - a| < \varepsilon$ او $|b_n - b| < \varepsilon$ د ټول $n > n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$
اوس باید یواځي وښایو چې د یوه ټاکلي n چه $|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)|$
د هر ε لاندې راټیټیدلی شي. لاندې باور لري

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

د ټولو $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. لپاره
په دې توګه (۱۸ . ۱۴) وښوول شوه.
د جملی ۱۸ . ۲ استعمال کی باید برسیره په نیونو یا فرضیو، چی په (۱۸ . ۱۵) تر (۱۸ . ۱۸) پورې شوي ټیك په پام کی ونیول شي چی پرلپسی {an} او { bn} څرګند پای پولی ارزښتونه a او b باید ولري. که د بیلګي په توګه $a_n \to \infty$، او $b_n \to \infty$، وي، نو فرمول (اجازه نه لرونکی استعمال !) (۱۸ ، ۱۴) په یوه په نامه ناټاکلي افادې په لورځی یعنی $\infty - \infty$،

$$(a_n - b_n) \to \infty - \infty. \tag{18.19}$$

که باور ولري $a_n \to 0, b_n \to \infty$، نو سرې د اجازې نه لرلو استعمال (۱۸ . ۱۵) یوه بله ناټاکلی افاده لاس ته راولي:

$$(a_n \cdot b_n) \to 0 \cdot \infty. \tag{18.20}$$

په لاندې کې .bzw د همداسې‌په معنا دی.

$$a_n \to 0,\ b_n \to 0 \quad \text{bzw.} \quad a_n \to \infty,\ b_n \to \infty,$$

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{\infty}{\infty}. \tag{18.21}$$

د (۱۸ . ۱۷) استعمال مو د $a_n \to 0,\ b_n \to 0$ همداسې د $a_n \to \infty,\ b_n \to 0$ همداسې $a_n \to 1,\ b_n \to \infty$ حالتونو کې مو درې نورو ناټاکلو افادو ته لاربښود وي.

$$a_n^{b_n} \to 0^0 \text{ bzw. } a_n^{b_n} \to \infty^0 \text{ bzw. } a_n^{b_n} \to 1^\infty. \tag{18.22}$$

په پورته انځورشوو اړیکو کی لاندې افادې

$$\infty - \infty,\quad 0 \cdot \infty,\quad \frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0^0,\quad \infty^0,\quad 1^\infty \tag{18.23}$$

ناټاکلی افادې بلل کیږي.
داسې پرلپسی چی د جملي ۱۸ . ۲ فورمال استعمال څخه ناټاکلو افادو ته لاښودوي ، دیورګنت او یا به مختلفو ارزښتو ته کونورګنت وي. دا یوې ځانګړې څیړنی ته اړ دي.

مخکی له دې چی داپوښتنی ځوابوو، نو باید یوڅو تیپیکي پرلپسی وڅیړل شي، کومی مو چی په نامه ټاکلو افادو ته لاربښود وي، که څه هم د جملی ۱۸ . ۲ نیوني یا فرضیي پوره نه وي.
که an —>+oe او bn —>+oe باور ولري نو طبعاَ لاس ته راځي

$a_n + b_n \to \infty + \infty = \infty$	.........(18.24)
$a_n . b_n \to \infty . \infty = \infty$	.........(18.25)
$a_n - b_n \to \infty - \infty = \infty$	.........(18.26)

دا اړیکي (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۲۵) طبعاَ د ناڅرګندې پولی ارزښت - oe لپاره هم باوري دي.
که a <— an او oe <— bn وي، نو باور لري :

$$a_n + b_n \to a + \infty = \infty, \tag{18.27}$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = \infty,\ a > 0, \tag{18.28}$$
$$a_n \cdot b_n \to a \cdot \infty = -\infty,\ a < 0, \tag{18.29}$$
$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{\infty} = 0, \tag{18.30}$$
$$a_n^{b_n} \to a^\infty = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1, \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases} \tag{18.31}$$
$$a_n^{-b_n} \to a^{-\infty} = \begin{cases} \infty & \text{für } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{für } a > 1, \end{cases} \tag{18.32}$$
$$b_n^{a_n} \to \infty^a = \infty,\ a > 0. \tag{18.33}$$

د لاندې لپاره باور لري :

$$a_n \to 0,\ b_n \to b, \tag{18.34}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{b}{0} = \infty,\ b > 0, a_n > 0, \tag{18.35}$$

$$a_n^{b_n} \to 0^b = \begin{cases} 0 & \text{für } b > 0, \\ \infty & \text{für } b < 0,\ a_n > 0, \end{cases} \tag{18.36}$$

$$\log a_n \to \log 0 = -\infty, a_n > 0. \tag{18.37}$$

د $a_n \to 0$ او $b_n \to \infty$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{0}{\infty} = 0,\ a_n > 0, \tag{18.38}$$

$$\frac{b_n}{a_n} \to \frac{\infty}{0} = \infty,\ a_n > 0, \tag{18.39}$$

$$a_n{}^{b_n} \to 0^\infty = 0,\ a_n > 0. \tag{18.40}$$

په دې همدا اوس ښوول شوي اړیکو کې لاندې افادې تاکلی افادی دي (نیونه د (۱۸ . ۲۴) تر (۱۸ . ۴۰) پورې دی په پام کې ونیول شي) :

$$\begin{gathered}
\infty + \infty = \infty,\ a + \infty = \infty,\ \infty \cdot \infty = \infty,\ a \cdot \infty = \infty, \\
\frac{a}{\infty} = 0,\ \frac{a}{0} = \infty,\ \frac{0}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{0} = \infty, \\
\infty^\infty = \infty,\ a^\infty = \infty\ (a > 1),\ a^\infty = 0\ (0 < a < 1), \\
0^\infty = 0, 0^a = 0\ (a > 0),\ 0^a = \infty\ (a < 0), \\
\infty^a = \infty\ (a > 0),\ \infty^a = 0\ (a < 0),\ \log 0 = -\infty.
\end{gathered} \tag{18.41}$$

په لاندې بېلګه کی به یو څو ګڼونپرلپسی ورکړ شي، کومی چی د تاکلو افادې په لور لارښودوي) بیایي :)

بېلګه ۱۸ . ۳:

$$n^2 = n \cdot n \to \infty \cdot \infty = \infty, \qquad \sqrt{n} = n^{\frac{1}{2}} \to \infty^{\frac{1}{2}} = \infty, \qquad \frac{1}{n^2} \to \frac{1}{\infty} = 0,$$

$$2^n \to 2^\infty = \infty, \qquad \frac{1}{n^n} = \left(\frac{1}{n}\right)^n \to 0^\infty = 0, \qquad \log\frac{1}{n} \to \log 0 = -\infty,$$

$$\frac{n}{\sin\frac{1}{n}} \to \frac{\infty}{\sin 0} = \frac{\infty}{0} = \infty, \qquad n \cdot \log\frac{1}{n} \to \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

هغه پرلپسی چې د ناټاکلو افادو(۱۸ . ۲۳) . په لور مو لاربنودوي، څه ستونځي پیښوي. دا د هوښیارو فورمبدلولو یا ښه بدلون په بنسټ په داسی پرلپسو بدلیږي چې څرګنده – یا ټاکلي افادی (۱۸ . ۴۱) په لور مو بیایي یا چې د هغي کونورګنتځانتیونی معلوم دي . لومړی دې یو څو ځانګړې پرلپسی وکتل شي:

پرلپسی مو د $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ غړو سره د نا ټاکلی افادې 1^∞ په لور بیایي او د (۱۸ . ۱۲) له مخی پوله ارزښت e لري. سړی ښوولی شي (دلته دې دا نه ښوول کیږی) ، چې دا پولی ځانتیونه ساتلي پاتی کیږي، که څوك د $an = 1/n$ په ځاي یوه په خوښه د صفر پرلپسی $a_n \to 0, a_n \neq 0$ وټاکي.

جمله ۱۸ . ۳ :

د هرې په خوښه صفر پرلپسی $\{a_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad a_n \neq 0, \tag{18.42}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e. \tag{18.43}$$

بیلګه ۱۸ . ۴ : د جملی ۱۸ . ۳ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n\cdot(-1)} = \left(\left(1+\left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{-n}\right)^{-1} \to e^{-1} = \frac{1}{e},$$

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a} = \left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right)^a \to e^a, \quad \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5,$$

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n-3} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n-3}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n-3}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)^{2n}}{\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-3}\cdot\left(1-\frac{3}{n}\right)^{2n}}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{3}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}\cdot\frac{\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)^2}{\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^n\right)^2} \to \frac{1^3}{1^3}\cdot\frac{(e^2)^2}{(e^{-3})^2} = e^{10},$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}\to e^0=1,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n}=\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n\to e^\infty=\infty.$$

د $a_n\to 0$ لپاره پرلپسی sinxn)/n) د ناټاکلی افادې 0/0 په لور ځي.
لاندې باور لري :
جمله ۱۸ . ۴: د هرې په خوښه صفر پرلپسی

(18.44)	$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0,\ a_n\neq 0,$

لپاره باور لري (د لندې الماني ژباړه= an په لینده کچ)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1 \quad (a_n \text{ im Bogenmaß}). \qquad (18.45)$$

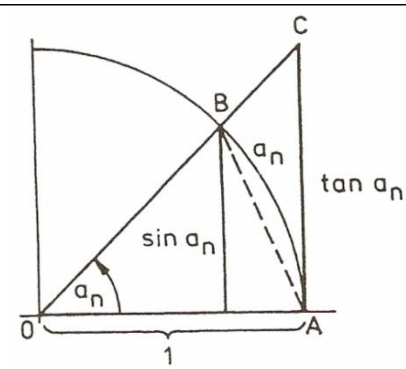


Bild 18.1

اوبنونه :د $\sin(-a_n)=-\sin a_n$ له امله او لهدې امله

چې $\dfrac{\sin(-a_n)}{-a_n}=\dfrac{\sin a_n}{a_n}$ دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵
) یواځې د 0 <an لپاره وښوول شي.

موږ دلته د یوونګردی یا واحد دایرې د کونج
بلواک څخه ګټه اخلو؟؟؟ څیره ش ۱۸ . ۱) د
درې ګوډي OAB منځهواره: $\dfrac{1\cdot\sin a_n}{2}$,

د ګردی سکتور یا ګردیبرخه OABمنځهوارې
څخهکوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي $\dfrac{1^2\cdot a_n}{2}$,
OACد منځهوارې. $\dfrac{1\cdot\tan a_n}{2}$

څخه کوچنی دی. له دې امله باور لري
$\sin a_n<a_n$ او $a_n<\tan a_n=\dfrac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

اوبښونه :د $\sin(-a_n) = -\sin a_n$

له امله او له دې امله چې $\frac{\sin(-a_n)}{-a_n} = \frac{\sin a_n}{a_n}$

دی، دلته دې(۱۸ . ۴۵) یواځې د $0 < a_n$ لپاره وښوول شي.
موږ دلته د یوونګردی یا واحد دایرې د کونج بلواک ځخه ګټه اخلو؟؟؟ ځیره ش ۱۸ .

۱) د درې ګوډي OAB منځهواره: $\frac{1\cdot\sin a_n}{2}$,
د ګردی سکتور یا ګردیېرخه OAB
منځهوارې $\frac{1^2\cdot a_n}{2}$,

ځخه‌کوچنی ده، او دا بیرته د درېګوډي OAC د منځهوارې. $\frac{1\cdot\tan a_n}{2}$
ځخه کوچنی دی.

له دې امله باور لري $\sin a_n < a_n$ او $a_n < \tan a_n = \frac{\sin a_n}{\cos a_n}$.

او ورپسی

$$\frac{\sin a_n}{a_n} < 1,\ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n},\ \text{also}\ \cos a_n < \frac{\sin a_n}{a_n} < 1.$$

د $\cos a_n \to 1$ له امله $a_n \to 0$ لپاره فرمول (۱۸ . ۴۵) باور لري۰

بیلګه ۱۸ . ۵ : د جملی ۱۸ . ۴ په مرسته د بیلګي په توګه لاس ته راځي:

$$n\cdot\sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1, \qquad n^2\cdot\sin\frac{1}{n} = n\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to \infty\cdot 1 = \infty,$$

$$\sqrt{n}\cdot\tan\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{\cos\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

بیلګه ۱۸ . ۶ :

په پرلپسی $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$، چې د ناټاکلی افادې $\frac{\infty}{\infty}$ په لور مو هڅوي کوښښ کیږي چې د مات باندې او ماتلاندې په یوه ګڼ وویشل شي، چې یو ټاکلی وینه یا افاده ترې رامنځ ته شي.

$$\frac{3n^2-n+1}{2n^2-1}=\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{3}{2},\qquad \frac{6n^3+n-1}{7n^4+n^2+1}=\frac{\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}}{7+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\to\frac{0}{7}=0,$$

$$\frac{6n^3+n-1}{2n^2-1}=\frac{6n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}\to\frac{\infty}{2}=\infty,\quad \frac{\sqrt{n^2-1}+n-1}{n+1}=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\to\frac{2}{1}=2.$$

بیلګه ۱۸ . ۷ : پرلپسې $\{a_n-b_n\}$ ، چې ناټاکلې افادې $\infty-\infty$ ته مو لاربښودوي، کید ی شي د نورو ترمنځ لاندې بڼه غوره کړې:

$$a_n-b_n=\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}=\frac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n}\to\frac{?}{\infty}.$$

که صورت پولې ته و هڅیږي، نو یوه ټاکلې افاده بیا مخ ته لرو.

$$\sqrt{4n^2+5n+2}-2n=\frac{4n^2+5n+2-4n^2}{\sqrt{4n^2+5n+2}+2n}=\frac{5+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}+2}\to\frac{5}{4},$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{2n-1}=\frac{n+1-2n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}\to\frac{-1}{+0}\to-\infty,$$

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\to\frac{2}{\infty}=0.$$

تمرینونه:

د ورکړ شوې پرلپسې $\{a_n\}$ یا ترادف پوله ارزښت a وشمیرئ (که شتون وري)! $n_0(\varepsilon)$ وټاکئ، داسې، چې د ټولو $n>n_0(\varepsilon)$ (18.6) لپاره باور ولري.

1. a) $a_n=\frac{n+1}{2n}$ b) $a_n=\frac{1}{n^2\sqrt{n}}+\frac{1}{n^3}$

c) $a_n = n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}} - n$ d) $a_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

د لاندې پرلپسیو $\{a_n\}$ پوله ارزښت وشمیرئ، که شتونولري.

.1. a) $a_n = \frac{2n+3}{3-4n}$ b) $a_n = \frac{4n-3}{2-5n+7n^2}$

c) $a_n = \frac{5n^2-6}{3n+4}$ d) $a_n = \frac{3n^3-2n^2+5n-6}{2n^3-4n^2-7n+9}$

e) $a_n = \left(\frac{3n-2}{3-6n}\right)^2$ f) $a_n = \frac{(2n-3)^2}{4n+1}$

g) $a_n = \frac{2-\sqrt[3]{n^2}}{n^2+5}$ h) $a_n = \frac{3+(-1)^n+2n}{1-3n}$

i) $a_n = \frac{4\sqrt{n}-10n}{n\sqrt{n}}$ j) $a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}$

k) $a_n = n\left(1-\sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}\right)$ l) $a_n = n\left(\sqrt[3]{n^2+2}-\sqrt[3]{n^2+1}\right)$

.2. a) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^n$ b) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

c) $a_n = \left(\frac{cn+1}{cn}\right)^n$ d) $a_n = \left(\frac{2+n}{n-4}\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{\left(1-\frac{2}{n}\right)(n+3)}{n+2}\right)^n$ f) $a_n = \left(1-\frac{5}{n}\right)^{\frac{n}{4}+3}$

g) $a_n = \sqrt[n]{3}$ h) $a_n = \frac{27^{\log_3 n}}{16^{\log_2 n}}$

2.3. a) $a_n = [2n^{-1}\cdot\sin(2n^{-1})]$ b) $a_n = n\cdot\sin\frac{1}{n}$

c) $a_n = n\cdot\tan\frac{1}{n}$ d) $a_n = \sqrt{n}\tan\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $a_n = 2n^2\cdot\cos\frac{1}{n^2}\cdot\tan\frac{1}{n^2}$ f) $a_n = \sin\frac{1}{n} - n\cdot\cos\frac{1}{n}$

19 پوله (حد)"The Limit”

لاندې د اعدادو ترادف (پرلپسې) لرو:

(1) 1 / 2 , 1 / 3 , 1 / 4 , ... ,1 / n

(2) 3 / 2 , 4 / 3 , 5 / 4, ..., (n+1) / n

(3) 2,4,6,...2n

که n د ناپای په لور یاني $n \to \infty$ ته لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (۱) د صفر په لور، (۲) د یو په لور او (۳) د ناپاي په لور ځي.

د Limit مانا پوله (حد) ده، چې له هغې تیرېدنه اجازه نه لري. په پخواني روم کې د یوه ښار د قلعې نوم هم Limitوو. په ریاضیاتو کې ، لکه په ترادفونو (پرلپسې) کې مو چې ولیدل لیمیټ د پولې یا حد مفهوم لري.

د پولې (حد) د استعمال مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوه فنکشن یا تابع سلوک یا کارو ايي داسې وڅیړو لکه ځنګه ، چې د فنکشن یا تابع (بلواک) د افقي محور (پروت - x– محور (abscissa)) باندې پرلپسي یا ترادفونه یوې پولې یا حد(تکي) ته ورنزدېکیدنه. دا لکه په پورته ننوتنه کې، چې پرلپسي یا ترادفونه په پروت محور یوې پولې ارزښت ته ځي. وبه ګورو، چې پوله یا حد په ریاضیاتو کې ددې لپاره کارول کیږي، چې مشتق وپيژنو

فعالیت :

-ایا تاسو په ورځني ژوند کې د پولې(حد) د کلمې سره بلد یاست؟

ایا تاسو په ورځني ژوند کې یوه بیلګه راوړی شئ، چې یو پولې ته له دواړو لورو، له ښی و کین لورته او همداډول له کینې و ښې لورته نزدی شی یا لاړ شی؟

په یوه ټاکلي ځای کې د توابعو پوله :

یادونه: موږ له دې وروسته د پولې په ځای پوله ارزښت لیکو، چې دا ټیک زموږ غوښتنه په ګوته کوي.

فعالیت ۱ : یوه تابع $f(x) = x + 2$ په پام کې ونیسی، چې پروتولاړسیستم یا سیستم قیمت وضعیه کې ټکی $P(2,4)$ لري

۱ - د تابع جدول وکاږی.

۲ – د تابع ګراف وکاږی

۳ - $f(2)$ پیداکړی او د x خوزښت(حرکت) باندې بحث وکړی که x د 2 ارزښت ته دواړو لورونزدې شي

۴ - د x پولې ته تلنه په ګراف(څیره) کې روښانه کړی.

بیلګه ۱ :

یوه تابع $f(x)=2x$ او یوټکی P_0 دې ورکړ شوی وي، چې کواوردینات($3/6$) لري.

۱) د تابع جدول وکاږی

۲) د تابع کراف یا څیره , وکاږی

۳) $f(3)$ پیداکړی او د $f(x)$ تلنه باندې بحث وکړی که x د "3" ارزښت ته نزدې شي

۴) د $f(x)$ پولې ته تلنه په څېره کې روښانه کړی.

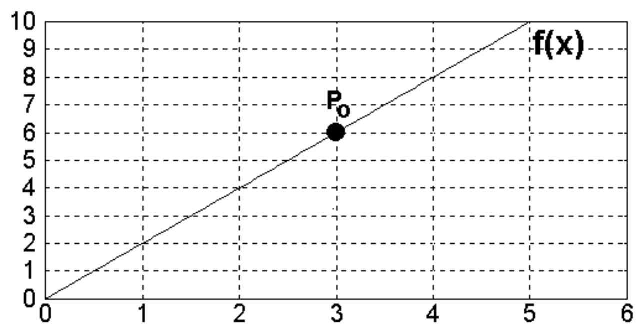
اوس غواړو دا پورته فعالیت روښانه کړو:

۱) د تابع جدول (دولی یې ګران لوستونکي پوره کوي)

x	-1	0	1	2
f(x)	-2	0	2	4

---

۲) د تابع ښيره



۳) $f(3) = 6$ او غواړو د درې ارزښتونو ښخه چې له ښۍ او کيڼي لور و ۳ ته ورنزدې کيږي و ګورو، چې په دې درې ارزښتونو کې چيرته ځي. ددې لپاره لاندې ارزښتونه په دوه جدولونو کې ښيرو

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې ګورو،چې له کيڼ لور وکښته ۲ ته نزدې کيږو او له ښي لور له کښته و پورته لورته هم ۲ ته نزدې کيږو.   بل جدول پروت کاږو

له ښي و کيڼ لور ته   له کيڼ و ښي لورته

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6.002	6.02	6.04

------------→ 6 ←------------

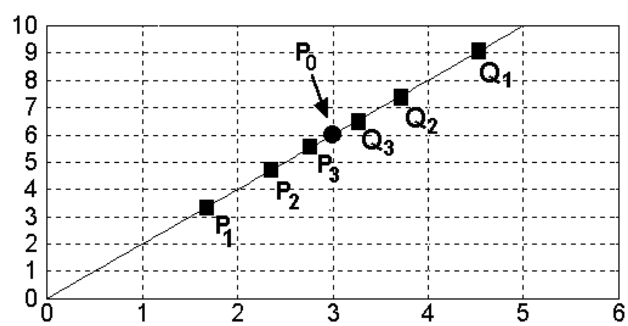
په درې پړاوونو کې د ،، f(3) " قېمت د "f(x) " قېمتونو سره پرتله کيږي. که "x" و "3" ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که "x " و "3" ته ورنږدې شي، نو د f(x) ،،پوله (حد)،، برابر په 6 دئ او دا داسې ليکو: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) اوس پورته ګراف په لاندې توګه رسموو او ښي او کيڼ لور ته موخه ور ټکي - لکه په پورته جدول کې - په نخښه کوو.

د لاندې ځېږې له مخې ټکي ... ,P_1, P_2, P_3 په پام کې نيسو، چې ټکي P_0 ته تل له کيڼ لور نږدې کيږي. او همداسې ټکي ... ,Q_1, Q_2, Q_3 چې له ښی لور ټکي P_0 ته نږودې کيږي.

کتل کيږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و ټکي P_0 ته نږدې کيږي په همغه کچه د تابع ارزښتونه و ۶ نږدې کيږي (د ټکي $P_0(3,6)$ -قېمت له امله)



که په ګراف کې ځای x=3 ته نږدې شو، نو تابع ارزښت يا فنکشن ارزښت و قېمت(ارزښت) ۶ ته نږدې کيږي.

وايو: ۶ د فنکشنf(x) پوله ارزښت دئ د x-->3 لپاره (لوستل: x د 3 (درې) په لور تلنه).

د پوله ارزښت لپاره مو ليکدول ليکښه(په پرله پسي يا ترادف کې) پيژندلی:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

یادونه: د تابع پوله یا حد په هغه ځای کې چې تابع تعریف نه وي هم کیدی شي شته وي:

په پورته کې مو د یوه تابع f(x) حد په x=3 ځای کې تر څېړنې لاندې ونیو . دلته تابع په x =3 کې پیژند یا تعریف درلود.

اړيین نه ده ، چې تابع د x=3 په ځای کې تعر یف وي، ځکه چې پوله ارزښت د x لپاره یوائې د x=3 په نزدې کې تشریح شوې.

پام : په ځنو فنکشونو یا توابعو کې ،،پوله یا حد ،، په داسې ساده ډول لاس ته نه شو راوړی - لکه د مخه - مګر د تابع د ساده بدلون له لارې دا کار سرته رسولی شو .

بیلګه ۱ :

تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوی

۱) د تابع جدول او ګراف وکاږی!

که صور د x-1 سره لنډ کړو، نو لرو :

$$f(x) = x + 1$$

د تابع "f(x) " خوزښت تر بحث لاندې ونیسیکه "x" و "1" ته نزدې شي یا همداسې که $x \to 1$.
له دواړو یانې له ګراف او جدول ځخه موږ لیکو چې f(x) د ریل عدد"1" په لور هڅیږي. نو

ښیره دي ګران
لوستونکي وباسي

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 2}$$

له دې امله روښانه ده چې تابع په هغه ټکي کې تعریف(پېژند) نه لري، په هغه کې چې پوله (حد) شمېرل شوی.

یادونه : په پورته ډول تابع به سملاسي پسي وڅېړل شي، خو د هر څه لومړی پېژند راوړو:

پیژند (تعریف) :
تابع $f(x)$ یوه پوله L لري ، که x د یوه ریل عدد د c په لورتړلی لاړ شي،او داسې یې لیکو: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

فعالیت : ایا دا پیژند رښتیا دی، که $f(c) \neq L$ وي؟

فعالیت: که ولرو: $|x|$ ، چې تل مثبت دی.

- دا بې له دې مطلق ارزښت څنګه لیکو؟

- ایا دا هغو اعداو کارولی شو، چې یو لله بل سره د شمېرنیزو نخښنو له لارې تړلي وي، یعنې چې اعداد یو له بل سره د جمعې، تفریق ... له لارې سره تړلي وي؟

فعالیت: هغه توابع چې په یوه عدد د بېلګې په توګه صفر کې تعریف نه وي ، څه بلل کیږي

بیلګه 2 : تابع $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ راکړ شوی

1) تابع ولیکی، بې له دې، چې سومبول "| |" وکاروی:

2) د تابع ګراف وکاږی
3) د $f(x)$ ارزښت پیدا کړی، که x له ښي لور و 1 ته نزدې شي

---

4) د$f(x)$ ارزښت پیدا کړی که "x" له کيڼ لور و1- ته نږدې شي

5) وښاياست چې تابع $f(x)$ څو پوله ارزښتونه لري .

يادونه: که يوه تابع چې په صورت او مخرج کې داړونده ارزښت لپاره صفر ولري او دا صفرځايونه له منځه تلی شي، نو دا ډول تابع په صفر ځای کې بې تعريف ده (يا تشيا؟functional gap) لري.

بنوونه :

۱) تابع بې له سومبول "|" داسې ليکو:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) د تابع گراف انځوروو :

که ځيره ونه کښل شوه ساده ده

3) د $f(x)$ ارزښت که x له ښي لور و 1 ته نږدې شي ، لاندې پوله راکوي

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) د$f(x)$ پوله ارزښت که "x" له کيڼ لور 1- ته نږدې شي، په لاندې ډول دی.

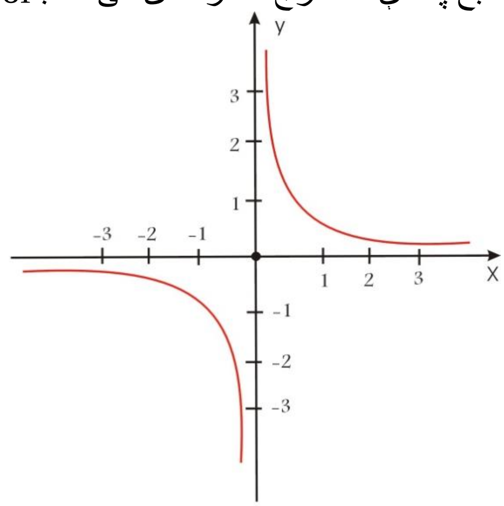
$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

5) گورو چې x ،،دوه،، ارزښتونو (1) او (-1) ته نږدې شي ، نو دوه پوله ارزښتونه لري يعني$\lim_{x\to\pm1} f(x)=\pm1$، نو له دې امله $f(x)$ پوله نه لري

بيلګه ۳ : تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ لرو، چې $X\neq 0$ دی.

تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ په x = 0 ځای کي تابع ارزښت نه لري یاني په کي x=0 تعریف نه ده. دا په صفرځای کي قطب(Pol) لري(۱).لاندي ځیره دي وکل شي.

(۱) یادونه : هغه تابع، چي مخرج یي صفر وي او صورت یي صفر نه وي، وایو چي تابع په دي د مخرج صفر ځای کی قطبPol لري.



وx=0 ته د نزدي کيدو لپاره ترادف (پرلپسي) $(x_n)=\frac{1}{n}$ تاکو.

د اړونده تابع ارزښتونو ترادف (پرلپسي) $(x_n)=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=n$ دی.

دا د n>0 لپاره یو نامحدود سعودي ترادف دی،
او د n<0 لپاره نزولي- یا متناقص ترادف دی.
دا په دي معنی، چي تابع f(x) په 0 ځای کي حد نه لري. دا هلته یو قطب لري.

قضیه : که تابع " f(x) " همغه پوله (حد) "L" ولري که "x" له ښی یا کیڼ لوري وه "c" ته نزدي شي، نو پوله(حد) شته دی او د "L" سره برابره ده.

د حدونو خویونه یا خواص : " **Properties of Limits** "

فعالیت :

په دې برخه کې د ثابتو – او کتمتې توابعو Identity function حدونه وشمیرئ

د لیمیټ خویونو څخه کار واخلئ

د پولینوم تابعو حد (پوله) پیدا کړئ

پوهیږو : په ریاضیاتو (شمیرپوهنه) کې ټول توابع چې راځي د ساده توابعو ګډوله والی combination دی، لکه د توابعو جمع(زیاتون، ضرب(څل) وېش او زنحیرونه compositon . دلته دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = (x)$ شته، که دواړه توابع سره یوځای ګړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x^2$ او داسې نور

هڅه:د توابعو $f(x) = x$, $g(x) = x - 2$, څخه کار واخلئ، چې درې نورې توابع ترې لاس ته راوړئ

فعالیت :

ایا د یوې تابع پوله کېدی شي د تابع له حل څخه پیدا شي؟

د بېلګې په توګه، که ولرو

$$f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3\lim_{x\to 2}$$

نو دا تابع ولیکئ.

یادونه: د پورته کارونې په څیر همدا څه د هرې ثابتې تابع لپاره رښتیا دی

د یوې ثابتې پوله ارزښت: که a او b ثابتې وي، نو $\lim_{x\to a} c = c$ باور لري

په همدې ډول کتمټ یا ایډنټیک تابعو $f(x) = I(x) = x$ لپاره هم لرو ، که " c " کوم حقیقي عدد وي، نو x و c ته نږدې کیږي. دا ،، ټیک داسې ده لکه،، چې $f(x) = I(x)$ وc ته نژدې شي

فعالیتونه:

1) که $f(x) = x$، $g(x) = 2$ وي ، نو لرو :

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$

2) که وي $h(x) = f(x) + g(x)$ لرو

$$h(x) = x + 2$$

3) د $h(x)$ ګراف

رسم دې ګران لوستونکي د ځانونو لپاره وکاږي

4)

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

تاسو په یاد ولرئ یا ولیکئ

$\lim\limits_{x\to 1} h(x) =$	$\lim\limits_{x\to 1} x + 2 = 3$

او $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) + \lim\limits_{x\to 1} g(x)$

هخې

۱) که $f(x) = -2$ ، $h(x) = x$ وي، پيداکړی

a) $f(x) \pm h(x)$

b) $f(x) . h(x)$

۲) وهخيږی، چې د پورته توابعو د a) او b)لپاره پولې وټاکی، که x عدد3 ته نږدې شي.

۳) که $g(x) = x$ وي،نو پيداکړی $\lim_{x \to 4} 4x$.

۴) که $h(x) = x$ ، $f(x) = -2$ وي پيدا کړی

a) $f(x) + h(x)$

b) $\lim_{x \to 2} (f(x) + h(x))$

c) $\lim_{x \to 2} h(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$

بيلګه ۳ : د $g(x) = \sqrt{3-x}$ ګراف وکاږی او پيدا کړی

a) $\lim_{x \to 2} f(x)$, b) $\lim_{x \to -1} g(x);$ c) $\lim_{x \to 3^-} g(x)$

حل:

دلته دې ګراف وکښل شي....

له ګراف څخه

$$\lim_{x \to 2} g(x) = 1,$$

الف- په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x \to 2} (3-x)} = \sqrt{1} = 1$$

ب) له ګراف څخه $\lim_{x\to -1} g(x) = 2$

یادونه : $\lim_{x\to -1} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = \sqrt{4} = 2$

c) $\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$

ګڼ دلا یل شته چې پولې شمیرنه ساده کوي، موږ. به دا لاندې بې له ثبوته ومنو که f او g توابع وي C او L او M رییل عددونه وي، داسې چې باور ولري :

نو $\lim_{x\to c} f(x) = L$, او $\lim_{x\to c} g(x) = M$,

1) $\lim_{x\to c} (f+g)(x) = \lim_{x\to c} ((f(x) + g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) = L + M$

2) $\lim_{x\to c} (f-g)(x) =$

$\lim_{x\to c} ((f(x) - g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x) = L - M$

3) $\lim_{x\to c} (f.g)(x) = \lim_{x\to c} (f(x) . g(x))$

$= \lim_{x\to c} f(x) . \lim_{x\to c} g(x) = L . M$

4) $\lim_{x\to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$; $(M\neq 0)$

5) $\lim_{x\to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ لپاره او د ټولو x ارزښتونو لپاره چې c ته نزدې کیږي.)

پوښتنه : موږ لاندې تابع لرو:

$f(x) =$	$x^2 -1$	$x \le 0$
	$x -1$	$o < x < 2$
	$2x +1$	$x \ge 2$

پیدا کړی

c) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$　b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$　a) $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$　d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

حل :

a) $\lim\limits_{x\to -2} (f(x) = \lim\limits_{x\to -2} (x^2-1) = (-2)^2 -1 = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x);\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x-1) = -1$

$= \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x^2-1) = -1$

حد شته او $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ دی:

c) $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \lim\limits_{x\to 4} (2x+1) = 2\times 4 + 1 = 9$

d) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)\ ;$

له ښي لور $\lim\limits_{x\to 2^+} (2x + 1) = 2\times 2 + 1 = 5$

له کيڼ لور $\lim\limits_{x\to 2^-} (x-1) = 2 - 1 = 1$

له دې امله پوله (حد) نه شته

e) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x-1) = 0$

بیلګه: $\lim_{x\to 2} f(x)$ ، پیدا کړی، که $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ وي

حل:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} (2x^2 - 3x + 5)$$

$$= \lim_{x\to 2} 2x^2 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 2\lim_{x\to 2} x^2 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

2 + 5 = 7× 4 - 3 ×= 2

فعالیت : که $\lim_{x\to -2} f(x) = 3$ نو پیدا کړی $\lim_{x\to -2} (f(x))^n$

یادونه:

د یوه پولینوم لیمیټ ټیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوه فنکشن لیمیټ

بیلګه ۶ :

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ وي دې

$\lim_{x\to 3} f(x)$ ، پیدا کړی

حل : $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی

که x و 3 نزدې شي پوله یا حد کیدی شي د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\times 3 + 5}{2\times 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

د راشنل- نسبتي- يا كسري فنكشنونو پولې

مورږ دا لاندې د پولينومونو ويش لرو

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_m x^m + b_{n-1}x^{m-1} + ... + b_0} \; ; b_0 \neq 0$$

په پورته پولينوم ويش كې كه x=o وي، نو $\frac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي د $b_0 \neq 0$ سره.

كه n<m وي او x ناپاى ته لاړ شي، پولينومويش صفر ته ځي

كه n>m وي او x ناپاى ته لاړ شي، د پولينوم ويش د ناپاى په لور ځي.

كه n = m وي، نو $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{a_n}{b_m}$ لرو

پام : د نسبتي يا كسري فنكشنونو (ناطقو توابعو) پوله ارزښت (حد) غواړو پيداكړو.

ددې لپاره چې د ،،ويباندو،، توابعو پولې پيداكړو، كه شته وي، نو د مختلو لارو يا متودونو څخه كار اخلو.

پوهیږو، چې د پولینومي توابعو پوله (حد) - د یوه ورکړ شوي x ارزښت لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر ، چې د جمعې . تفریق،ضرب او وېش په څېر ورکړ شوي دي وشمیرو.

که ولرو : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ نو د تابع خواص د $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$ لپاره ساده

کو چې د پورته پولینوم ویش، چې ګویاتابع ده پوله یا حد وشمېرو.

. بیلګه ۱ : پیداکړئ $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$

که $x = 1,$ وي، نو تابع تعریف ده او لرو

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x = 1$(ځاي په ځای کړو Substitue)

نو لاس ته راځي $\lim_{x\to 1}f(x) = f(1)$

بیلګه ۲ : پیدا کړئ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$

حل : تابع په $x = 0$ کې تعریف دی، نو لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

بیلګه ۳ ؛ پیداکړئ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف ده، نو لرو

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x+1} = \frac{1^2+1-2}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

که په یوه ځای یا عدد کې تابع تعریف نه وي، نو د مختلفو متودونو څخه کار اخلو، چې پوله(حد) پیداکړو، که شته وي.

بیلګه ۴ : پیداکړئ $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل : دا چې تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف نه ده، نو پوله(حد) د تابع د حل له لارې نه شي پیداکېدی. دا کېدی شي داسې پیدا کړو، چې تابع په ضریبونو تجزیه کړو .

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-6x+8}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع پوله (حد) که x و 2 ته نزدې شي، دا مانا لري، چې $x \neq 2$ دی.

دا راشنل فنکشن (ګونګه؟ تابع) رالنډیږي: $\lim_{x \to 2} (x-4)$ او لاندې پوله لري:

$$\lim_{x \to 2} (x-4) = 2-4 = -2$$

بیلګه ۵: پیداکړئ $\lim_{x \to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

ګور، چې تابع په $x = 16$ کې تعریف نه ده یانې $x \neq 16$.

په یاد ولرئ چې : $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ د $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ جوړه(مزدوج) دی‌او بر عکس.

حل: د جوړې(مزدوج) سره یې ضرب کړئ

$$= \lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\times\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\ \lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$$

$$= \lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$

$$= \lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

بیلګه ۶ : پیدا کړی $\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع په $x=3$ کې تعریف نه ده ، نو مخرج او صورت د محرج په مزدوج ضربوو او لرو:

$$= \lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\ \lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$= \lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)\ \lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$$

$$= -(\sqrt{3+1}+2) = -4$$

بیلګه ۷ : پیداکړی $\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل : تابع په $x = 1$ کې تعریف نه ده، نو په لاندې توګه مخ ته ځو

$$= \lim_{x\to1} \frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1} \lim_{x\to1} \frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

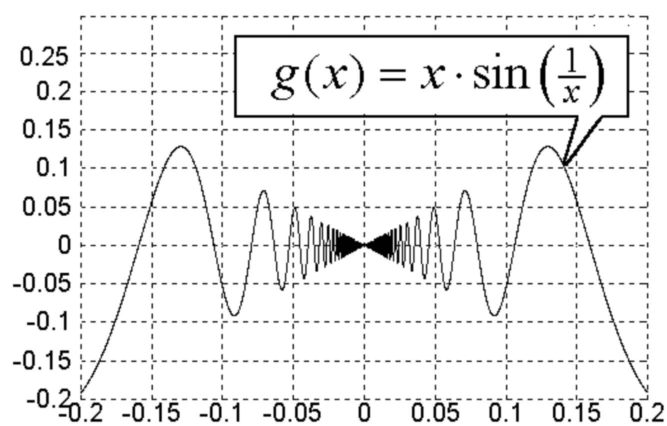
$$= \lim_{x\to1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{10}{(2x-3)(x+1)} = \frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$= \frac{10}{-2} = -5$$

د مثلثاتي توابعو پولې



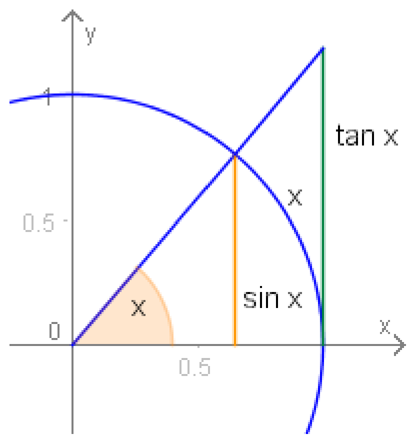
بیلګه:

قضيه ؛ كه x په راديان وركړ شوى وي ،
نو $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ غواړو وټاكو.

يادونه : تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ ناجوړه (طاق) دى

د دې لپاره چې $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ پيدا كړو، غواړو مخ له مخه لړ فكر په كار واچوو.

د ښووني لپاره ترې كار اخستلو په موخه دا مخامخ ځېره باسو او په لاندې توګه مخ ته ځو:



په يوه انټروال $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ كې د رسم له حالته سملاسي لاندې نا برابرون يا نامسوات باور لري

$$\sin x \le x \le \tan x$$

موږ له دې سره لرو $\sin x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$ او $x > 0$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{\cos x}{\sin x} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{\sin x}$$

او د $\sin x$ سره ضرب (ځل) له امله لاندې نامساوات لاس ته راځي

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$$

د پولې ته تګ له امله لاس ته راځي

$$\le \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} \le 1 \quad , \quad 1 = \lim_{x\to +0} \cos x$$

دا په دې معنا دی، چې **غوښتونکې پوله ارزښت 1 دی.**

د دې ښوونې سره موږ ښی پوله ارزښت پېداکړ، د کیڼ پوله ارزښت لپاره په ورته توګه مخ ته ځو او پوله ارزښت د $x < 0$ لپاره پیدا کوو، یعني له دې څخه هم لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو ، نو دا لاندې لاس ته راوړنه هم لرو

$$= \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \frac{\sin x}{x}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin\alpha}{\alpha}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4$$

د مساواتو $(4) + (3)$ څخه غوښتنه لاس ته راځي

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

بیلګه ۱ : حل کړی $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$

حل : وي دې $2x = \alpha$ که $x \to 0$ نو $\alpha \to 0$ او

$$= \frac{2\sin 2x}{2x} = 2\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad \frac{\sin 2x}{x}$$

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي :

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = 2 \times 1 = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$$

بیلګه ۲ : وښایاست $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y = 5x$ وي ; او $x\to 0$ ، نو $y\to 0$ هم

$$\frac{\sin 5x}{5x} \text{ او } = \frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} = \frac{5}{2}\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$= \frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو $\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}$

$$1 = \frac{5}{2}\times = \frac{5}{2}$$

قضیه : په درېګوډي ګڼ یا مثلثاتو کې بل غوره پوله ارزښت دا لاندې دی.

$$\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to 0}$$

بیلګه : وښایاست : $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$

حل : وي دې $3x = \theta$، نو $x = \theta/3$ ، که $\theta \to 0$ نو $x\to 0$

$$\text{له دې امله} = \frac{3\tan 3x}{(3x)} = 3\frac{\tan\theta}{\theta}\quad\frac{\tan 3x}{x}$$

نو $3 = 1 \quad 3\times =$

بیلګه : حل کړی $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}$

حل : وي دې $2x = y$ ، نو $x = \frac{y}{2}$ دی

که $x \to 0$ وي،نو $y \to 0$ دی

له دې امله

$$\frac{5\tan 2x}{7x} = \frac{5}{7}\cdot\frac{2\tan 2x}{2x}$$

$$= \frac{10}{7}\ \frac{\tan 2x}{2x}$$

$$= \frac{10}{7}\ \frac{\tan y}{y}$$

نو

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x} = \lim_{y\to 0}\frac{10}{7}\ \frac{\tan y}{y}$$

$$= \frac{10}{7}\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}$$

$$= \frac{10}{7}\times 1 = \frac{10}{7}$$

پای

وهڅیرۍ ، چې وښایاست:

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

الف) تانجنت tan x د sin x او cos x په ترمونو ولیکی

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د sin x او cos x په ترمونو و لیکی

پ) پوله پیدا کړی

ت) ایا قضیه رښتیا یا ټیک ده؟

په یاد ولری:

$$\cos^2 x + \mathrm{sim}^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = \quad 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 1$$

بیلګه ۵ : حل کړی $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}$

حل : $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x}$

$$= 2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\sin x$$

$$0 = 0 \times 1 \times= 2$$

بیلګه ۶ : وشمیرئ $\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}$

حل : شمیرو

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{3\tan 3x}{3x}}{\frac{5\sin 5x}{5x}}$$

$$=\frac{3\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3\lim_{\theta\to0}\frac{\tan}{\theta}}{3\lim_{\alpha\to0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{1}{1}=\frac{3}{4}$$

بیلګه ۷ : وشمیرئ ؛ $\lim_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}$

حل : شمیرنه

$$\lim_{x\to0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\ \sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2\sin 5x\sin -x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 5x \sin x}{x^2}$$

$$= 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$=2\lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x} \times \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 10\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \quad (y = 5x)$$

$$= 10 \times 1 \times 1 = 10$$

بیلګه ۸ : پیدا کړی $\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha}$

حل :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 6x - \sin 6\alpha}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{2\cos 3(x+\alpha)\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\lim_{x\to\alpha} \cos 3(x+a) \lim_{x\to\alpha} \frac{\sin 3(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= 2\cos 6\alpha \lim_{x\to\alpha} \frac{3\sin 3(x-\alpha)}{3(x-\alpha)}$$

وي دي $x-\alpha = y,\ x \to \alpha \Rightarrow y \to 0$ نو لاس ته راځي

$$= 2\cos 6\alpha\ (3) \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$$

$$= 6\cos 6\alpha \cdot 1 = 6\cos 6\alpha$$

په یاد ولرئ : مثلثاتي کتمتوالی

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

بیلګه ۹ : حل کړئ $\lim\limits_{x\to0}\frac{|\tan x|}{x}$

حل : $x > o$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|\tan x|}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{+\tan x}{x}$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{|\tan x|}{x} = -\frac{\tan x}{x}\lim_{x\to0^-}$$

$$= \lim_{x\to0^-}\frac{\tan x}{x}$$

$$= -1$$

لرو $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{|\tan x|}{x} \neq \lim\limits_{x\to0^-}\frac{|\tan x|}{x}$

ګورو، چې د پورته تابع پوله یا لیمیټ نه شته

ناپرېکیدنه(متمادیت)"Continuity"

په دې برخه کې لولو ، چې يو فنکشن يا يو تابع په يوه ټکي يا يوه اينتروال کې څنګه ځان نيسي يا کوم حالت غوره کوي. ايا دا تابع په کوم ځای کې ټوب وهي، يا پرې کيږي او که يا په نه پرېکيدني توګه د اينتروال په دننه کې ځغلي.

د تابعو ناپرېکيدنه Continuous functions

په دې موضوع کې مورږ د د يوې تابع د ناپرېکيدني(متماديت) په هکله څېړنه کوو او د ناپرېکيدني يا متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

// رسمه // // رسمه // // رسمه //

(3) (2) (1)

$f(x) = x^2 - 1$ $f(x) = \frac{1}{x}$ $f(x) = \frac{|x|}{x}$

دا رسمونه دې هم ګران زده کوونکي وکاږي، زه د رسم کولو ستونځې لرم(تمرين)

b دې د تابع f په پيژندورشو يا تعريفساحه کې يو حقيقي(رييل) عدد وي. تابع f په bکې ناپرېکيدونکې (متمادي) ،بلل کيږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف وکښل شي، بې له دې، چې پنسل له کاغذ پورته کړی شي.

له دې امله تابع $f(x) = x^2 - 1$ او تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ په ټکي x=b کې ناپرېکيدونکي دي.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ په x=o کې ناپرېکيدونکي نه ده ياني پرېکيدونکي ده يا ټوپ وهې.

تابع په x=a کې پرېکيدونکې ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهې او يا ماته شي.

لرو $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په x = o کې نه شته

بیلګه ۱ : وي دي $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 \; ; & x \geq 1 \\ 1 - x \; ; & x < 1 \end{cases}$

الف) ګراف وکاږی ګراف

ب) پیدا کړی $\lim_{x\to 3} f(x)$

پ) پیداکړی $\lim_{x\to 1} f(x)$

که تابع په x=3 او x=1 کې نابرېکیدونکې وي

حل :

الف) ګراف کېن لور ته کښل شوی دی

ب) $\lim_{x\to 3} f(x) = (2x + 1) = 7$

$f(3) = 7$

پ)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x + 1) = 3$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - x = 0$$

له ب) او پ) څخه لرو

$$\lim_{x\to {}^+1} f(x) \neq \lim_{x\to {}^-1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 3$ ناپرېکیدونکې او $x = 1$ کې پرېکیدونکې ده یا نامتمادي

بیلکه ۲ : وي دې $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x};\quad x \neq 0$

$=3 \quad ;$

// رسمه //   الف) فنکشن رسم کړی

ب) بحث وکړی، چې تابع په $x = 2$ او $x = 0$ کې ناپرېکیدونکي ده او که نه

حل : الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	1	2	5

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + x}{x} = \lim\limits_{x\to 2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3 + 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f پوله (حد) شته او $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ ، نو تابع په $x = 2$ کې متمادي یا نه پرېکیدونکی دی

وي دې $x = 0$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^+}$$

$$f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x3 + x}{x} = 1 \lim_{x\to 0^-}$$

دا دا مانا لري چې $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ په دې مانا دی چې $f(0) = 3$.

دا دا مانا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(o)$

تابع په $x = 0$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

که له دې شرطونو کوم یو شرط پوره نه وي نو تابع پرېکدونکې(نامتمادي) ده

بیلګه ۳: **وي** دې

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}، \quad x \neq -3$$

ایا تابع په $x = -3$ کې ناپرېکېدونکې ده؟

حل) تابع $f(-3)$ تعریف نه دی، له دې امله تابع په $x = -3$ کې متمادي نه دی

پیژند(تعریف) :

f دې یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي.

تابع f په $x = c$ کې ناپرېکیدونکی بلل کیږي، که دا لاندې شرایطو پوره وي.

۱) $f(x)$ تعریف دی ۲) که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي)

۳) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره متمادي وي ، نو تابع په واز اینتروال (a, b) کې هم متمادي دی.

بېلګه ۴ : وي دې

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; \quad x \le 1 \\ 4+x & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

وګورئ، چې تابع چېرته ناپرېکېدونکې ده او چېرته پرېکېدونکې.

حل : په $x = 1$ کې f تعریف دی

$$f(1) = 3.$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x^2 + 1) = 3$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4+x) = 5$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

له دې امله تابع په $x = 1$ کې پرېکېدونکې (نامتمادي) ده

بیلګه ۵ : وي دې

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; \quad x < 2 \\ 3 & \quad x = 2 \\ x + 3 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

د تابع $f(x)$ متمادیت په $x = 2$ کې تر بحث لاندې ونیسی

حل : تابع $f(x)$ په $x = 2$ کې تعریف ده او لرو $f(2) = 3$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 5$$

او

$$\lim_{x\to^{+}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} f(x)$$

$$\lim_{x\to^{-}2} f(x) = \lim_{x\to^{-}2} (x^2 + 1) = 5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $f(x) \neq f(2) \lim_{x\to 2}$)

دا په دې مانا دی، چې تابع په $x = 2$ کې پرېکیدونکې(نامتمادي) ده

د ناپرېکیدونکو یا متمادي توابعو خویونه

فعالیت:

۱) د توابعو f او g جمع (زیاتون) پیداکړی

$$(f+g)(x) = \ldots\ldots$$

۲) د f او g توابع په x=2کې متمادي(ناپرېکیدونکي= دي، نو :

$$f(x) = \ldots\ldots.. \ \& \ \lim_{x\to a} g(x) = \ldots\ldots \lim_{x\to a}$$

۳) د پوله ارزښتونو (حدونو) ارزښتونه وکاروئ

$$(f + g)(x) = \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) \lim_{x\to a}$$

$$\ldots : \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = (f + g)$$

$$(a)$$

له دې امله (f+g) په x=a کې متمادي دي.

که تابع f اوg په x=c کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو ځخه يې هره يوه په x=cکې متمادي ده

۱) د توابعو جمع $f+g$

۲) د توابعو تفريق(کمون) $f-g$

۳) د توابعو ضرب(ځل) $f.g$

د توابعو وېش $\frac{f}{g}; g \neq 0$

بيلګه ۱ : وي دې

$$f(x) = \sin x + 1,$$

$$g(x) = x^2 + 3x - 2$$

نو ۱) f او g په x=1 کې متمادي دي.

۲) وښيې، چې الف) $\sin x + x^2 + 3x - 1$

ب) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2)$

په x=1کې متمادي که نامتمادي دي

حل :

$$1)\ \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2;$ نو f په x = 1کې متمادي دی

نوg په x = 1 کې متمادي دی

دويم خوي وخيرئ

2) a) $\sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$

۲) الف)

$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کښمتمادي ده

(ب   b) $(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x).\ g(x)$

$= (f.g)(x)$

نو د ناپرېکيدونکو- يا متمادي توابعو ضرب (حَل) په $x = 1$ کې متمادي دئ

بيلګه ۲ : وي دې

$f(x) = x + 1, \qquad g(x) = 3x - 2;$

وخيرئ، چې ايا $f(x).\ g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده

حل :

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$

$\lim_{x \to 2} g(x) = 4 = g(2)$

$f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x).\ g(x) = 3(4) + 2 -2 = 12$$

$$= \lim_{x\to 2} f(x).\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

$$= f(2)\ .\ g(2)$$

له پورته څخه لاس ته راځي، چې $f(x).g(x)$ متمادي دئ

په کېنې لور بند ايټروال $[a,b]$ کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي يا ښايي، چيرته چې $f(a) \neq f(b).$ دئ.

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ نو ګراف له ټکي $(b, f(b))$ څخه نه شي انځورېدلی تر څو پرته (افقي)کرښه $y = k$ د ثابتې k سره غوڅه نه کړي .

(انځور راځي)

له پورته څخه ليکلی شو:

که تابع f په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادي(ناپرېکېدونکي) اوk د b او ترمنځ پروت وي، نو هلته کم له کمه يو عددc د $f(a)$ او$f(b)$ ترمنځ شته داسې چې $f(c) = k$ دی

بېلګه ۳ : وي دې $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ x \in [1,2]$

وښايئ، چې يو $c \in (1,2)$ شته داسې،چې $f(c) = 11$ **وي.**

حل : $f(x)$ يو پولينوم دئ نو f په بند اينټروال $[1,2]$ کې متمادي دئ. لرو

$$f(1) =1^3 + 4\ (1) = 5;\ f(2) = 8 + 4\ (2) = 16$$

$f(1) \neq f(2)$ او $5 < 11 < 16$

له دې امله يو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دئ

بیلګه ۴ : وي دې

$f(x) = \begin{cases} 2x + 4; & -1 \le x < 2 \\ |x-10| ; & 2 \le x \le 20 \end{cases}$

نو

الف) و ازمایی، چې تابع متمادي ده　ب) و ازمایی، چې یو $c \in (-1, 20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړی.

حل :

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 2x^2 + 4 = 8$

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = 10 - 2 = 8$

له دې امله لرو

$\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2} f(x) = 8$

$f(x) = 10 - 2 = 8$

ګورو چې تابع په $[-1, 20]$ کې متمادي دی

b) $f(-1) = 2x - 1 + 4 = 2$

$f(20) = |20-10| = 10 \quad \Rightarrow f(-1) \ne f(20)$

په دې اساس لرو　$2 < 6 < 10$

له دې امله لرو　$c \in (-1, 20): f(c) = 6$

$2x + 4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2).$

$= 6 \Rightarrow |x-10|$

$x - 10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2, 20)$

یا $10 - x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2, 20)$

د c ارزښت دی $1, 4, 16$

بېلګه ۵ : وي دې

$f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$

وښایی چې $c \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ شته د کومې لپاره چې باور لري $f(c)=4$ او c پیداکړی.

حل : د تابع f د ساین تابع ده، نو له دې امله f متمادي(ناپرېکېدونکی) دی

$f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin \frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$

$f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ نو موږ لرو :

تابع f متمادي ده او لرو $1 < 4 < 5$

دا په دې مانا چې $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ شته، د کوم لپاره چې $f(c) = 4$ صدق کوي

د دې لپاره چې c پیدا کړو نو لرو

$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$

$$2 \sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

د ګراف څخه څرګندیږي، چې f په ایتروال [a,b] متمادي دی ، f(a) او f(b) متضادې مخنځښې(علامې) لري، نو c د f(a) او f(b) ترمنځ د منځ ارزښت جملې له مخې د K=0 سره کم له کمه یو C د a او b ترمنځ شته، چې لاس ته ترې راځي f(c) = 0 .

دا په دې مانا چې x=c د f(x) = 0 مساواتو یو حل دی . انځور شته

بیلګه ۶ : وي دې $f(x) = x^3 + 5x - 23$

وښایی، چې تابع f د x -محور په اینتروال (2.3) کې غوڅوي.

حل : f پولینومتابع ده ، نو f په اینتروال کې [2,3] متمادي دی.

$$f(2) = 2^3 + 5\,(2) - 23 = -5$$

$$f(3) = 3^3 + 5\,(3) - 23 = 19$$

اود متضادو مخنځښو(عالمو) سره $f(2) \neq f(3)$

له دې امله د $c \in (2,3)$ لرو چې $f(c) = 0$ دی

د څپرکي ټولګه " Chapter Summary "

پیژند: تابع f(x) یو حد L لري، که x ترلیي یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. دا په دې معني چې د f(x) لپاره، چې ترلی و L ته ځي دا دی، چې x ترلیclose to و c ته لاړشي او داسې یې لیکو : $\lim_{x \to c} f(x) = L$

قصیه : که $f(x)$ همغه پوله ارزښت L ولري ،که x د ښی یا کینې لور و c ته نزدې شي، نو پوله ارزښت شته او د L سره برابر دی.

د پوله ارزښت یا حد خویونه :

که f او g توابع وي، c;L او M حقیقي اعداد وي داسې چې $\lim_{x \to c} f(x) = L$

او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو لاندې لرو:

$$1)\ \lim_{x \to c} (f + g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L + M$$

$$2)\ \lim_{x \to c} (f - g)(x) = \lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L - M$$

$$3)\ \lim_{x \to c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot M$$

$$4)\ \lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو ارزښتونو لپاره ، چې c ته ور نزدې کیږي.

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

قضیه : که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لر: $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

پیژند : f دې یو تابع وي، چې د ټولو x لپاره په یو واز انتروال کې چې $x = c$ ولري ،تعریف وی، نو وایو چې f په $x = c$ کې متمادي، د لاندې شرایطو لاندې:

---

1) $f(x)$ تعریف دی 2) $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ شته دی

3) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټول $x \in (a, b)$ لپارره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) کې متمادي ده.

پېژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال $[a, b]$ کې متمادي ده، که تابع له ښي لور په $x = a$ ې متمادي وي او له کینې لور په $x = b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر ارزښت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه : که f او g په $x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې توابع هر یو په $x = c$ کې متمادي دی.

اول) د جمعې $f+g$ تابع

دویم) د تفریق $f-g$ تابع

دریم) د ضرب $f.g$ تابع

څلورم) د ویش تابع

د منځني ارزښت قضیه: که تابع f په بند انتروال $[a,b]$ کې متمادي وي او k د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ یو عدد وي، نو کم له کمه د a او b ترمنځ یو عدد c شته، د کوم لپاره چې $f(c)=k$ باور لري.

ترنه

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت (حد)

اول : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$

د ۵ وېشنه په يوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي ياني .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دويم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\mp}$$

د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې يو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي ياني .

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

دريم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^{+}$$

په مخرج کې فقط x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت کيږي.که ۵ په يوه ډېر لوی مثبت عدد ووېشل شي، نو يو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، ياني
ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط له پورته لور ور نزدې کېدني سره .

څلورم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^{-}$$

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت ميږي.. د3- وېشنه په يوه ډېر لوی مثبت عدد باندې يو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي ياني -.

ګراف G_f يو پروت اسيمپتوت $y=0$ لري ، چې فقط کښته ګراف ته ور نزدې کيږي.

د پرېښودنې - یا ترې صرفنظر کونې اصول

اول :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

په صورت کې د x توانونه، په مخرج کې د x^2 توانه په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي. که ۱ په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد وویشل شي. نو □ □ ترې لاس ته راځي.

ځېره G_f پروت اسیمپتوت(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}=\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\pm\infty$$

- په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیونو او له ټولو ثابتو تریږو (صرفدظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول پوله ارزښتونه □ □ لاس ته راځي.

ځېره G_f مایله اسیمپتوتي راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د ۱ په اندازه ستره ده.

دریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\quad\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$$

په صورته او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تېرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه 2/3- راکوي.

ځيره G_f پرته اسيمپټوت راکوي ، چې $y=-2/3$ ده.

خلورم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\mp}$$

په صورت کې د x^2 څخه کوچنيو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنيو توانونو او همداسې له ثابتو تېرېږو (صرف دظر پرې کوو) . که په ووېشل شي ، نو يو کوچنې مثبت يا منفي عدد ياني$\mathbf{0}^{\mp}$ ترې لاس ته راځي.

ځېره $\mathbf{G_f}$ يو پروت اسيمتوت$y=0$ لري،چې له پورته او کښته لور ورنزدې کيږي.

شميرنيز حلونه

دويم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(قوسونو) راوستنې او بيا د x^2 سرره لنډوني وروسته مخرج د ۱ په لور ځي او صورت د $+\infty$ په لور ، نو

ترمونه $2/x$ او$1/x$ و صفر ته نزدې کيږي.

ځيره G_f يوه مايله اسيومپټوت لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په ۱ لويه ده.

دريم :
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{2}{x}}=-\frac{2}{3}$$

- که x^2 له نوکانو راووېستل شي او بيا لنډ شي،نو صورت د صفر په لور ځي يا صفر ته نزدي کيږي;مخرج ,۱ ته نزدې کيږي، ځکه ټول ترمونه د او و صفر ته ځي په صورت فقط ترم د صفر مخنخښه ټاکي.

خېره پرته اسيمپتوت لري له پورته او ښکته نزدې کيدنې سره.

ځلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}=$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو دباندې نيسو او بيا په ترتيب شمېرنيزه عمليه مخ ته بياوو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه :

او ل : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\qquad \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

-- ------------------------------------

په پورته بیلګه کې داسې مخ ته تللي ي،چې په صورت کې له ټولو عددونو تېرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له ۱ کوچنی یعنې صفر وي او په صورت کې له ټولوأه ۲ څخه کوچنې توان څخه تېرېږو. ګورو، چې په صورت کې پاتېکیږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناباې په لور ځي.

دویم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}= \quad 0^{\pm}$

په پورته بېلګه کې په صورت کې له ۱ او مخرج کې له ۲ څخه تېرېږو او بیا صورت او مخرج په x ویشو، چې لاس ته رانه یې یو یې د یوه ثابت عدد وېشل وي په x . چې د x □□ سره تابع و $0^{\pm}$ ته ځي.

بیلګه ۳ : لرو : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=$

په صورت کې له ۲ او مخرج کې له 2x څخه تېرېږو او د x^2 سره لنډوني وروسته د x^2 سره لنډیږي او په دې ډول لاندې پایله لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}= -\frac{2}{3}$$

بیلګه ۴ : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= \quad 0^{-}$

په صورت کې له ۱ او مخرج کې له اوو څخه تېرېږو او بیا له لنډوني وروسته یو ثابت عدد په ناپاې وېشل کیږي، چې پایله یې 0^{-} دی، یعنې لرو :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}= 0^{-}$$

۱۹ . ۵ تمرینونه

۱ . د بلواکو پولی

۱ . ۱ لاندې پولی وټاکی

1.1.1. a) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

c) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x+1}$ d) $\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

1.1.2. a) $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{27-x^3}{x-3}$

c) $\lim_{x\to -1}\frac{x^4-1}{1+x}$ d) $\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{32+x^5}$

1.1.3. a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{2x-6}$ b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

c) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ d) $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

1.1.4. a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ d) $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

1.1.5. a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ d) $\lim_{x\to 0}\left(\sin x\frac{\cos x}{x}\right)$

e) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$ f) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$ h) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

i) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{1-\cot x}$ j) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}}{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}$ l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$

۱.۲ په ورکړشوو ځایونو کی د لاندي بلواکو کيڼ او ښی پولې وټاکې

a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

b) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ für $x = 0$

c) $f(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}}$ für $x = 1$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ für $x = 0$

e) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ für $x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{x}{2x + e^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

g) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-1}}$ für $x = 1$

h) $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 3}{3^{\frac{1}{x}} + 2}$ für $x = 0$

i) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x-1}}}$ für $x = 1$

j) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ für $x = 1$

k) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x = -1$

l) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}\, x$ für $x = -1$

۲ . ناپریکیدونکی بلواك : لاندي بلواك د کوم لپاره پريکيدونکی ځايونه لري، دا د کوم ډول دی او که ممکن وي، په کومه توګه دا له منځه وړ لکيدی شي.

a) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

b) $y = \dfrac{x+2}{|x+2|} \cdot x$

c) $y = \dfrac{1-x}{1-|x|}$

d) $y = \dfrac{x+2}{x+2} + \dfrac{1}{x+1}$

e) $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{1+x} - 2}$

f) $y = \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

g) $y = \sin\dfrac{1}{x}$

h) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$

i) $y = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

j) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

k) $y = x \cdot 2^{\frac{|x|}{x}}$

l) $y = \ln 2^{\frac{1}{x-1}}$

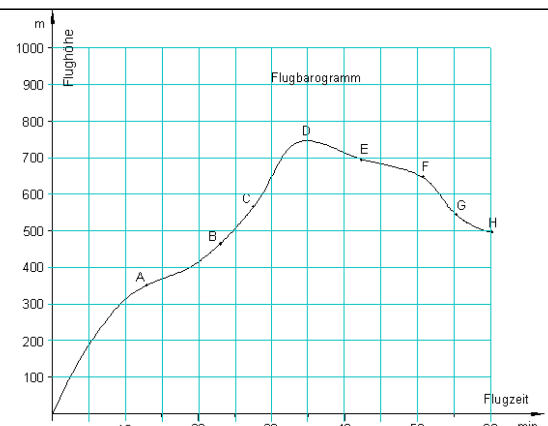
۲۰ . مشتقشمیرنه(رابیلیدنه)

د.II.1 تابع تغیر منځ ارزښت (منځنی قیمت) Average rate of change

دکتاب په دې برخه کې موږ د ریاضیاتو یوه غوره برخه، چې د ریاضیاتو زړی ورته ویلی شو ، تر څېړنې لاندې نیسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه د یوه یادښت په څېر راوړم:

که له یوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغیر منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږېږو ، نو موخه ترې په یوه ټکي یا دوه ټکو کې د تابع جګوالی ، میل اویا تانجنت دی او دا دریواړه کلمې د ریاضیاتو له مخې په همغه یوه معنا دي او وبه ګورو، چې همداسې د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

په یوه ټکي کې د تابع د ګراف میل(جګېدنه)



په الوتکوکې د الوتنېدلیک(الوتنلیک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې ټل د الوتنې جګوالی د الوتنې د وخت په واک کې یا د وخت تابعیت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم لیکي. که دا په پېښتو واړوو، نو د لیک بکس به ورته ووایو.

په پورته ګراف کې د یوې الوتکې د الوتنې د بیلا بیلو وختونوجګوالی ښوول شوی.

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زیات دی؟

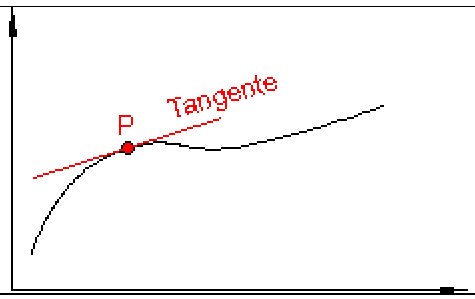
-ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

-ایا د یوې کرښې او منحني جګوالی هرچېرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :
۱ - ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچېرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څېړل کیږي.

۲ - په لاندې بیلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کرښې میل هرچېرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جګوالي څخه غږیږو.

بریښي چې لاندې پېژند یا تعریف عاقلانه دی:

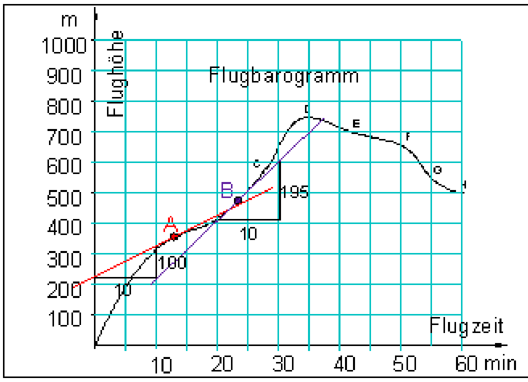
پیژند (تعریف): د یوې تابع ګراف میل (جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی	

لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمسټکي(مماس) په چاپېریال کې د امکاناتو سره سم لمسټکي(مماس) ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پېژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل د یوې کرښې میل دی.

د ګراف د جګیدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جګیدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شډل یا ساده ډول شمیرل کېدی شي:



د A په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{100\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

د B په ټکي کي جګیدنه :

$$\frac{195\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 19{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

زمونږ د بیلګي لپاره میل یا جګېدنه په یوه ټاکلي ټکي کي د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې $12{,}5\ \text{min}$ ، د میل یاجګېدني چټکتیا(سرعت) نږدې $10\,\frac{m}{\text{min}}$ ده

د B په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې $23{,}0\ \text{min}$ ، د جګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $19{,}5\,\frac{m}{\text{min}}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمستکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A اوB په ټکو کې هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

II.2 په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

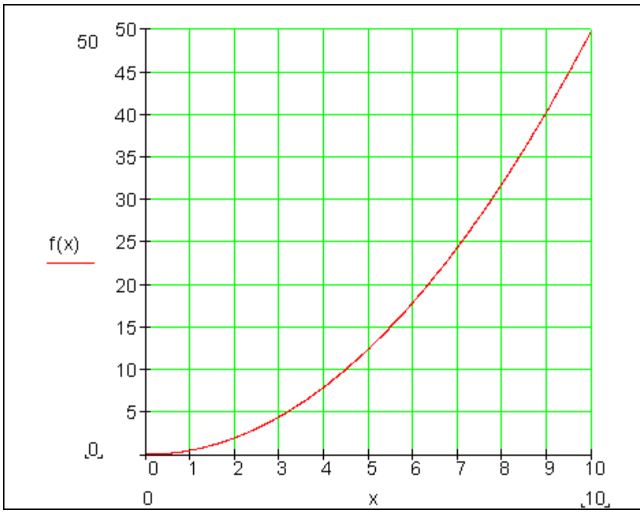
معلومه ده ، چې یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلې لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.

دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو

$s = f(x) = 0{,}5x^2$

مخامخ : د تابع ګراف



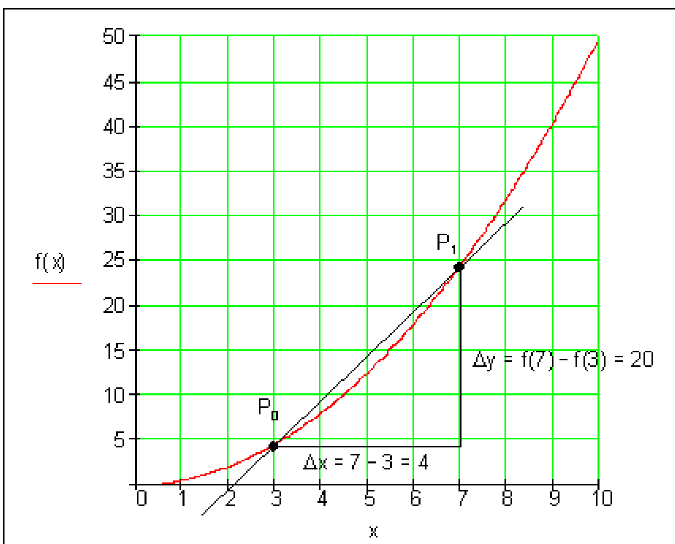
اوس بايد منځنی ارزښت(منځنی ځګوالی) Averagerat of change د ۳ ــمې او ۷ ــمې ثانيی ترمنځ وشمېرل شي.

ددې لپاره اړونده سيکانت انځوروو او د هغې ځګوالی شميرو.

اوس دې د تغير ارزښت (منځنی ځګوالی) د ۳ ــمې او ۴ ــمې ثانيو ترمنځ وشميرل شي.

په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا ځګوالی څومره دی؟

د منځنی ځګوالي داسې مخ ته بوزی، چې د ټکو P_1 او P_0 ترمځ واټن تل کوچنی شي،داسې چې ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزيږي.



د ۳ ــمې او ۷-مې دقيقې ترمنځ

منځنی تغيرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7)-f(3)}{7-3} = \frac{24,5-4,5}{7-3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ ــمې او ۴ ــمې دقيقې ترمنځ

منځنی تغيرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4)-f(3)}{4-3} = \frac{8-4,5}{4-3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دريمې دقيقې ته د ورنږدې کيدنې شميرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x = x-3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x)-f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شميرنه په ګووته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزيږي يا ورنږدې شي، نو د تغير ارزښت(جګېدنه) تل زياته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کيږي.

موږ په دې توګه يو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغيرارزښت (لحظوي جګيدنې) ته تل ورنږدې کيږي.
که موږ فيزيکي لويي (واحدونه) په خپله بېلګه کې وکاروو، نو د تغيرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتيا لپاره يوون(واحد) دئ

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دياګرام چټکتيا (سرعت) په ګوته کوي.

II.3 د لحضوي(د سترګو رپ) تغيرارزښت شميرلو ته شميرنيزه تګلار

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اینتروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغیر ارزښت
جګوالی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9+6\Delta x+(\Delta x)^2\right]-0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5\cdot 9+3\Delta x+0,5(\Delta x)^2-0,5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3+0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3+0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغیرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، موږ وایو که Δx د صفر په لور وهڅیږي ($\Delta x \to 0$)، نو د منځنی تغیر ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 به لور هڅیږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغیرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره لیکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور ري: $3+0,5\Delta x \to 3$

یا

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$$

II.4کمښت ویش(د تفاضل(؟) ویش) Difference quotient

په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څېړنې لاندې نیسو.

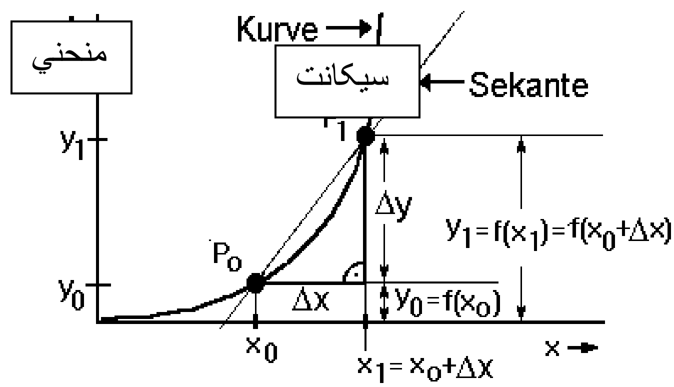
د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي:

کرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د قاطع (seconce) پیژند : قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي(لاندې څېړه وګورئ)



پایله : د قاطع(غوڅوونيsecant) میل یا جګیدنه(جګوالی): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو ،،میل (جګوالی) ،، یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

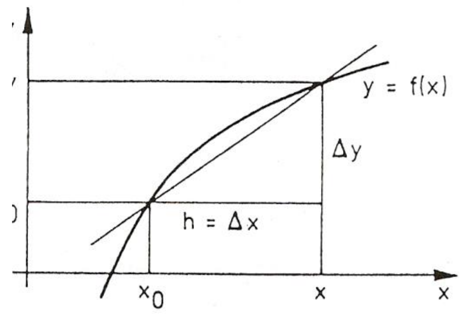
$$\boxed{m_S = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

پیژند(تعریف)

د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي).

نو د تفاضل – يا کمښتويش Difference qutient د قاطع ميل شته دی، چې په لاندې ډول يې ليکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



د پيژند لپاره خيره

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د ميل شمېرنه ده. دا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش يا د تفاضلونو ويش د مشتق د تعريف لپاره په کار راځي.

بيلګه:

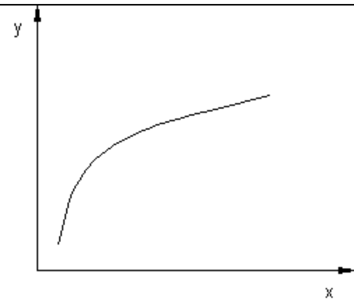
د $y=f(x)=3x^2-5x+4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ويش(دتفاضل وېش) پيدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}$$
$$=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}$$
$$=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}$$
$$=6x+3h-5$$

II .2 مشتق Diffrentialquotient

II.2.1 د غوڅوونې(تقاطع) جګوالي څخه و د تانجنت جګوالي یا جګیدنې ته

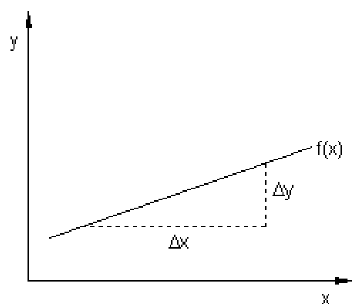
یو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.



که د تابع جګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع جګیدنه په نزدې ټولو ټکو کې توپیر لري.

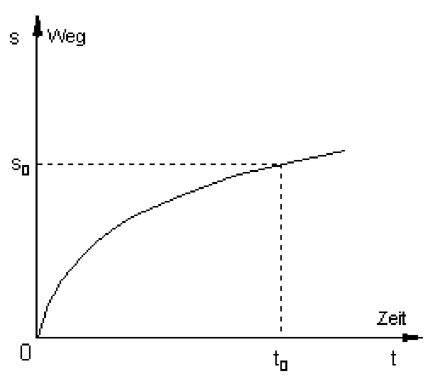
یوه ثابته جګیدنه، لکه په لانیز تابع ا $f(x) = a_1x + a_0$ کې د

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = konstant$$



په زیاتو وختونو اړیینه ده ، چې د تغیرحالت(د جګیدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتیا(همغه وختیزه – یا سملاسي) $v(t_0)$ په لار-وخت دیاګرام کې وڅېړو.

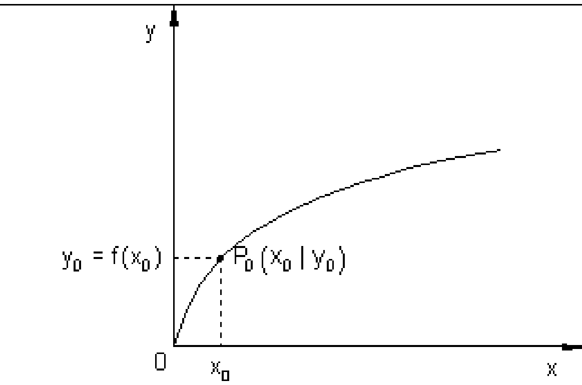


د مشتقشمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي.

$t_0 \triangleq$	په پام کې نیولی سترګو رپ
$s_0 \triangleq$	تر دې سترګو رپ پورې وهلې لار

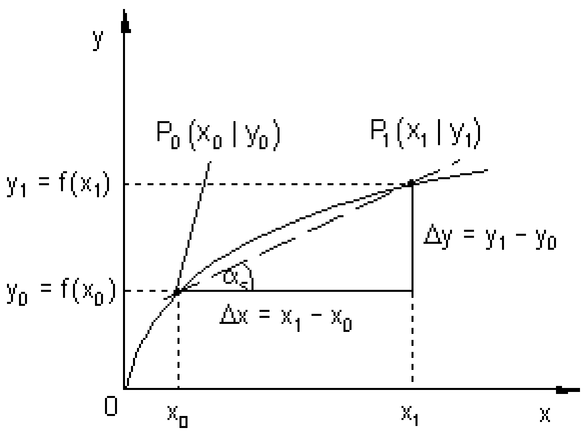
د یوه تابع د جګېدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نیونه بلل کیږي.

يو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دي ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کي ورکړ شوی وي. ددي جګوالی پيداکړی شي.



ددي پرابلم د حل لپاره داسي مخ ته ځو، چي لومړی جګوالی په نزدي توګه (تقريبي) پيدا کوو.

ددي لپاره يو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0 ټکي په نزدې کي ټاکو.



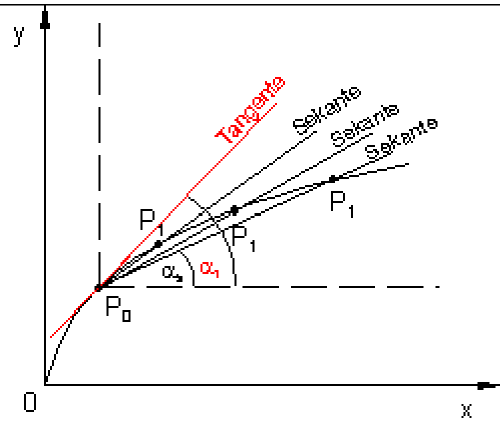
کرښه، چي دواړه ټکي سره تړي ،يعني سيکانت، يو جګوالی ښايي، چي د ټکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

$$\tan\alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

د سيکانت د جګېدو کونج	$\alpha_s \triangleq$
د سيکانت د جګېدوضريب	$a_s \triangleq$

دا د جګواليمثلث له لارې ټاکل کيږي.

<table>
<tr>
<td>که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نږدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکی P_0 ته ورنږدې کړو، نو د پولې حالت په څېر یوه کرښه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.</td>
<td>

<table>
<tr><td>α_t =</td><td>د تانجنت د جګوالي (میلان -) کونج</td></tr>
<tr><td>a_t =</td><td>د تنجنت د جګوالي ضریب</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لارې د پوله ارزښت په څیر افاده شي.</td>
<td>$\lim\limits_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim\limits_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$</td>
</tr>
</table>

II.2.2.کمبنتویش او مشتق Diference quotient and diferentialquotien

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ارزښت)

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

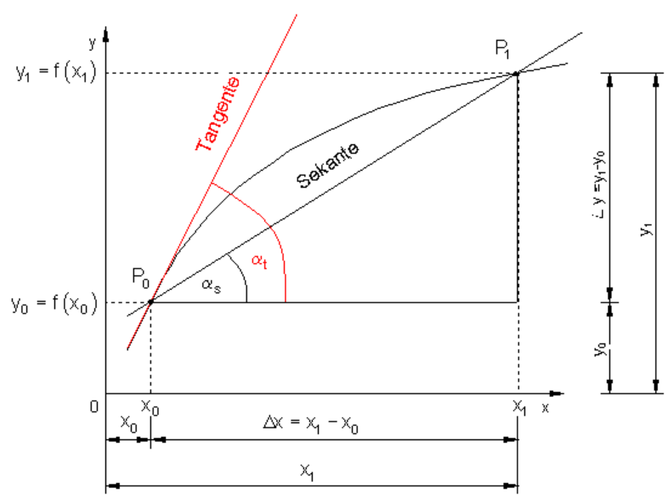
د تنجنت جګېدني سره د حد (پوله ارزښت) له لاري لرو

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – یا د سترګو رپ تغیر ارزښت دی

یا لنډ:

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرني لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.

کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

د دې کرښې د ځګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

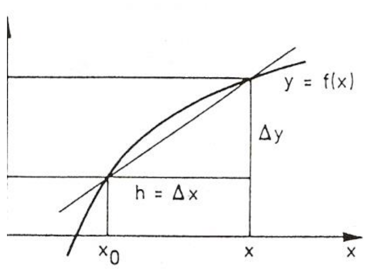
II.6 د غوڅوونې(قاطع seconce) پیژند:

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

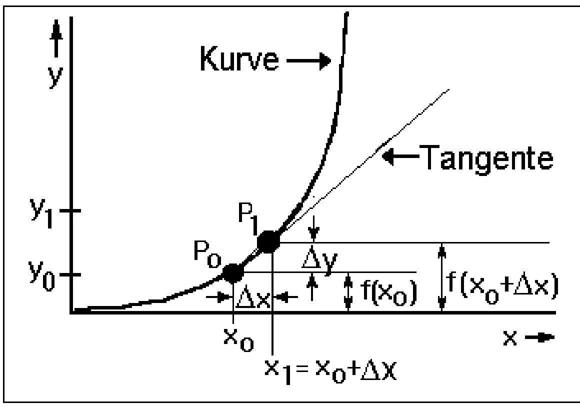
پایله: د قاطع میل یا ځګیدنه(ځګوالیsecant): دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(ځګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمېرل کیږي.

په لاندې کې m_S د ځګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

<table>
<tr>
<td>پېژند(تعریف): د $y = f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ځیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمښتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$</td>
<td>د پیژند لپاره ځیره

</td>
</tr>
</table>

د f تابع غوڅي میل لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.
د کمښت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.
د یوه تابع د میل یا جګیدنې ټاکنه په یوه د مخه ورکړ شوې ځای کې د تابع د مشتق نیونه بلل کیږي.



مشتق شمیرنه = د یوې منحني میل
Differential caculation)

تانجنت: که د P_1 او $P_0,$ ټکي یو بل ته ناپای نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړیږي.

پایله : د تانجنت جګیدنه : د تانجنت جګېدنه د قاطع د جګېدنې ،،حد ،،دی.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

پام: لکه د مخه مو چې ګوته ورته ونیوله، د derivativeکلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټکي په پام کې نیسو : derivative د رابیلیدنې په مانا دی، چې موږ یې تراوسه مشتق بولو ،چې همدا معنا لریبعنط له اشتقاق سره تړاو لري.

تعریف: که د تابع دا کمښتویش (د تفاضل وېش) x- > x0 او(همداسې)⇔ x->0)او یا په (همدې ډول ⇔
h- > 0 لپاره یو حد ولري , نو د y = f(x) تابع د $x = x_0$ په ځاي کې د مشتق قابلیت لري اود دې لپاره لیکو:

.

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};...$$

دا حد یا پوله داسې بنایو

$$(\frac{dx}{dy})_{x=x_0} = f'(x);$$

د x_0 ځاي کی د $y = f(x)$ تابع له مشتق(Derivativ,) یا رابیلدنې) څخه یوه بله سیده یا بل ډول کړه لار رابیله وو.

د مشتق ساده شمیرنې لپاره یوه بېلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ددې کمښتوېش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

او د لیمیټ $\Delta x \to 0$ سره یې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

د دې لپاره دا لاندې پېژند ورکوو:

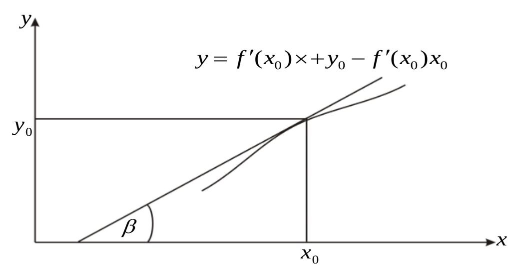
پيژند 2:

که يو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړوي، نو هغه لاندنی کربنه چی د (x_0,y_0) ټکي څخه تيريږي او ميل يا جګوالی يې $f'(x) = \tan\beta$ دی په لاندې ډول ليکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني

$y = f(x)$ تانجنت بلل کيږي(پرتله مخامخ شکل)



موږ اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيړنې لاندې نيسو.

بيلګه ۱:

د يوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت يې يوثابت دئ

ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بيلګه ۲:

يوه $f(x)=x$ خطي(کربنيزه)تابع لرو.

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$
$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ : د $y=f(x)= c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوی وي. یعنې

له $y=f(x)= c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

$$f(x_0)=c.u(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

Der Differentialquotient $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0):=\frac{dy}{dx}$
heißt Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بل کیږي

تعریف (پیژند): د تاپع لومړی مشتق یا رابېلېدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګېدنه ورکوي، چې د تابع ګراف يې په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګېدنه ده په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګېدنه هم بولي.

تانجنتجګېدنه په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ کې

Tangentensteigung in $P_0(x_0 \mid y_0)$
$a_t=f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بېلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y=f(x)=x^2$ دې ورکړ شوې وي.
غواړو د $x=x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0=2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

$x=x_0:$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د په ځای کې د تابع لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

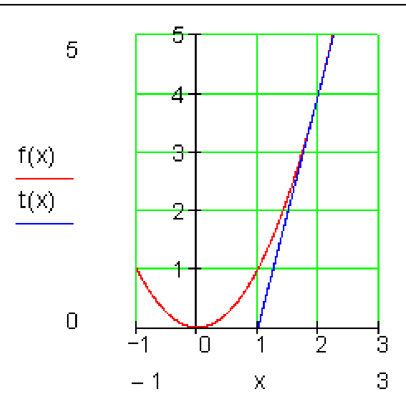
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$$

نو $f'(x_0)=2x_0$ لرو او د $x_0=2$ لپاره $f'(2)=2\cdot 2=4$ باور لري.

د $x_0=2$ په ځای کې د تابع $y=f(x)=x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0=2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه یې:

پایله یې کېدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0\,|\,y_0)=P_0(2\,|\,4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګېدنه لاس ته راوړو.



لکه پورته بېلګه کې: $y=f(x)=x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

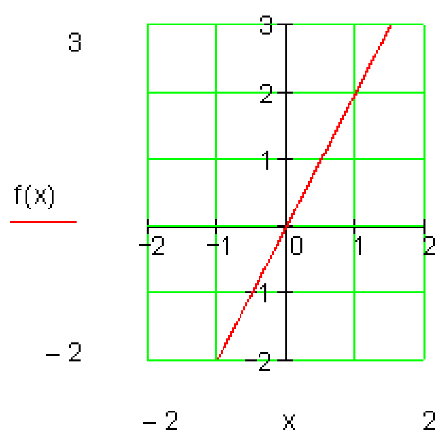
$$y=f(x)=x^2\ \Rightarrow\ f'(x_0)=2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	2

ګراف یوه کرښه $f'(x)=2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کيږي:

پام: که د يوې تابع مشتق ونيول شي، نو بيرته يوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکيږي.

د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنست تابع انځوروي، له دې امله دا د ميل تابع هم بلل کيږي.



بيلګه: د $f(x)=x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.

فعاليت: ګران لوستونکي دې د $f(x)=x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پيدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

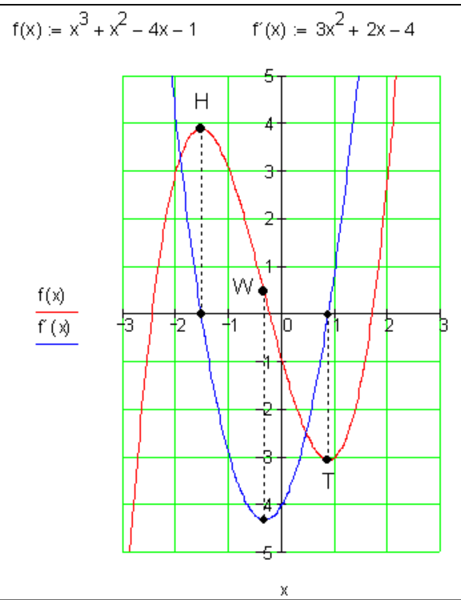
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د تابع $f(x)=x^3$ مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسي ده: $f'(x_0)=3x_0^2$

	د وضعیه کمیاتو – یا پروتولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق: مخامخ ځیره وګورئ: تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$ د تابع مشتق(شین رنګه): $f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چې بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.

بیلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پیداکړئ او د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ده

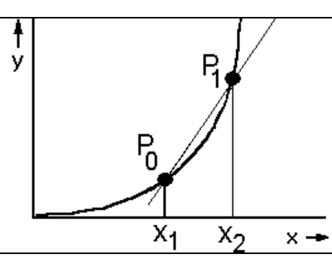
د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

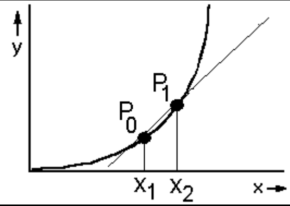
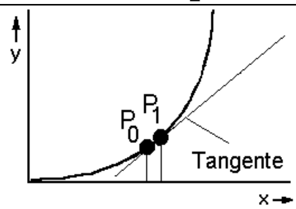
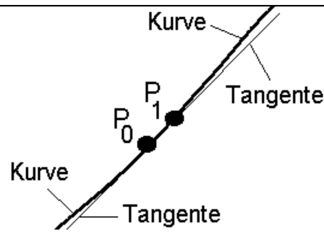
	د مشتق تابع	تابع
$f'(x) = 1 \cdot x^0$	$f'(x) = 1$	$f(x) = x$
$f'(x) = 2 \cdot x^1$	$f'(x) = 2 \cdot x$	$f(x) = x^2$
$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f'(x) = 3 \cdot x^2$	$f(x) = x^3$
$f'(x) = -x^{-2}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$
$f' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه قوانین یو د بل سره پرتله شي، نو ګومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانین به باور ولري.

بیلګه: $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

د تانجنت تعریف او خویونه:

مخامخ څېره یو منحني او یوه قاطع په ټکو P_0 او P_1 کې ښایي.	

اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1 په لور و خوځيږي. پام : ددې سره قاطع خپل میل تغیروي	
بالاخره غواړو، چې P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کيږي	
چې دا پوره وپېژندلی شو د ټکو P_1 او P_0 په شاو خوا ْزوو یا لویه وو: که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کيږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.	

د دې خويونو غوره غوره والی یا لاس ته راوړنه(پایله):
ومو لیدل، چې د تانجنت میل په P_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي پیدا کړي، بسیا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پیدا کړي.

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پيل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوځ کړي.

د تانجنت مساوات: :

د   سره ليکو:

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود ځغلي.

د عمود میل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېړه لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل **په ټکي** x_0 **کې د میل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځای کې دا لاندې لرو:

.

.

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2)+3 = x-2+3 = \underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \ , \ \ P(2\,|\,f(2))$$

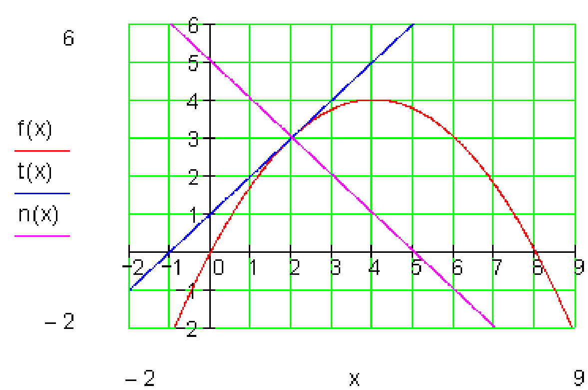
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2)+3 = -x+2+3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



د تانجنت او عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f '(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرئ ټکی دی:

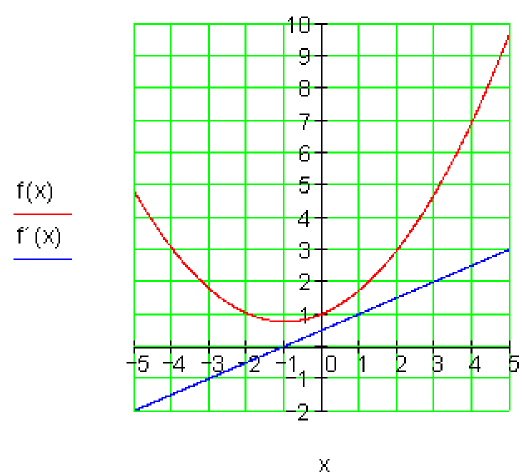
$S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی:

دا دا معنی لري، چې په ککرئ ټکي کې د $f'(x)$ میل صفر دی.

تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعنې د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

f(x) := $\frac{1}{4}$x^2 + $\frac{1}{2}$x + 1   f´(x) := $\frac{1}{2}$x + $\frac{1}{2}$



بیلګه: تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$
تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \;\Rightarrow\; f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \;\Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

لاس ته راوړنه(پایله):
د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{جګیدنه}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

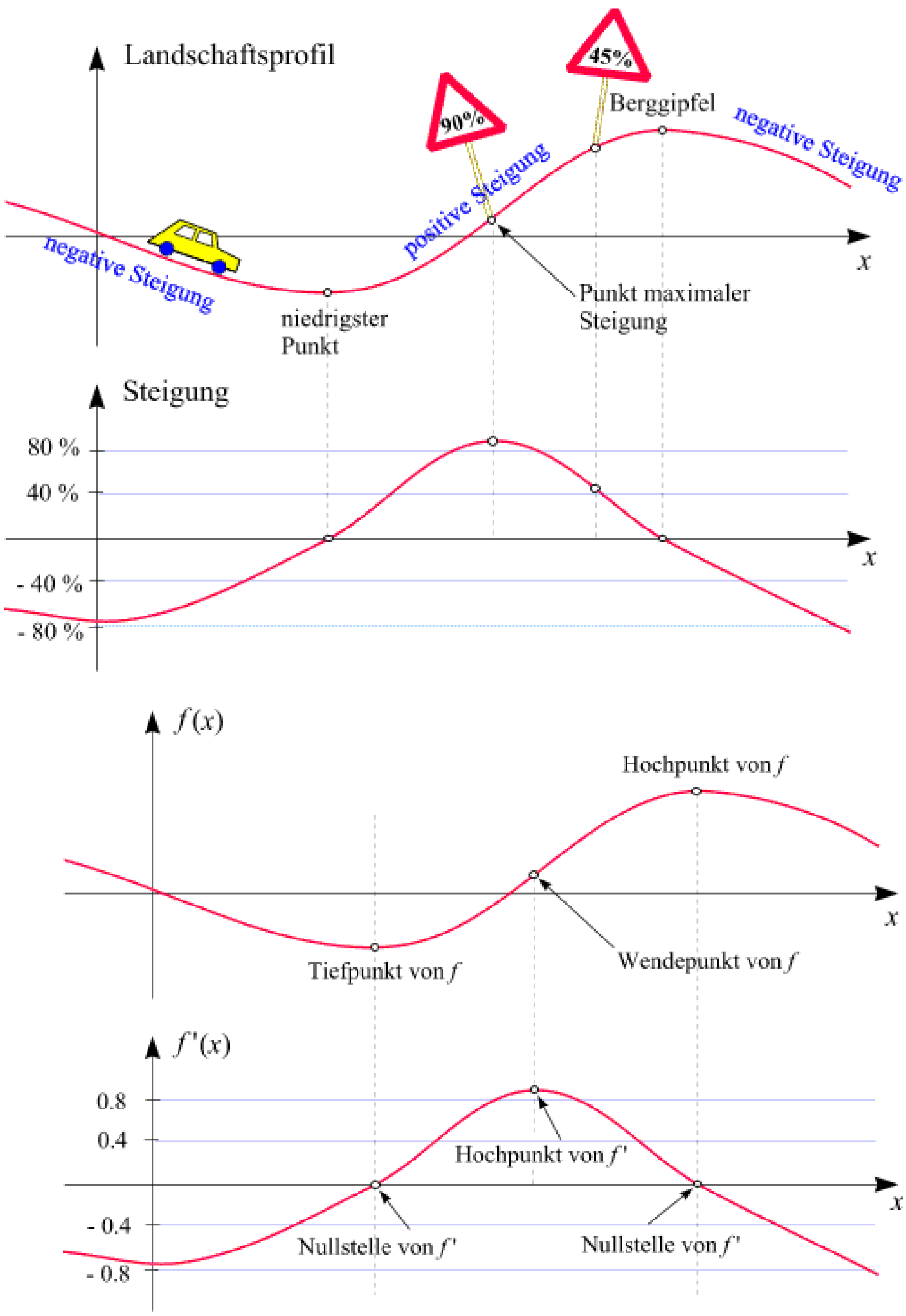
په بیدیا کې جګوالی **Steigungen in der Landschaft**

لاندې د د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې جګ او ټیټیږي یا

کښتپورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

دپورته څیرو پښتو: له کیڼ لور کښته ښي لور ته: بیدیا یا کرونده، منفي جګوالی، جګوالی،(بله کربښه) خورا ټیټ ټکی،(شي لورته بله کربښه(مثبته جګیدنه، (پسې کربښه) د غره څوکه، د خورا جګې جګیدنې ټکی، (اخره(کمیز یا منفي جګیدنه.

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک جګیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحني ورکوي.


Landschaftsprofil
90%
45%
Berggipfel
negative Steigung
positive Steigung
negative Steigung
x
Punkt maximaler Steigung
niedrigster Punkt
Steigung
80 %
40 %
- 40 %
- 80 %
x
f (x)
Hochpunkt von f
x
Tiefpunkt von f
Wendepunkt von f
f '(x)
0.8
0.4
- 0.4
- 0.8
Hochpunkt von f '
x
Nullstelle von f '
Nullstelle von f '

دپورته پښتو: له پورته کښته له کيڼ وښي لور ته: د f جګ ټکی، د f ټيټ ټکی، د f اوړونټکی یا د انعطاف ټکی، د f' جګ ټکی، د f' صفرځای، د f' صفرځای.

دیاګرامونه په کره توږه وګوری او وهڅيږئ، چې د دويمې منحني خويونه د لومړی منحني له خويونو را برسيره کړی.
چيرته چې سرک خورا ټيټ ټکی لري، هلته د جګيدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تيرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توږه که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.دا ټيک هغه ټکي دي، د کومو په چاپيريال کې چې منفي او مثبته جګيدنه يوبل سره رابندوي يا پولې لري.

د دې په منځ کې يو چيرته يو ټکی شتون لري، چې هلته جګيدنه ماکزيمال یا خورا لويه ده (په دې بيلګه کې 90%) .

همدې ته ورته په دويمه منحني (کږې) کې يو ه څوکه لري، مګر دا په دې بيديا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو يوه د ،،جګيدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحني په ورسره بلده یا معمول رياضيکي ډول لاندې شکلونه لري:

لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دويمه منحني يا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بيا هم ټيک وګوری او وهڅېری، چې وپوهdږی، چې دا په هره برخه کې يو د بل سره څنګه اړيکي لري.

د f(x) ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په يوه کې f(x) مينيمال (خورا ټيټ ټکی) په بل کې f(x) ماکسيمال (خورا جګ ټکی) دی.

په دې ځايونو کې f(x) صفرځایونه لري.

هغه ټکی چې هلته د f(x) ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی يا اوړونټکی بلل کيږي.

دا چې په دې ټکي کې د f(x) مشتق خورا جګ دی (په دې بيلګه کې 0,9)، دا د(f'(x عظمي نقطه ده.

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني ښه ښه څرګندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

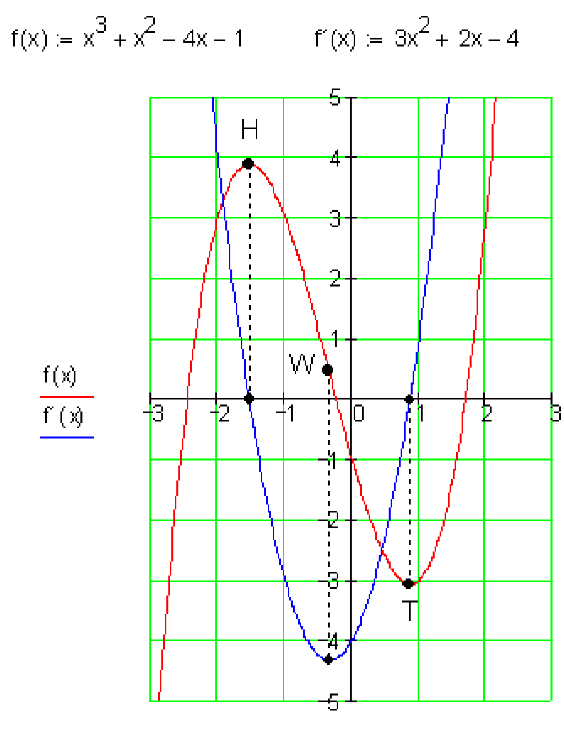
مونږ د دې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولای شو یا ګومان راوړی شو:
که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.
دا مورته د ماکسیما او مینیما په هکله (چې دا دواړه د افراتي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

په کواوردینات (یوه پروت -ولاړ)- سیستم کې تابع اود تابع مشتق:

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع او یا د جګیدني (میلان) تابع بولو



د دواړو توابعو ګراف په یوه قیمتي وضعیه (پروت ولاړ سیستم) کې و کښل شو.

هلته چې تابع f(x) یو جګ ټکی (H) همداسي ټیټ ټکی (T) لري ګراف د مشتق تابع x -محور کې غوڅوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چې په H او T کې تابع f(x) پروت یا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جګېدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مینیموم لري، چېرته چې د f(x) جګېدنه د H او T ترمنځ په پام ونیول شي د مطلق قیمت له مخې خورا لویه ده.

II.3.د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده یا لار):

که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، یعنې:

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0) = u(x_0) + v(x_0)$$
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)] + [v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x) - u(x_0)]}{\Delta x} + \frac{[v(x_0+\Delta x)] - v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \underline{\underline{u'(x_0) + v'(x_0)}}$$

بیلګه:

د دې ورکړ $f(x) = 5x^2 + 3x$, $u(x) = 5x^2$, $v(x) = 3x$ توابعو شتق وشمیرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعدې تولیزه کونه:

که چیرې f_1،f_2،......،f_n توابع او k_1،k_2،....،k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضیه (د ضرب قاعده یا لار):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښایو:

$$(f(x)\cdot g(x)'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- یا بڼه بدلون یعني په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزیاتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي، یعني که د دواړو لورو لیمیټ نیسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه: په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د ویش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې ډول ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښایي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' =\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

دويمه لار: د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$$(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)} \qquad (*)\ (f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کېږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)g(x)}=-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\frac{1}{g(x)}$ وبش ولرو او وغواړو چې مشتق یې پیدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د (*) اړیکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]'=[f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$=f(x)(\frac{1}{g(x)})'+\frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$=f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2})+\frac{1}{g(x)}f'(x)$$

$$=\frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}+\frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

بیلګه:

د $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x)=x^2$ او $h(x)=x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x)=2x$$

$$h'(x)=2x$$

او د ویش قانون له مخي لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$
$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$
$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

بیلگه:

د $y=\sin x^2$ تابع یوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځیري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چیرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بیلگه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \ , \ z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچیرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچیرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بیلگه:

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشميرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7 \quad h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

د مثلثاتي فنکشنتابعګانو مشتق

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \; II$$

قضيه :د ساين تابع $y=f(x)=\sin x$ مشتق غواړو وښايوو چې
$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$ دی:

ددې قضيې د ښوولو له پاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y=f(x)=\sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوځخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \; .$$

د ليميټ د برخي په پام کی لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

د ساین تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\cos x_0\,,$$ (Xپه لینده کچ یا رادیان)

قضیه :

همداسي ښوول کیږي چی کوساین تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=-\sin x_0,$$ Xپه لینده کچ یا رادیان

ثبوت: لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کي د دویم فرمول له مخي لرو:

$$=\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\ \frac{h}{2}}{h}$$

$$=-[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د د پولې او د پولې یا حد د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\ .\ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنډه توګه لیکو:

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

قضیه : غواړو وښایو چې د تانجنت تابع f(x) = tanx مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f\,'(x)=\frac{d\tan x}{dx}=\frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$=\frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)-\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x.\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=1+\tan^2 x\ ,x\neq(2k+1).\frac{\pi}{2}$$

بیلګه: غواړو د $y=\cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل: ړدو : $f(x)=\cos x$ او $g(x)=\frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندي توګه لیکلی شو:

$y=f(g(x))$ ، نو د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

$$y' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}$$

بیلګې :

۱ - د $f(x) = \sin x$ تابع لومړي څلور مشتقونه دې پیدا شي.

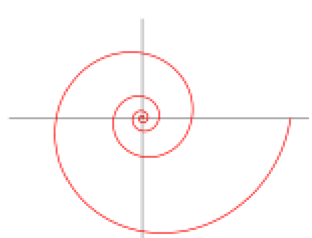
$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

۲ - د $f(x) = x.\sin x$ تابع مشتق پیداکړئ
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – د $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پیداکولو له پاره د ځنځیر قونو ن څخه نار اخلو.

ږدو $z = \frac{1}{x^2}$ او $u(z) = \sin z$ لا س ته راځي: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

د لوګاریتم مشتق



قضیه :

د لوګاریتم تابع مشتق:

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی

او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یوائې د$x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی$x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\to e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوګاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e = 1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$ پای.

بیلګه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمېرئ.

ښوونه: په لاندې توګه مخ تخ ځو:

$$f(x) = \log\sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2}\log_{10} x$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot \ln 10}$$

$$= 0.6514\cdot\frac{1}{x};\; D(f') = IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y = \ln\frac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y = \ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x) = \log_2(x)$

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق $f'(x)$

مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)= \underline{0.09}$
پای

اوس دې یوه بله د دیفرنسیشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 1-20 کې غیر مستقیم خوندې یا په بل عبارت دننه ده.

موږ غواړو د لاندې شکل تابع یا بلواك مشتق ونیسو

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځیر قاعدې له مخی ترخیرني نیول کیدی شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د
لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځیری قاعدې له مخی را پیداکیدی شي. دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځیری قاعدې د نیونو په نظر کې نیولو سره او د جملې 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله 20-10 که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابليت لري ، نو
$y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دي

بيلګه : تابع يا بلواك $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره مشتقوړ دی. دا دې په (20-57) کې داسی $f = x,\ g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$. له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو: $dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$

(دا وروسته د ايمپليځيت توابعو مشتق کې هم په همغه توګه رواړول شوې ده)

بيلګه: د $y = (x^2 - 1)\ln x$ د مشتق سره بايد د $g = \ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x > 0$ او د $f = (x^2 - 1) > 0$ له امله بايد باور ولري $x^2 > 1$ او له همدې امله $|x| > 1$ پس کيدی شي چې فرمول(20-57) د $x > 1$ لپاره د $f = x_2 - 1$ او $g = \ln x$ سره استعمال شي:

بيلګه: د $f(x) = x^3.\ln 4x (x > 0)$ مشتق دې پيدا شي

$u(x) = x^3$ د $u'(x) = 3x^2$ سره، $v(x) = \ln 4x$ د ځنزيري قانون له امله لرو:

$$v(x) = 4.\frac{1}{4x}\ \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2.\ln 4x + x^3.\frac{1}{x} = 3x^2.\ln 4x + x^2 = x^2(3\ln 4x + 1)$$

بيلګه: د $f(x) = (x^2+2).\lg x\ (x>0)$ مشتق غواړو پيداکړو

د ضرب قانون: $u(x) = x^2+2\ ;\ v(x) = \lg x$ د $u'(x) = 2x$ او

$v'(x) = 1 / x.l\ 10$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \lg x + (x^2 + 2)\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \cdot (2x \cdot \ln x + x + \frac{2}{x})$$

د اکسپوننشل توابعو مشتق

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x, (b>0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x \ln b$

حل:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad , \ f(x)=b^x$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0} \qquad , \ x-x_0=h$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h-1=k \\ h=\log_b(1+k)\end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{1}{k}\cdot\log_b(1+k)}$$

د لوگاریتم قانون څخه لرو: $n\cdot\log x=\log x^n$ او لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b (1 + k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b [\lim_{k \to 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}}]} \quad , \lim_{k \to 0} (1 + k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$\underline{\underline{= b^{x_0} \cdot \ln b \ ; \quad x_0 \in IR \ ; b \in IR^{>0}}}$$

$$\Rightarrow f \ ' : f \ '(x) = b^x \cdot \ln b \ ; \ D \ '(f) = IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$f \ '(x) = b^x \cdot \ln b$$

قضیه : د $y = f(x) = e^x$ مشتق پیدا کړئ.

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f \ '(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره څیرو $\dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمیرنې په پنسټ دا دا مهنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که x_0 د xپه ځای ځای په ځای کړو، نو لرو:

$$f(x) = e^x \text{ und } f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل فنکشن e^x تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

لرو:

اکسپوننشلفنکشن یو فنکشن دی، په کوم کې چې فنکشن او د تابع مشتق سره برابر دي

e - تابع بیرته د مشتق له لارې تولیدیږي یا لاس ته راځي.

بل بدیل یا الترناتیو: که ولرو $y = f(x) = e^x$ ، نو $y' = f'(x) = e^x$ لاس ته راځي.

په پورته جمله کې مو وښووول: که ولرو $y = b^x$ دو $y' = y \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$ دی.

که b=e کړدو، نو لرو:

$$f'(x) = b^x . \ln e \quad = e^x \cdot \ln e \quad \Rightarrow \ln e = 1$$
$$= \underline{\underline{e^x ; x \in IR}}$$
$$f : f(x) = e^x ; D(f) = IR$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{f' : f'(x) = e^x ; D(f) - IR}}$$

گورو چې $f(x) = e^x ; D(f) = IR$ یواځنی تابع دی، چې مشتق یې پخپله $\underline{\underline{f'(x) = e^x ; D(f) - IR}}$ دی

$$f(x) = \log_a x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

د $a \in R^+ \setminus \{1\}$ $x \in R^+$ سره.

فرمول

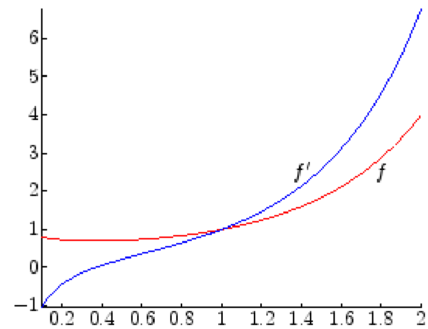
$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کیدی شي د $y = g(x)^{h(x)}$ بنې تابع چې $g(x) > 0$ دی، د مشتق لپاره وکارول شي

لاس ته ترې راځي:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} \left(h(x) \ln g(x) \right) .$$

لیکونکی:(App/Höllig) اپپ ، هیولیګ



د $0 \to x$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د 0 په لور هخیرږي، پس f د 0 په لور. نو تابع په صفر کې ښي لوریزه متمادي ده. د مشتق لپاره یې دا حالت ده دی.

د $1 \to x^x$ او د $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $0 \to x$ لپاره د f تابع په صغر کې یو عمود تآنجنت لري.

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي:

$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}\,.$$

)لیکونکي اپپ او هیولیګ

په طبیعت کې یې خیرنه:

د اکیوننشل توابعو مشتق

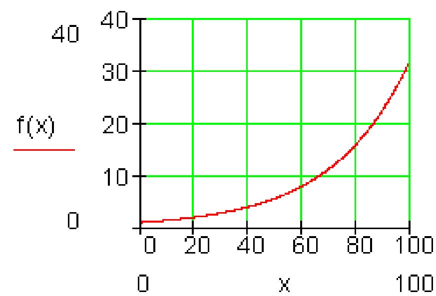
د تابع مساواتو جوړښت

کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوتې ویش (حجره ویش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو

کې ځان تجزيه کوي. د غه عمليي لپاره يو ارزښت جدول :اړ، او گراف يي کاړو. دلته
د x اووښتوني (متغيره) په دقيقو د وخت لپاره ده.
د y متحوله د باکتريا گانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100	دقيقي
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32	د بکترياگانو تعداد

پورته جدول کې : x = دقيقي y = د بکترياو تعداد



بيلگه: لرو : $f : f(x) = b^{3x^2-10};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونيسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2-10} = g[h(x)]$$

$$g(z) = b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}\,; z \in IR$$

$$h(z) = 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$

$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$

$$= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$

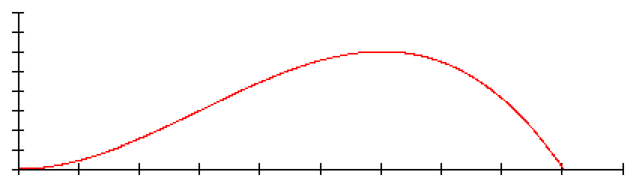
$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

- د مشتق استعمال په طبیعي علومو

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کیږي، چې د یوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي.

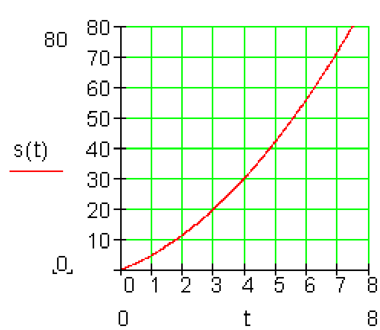
په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څیړو، چې د وخت په واک کې وي.

لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کیږي)



بیلګه: د یوه په برابرډوله بیره (تعجیل) غورځول شوي شي لپاره د پیل چټکتیا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بیرې(تعجیل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$\boxed{s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t}$$



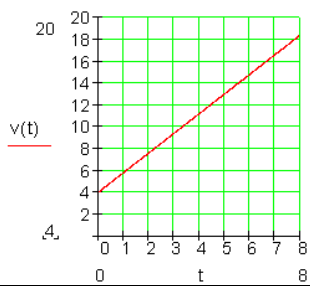
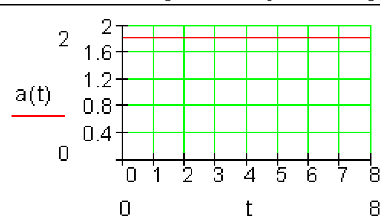
حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: S(t) = 0,9t²+4t

(tپه s(ثانیه) ، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتیا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (ده

لحظوی(سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$ $$v = s'(t) = 1{,}8t + 4$$	

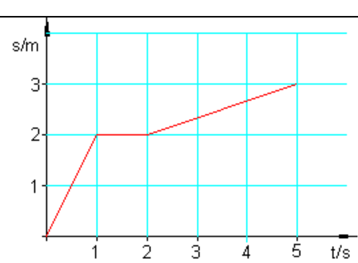
په v-t - ډیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته ځګیدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a = 1{,}8\,\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.	
د بیړي یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي: $$v'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$	

پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$\boxed{a(t) = v'(t) = a} \qquad \boxed{v(t) = s'(t) = at + v_0} \qquad \left|s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t\right|$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t) = s'(t)$. هم لیکو.

فعالیت:

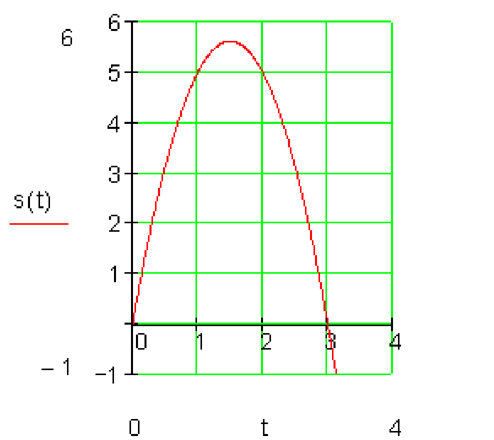
۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی. الف: دا خوزښت تشریح کړی. ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.	

۲) یوه تیږه د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\ \frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟کړدي شوې)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیږې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.



۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي.

الف) د ورځني ژوند څخه یوه بېلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ په لاندې ډول دی.

a او v_0 وټاکئ

پ) د اړونده بیرې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ. یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسې حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t) = 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو $t=1;2;3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

۴ – حل:

لحضوي جتېکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10 + 5\Delta x \to 10$

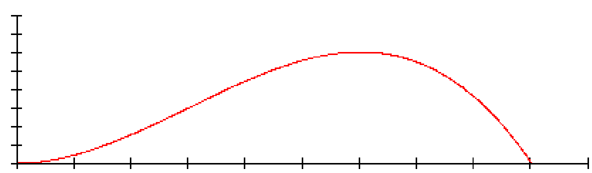
$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow f$$

د $\Delta x \to 0$ ***لپاره باور لري*** $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرین : لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \,;\, x > 0$ تابع گراف او په ورنزدي توگه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني ښايي، چې لاندې څیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

الف:توپ کوم خورا جگ(ماکسیمال) جگوالی لري او د وهلتکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلتکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جگ دی. ایا توپ له دې څخه جگ الوزي؟

ت : توپ د تور لاین(د x محور) څخه په ۲ متره جگوالي الوزي. له گول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسي مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دويم مشتقتابع په نامه يادېږي.

بېلګه: $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دريم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow f'''(x) = 6$$

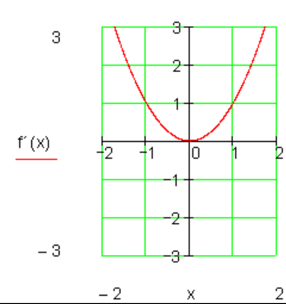
د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

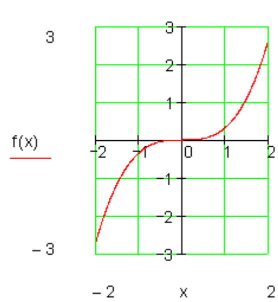
د تابع ګراف :

د يوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

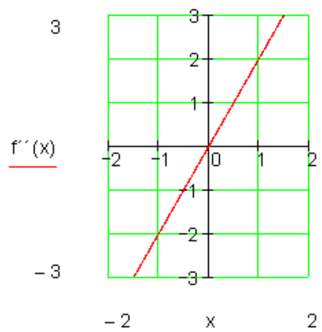
$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$



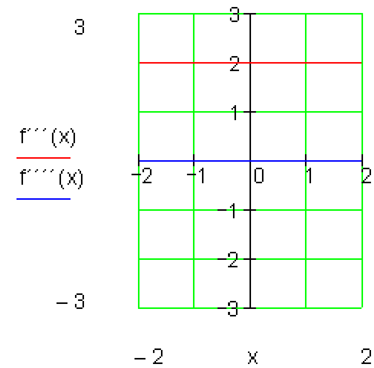
$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$



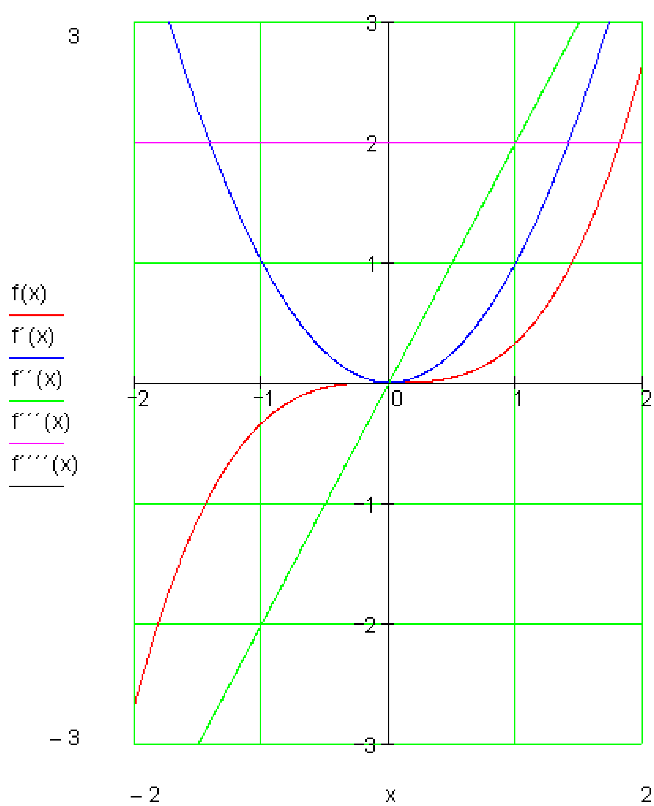
$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$



$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$



د ټولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم



کې

بیلګې:

اول :

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$$
$$f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$$
$$f''(x) = 24x - 4$$
$$f'''(x) = 24$$

دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$
$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

ټولګه: د $f(x)$ لومړی مشتق د$f(x)$ مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

د$f(x)$ دویم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$دریم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: ییو په خوشه ویاند تابع$f(x)$ په خوښه د مشتق قابلیت لري.

- - د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

یا داسې: که یوه تابع $y = y(x)$ په ایمپلیڅیته توګه ورکړ شوې وي، دا په دې معنا چې په د x او y کې یوه مساوات له لارې ورکړ شوې، نو کیدی شي دا مساوات یل برابرون تړلی یې په x پسې مشتق ونیول شي. دلته په ځانله توګه کیدی شي په $y = y(x)$ ځنزیرې قاونو وکارول شي.

د دې لپاره لاندې بیلګې راوړو:

بیلګه: $Y = 3x^2+7x$

د یوې تابع هغه زیات د استعمال وړه انځورنه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیڅیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت: که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه: یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړوdy / dx پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \vee \frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیڅیټ مشتق د یوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیڅیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیڅیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي. دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیڅیت یا څرګند ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

بیلګه : د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چې په بنسټ او جګ االکسپونَنت کې یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپونَنت متحوله له منحه وړل کیږدی شي: $\ln f(x) = x \ln x$

اوس ایمپلیځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

بیلګه: دایره د r وړانګې سره مساوات $x^2 + y^2 = r^2$. لري. له دې ځنې برخې د $y =$ $f(x)$ تابع د ګراف په څېر لیکل کیږدی شي. د دې مشتق د ایمپلیڅیت مشتق له لارې په لاندې توګه حل کیږدی شي

په تعریف شوي مساوات کې $y = f(x)$ ځاي په ځای کوو:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

د دې مساوات د مشتق له لار لرو : $2x + 2f(x)\,f'(x) = 0$

د $f'(x)$ پسې د حل له لارې لاس ته راځي:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

د دې مساوات سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي، چې په داېرېتانجنت په ټکي (x,y) کې جګوالی $-\frac{x}{y}$ لري.

بیلګه: د بیلګیپه توګه د $E:\ x^2 + 3y^2 = 7$
له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

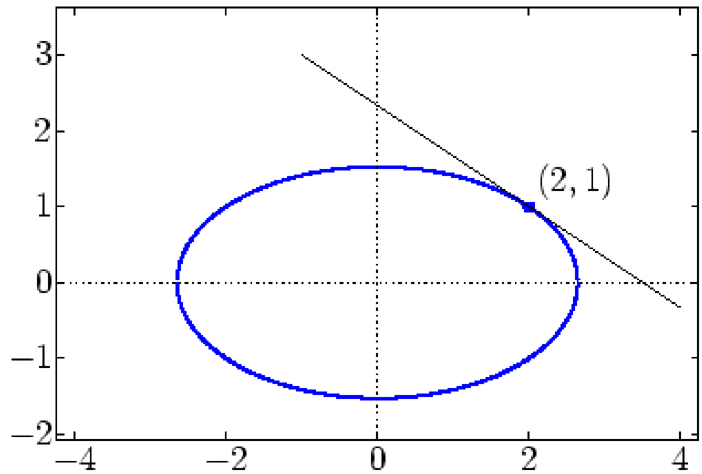
$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې $y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$. له

دې سره کیدی شي په E باندې په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي. د بیلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره لاس ته راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.



په ورته توګه کيدی شي لوړ يا جګ مشتقونه هم وشميرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول يا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

بيرته په E د يوه ټکي د کواورديناتو اينوولو او همدا اوس د $y'(x)$ ټاکلي ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د بسټيزو مشتقونو جدول

Nr	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \ a \ reell$
7	a^x	$a^x \ln a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \ a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$

•

د پورته جدول په مرسته کيدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزې(تحليلي) ويينې يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کې ونيسي.

تولګه

کمبنتويشDifferenzenquotient (د سيکانت جګېدنه) يا منځنی تغيېر ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(fx_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتقDifferetialquotient (د تانجنت چګوالی يا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x)=c\cdot u(x) mit\, c=cons\tan t$$

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

$$\boxed{f'=c\cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x)=u(x)+v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v(x)$$

$$\boxed{f'=u'+v'}$$

د ضرب قانو

$$f(x)=u(x)\cdot v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

$$\boxed{f'=u'\cdot v+u\cdot v'}$$

د ويش قانون

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\boxed{f=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}}$$

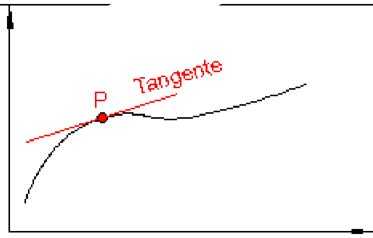
د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دا پورته الماني په پښتو شي(دا كمپيتريست سرته رسوم)

پيژند (تعريف): د يوه تابع گراف ميل (جگوالی) په يوه ټكي P كي په همغه ټكي كې د تانجنت د ميل يا جگوالي گراف سره برابر دی



د كمبنت ويش يا د تفاضل ويش **Difference quotient**

د يوې كرښې جگېدنه بې له مشتق نيونې ټاكلكېدی شي:

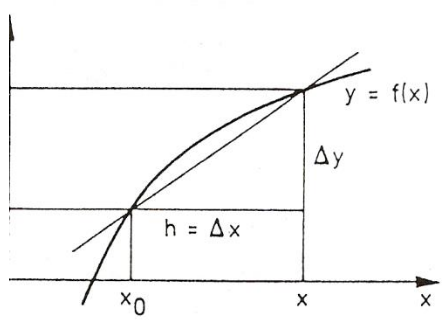
كرښه $y=f(x) = mx+a$ لرو

د دې كرښې د جگيدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پيژند(تعريف1-2

$y = f(x)$ دې د x_0 په يوه چاپيريال او په x_0كې پخپله تعريف شوی تابع وي، x د x_0 خخه بيل خو د چاپيريال يو په خوښه يا په زړه پورې ځای دی(مخامخ ځيره دې وكتل شي). پس د تفاضل _ يا كمبنتويش Differenc equtient د سيكانتی ميلان يا جگوالی شته دی، چې په لاندې ډول يې ليكو:



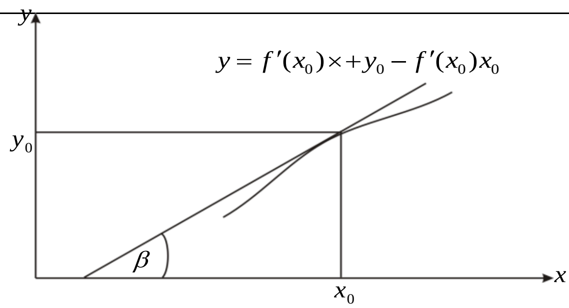
د پيژند لپاره ځيره

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

پیژند:که یو تابع یابلواك $y=f(x)$ د x_0 په ځاي کی د مشتق وړ(قابل اشتقاق،رابیلیدوړ) وي، نو هغه لاندنۍ کربښه چی د (x_0,y_0) ښخه تیریږي او میلان یا جګوالی $f'(x)=\tan\beta$ یی دی په لاندې ډول لیکو:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x)\ \Leftrightarrow\ f'(x_0)x+y_0-f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0,y_0) په ټکي کی د ورکړ شوې منحني یا کږی $y=f(x)$ تانجنت بلل کیږي(پرتله یامقایسه لاندې څیره)



لومړی د تیرو جملو له مخې ددیفرنسیشن قاعدې د فورمال قاعدو په څیر بیا راټولوو یا رایوځاي کوو، بی له دې چی نیونی ورکړو. په استعمال کي یی بایددا نیوني کلکی تر پام لاندې ونیول شي. د لته د $f(x)$ او $g(x)$ بلواك په f او g لنډیږي.
د مشتق نیونو یا رابیلدنومشتق قاعدو جدول

ګڼه د قاعدې نوم	فرمول
۱ د ثابتې سره ځل(ضرب) قاعده	$(cf)'=cf'$
۲ د زیاتون – کمون قاعده	$(f\pm g)'=f'\pm g'$
۳ د ځل (ضرب) قاعده	$(f\cdot g)'=f'\cdot g'$

ګڼه د قاعدې نوم	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$
۴ – وېشقاعده	
۵ – د زنځیروني قاعده	$y = f(z)\ ;\quad z = g(x);\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$
د په څټ یا برعکس قاعده	$y = f(x)\ ;\quad x = f^{-1}(y);\ \frac{dx}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y = b^x, (b > 0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f' = b^x \ln b$

قضیه: هر د لوګاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b > 0, b \neq 0, x > 0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x) = \frac{1}{x}\log e = \frac{1}{x.\ln b}$

--- د یوې تابع د مشتق قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري او همداسې په هرځاي کې متمادي یا ناپرېکیدونکې نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.

تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:

د ټولو $x > 0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

او له دې سره $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0} = 1$

د ټولو $x < 0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x) = -x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0} = -1$$

دا چې کیږ- او ښی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.

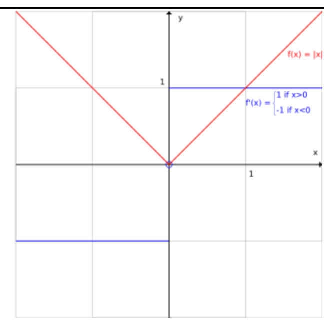
د تابع مشتق کېدنه په نورو ټولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.

په صفر ځای کې سره له دې یو ښي اړخیز مستق ورکړ شوی، یعنې لرو:

$$f'+(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

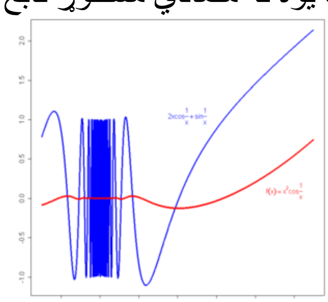
او یو کیڼ اړخیز مشتق هم:

$$f'-(0)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$



که مخامخ گراف ته وگورو، نو وبه پوهیږو، چې یوه مشتقوړ تابع باید گوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.

د یوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:



یو تابع متمادي مشتقوړ بلل کیږي، که د هغې مشتق متمادي وي. که یوه تابع هرچېږته مشتقوړ وي، باید نه دی چې مشتق دې یې هم متمادي وي.

د بیلګې په توګه:

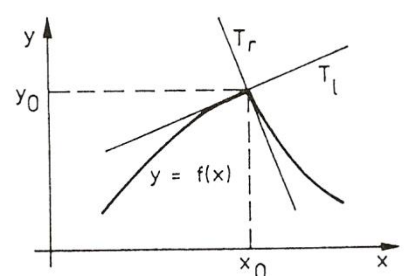
$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

يې ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نيونويا فرضيو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چی ليميټ (پولی) ته تګ ممکن وي يعني چيرته چی د تفاضل ويش يو ليميټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چيرته راماته وي (څېره 4)، ګورو چی هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګيدل او هم د تفاضل ويش نه شته. پس د مشتق قابليت د متماديت په څير د يوې تابع ځانګړې خوي دی.

که په مخامخ څيره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی يواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته يو کيڼ تانجنت T_1 يا کيڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کيڼ مشتق لري او په همدې ډول يو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دې ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.	

يوه نامتمادي(پرېکيدونکې) تابع کی د تانجنت يا مشتق پوښتنه بی معناده.

اړيين يا ضروري شرطونه:

دا دلته انځور شوی پرابلم یا مسأله اوس د شمیرنې د ټیك فرمول لاندې راوړو.

ولیدل شو چې په یوه ځای x_0 کی چې تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نیسو چې دا دې ښوول شوی وی. دا څرگنده ده چې هره متمادي تابع باید ضرور مشتقوړنه وي. د بیلگي په توگه که تابع زاویه یا کونج ولري.

دې ته اړتیا ده چې وښایو، چې یوائې متمادي (نه پرېکیدونکې)توابع د مشتق قابلیت لري، دا بیا دا معنا لري چې هره تابع چې مشتقوړ وي باید لږ تر لگه متمادي(نه پرېکیدونکې) وي او په دې ډول مشتق متمادیت په بر کی لري یا خوندي لري، په دې معنا چې متمادیت د مشتقوړوالی لپاره اړیین یا ضروري شرطونه دي

جمله:

که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یاپوله یوائې هلته کیدی شي چې موجود وي، چې د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت یا ناپرېکیدنې پیژند دی.
دا تفاضل یا کمښت وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توگه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دی. لکه څنگه چې په متمادیت کی(لومړي څېرکی دې وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف: د $y=(x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کېږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=f'(x)\ ;\ a<x<b$$

که داد $x=x_0\in(a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کېږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کيڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه: د توان تابع $y=x^n,\ n=1,2,3,\ldots$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$$

د ساین تابع $y=\sin x$ او کوساین تابع $y=\cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندې مشتق سره

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\sin x}{dx}=\cos x,\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x$$

په یوه واز انتروال کی $y=f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بیرته $y'=f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول یي د مشتق قابلیت اود متمادیت قابلیت پوښتنه کیدی شي.

پیژند: په یو د $x=x_0$ چاپیریال کي د مشتق قابل تابع (رابیلیدوړ بلواك) $y=f(x)$ په $x=x_0$ کې دوه واره د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابیلیدنه) $y'=f'(x)$ هلته د مشتق قابلیت لري(رابیلیدوړ وي). سرې د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابیلیدنه د بلواك) $y=f(x)$ دویمه رابیلیدنه بولي او لیکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0}=f''(x_0)=\left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

یو په یوه واز اینتروال کې مشتق کېدونکی تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کیږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اینتروال کې مشتق وړ وي.

ددې لپاره لیکل کېږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

بیلګه ۲ . ۷ :

لاندې توابع $y = c; y = x^n; y = \sin x; y = \cos x$

هر چیرته دوه واره مشتقوړ دي، د لاندې مشتقونو سره:

$$\frac{d^2c}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \ n \geq 2,$$

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x, \qquad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x \ .$$

دا په ۲ . ۴ کی تعریف شوي کیلمی کیدی شي چی په ساده ډول په خوښه پراخه شي یعنی داکسپوننت مشتقونو ته واړول شي(n – م مستق (رابیلیدنه) یی وشمیرل شي) .

د $y=f(x)$ تابع دلته n –واره مشتقوړ ده، که n – م مشتق ولري یعنی

$$\frac{d^ny}{d^nx} = \frac{d^nf(x)}{d^nx} = f^{(n)}(x) = \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx};..$$

جمله:

که د$y=f(x)$ تابع د $x0$ په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي یا ناپرېکیدونکي ده.

ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چې پوله یا حد شته دئ

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

پوله یا حد یوائې هلته کیدی شي چې موجود وي، چې د0x->x لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې0<-(f(x)-f(x0 لاړ شي.
نو باور لري: (f(x)->f(x0 د x->x0 لپاره.
دا د ناپرېکیدني یا متمادیت تعیف یا پیژند دی.

دا کمښت-یا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:

دلته مشتق (f'(x په لاندې توګه ورکړ شوي دی:

د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یوائې په ځای (lokal) پورې اړوند یا تړلی خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دئ. لکه څنګه چې په ناپرېکیدنه یا متمادیت کی(۱۹ - ځپرکی دې وکتل شي) کیدی شي چې د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف :

د y=f(x) یوه تابع په واز اینتروال(a,b) کی، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x); a < x < b$$

که داد(a,b) $x = x_0 \in$ په هر ځاي کی د مشتق قابلیت ولري د مشتق (f'(x0 سره.
دا په بند اینتروال[a,b] کی مشتقوړ بلل کیږي، که دا سربیره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتقوړ هم وي.

--- د معکوس تابع مشتق invers funktion

د یوه ګراف به مرسته تابع او د هغه په څېټ تابع د بیلګی به توکه یوه مربع تابع.

اوس دې معکوسه تابع تر څیرني لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګیدونکی دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکی $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کیدونکی هم دی، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که په د لاندې تکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سړی بیرته یو د تفاضل یا کمښت ویش لاس ته راوړي چی د هغه سره د

مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله:

د معکوس تابع مشتق : که (y = f(x د x په يوه چاپيريال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله‌ته د 0 =| (x) ’f سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د (y = f (x سره مشتقوړ دی او باوري دی

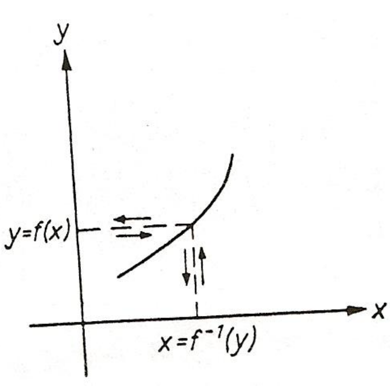
$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل: کيدی چی د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له 0<- x اوهم 0<-y او معکوس څخه، د (y = f(x+ x)-f(x سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



بیلګه: د $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4......$ تابع لپاره که $x \geq 0$ وټاکل شي او په دې $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ توګه معکوس تابع، نو لرو:

$\frac{dy}{dx} = f\,'(x) nx^{n-1}$ د $x > 0$ لپاره. له دې امله د $y > 0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\sqrt[n]{y}}{dy} = \frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{n \cdot x^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{1-n} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot y^{\frac{1}{y}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي

$$dx^{1/n} / dx = (1/n).x^{n-1}$$

بیلګه: دا $y = x^{\frac{m}{n}}$ تابع د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه څېړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق نیول شي، چې د $x > 0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{m/n} = z^m \quad , \quad z = x^{1/n}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

په لاندې جدول کې لاندې د بنسټیتابع مشتق ځاي په ځاي شوی. له کیڼ و ښي لور ته اول درځ نمره ده دویم درځ یی تابع $f(x)$ ښای او په دریم درځ کی یی مشتق $f'(x)$ ځاي په ځای دي او په څلورم درځ کی د راپیداشوې پارامتر او د متحولې x نیونی ځای په ځاي شوي. که چیرې د واریابلی یا پارامتر لپاره نیونی نه وي شوي نو په خوښه نیول کیدی شي.

جدول د بنسټیتابعو مشتق

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	وړاند نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	$n \;\; ganz, \;\; x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \;\; x > 0$
5	$\sqrt[n]{x = x^{\frac{1}{n}}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln\, a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin\; x$	$\cos\; x$	

12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$
15	$Arc\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
16	$Arc\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\|x\| < 1$
17	$Arc\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
18	$Arc\cot$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

د جدول 20-2 او همدارنګه د جدول20-1په مرسته کيدی شي چی کم له کمه په فورمال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزې(تحليلي) وييني يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سرې همغه نيونی په نظر کي ونيسي.

بيلګه20-18: د زياتون قاعده کيدی شي د ځل قاعدې په مرسته د يوې ثابتی سره يوځاي يا ګډه شي او ډيرو زياتونکو يا د جمعې اعضاو باندې استعمال شي. لکه لاندي

$$y = f(x) = 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6\sqrt{x^3}$$
$$= 3\sin x + 4e^x - 7tanx - 6x^{\frac{3}{2}}$$

دلته tan x يواځي د $x \neq (2k+1)$ او د x^3 له امله يواځي د $x > o$ لپاره رابيليدوړ دی او ددې بنديزونو (محدوديتونو) له امله لاس ته راځي.

$$dy/dx = f'(x) = 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 6.(3/2).x^{)3/2)-1}$$
$$= 3\cos x + 4e^{x} - 7 - 7\tan^{2} x - 9\sqrt{x}$$

لکه چی بنسټیز بلواك او له دوي تولی راجوړې شوي سپړنیزې افادې هرچیرته متمادي یا ناپریکیدونکی وې، چیرته چي تعریف شوي وې. نو د جدول 20-2 له مخی بنسټیز بلواك یواځي تعریف ډیري کی رابیلیدوړدی، په دې کي کوم تغیر نه راځي که په دې بلواکو څلور بنسټیزې عملي استعمال شي. یعني لاندې جمله باوري ده .

جمله20-8: د بنسټیز بلواکو د څلورو بنسټیزو عملیو له لارې جوړې شوي شننیزې (تحلیلي) افادې د دوي تعریفډیري په دننه کی رابیلیدوړ ده.

که څوك ځنځیري بلواك جوړوي نو دا وینا باید نوره هم رابنده یا محدوده شي

بیلګه20-19: دا بلواك $y = \sqrt{(x-1)^{2}(x+1)} = (x^{3} - x^{2} - x + 1)^{\frac{1}{2}}$

د $(x-1)^{2}(x+1) > 0$ ، پس د $x+1>0$ یعني $x>-1$ تعریف دی او هلته هم نه پریکیدونکی یا متمادي (د $x=-1$ په غاړه طبعآ بنی اړخیز) ده.

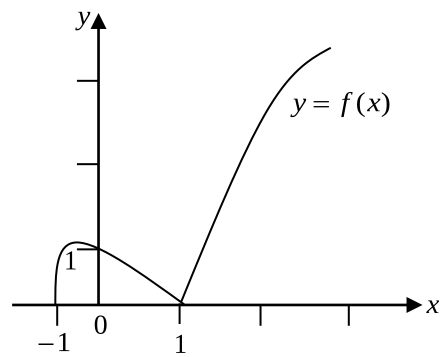
دا په ځانګړې توګه د $x=1$ لپاره هم ناپریکیدونکی یا متمادي دی(20-7دې وکتل شي)د پیژنددېرۍ یا تعریف ډیرۍ دننه $x>-1$ دی، او هلته تابع یا بلواك په واقعیت کی نه پریکیدونکی یا متمادي دیَ .اوس نو مخ ته پروت تابع یا بلواك تړلی(ځنځیري) ورکړ شوی:

$$y = f(z) = \sqrt{2} = z^{\frac{1}{2}}$$
$$z = g(x) = (x-1)^{2}(x+1) = x^{3} - x^{2} - x + 1$$

$$z = g(x) = (x-1)2(x+1) = x3 - x2 - x + 1$$

بلواك $z = g(x)$ د ټولو x لپاره مشتقوړ یا رابیلیدوړ دی، تابع $y = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ له دې امله ځنځیري قاعده یواځی د $z > 0$ لپاره صدق کوي، پس د $x \mid= 1$,$x>-1$ لپاره. هلته باور لري.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\cdot(3x^2-2x-1)=\frac{3x^2-2x-1}{2\cdot\sqrt{(x-1)^2(x+1}}$$



د يو ځنځيري تابع مشتقوړوالی د هغه- x ارزښتونو لپاره باور لري ياهلته ډاډوړ دی، کوم چي د د ننني تابع يا بلواك په دننه کی پراته دي او په هغو کی د دننني تابع ارزښت د دباندني تابع د د تعريف ډيری په دننه کي پروت وي. که د - x ارزښتونو ډيری د بند تعريفډيري دننه وښايي ، نو لاندې جمله باور لري.

جمله 20-9: هره يوه شننيزه يا تحليلي افاده د خپل بند(محدود) تعريفډيري په دننه کی رابيلدوړ ده.

بيلګه 20-20: ځنځيري قاعده هم استعماليدونکی ده، که په يوه تړلي بلواك کی د ننني بلواك پخپله يو تړلی بلواك وي، پس (د لازمه وړاند نيونو لاندې) باور لري

$$y=f(z),\ \ z=g(u),\ \ u=h(x)$$

پس د $y=f(g(h(x)))$

ځنځيري قاعده

$$dy/dx=(dy/dz)(dz/du)(du/dx)$$

فنکشن يا بلواك يا تابع

$$y=Arc\sin\sqrt{1-x^2}$$

یو داسې تابع دی. دلته لرو:

$$y = f(z) = Arc\sin z, \qquad z = g(u) = u^{1/2}, \; u = h(x) = 1 - x^2$$

دلته h(x) رابیلیدوړ دی، g(u) یواځی د $u > 0$ لپاره رابیلید وړ دی، پس د -1، $x_2 > 0$ او یا $x_2 < 0$ یاد $|x| < 1$ ، او $f(z`)$ د $|z| < 1$ لپاره، پس د $1 - x_2 < 1$ لپاره پس د $- x_2 < 11$ 1 لپاره په دې مانا چې $x_2 > 0$ د $|x| > 0$ لپاره.

رابیلیدوړوالی یواځې د لاندې چاپریال لپاره تضمین دی

$0 < |x| < 1 <=> -1 < x < 0$ او یا

$$0 < x < 1 <=> |x| < 1 \qquad x |= 0 \qquad (20.53)$$

دپیژنددېری پا تعر یفدیری دننه $|x| < 1$ دی. د تعریفدیري محدودیت(53-20 = دی.

فنکشن یا بلواك (52-20) یواځی همئته تعریف او د (51-20) له مخی باور لري:

$$\begin{aligned}
\frac{dArc\sin\sqrt{1-x^2}}{dx} &= \frac{dArc\sin z}{dz}\cdot\frac{du^{\frac{1}{2}}}{du}\cdot\frac{d(1-x^2)}{dx} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) \\
&= -\frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \;\; 0 < x < 1, \\[2ex] +\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & fur \; -1 < x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

اوس دې يوه بله د ديفرنسيشن قاعده ورکړل شي کومه چې په جدول 20-1 کې غير مستقيم خوندې يا په بل عبارت دننه ده. دا د لاندې شکل بلواك ديفرنځيشن دى

$$y = f(x)^{g(x)}$$

دا له دې امله

$$y = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

د ځنځيرقاعدې له مخی ترخيرني نيول کيدى شي، $y = e^z, z = g(x)\ln(f(x))$ د لاندې بلواك $u = \ln f(x) = \ln v, v = f(x)$ مشتق هم د ځنځيرى قاعدې له مخی را پيداکيدى شي.

دا لاندې صدق کوي:

$$u' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\cdot = \frac{1}{v}\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$ او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = e^z\cdot(g'(x)\ln f(x) + g(x)u')$$
$$= f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln f(x) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right)$$

د ځنځيرى قاعدې د نيونو په نظر کی نيولو سره او د جملی 20-10 له مخی لاس ته راځي

جمله : که $f(x)$ او $g(x)$ د $f(x) > 0$ سره د مشتق قابليت لري ، نو $y = f(x)^{g(x)}$

هم د لاندې مشتق سره مشتقوړ دى.

بيلګه : تابع $y = x^x$ د $x > 0$ لپاره رابيليدوړ دى. دا دې داسی $f = x, g = x$ ځاي په ځاي شي او له دې سره $f' = 1, g' = 1$ له دې امله اوس د $x > 0$ لپاره لرو:

$$dx^x / dx = x^x(\ln x + 1)$$

بیلګه: د $y=(x^2-1)^{\ln x},\ x>1$ دیفرنسیشن سره باید د $g=\ln x$ له امله وغوښتل شي چې $x>0$ او د $f=(x^2-1)>0$ له امله باید باور ولري $x^2>1$ او له همدې امله $|x|>1$ پس کیدی شي چې د $x>1$ لپاره د $f=x^2-1$ او $g=\ln x$ سره استعمال شي:

$$\frac{dy}{dx}=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(x^2-1)+\frac{(\ln x)\cdot(2x)}{x^2-1}\right)$$
$$=(x^2-1)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(x^2-1)}{x}+\frac{2x\ln x}{x^2-1}\right),\quad x>1$$

بیلګه یا تمرین: د $y=f(x)=x^n;n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې توګه $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}};y\geq 0$ یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

، نو لرو : $\frac{dy}{dx}=f'(x)nx^{n-1}$ د $x>0$ لپاره له دې امله د $y>0$ لپاره د معکوس تابع مشتق شته دی او لاندې ارزښت لري.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{d\sqrt[n]{y}}{dy}=\frac{dy^{\frac{1}{n}}}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{n\cdot x^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot x^{1-n}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot y^{\frac{1}{n}-1}$$

که x او y سره بدل شي نو دا لاس ته راځي.

$$\frac{dx^{\frac{1}{n}}}{dx}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

بیلګه -- د $y=x^{\frac{m}{n}}\ ,m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

د تام عدد m او د مثبت تام عدد n سره یعني د خوښي کسري اکسپوننت

یا په«جګ عدد» کیدی شي چې د مخه ځیړلي او د ځنځیری قاعدې له مخې یې مشتق ونیول شي، چې د $x>0$ لپاره باور لري.

$$y = x^{\frac{m}{n}} = z^m \quad , \quad z = x^{\frac{1}{n}}$$

او دا هم باوري دي

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = m.z^{m-1}.\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}.x^{\frac{m-1}{n}} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-n}{n}}$$

$$\frac{dx^{\frac{m}{n}}}{dx} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}, x > 0$$

په دې ډول د مخه طبیعي اکسپوننت کسري اکسپوننت ته پراخ شو.

بیلګه : یوه بډای چې په یوه ټاکلي وخت کې تولسټ (تولډیرې) M تولید کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فیکس یا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کیدې شي چې سملاسی د دې تولید په تولسټ (تولډیرې) M کې تولید کړي ، په یوه زخیره ځاي(زېرمتون؟) کې ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته یې سملاسي ورسوي. دلته د زېمتون (زخیره کونې) لګښتونه راپید کیږي(ددې د زخیرې لپاره ځاي او هلته بیا اچول او وړل). یا هم کیدی شي چې تولید په لږه کچه یا اندازه تولید شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخیره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر ټل تولید په دې ډول تولید باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چې د چمتووالی لګښتونه یې بولو.
کومه ډیرې x (ازاده لویه) باید تولید شي، چې د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟
د زخیرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابیدو ارزښت د چمتووالي یا تولید ارزښت سره یعنی چې خرڅلاو ته چمتو کیږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چموالی ته کم اړتیا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل باید تغیر وخوري یعنې. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چیرته چې F ثابت(همغه) یا په کلکه ایښول شوي لګښتونه دي، Lد زخیرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لویه x د

تولیدډیری M څخه نه شي سترېدلی ، لوئیدلی یا غتېدلی. له دې امله صدق کوي 0 $\leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستریدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده

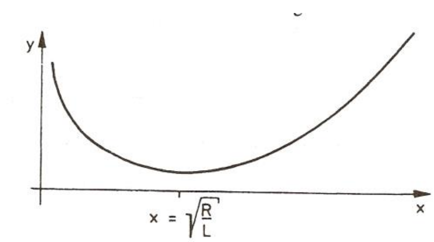
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \quad (0 \leq x \leq M$$

(لمړی f(x) دوه واره دیفرنشیال کیږي یا یي دوه واره رابیلیدنه نیول کیږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مینیوم لپاره ضرور دي: , $f'(x) = 0$ پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

د $0 \geq x$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرږې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې.

څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = (R / L) > M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو.

نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2 < M^2L$

پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه , R زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي:

$R = 1000 < M^2L = 108 \cdot 10 = 109$ ستر یا غټ ازاد لګښت دی

$x = R / L = 1000 / 10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید
ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړيږ $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره
صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .
یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي.   پای

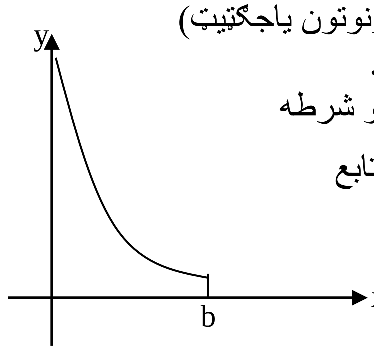
د رول قضیه (Rolle)

ننوتنه :
که د f یوه تابع په بند اینتروال [a,b] کې متمادي او c د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته
لږ تر لږه یو عدد k د f(a) او f(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی

د وایرشتراس قضیه Weierstrass

که د f یوه تابع په بند اینتراوال [a,b] کې متمادي یا ناپرېکیدونکې وي، نو f په دې اینتراوال
کی لږ تر لږه یو جګ ارزښت(اعظمي قیمت) او یو ټیټ ارزښت(اصغري قیمت) نیسی

دلته شننیز یا تحلیلي ځواب نه ورکول کیږي، دا وینا د لیدلو له مخې معقوله برېښي.
کیدی شي چی یو یوغږیز (monoton مونوتون یاجګټیټ)
ارزښت د اینتروال په غاړه هم پروت وي.
د اینتروال محدودوالی (بندوالی) بی قید او شرطه
حتمي دی. د بیلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$ تابع
په نیم بنداینتروال (0,b] کی متمادي ده،
مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې

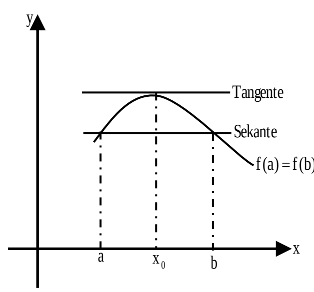


توګه اعظمي ټکی نه لري.

۳. د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسی نږدې اړيکي وجود لري، کومې چی د اناليوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول (Rolle) قضيه:



يوه د f تابع دې په بند اينتروال[a,b]
کې متمادي وي د(f(a)=f(b سره
او په واز ايتروال(a,b) کی مشتقوړ،
نو لږ تر لږه يوځاي $c \in (a,b)$ شته دی
د $f'(x_0)=0$ سره.
حل :

۱) کهf ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$
۲) که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چیfثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د (f(a)=f(b سره نامساوي دی . په دې اساس د اينتروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f'(x_0)=0$

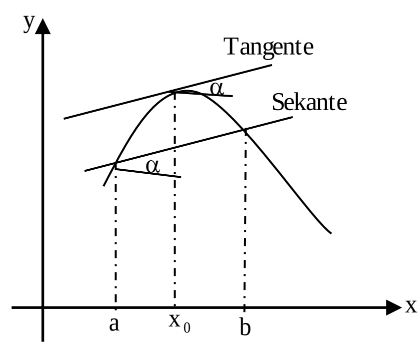
تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.

پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ایا یوې مایئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه میل (جګوالي) سره جوړیدلی شي؟

ځواب یی لاندې قضیه راکوي

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=f(x)$ تابع په بند اینتروال$[a,b]$کی متمادي او په واز اینتروال (a,b)کی د مشتق وړ وي ، نو هلته یوځاي $x \in (a,b)$شته دی، د کوم لپاره چی لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



(خیره ښه نه ده انځور شوې تیک دې
د الفا د کونج لاندې ضلعې باید د x محور سره غبرګې وي)
حل:
دا پرابلم په یوه مرستندوې تابع داسی تعریفیږي، چی د رول قضیه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامخ ته کوو:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

د مرستندوې تابع په څیر د مشتق تابع جوړیږي:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

نو باور لري:$h(a)=h(b)=0$. برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په [a,b]کې متمادي ده. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چی یو ځاي $x\in(a,b)$شته دی د $h'(x)=0$ سره، چی له هغې لرو:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ يعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

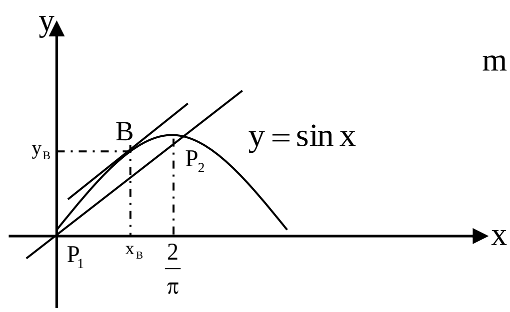
پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلګې نوره هم روښانه کړي.

بیلګه :

د $f(x)=\sin x$ یوه تابع دې داسې ورکړشوي وي،چې په یوه ټکي $B(X_B,Y_B)$کی تانجنت د منحني مماس وي، اوکوم چه په $P_1(0,0)$ او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ټکو کی همغه میل یا جګوالی لري لکه قاطع.

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یاجګوالی:

$$m=\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{2}{\pi}$$



د منحني میل د $B(x_B:y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B)=\cos x_B=\frac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B=\arccos\frac{2}{\pi}=0{,}88$ او $f(x_B)=f(0{,}88)=0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88:0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y=\frac{2}{\pi}(x-0{,}88)+0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

پراخه شوې يا غزېدلې منځقضيه :

که $u = f(x)$ او$v = g(f)$ په بند اينتروال$[a,b]$کې متمادي توابع وي او په واز اينتروال (a,b)د مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري ، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه يوځاي $x_0 \in (a,b)$وجودلري چې لاس ته ترې راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له املهg معکوس کېدونکی ده او$v=g(x)$ مساوات دx په لور معکوس کيدنه ورکوي، يعنې $x = g^{-1}(v)$

که دf په تابع کې هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو يوه زنځيري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځيرې قاعدې له مخې يې دا مشتق لاس ته راځي:

که په $u=h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$او $v_2 = g(b)$

سره د وسطي قيمت قضيه استعمال شي، نو د ځای $v_0 \in (v_1; v_2)$ په لاندې ډول موجود دی:

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

له دې څخه د $h(v)=f(x),v=g(x)$ او $x_0 = g^{-1}(v_0)$سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

•

•

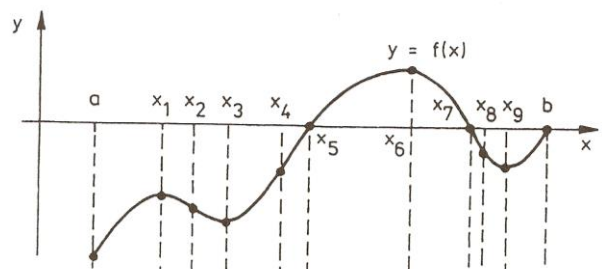
•

•

•

یوغږیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغږیز، برابرېوله)

جګیدونکې(متزاید)، ټیټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټېدونکې توابع)



که د ټولو $x_1<x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینتروال کې $f(x_1)\le f(x_2)$ $(f(x_1)\ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1)=f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ کره یا ټینګه مونوتون جکیدونکې (همغږیز ټیټیدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1,x_2\in D \wedge x_1\neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې مونوتون ټیټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

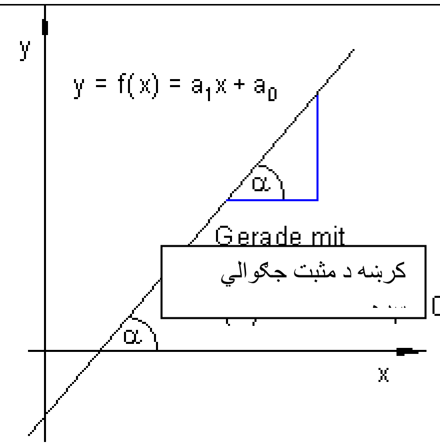
$$x_1,x_2\in D \wedge x_1\neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$$

.

یوغرېزوالی (یکنواخت) Monotony جګیتوالی، د جګتیتوالی جملې

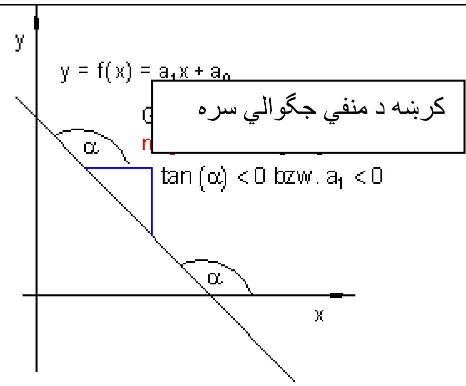
دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چي انحنانه لري. ددې لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل $a_1 = \tan(\alpha)$، دی، چېرته چي α د کرښې او مثبت لوریز د x -محور ترمنځ زاویه(کونج) ده.

په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت میل سره $\tan\alpha > 0 \Leftrightarrow a_1 > 0$



که $0 < \alpha < 90^0$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي ، دا په دې مانا چي $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسي($\Leftrightarrow$)، نو کرښه جګیږي. دا دا معنی لري، چي د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګیږي.

په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګېدني سره: $\tan\alpha < 0$ همداسي($\Leftrightarrow$ $a_1 < 0$)

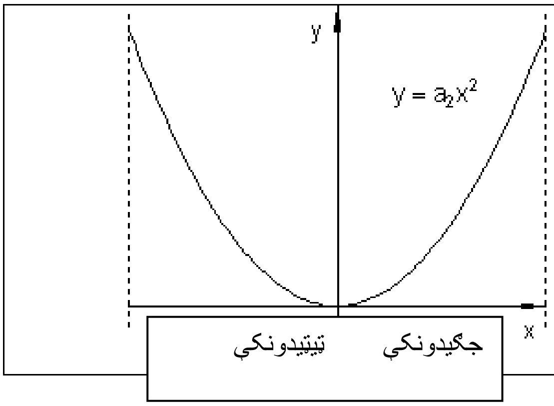


داپورته داسي دی: $\tan\alpha < 0$ همداسي $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چي $\alpha < 0$ همداسي $a_1 < 0$ ، نو کرښه ټیټیږي یا لویږي. دا په دې معنی، چي د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت f(x) کوچنی کیږي.

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزي تابع (یا د جګ-ټیټېدونکي تابع) غږیږو او له یوه مونوتون جګېدونکي تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټېدونکي تابع څخه ، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کيږي، چې د منحنيو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټوليزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت اينسول کېدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اينتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع f(x) مونوتون ټيټيږي. او په اينتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې f(x) مونوتون جګيږي.

لکه د کرښي په ګراف کې، چې جګېدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، يعني جګېدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له يوه ټکې څخه بل ټکي ته تغير خوري.

د تانجنت جګېدنه >0 ← منحني مونوتون جګيږي

د تانجنت جګېدنه < 0 ← منخني مونوتون ټيټيږي

د تانجنت جګېدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کيږي.

روښانه ده چې د f(x) تابع لومړی مشتق f'(x) د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو .

قضيه: د f(x) تابع دې په اينتروال I کې مشتقوړ وي.

۱ که د f(x) تابع په اينتروال I کې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$ لپاره

که f(x) په اينتروال I کې مونوتون ټيټيدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

.

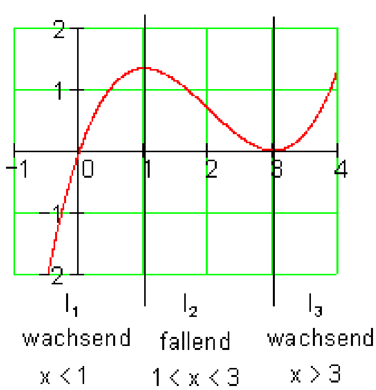
۲ . كه $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په اينټروال I کې مونوتون جګيدونكي ده.

كه $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره ، نو $f(x)$ په ايټروال Iکې مونوتون ټيټيږدونكې ده.

۳ كه $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in I$ لپاره، نو $f(x)$ په اينټروال Iکې په كلكه مونوتون جګيدونكي ده

كه $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره،نو $f(x)$ په اينټروال Iکې په كلكه مونوتون ټيټيدوني ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحو) ټاكنه:

$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ 	بلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت كيدى شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټيک و لوستل شي. لاندې ګراف لرو: مخامخ له بني – وكيڼ لور ته:جګيدونكي، ټيټيدونكي چګيدونكي

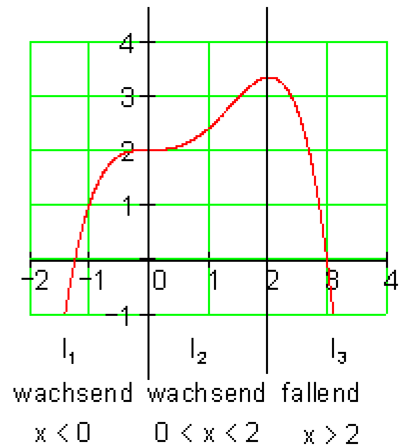
د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په كلكه مونوتون جګيدونكى دى.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره $f(x)$ مونوتون ټيټيدونكې ده.

د $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره $f(x)$ په كلكه مونوتون جګيدونكې ده.

.

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



بیلګه:

پورته له ښي – وکیڼ لور ته: جګیدونکي، جګیدونکي، ټیټیدونکي

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون ټیټېدونکي ده.

ځای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراېي ټکي دي.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مخ ته لرو.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x)=0 او f''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او f '' (x) < 0 ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جگ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي،
او د f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(
اصغریټکی)او که جگ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځي د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د y = f (x) تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

بیلگه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع گراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د گراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل: د بیلگې له گراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

گراف: که گراف دې ګران لوستونکي وباسي

د انحراف ټکي له پاره اړيين شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، یعني دلته یو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دویم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو یو نسبي ټیټ ټکي مخ ته لرو.

بیلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټیټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پيژند ته راځو:

پیژند : د $x = x_0$ په چاپیریال کی د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګټکی په همدې ډل نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{په همدې ډول} \quad f(x) \le f(x_0)$$

جمله : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (یادونه ۲دې مقایسه شي): چیرته چې $f'(x) \neq$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$هلته یو افراطي ټکی لري. خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کي د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینتروال کي ګراف کیڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بیلګې ځیره و باسی ؟-)

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کي کیڼکوږدی(کینه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکي ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

$f''(x)= 6x-4$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کيڼ ګوړوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوړوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه: د مات راشنل تابع $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ ګراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

های بارابول کینکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

بیلګه : د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

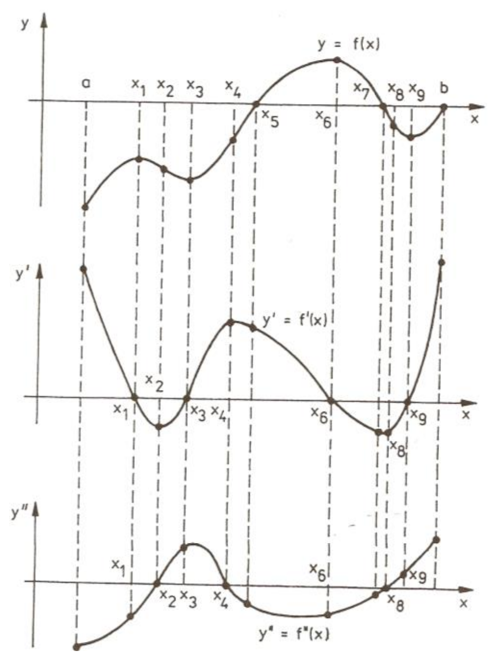
$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د $x \in R^+$ پاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کیڼه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کیڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)



یادونه: ولې اوړنټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ......　　　موږ له پورته خیرې اټکل کولی شو چی : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی)

مو مخ ته پروت دی.

برعکس(په څټ):

که وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) < 0$ نو یو کینې - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x) = 0$ وي ، داچی دا ښی -کینې - او که کینې- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

۴ - شرایط $f''(x) = 0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y = x^4$ لپاره $f''(0) = 0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

۵ – شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

ګورو چی $y = f(x) = x^5$ تابع د $x = x_0 = 0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 \quad , f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = 60x^2 \quad , f'''(x) = 0$$

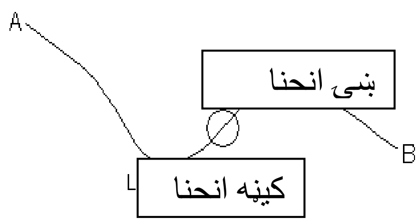
ګورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

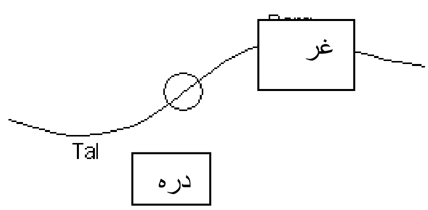
.

د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسيږي.
د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولری. د کيني منحني(د کين لوري د انډل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.



د کيني- او ښی منحني(کرږې) ترمنځ باید د بایسکل انډل سیده ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کيني لوري و ښی لوري ته. دا د کيني او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه یاد انعطاف ټکی بلل کيږي.

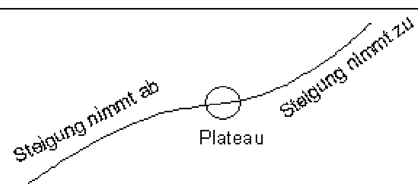
تاسو له بایسکل سره په یوه غونډۍ ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالي څخه تېېږيږي، نو لار په جګېدو پيل کوي. په لومړي سر کې نرم او بيا په نيغه جګيږي، بيا په دې پسې جګوالی بېرته کميږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسيږي. یو چېرته په لار جګېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.



د بایکل ځغلوونکي بل حالت، چې له څنګ دیاګرام څخه یې رانیسو:

په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګېدنه لومړی کميږي، چې له سره بېرته جګه شي.

ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتاًهواره).ˇ دې نسبتاً هوار ځای کې د ټوټه کرښي جګېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.



له کين و ښي لور ته: جګيدنه کميږي، هواره ، جګيدنه زیاتيږي

پوهيږو، چې د يوې تابع لومړى مشتق د تابع د جګوالى تابع دى، چې له ګراف څخه يې جګوالى لوستل کيږي.دا چې د انعطاف ټکى خورا لوي يا خورا کوچنى ټکى کېدى شي، داسي پيدا کيږي، چې د مشتق تابع انخرافي ارزښتونه پيدا کړو.

دا تللنلار همهغسي ده، لکه د پيل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار يا عمل اجرا کيږي.

مخکى له دې چى يو لړ جملى د بحراني(جګ – ټيټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څيړو، غواړو چې دا کليمى تعريف کړو .

دواړه کلمي به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کى سره را غونډې شي.

پيژند ۲۰ . ۶ : په يوه چاپيريال $x = x0$ کى مشتقوړ تابع $y = f(x)$ يو کيڼ- ښى- انعطافټکى په همدې ډول ښى- کيڼ- انعطافټکى لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکى(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکى ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):
که په x0 کى مشتقوړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دې پرتله شي): چيرته چى $f'(x) \neq$ وي نو هلته بحراني ټکى نه شته، د بحراني ټکولپاره يواځي د x0 ځاي په پوښتنه کى راځي، چې د هغي لپاره$f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چى $y = f(x)$دې يوبحراني ټکى ولري.

د پورته جملى استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):
که په $x = x0$ کى دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکى ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري (یادونه ۴ دې پرتله شي): چیرته چې $f''(x)\neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي اوړونتکي موجود وي. مګرچیرته چې $f''(x) = 0$ وي ، اوړونتکی شته کېدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

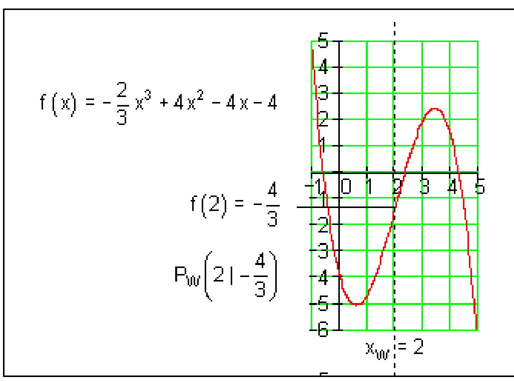
له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

جمله ۲۰ ، ۱۳:(د اوړونتکي یا انعطافټکي لپاره پوره کیدونکی شرطونه)که په x x_0= کی درېوار مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$, او $f'''(x)\neq 0$ نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کیڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کیڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننیزه یا تحلیلي بیلګه:

یادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف – یا اوړون ټکی په نښه کوو.

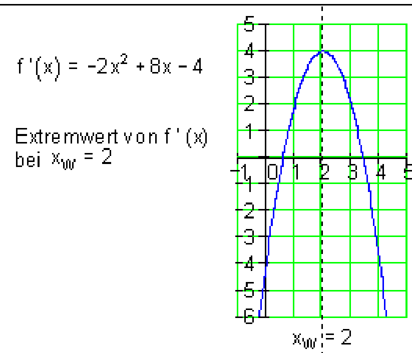
1- تابع مساوات د مشتق سره



$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$

۲- دویم مشتق صفر کړئ.

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -4x+8=0$$
$$\Rightarrow x_W=2$$



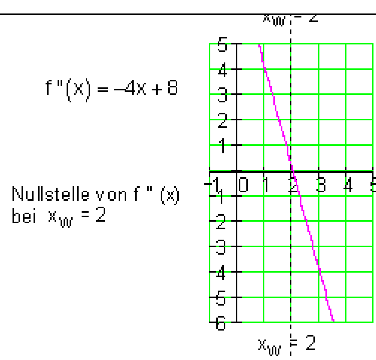
د الماني پښو: د$f'(x)$ ضفرځای په $xw=2$ کې

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W)=f'''(2)=-4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

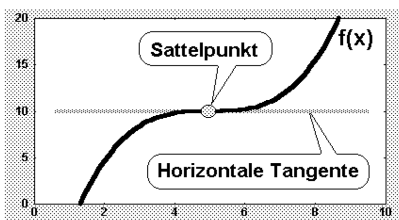
$$f(x_W)=f(2)=$$
$$-\frac{2}{3}(2)^3+4(2)^2-4(2)-4=-\frac{4}{3}$$
$$\Rightarrow P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}$$
$$\underline{\underline{P_W(21-1.33)}}$$



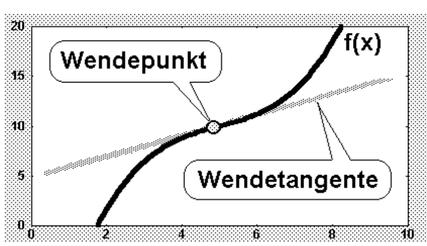
د الماني پښو: د$f''(x)$ ضفرځای په $=2x_W$ کې

پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږېږي.

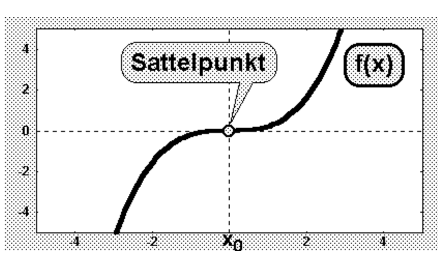
په یوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x)>0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږېږي(انحنا لري) دی.
$f''(x)<0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږېږي(انحنا کوي)
یو زینټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟



پیزند: د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



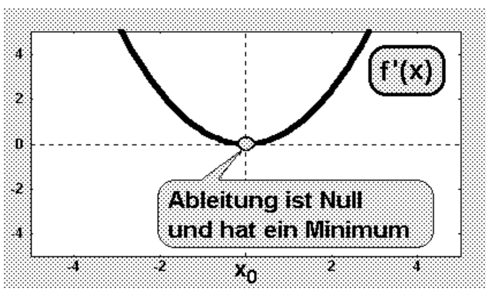
د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



توضیح: اوس فکر کوو، چې یو زینټکی څنگه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانگړي توگه دا مخ ته لرو، چې یو زینټکی له ښي ـــو کیڼه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جگوالی په پام کې نيسو، يعنې لومړی مشتق: د زينټکي د مخه د $f(x)$ جگوالي کميږي، په زينټکي کې صفر ارزښت لري، او له زينټکي څخه وروسته بېرته جگيږي.

يو زينټکی (د ښي – کيڼ – بدلون سره) په دې پيژندل کيږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ يې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته يو نسبي ټيټکی (مينيموم) ولري.



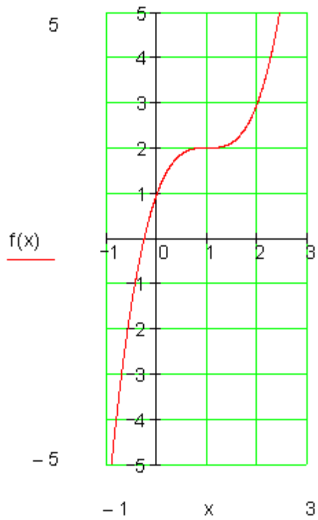
د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق يعنې $f'(x)$ په زينټکي کې د صفر سره مساوي دی.

زينټکی(ښی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته يو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جگ مشتق $f''(x)$ بايد په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.
له دې سره سم د زينټکي لپاره پوره کېدونکي قضيه وميندل شوه:
د زينټکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)
الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ يو مينيموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، يعنې $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بديل(د گرانو دوستانو وړانديز)
؟
\.
،

زینتکی Der Sattelpunkt



د انعطاف ټکي یو ځانګړی حالت زینتکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګیدني سره.که د کیڼ لور ورنږدې شو فکر کیږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که ځوک د ښي لور ور نږدې شي فکر کوي، چې یو نسبي ټیټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د ریاضیاتو له لورې ځیږو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f'''(x) = 6$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 1$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$	1=> د $x = 1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x = 1$ سره زینتکی

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
دا چې د $f''(1) = 0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.
د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات ټاکل کیږي.
.
.
،
.
.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2\Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.

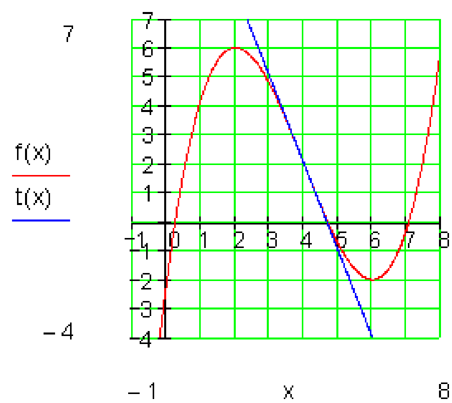
د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$

سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ گراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوڅوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دگراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د گراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر ځیرنی لاندې نه نیول کیږي.

د کږې یا منحني بحث (Kurven Diskusion):

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کیڼې لور و ښۍ لوري ته او له ښۍ لوري و کیڼې لوري ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پېژنو. موږ دې بحث ته د منحنې بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع څېړنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$

په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.

په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)

د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:

$$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$$

انعطافټکی یا اوړونټکی Inflection Point :

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.

د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوځټکی):

د $x-$ محور سرهِ غوځټکی: $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow (x) = 0$

د y محور سره غوځټکی(صفرځای) ټاکي $f(0)$ $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow$

دگراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې گراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په گوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کیږي.

د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ گراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع گراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی

1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جگیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټیټېدونکی دی.
2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې کره غښتلې مونوتون جگېدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انتروال I کې غښتلې مونوتون جگېدونکی ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلگه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.
.
.
.
.

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$$

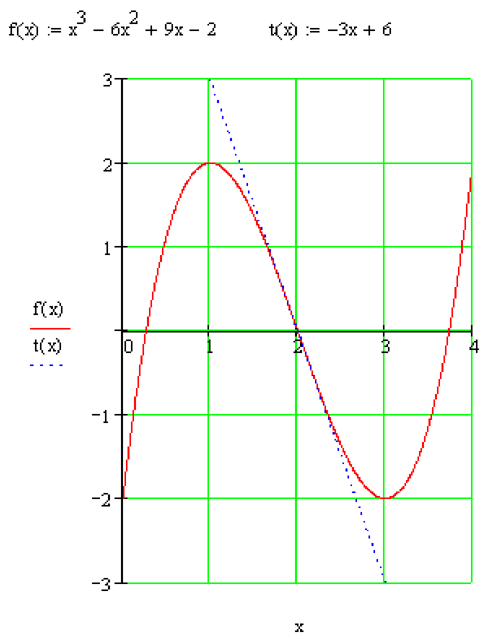
انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غوځتکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$



یوغریزوالی(مونوتوني یاجګ - ټیټوالی)

$I_1 = \{x \mid -\infty < x \le 1\}_{\mathbb{R}}$ په

کې یوغریز جګیږي.

$I_3 = \{x \mid 3 \le x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ په

کې یوغریز جګیږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$: کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سیومتري: نه لري

د کږوالي يا انحنا حالت:

ښی کږوالی يا انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کيڼ کږوالی يا انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

د افراطي د جګ-ټيټ ټکو جملې يعني دا وروستي نومولی جملی اوس بايد په يو لړ بيلګو استعمال شي.

دلته دي د ورکړ شوو توابعو، د پيژند سټ (- ډيری)، انعطافټکي ، جګ-ټيټټکي (اکستريموم، قطبونه، اسيومپټوټی وښوول شي او په دې جوړ(ودان) دې د تابع تلنه وکښل شي. دې ښوونو يا څېړنو ته د کږو خبرې اترې يا – مباحثه ويل کيږي، يعنی دلته د کږو (انحنا) د مختلفو ډولونوپه خويونو غږيږو.

موږ خپل تمرکز د افراطي ټکو(اکستريموم) او انعطافټکو(اړونټکو) رامعلومو يا روښانو څېړنوته متوجه کوو او د »انحنا- خبرې اترې) د انحنا(کږې)-چڼون (« د لاندې شيما له لارې مخ ته بيايو:

0 - د چمتووالي لپاره د تابع $y = f(x)$ د دريمي درجی پورې مشتق پيدا کيږي، بيا له ټولو هغو ارزښتونو x_iڅخه سټ M جوړيږي (۴ ټکی) چی وروسته بايد ځانګړې تر څېړنی لاندې ونيول شي.

په سټ M کی لومړی د غاړو ټکو ابسڅيز يا پرانه ارزښتونه نيول کيږي. په دې پورې په ځانګړي ډول بيا تشځايونه (لوکی Lücke نيمګړتيا) او هم قطبونه اړه لري. د M سټ به وروسته په نورو ارزښتونو تکميل شي.

۱ – د $f(x) = 0$ صفر ځايونو x_i سټ M0 لټول کيږي.

۲ – ټول ځايونه x لټول کيږي، چی هلته $y = f(x)$ د مشتق قابليت نه لري او په ډيری Mکی يی نيسي. بيا د ټولو ارزښتونو x_j ډيری M1 لټول کيږي، چيرته چی $f'(x) = 0$ وي، (دا د بحراني ارزښتونو لپاره په پوښتنه کی راځي) ، او د $y_j = f(x_j)$ تابع

ارزښتونه یی. ورپسې سړی د ټولو $x_j \in M_1$ ارزښتونه د f (xj) د دویم مشتق لپاره لټوي.

۳ - ټول هغه ارزښتونه x چیرته چی y = f (x) دوه ځله مشتقوړ نه دی د M په‌سټ کي نیول کیږي.

ورپسې بیا سړی د ټولو xk سټ M2 لټوي، چیرته چی f''(x) = 0 وي (دلته نو د انعطاف ټکي پوښتنه کی راځي) او د هغه د تابع ارزښتونه yk = f (xk) .

بیا د ټول $x_k \in M_2$ لپاره دریم مشتق f '''(x) ازمائیل کیږي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری M_{21} د کومو لپاره چی f'''(xk) < 0 وي نو افقي(پراته) محور کیڼ - ښی-اانعطافټکی جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ارزښتونو ډیری ، د کومو لپاره چی وي f'''(xk) > 0نو د پراته- یا افقي محور د ښي - کیڼ - انعطافټکي جوړوي. د ټولو $x_k \in M_2$ ډیری د کومو لپاره چی f'''(xk) = 0وي او یا دریم رابیلیدونکی نه وي موجود نو په ډیری M کی نیول کیږي.

۴ – د تیرو درسونو تعریفونو او جملو سره سم په افراطي ټکو او انعطافټکي یا ا وړونټکي باندې د ډیري M څیړنه د اصلي حالتونو لپاره اوس یو څو بیلګی راوړو

بیلګه : بلواك y = f (x) = x³- 6x² + 9x هرچیرته پوره زیات مشتقوړ دی.

$$0 - \ f (x) = 3x^2 - 12 x + 9 , f (x) = 6x - 12, \ \ f \ \ (x) = 6$$

په سټ M کي یواځي $-\infty, \infty$ نیول کیږي د حد –یا پولي تیریدنو په موخه یا هدف $: M = \{-\infty, \infty\}$

$$1 - \quad f (x) = x^3 - 6x^2 +9x = x (x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$M0 = \{x1 , x2 \} = \{ 0 , 3 \}.$$

---

2 - $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

$M1 = \{x3, x4\} = \{1, 3\}$, $y3 = 4$, $y4 = 0$

$f''(x3) = f(1) = -6 < 0$, Minimum (مینیموم

$f''(x4) = f(3) = 6 > 0$, maximum (ماکسیموم)

$M11 = \{1\}$, $M12 = \{3\}$.

3 - $f''(x) = 6x - 12 = 0$,

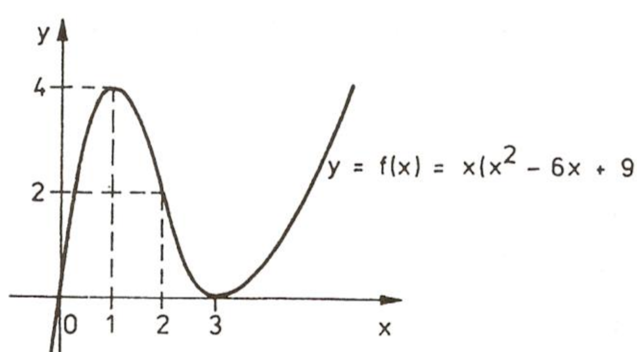
$M2 = \{x5\} = \{2\}$, $y5 = 2$

($f'''(x5) = f'''(2) = 6 > 0$

بنی - کيڼ اوړيدونتکی . $M22 = \{2\}$.

4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

په دې ډول د منحني تګلار په لاندې ښېره کي لاس ته راځي



بیلګه : تابع $f(x) = x^4 - 4x^3$ پوره په خوښه مشتقوړده.

$0 - f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 24x$, $f'''(x) = 24x - 24$

په سټ M يواځې $-\infty,\infty$ نيول کيږي: $M = \{-\infty,\infty\}$

1 - $f(x) = x^4 - 4x^3 = x^3(x - 4) = 0$

$M_0 = \{x_1 , x_2\} = \{0 , 4\}$.

2 - $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3) = 0$

$M_1 = \{x_3\} = \{3\}$, $y_3 = -27$

دا چی د $x = 0$ لپاره دويم مشتق $f''(0) = 0$ دی، دا ارزښت د ۳ - لاندې څېړل کيږي

$f''(x_3) = f''(3) = 36 > 0$, Minimum, $M_{12} = \{3\}$.

3 - $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0$

$M_2 = \{x_4 - x_5\} = \{0 , 2\}$, $y_4 = 0$, $y_5 = -16$,

$f'''(x_4) = f'''(0) = -24 < 0$

$M_{21} = \{x_4\} = \{0\}$, انعطاتِکی(کيڼ- ښی -انعطاتِکی

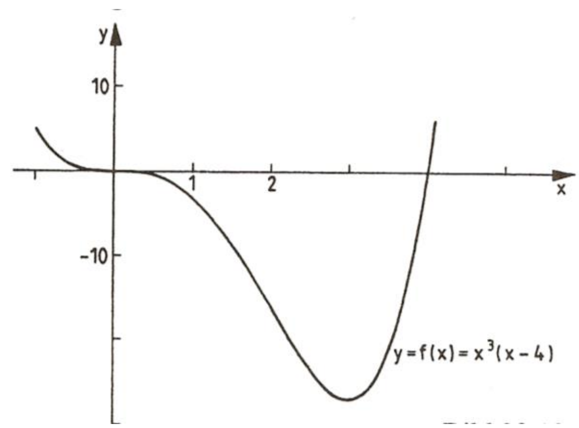
$f'''(x_5) = f'''(2) = 24 > 0$,

انعطافتِکی(ښی - کيڼ – انعطافتِکی)

$M_{22} = \{x_5\} = 2$.

4– $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

د لاندې ځيرې څخه د کرښې تلنشکل لاس ته راځي .



بیلګه : تابع $y = f(x) = e^{x^3}$ پوره مشتقوړ دی:

صفر:

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$
$$f''(x) = 3x(3x^3 + 2)e^{x^3}$$
$$f'''(x) = 9x^3 e^{x^3}(3x^3 + 2) + 6e^{x^3}(6x^3 + 1),$$

$M = \{\infty, -\infty\}$

۱ – تابع کوم صفرځای نه لري

۲ - $f'(x) = 3x^2 e^{x^3} = 0$

يواځې د $x_1 = 0$ لپاره ارزښت لري. مګر داچي f''(0) = 0 دی ، نو x1 = 0 د ۳ - لاندې ځيرل کيږي

۳ –

$$f''(x) = 3x(3x^3+2)e^{x^3} = 0,$$
$$M_2 = \{x_2, x_3\} = \left\{0, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\},\ y_2 = 1,\ y_3 = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}}}.$$

بنې – کېن انعطافټکي:

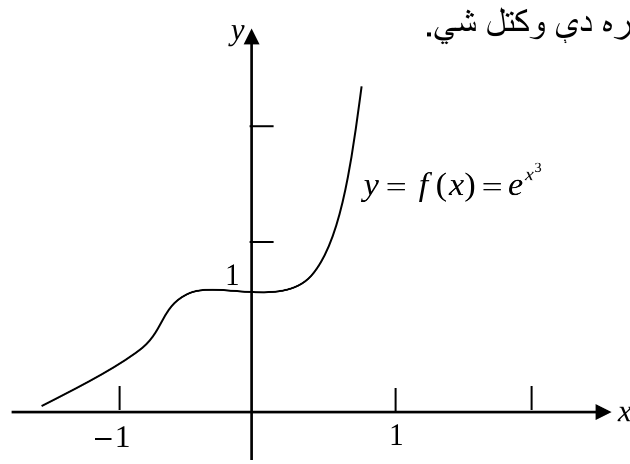
$$f'''(x) = f'''(0) = 6 > 0$$
$$M_{21} = \{x_2\} = \{0\}$$

کېن- بنې انعطافټکي:

$$f'''(x_3) = f'''\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) = 0 + 6\,e^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(-6\frac{2}{3}+1\right) < 0,$$
$$M_{22} = (x_3) = \left\{-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right\}.$$

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^3} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^3} = +\infty.$

لاندې ګېره دې وکتل شي.



بیلګه: تابع $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}$ د ټولو x لپاره تعریف دی، مګر یواځي د = | x
$x \neq 0$0لپاره مشتقوړ دی

صفر - د $x \neq 0$ لپاره باور لري یا صدق کوي.

$$f'(x)=1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}},$$
$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

دلته (f'''(x ته اړتیا نه پیښیږي

د M سټ له oe ± = x او x = 0 څخه جوړ دی

$$M=\{-\infty,0,\infty\}$$

اول: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}=0$

د $x=-\sqrt[3]{x^2},\ x^3=-x^2,\ x^3+x^2=0$

له امله د حل لپاره په پوښتنه کی x1= 0 , x2 = -1 راځي. دواړه ارزښتونه ، لکه ازماینه روښانه کوي، صفرځایونه دي:

$$M_0=\{x_1,x_2\}=(0,-1)$$

M0 = { x1 , x2 } = {0 , -1}

دویم : $f'(x)=1+\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0.$

م - د دې مساواتو حلونه له لاندې لاس ته راوړني څخه لاس ته راځي:

$$1+\frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=0,\quad \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}}=-1,\ \frac{8}{27x}=-1,\ x=x_3=-\frac{8}{27},$$

$$y_3=f(x_3)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{4}{27}.$$

$$M_1=(-\frac{8}{27}).$$

$$f''\left(-\frac{8}{27}\right)=-\frac{8}{9^3x^4}<0, Maximum$$

$$M_{11}=\left\{-\frac{8}{27}\right\}.$$

۳ -

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}=0$$

د کوم له پاره شوونې نه ده.

۴ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}+\left(1+\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}\right)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

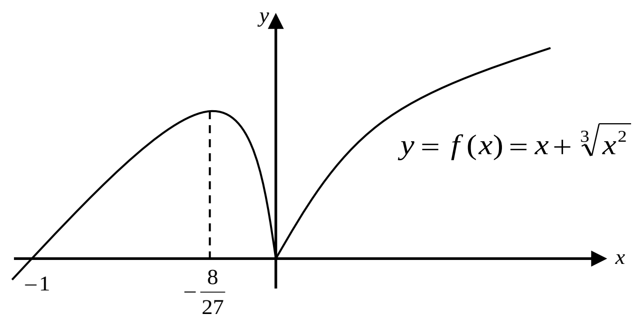
هغه ځاي0 = x1 ، دکوم لپاره چی f(x) مشتقوړ نه دی او د کومی لپاره چی = f (0) 0لرو، باید تر اوس تر څیرني لاندې ونیول شي

د x > 0 لپاره f(x) > 0 دی.

د -1<x<0 لپاره صدق کوي(د $x^2 > 0$ سره ضرب $-x^2 < x^3 < 0$) په همدې ډول(⇔ لاس ته راځي او برعس) یعني $0<-x^3<x^2$ او له دې امله $0<\sqrt[3]{-x^3}<\sqrt[3]{x^2}$

، نو $0<-x<\sqrt[3]{x^2}$ او له دې سره: $f(x)=x+\sqrt[3]{x^2}>0,$

له دې امله د $x1 = 0$ سره یو نسبي ټیټټکی (نقطه اضغري) مخ ته پروت دی. په دې توګه د کږې یاا منحني تلنلار د لاندې څیرې سره سم روښانه ده.



په لاندې بیلګه کی دې د x ارزښتونه د $f''(x) = f''(x) = 0$ لپاره هم د M په ستٻ کی ونیول شي.

بیلګه : تابع $y=f(x)=x^4+x$ پوره زیات مشتق وړ دی.

صفر:

$$f'(x)=4x^3+1,$$
$$f''(x)=12x^2,$$
$$f'''(x)=24x,$$
$$f^{(4)}(x)=24,$$
$$f^{(5)}(x)=f^{(6)}(x)=...=0$$

په M کی یواځي د ابسڅیزی یعنی دپراته محور د غاړوتکی یعنی $\pm\infty$ نیول کیدي شي:

$$M=\{-\infty,+\infty\}$$

1 $f(x) = x^4 + x = x(x3+1)0, \quad M = (0-1)$

2 $f'(x) = 4x + 1 = 0$

$$M_1 = \{-1/3\sqrt{4}\}, \ y_3 = -3/\ 4\sqrt[3]{4}. = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$$

$$f''(-1/\sqrt[3]{4}) = 12(-1/\sqrt[3]{4})^2 > 0.Min, \ M_{12} = \{-1/\sqrt[3]{4}\}$$

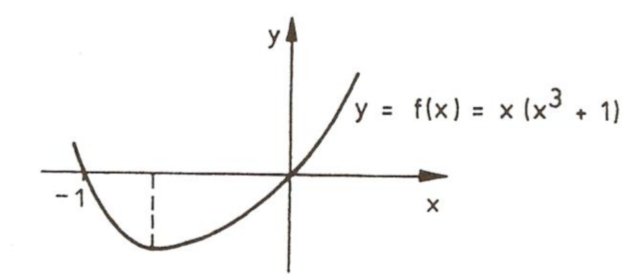
3 $f''(x) = 12x^2 = 0, \qquad M_2 = \{0\}$

$f'''(x) = 0$

4 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

د x=0 سره هیڅ اوړونټکی مخ ته نه لرو، ځکه چی f'(x) هلته اکستریموم ارزښتونه نه لري، بلکې یو اوړونټکی $y = x^3$ (په ۴ غزول شوی او د ۱ سره و پورته لور ته خوځول شوی یا پورته شوی) .

دا د ځیري ۲۰ ، ۱۳ سره سم د کږې تلنه ورکوي.



ناټاکلي حدونه یا پولې

یا د ناټاکلو افادو(وېینو) حدونه یا پولې

که و لرو $x \neq 5;$ $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو حد پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايي، ځکه چې مشتق يې نيول کېدی شي، يعنې د کمښتونو ويش(د تفاضلونو ويش) حد يې ټاکل کيدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$توابع ولرو،نود x=0 لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نيولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وايو.

پيل خيرنه:

د $\frac{0}{0}$ حالت

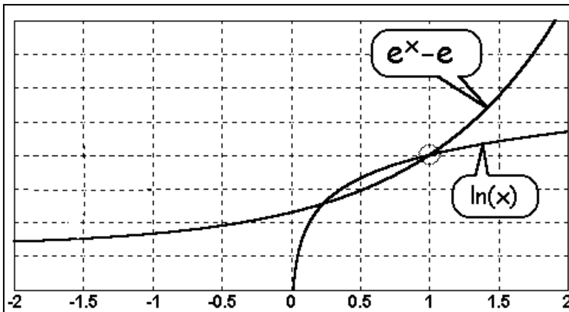
که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او مخرج يې دواړه د صفر په لور لاړ شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

بیلګه: لاندې د الماني پښتو: صورت یا ماتباندې، مخرج یا ماتلاندې

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

په خیره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعنې د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه.

ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)



لیکندود(لیکنډول): د افادې $\dfrac{\text{صورت} \to 0}{\text{مخرج} \to 0}$

لپاره په پوله شمیرنه کې لنډ لیکو:

$$\frac{0}{0}$$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،،
ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمیرل کیدی. د
لوړې ریاضي سره دا کار شمیرنه شونی شوه(دبیلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې،
چې پسې به وڅیړل شي).

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمیرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \qquad \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Z\ddot{a}hler \to 0}{\boxed{\text{مخرج}}\,r \to 0}$$

---

۱ – که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د x=1 په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده 0:0 به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u=f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

۲ – ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمیرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمیرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارولی، لکه په پورته بیلګه کې.

۳ – د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د ۱ په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

$$\frac{0.000000001}{0.000000001}=1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نزدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001}=100$$

$$\frac{0.00000000100}{0.00000000100}=100$$

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نزدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني (100) دی،

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

د برنولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت (ماتباندې او ماتلاندې) همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلې افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ موخه وره (هدفمنده) نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وڅیړل شي، په کومو کې چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګي په توګه تابع

$$f: \quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2ولري، سره له دې هم پوله شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضیې استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده :

که توابع u=f(x) او v=g(x) د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq 0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f او g یوصفرځاي وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضي نيونی پوره کوي. د هر $x \in U(x_0)$ لپاره يو xmد $x_m \in (x_0, x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چی لرو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0 \wedge g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچی د x->x0 سره xm->x0 هم هڅه کوي.
دx->oe په حالت کی x=1/z ځاي په ځاي کوو. د زنځيري قضي په مرسته لاس ته راځي:

u=f(1/z)

د مشتق $du/dz = f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ سره ، داسې چې لرو :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

يادونه : که په پورته حالت کی $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي ، نو په ويش بياله سره دا قاعده استعماليږي. که سړي دn-پلونو(قدمونو) وروسته بريالی وي نو دا قاعده لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چيرته چی $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع n - م مستق په معنې دی.

ډول یا تیپ: $0 / 0$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(ځګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د x->oe لپاره په غښتلې توګه ځګیرۍ، نسبت لوګاریتم تابع lnته

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قاعدې د ډیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^xدx په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بنه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

له تیپ یا بڼې $\infty-\infty$ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته

ددې لپاره لاندې تابع بیلګه کیدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د$x\to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچې دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼې $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د$x\to0$ لپاره ښایي. په کوم کی چې ضرب د ویش په ځیر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندې لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0ته:

دلته د بیلګې په توګه تابع $f(x)=x^x$ د$x\to0$ لپاره تر څیرنی لاندې نیول کیږي.

د بڼي بدلون یا فورم بدلون و بنسټe ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to+0} e^{x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونی ، د بیلګي په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او x

د $x\to\infty$ x $\in$ R^+ سره:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}} = e^{\mu}$$

د µ=1 له پاره لاس ته راځي

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

له بڼې ∞^0 و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته

دا کارونه په یوې بیلګي روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \lim_{x\to+0} e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x} = \lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = 1$ سره

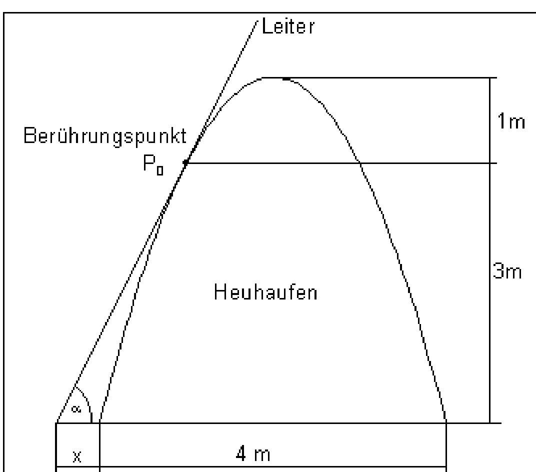
باید لاندې جدول کې پام وشي. لرې یا تې: شي

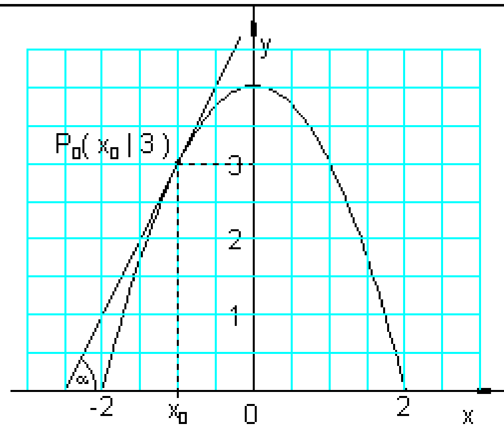
لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بڼی بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

تیپ(ډول)	$f(x) \to$	$g(x) \to$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} \to \frac{0}{0}$
∞	0		$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \to \frac{0}{0}$ $\wedge (Or)$ $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \to \frac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)} \to e^{0 \cdot \infty}$ د $f(x)>0$ سره.

د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :

له ځمکې څخه د وښو په توپۍ یوه زینه اېښول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي توپۍ لم د وښو توپی دې د یوه کیښکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور دی او ۴ متره جګوالی لري.
غواړو په دې یوه زینه کیږدو، چې د وښو توپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول شي؟
د وښو توپۍ له بیخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زینه کینول شي؟





مورې د y محور داسې کا ږو،چې د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

مورې د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمیرنه :

د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زینه توپې په $P_0(-1,3)$ ټکې کې لمسوي.مورې په $P_0(-1,3)$ ټکې کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \qquad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

د زينې او د وښو ټوپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځايونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 5, 0دی.

زينه د وښو د ټوپۍ له پېنو څخه بايد نيم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کيږي، چې يو ګراف په تعريف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله يا قضيه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د يو څو بيلګو له لارې وڅيړل شي.

نزدې ټولو پروسو کی ، چې په عمل کی کارول کيږي يا صورت نيسي، له تاثيروونکو يا په همدې ډول د هغو ټاکلو لويو استعمال ته اړ دی، کومی چې موږ په ځانګړو يا مخصوصو پولو کی په اختيار کي لرودی شو.

موږ يواځي هغه پروسی تر څيړني لاندې نيسو چې د يوې واريابلی يا اووښتونی x په واك کی وي. دا د بل په واك کی د يوې تابع $y = f(x)$, $x \in D$له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چی f(x) مینیمال یا خورا کم شي.

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسی لاس ته راوړل شي، چې f(x) ماکسیمال یا خورا لوي شي. په قاعده کی اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك واریابل یا اووښتونی x د $-\infty$ او ∞ پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیکپوهنی له امله ، یواځی په ټاکلو پولو کی

$$a \leq x \leq b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلی ، په دې پورې اړه لري، چی ایا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \leq x \leq b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخی پرابلمونو سره خورا نزدې یا ټینګ تړلی دی. دلته ځمونږ علاقه په ځانګړې توکه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

۱ - د بلواکیزو (y = f(x ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفي ورکولو سره سم(د مودالیټي پرابلم)

۲ - د تخنیکپوهنی پولو په پام کی لرل (*)

دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

بیلګه : یو د منډو(پټي ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړي) سیم لرو چي ټول اوږدوالی یې L دی. له دي سیم سره باید یوه مربع سطحه (څلورګوډیزه هواره)، چی د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د موداليتيArt und Weise پرابلم : غوښتنه مو د يوې ځلور ضلَي(څلورګوډی) پيداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي (-ګوډی) يو اړخ په a ښايو او بل اړخ يې په b ښايو، د څيرې ۲۰ . ۱۴ له مخی) .

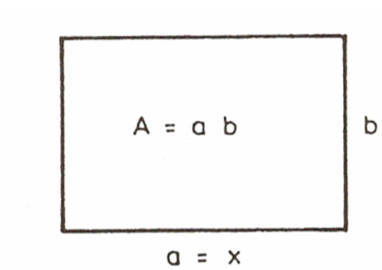
دا په سر کی دوه اغيزې لرونکي يا تاثيراچونکی لويي a او b دي. د

$$L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$$

له امله يواځي يوې اغيزمنې(تاثيراچوونکي) لويي ته اړيو د بيلګي په توګه $a = x$ ، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2)-x)$

دا روښانه ده چې صدق کوي . $0 \le x \le L/2$

له دې امله د سترې ګټې پرابلم داسی دی



$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \quad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله بايد ماکس د 0 او $L/2$ ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يواځي $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y''=f''(x) = -2< 0$ دی.

پە ريښتيا چې يو ماکس مو مخ تە پروت دی. دلتە تخنيکپوهنيزې پولی 0 او L / 2 رول نە لوبوي. نو صدق کوي. a = b = L /4

بيلگە : يوە بډای چې پە يوە ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډېری) M توليد کړي او دا ټل اخستونکو تە ورسوي، نو لە دې سرە فيکس يا کرە ټاکلی لگښتونە F ترړلي دي.
کيدې شي چې سملاسی د دې توليد پە ټولسټ (ټولډېری) M کی توليد کړي ، پە يوە زخيرە ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي پە ځاي کړي او اخستونکو تە يی سملاسي ورسوي.
دلتە د زېمتون (زخيرە کونې) لگښتونە راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپارە ځاي او هلتە بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چې توليد پە لږە کچە يا اندازە توليد شي او سملاسی اخستونکو تە وروړل شي. دلتە نو د زخيرە کولو لگښتونە منځ تە نە راځي.
مگر ټل توليد پە دې ډول توليد باندې درول، لگښتونە منځ تە راولي، چې د چمتووالی لگښتونە يی بولو. کومە ډيری x (ازادە لويە) بايد توليد شي، چې د امکان تر پولي کم لگښتونە پرې وشي؟ د زخيرې لگښت د چمتووالی لگښت سرە متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سرە يعنی چي خرڅلاو تە چمتو کيږي، پە څټ متناسب دی. کە x لوي وي نو چمووالی تە کم اړتيا شتە او کە x کم وي نو چمتووالی بدلون ټل بايد تغير وخوري يعني. ټول لگښتونە

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرتە چی F ثابت(همغە) يا پە کلکە اينسول شوي لگښتونە دي، Lد زخيرې لگښتونە او R د چمتووالی لگښتونە دي. دا ازادە لويە x د توليدډېری M څخە نە شي ستريدلی ، لوئيدلی يا غټيدلی. لە دې املە صدق کوي $0 \le x \le M$. مخ تە پروت د ستريدلو مسئلە لە دې املە پە لاندې ډول دە

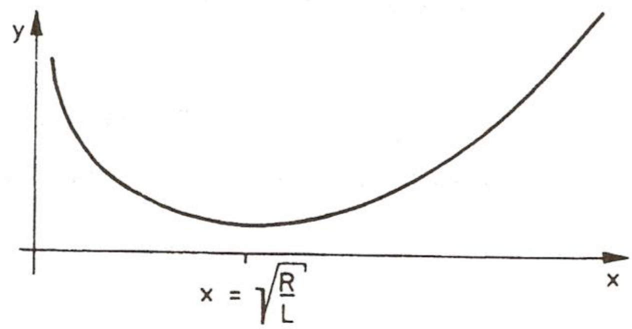
$$y = f(x) = F + Lx + R/x = \text{Min!} \quad (0 \le x \le M$$

(لمړی f(x) دوە وارە ديفرنځيال کيږي يا يي دوە وارە رابيليدنە نيول کيږي:

$$f'(x) = L - R/x^2 , \qquad f''(x) = 2R / x^3$$

د مينيوم لپارە ضرور دي: $f'(x) = 0$, پس لرو $x = R / L$ ؟؟؟

د $0 \geq x$ له امله $0 \geq (x)$ '' f هم صدق کوي، پس دلته تل یو نسبي مینیموم مخ ته لرو



د کرښې تګلار په څیره ۲۰ . ۱۵ کی انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مینیموم مو مخته پروت دی. که $x = R / L>M$ وي، نو یو منیموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R / L < M$ دا مانا لري $R / L < M^2$ په همدې ډول . $R^2< M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/ L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره

نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخیرې لګښتونو L څخه زیات لوي شي، نو سملاسی دې ټول تولید $x = M$ صورت ونیس. که د ذخیرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کیدی شي کوچنی ازاد x تولید شي.

ټاکلی بیلګه : د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي $R = 1000 <$ $M^2L = 108 . 10 = 109$ستر یا غټ ازاد لګښت دی $x = R / L = 1000 / 10$ $= 100 = 10$ ازاد a دلته 10 یوونه باید ورزیات شي ، چی 10000 یوونه تولید کړیږ $M = 10 , R = 1000 , L = 1$ لپاره صدق کوي $R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لویه له دې امله $x = M = 10$ ده .یواځې یوه ازاده لویه دې تر تولید لاندې ونیوله شي. پای

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېری) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښایي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتفارزښت**K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګښت**K'(x)** هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکئ، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:

لاندې تابع لرو:

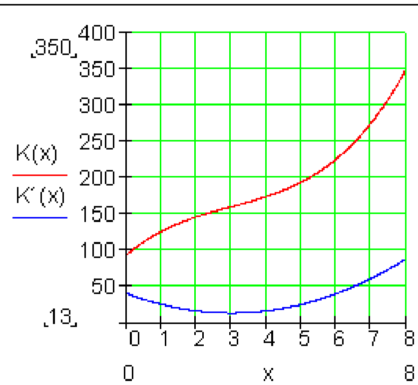
$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتف ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40



خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، یعني هلته چي تانجنت **K'(x)** پروت یا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

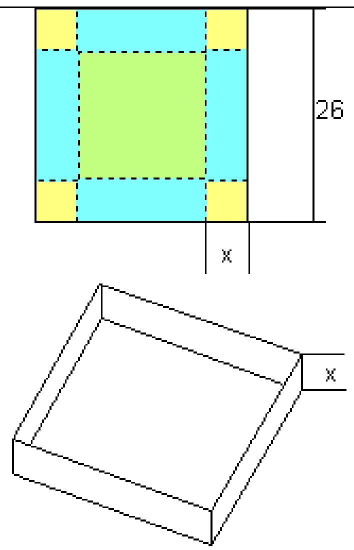
دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره :

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه ، چي ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، جي د x جګوالی لري.

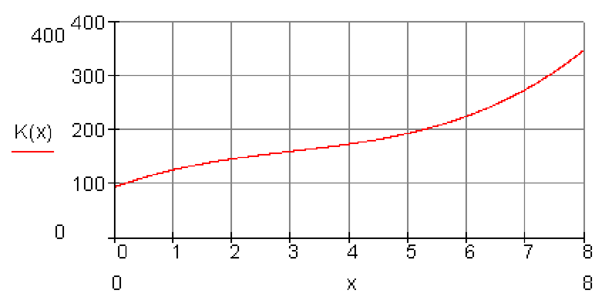
الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چي د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کي ښایي.

ب – ګراف وکاږی او په نردې توګه یي ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.



- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکي انځوروي، داسي چي x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چي 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



تولګه:

د رول(Rolle) قضیه:
یوه د f تابع دې په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اینټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه یوځای $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قیمت) قضیه:
که $y=(x)$ تابع په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اینټروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو
هلته یوځای $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې
لرو: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

خېږه په نوټ کې ده، دا بنه نه ده کښل شوي

پراخه شوې منځقضیه:
که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینټروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینټروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضیه:
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکې مشتقوړ وي.
1. که د $f(x)$ تابع په اینټروال Iکې مونوتون جګېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اینټروال کې همغږیزټیټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې همغږیز جګېدونکې ده.

- که $f'(x) \le 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ایټروال I کې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینټروال I کې په کلکه همغږیزجګېدونکې ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینټروال Iکې په کلکه مونوټون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x) = 0$ او $f''(x) > 0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x) = 0$ او $f''(x) < 0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x) = 0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پېژند: د $x = x_0$په چاپېریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0ته پوره نږدی x لپاره باور ولري:

$$f(x) > f(x_0) \text{ په همدې ډول } f(x) \le f(x_0)$$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چې د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله : (د يوه بحراني ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):

که په $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f\ '(x) = 0 \ \ ,\ f\ ''(x) \neq 0$ نو تابع $y = f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.

خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$

خورا جگ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x) < 0$

پيژند: په يوه چاپيرپال $x = x_0$ کي مشتق وړ تابع $y = f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جگټکی(عظمي نقطه) په همدې توگه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x_0 کي مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کي راځي، چې د هغي لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

پیزند: د زینتکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافتکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافتکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:

د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافتکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري

د برنولي او د دې لو، پیتال قاعده:

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x)\neq 0$ سـره او د ټولـو $x\in U(x)$ لپـاره او x_0 د f او g یوصـفرځاي وي، د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

تمرینونه:

۱ – د لاندې لیکل شوو تحلیلي افادو مشتق د x0 په ځای کې وشمېرئ او د فرمول د اعتبار ورشو(ساحه) ورکړئ.

a) $y=x^3-2x^2+1$ b) $y=\sqrt{x}$ c) $y=x\sqrt{x}$

d) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ e) $y=\dfrac{x}{x-1}$ f) $y=\sin\dfrac{x}{2}$

۲– د یوه تن یا جسم عمود پورته غورځونې د تن دروندټکي (د جسم د ثقل مرکز) د لار- وخت- مساوات په لاندې ډول دي:

$$s=f(t)=v_0\,t-\frac{1}{2}gt^2$$

پیلچټکتیا یا پیل سرعت $v_0 = 30\ \frac{m}{s}$ او د ځمکې بیړې(د ځمکېتعجیل) $g = 10\ \frac{m}{s^2}$. سره. دا تن یا جسم کله خپل عظمي جګوالي ته رسیږي؟

دا جګوالی څومره لوي دئ

۳ – یو تن په برابر ډوله چټکتیا خوزي(حرکت کوي)، داسې چې بیړه(تعجیل) یې $a = 2\ \frac{m}{s^2}$ دئ

په لاندې جدول کې د $\{(\Delta t)_n\}$ لپاره یو صفرترادف(- پرلپسې) کېږدئ(د بیلګې په توګه لکه په اوله مټه(ستن) کې) او جدول پوره کړئ.

له $t_0 = 3\ s$? وروسته د تن یا بدن لحظوي جټکتیا څومره ده.

۴ – د لاندې تحلیلي افادو مشتق ونیسئ! پام وکړئ، چې د مشتقنیولو کومه قاعده په کار وړئ شئ

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{x} - 5$

b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{1}{2}cx - 1$

c) $y = -2x^{-5} + 3x^{-3} - \frac{1}{2}x^{-2} + 4$

d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}} - 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{6\cdot\sqrt[3]{x}}{x}$

e) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

f) $y = (1 - x^{-4})(x^{-1} + x^2)$

g) $y = (x^2 + 2x\sqrt{x} + x)(x - \sqrt{x})$

h) $y = (ax^2 - b)^2$

i) $y = \frac{x^2 + x}{3x^3}$

j) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$

k) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$

l) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)$

۵ – د لاندې ورکړل شوو تحلیلي افادو مشتق ونیسئ، او هغه ارزښتونه ترې وباسئ، د کومو له پاره چې مشتق شته (موجود) نه وي

۵ . ۱ –

a) $y=(x-1)(1-x^3)$

b) $y=(x^3+1)(1-x-x^2)$

c) $y=\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^4}+\sqrt{x^3}\right)$

d) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt[4]{x}-2x\right)$

۵ . ۲ -

a) $y=\frac{x^3+1}{x^2+x+1}$

b) $y=4x+\frac{1}{x^2+1}$

c) $y=\frac{x-4}{4-x}$

d) $y=\frac{x^3-2x+1}{2x^3-5}$

e) $y=\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{2}}{3x^2-2}$

f) $y=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1-x}$

g) $y=\frac{1}{1-\sqrt{x}}$

h) $y=\frac{2x-\sqrt[3]{x}}{x^2-2x-1}$

i) $y=\frac{x^3+3\sqrt[3]{x}}{2x^2+x}$

j) $y=\frac{\sqrt{x}-1}{x-2\sqrt{x}+1}$

۵ . ۳ –

a) $y=\sqrt{x}\sin x$

b) $y=2\sin x\cos x$

c) $y=1-\cos^2 x$

d) $y=x^3\cos x$

e) $y=2\sin x(x-\cot x)$

f) $y=\frac{\tan x}{\cot x}$

g) $y=\frac{x}{\sin x+\cos x}$

h) $y=\frac{x\sin x}{1+\tan x}$

i) $y=\tan x-\cot x-2x$

j) $y=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

۵ . ۴ –

a) $y=\frac{x}{e^x}$

b) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2x^2}$

c) $y=e^x\tan x$

d) $y=\frac{5e^x}{\cos x}$

۵ . ۵ –

a) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ b) $y = \sin x \ \ln x$

c) $y = x^2 \ln x$ d) $y = 10 \ln e \ln x$

۵ . ۶ -

a) $y = 5^x + 2^x$ b) $y = 3^x x^3$

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \dfrac{4^x}{2^x}$

۵ . ۷ –

c) $y = 2^x - 2x$ d) $y = \dfrac{4^x}{2^x}$

a) $y = (2x+1)^4$ b) $y = (1-x^4)^5$

c) $y = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^8$ d) $y = \left(2x^2 - \dfrac{4}{x} + 3\right)^6$

۵ . ۸ -

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ b) $y = \sqrt{1-2x}$ c) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$

d) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$ e) $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ f) $y = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$

g) $y = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ h) $y = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$

۵ . ۹ –

a) $y = 5x^2 \ \sin 2x$ b) $y = \sin^2 x$ c) $y = \sin\sqrt{\dfrac{x}{2}}$

d) $y = \tan x + \dfrac{1}{3}\tan^3 x$ e) $y = \cos\dfrac{1}{1+x}$ f) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

g) $y = \cot(1-3x)$ h) $y = \cot\sqrt{1-2x}$ i) $y = \sqrt{\tan x}$

j) $y=\dfrac{\cos x^2}{\pi x}$ k) $y=\dfrac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}$

l) $y=\left(3+\dfrac{2}{\cos^2 x}\right)\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$ m) $y=\left(\dfrac{3}{\sin x}-5\right)\dfrac{1}{\sin x}$

n) $y=\tan\sqrt[3]{\dfrac{1-2x}{x}}$ o) $y=2\sin\sqrt[3]{\dfrac{3}{x}}$ p) $y=\dfrac{3\tan x-\tan^3 x}{1-3\tan^2 x}$

۵ . ۱۰ -

a) $y=\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{a}$ b) $y=\operatorname{Arccos}\dfrac{a-x}{a}$ c) $y=\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}$

d) $y=\operatorname{Arccos}\sqrt{1-x^2}$ e) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan}\dfrac{2x}{1-x^2}$ f) $y=\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{x}{x+a}}$

g) $y=\operatorname{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ h) $y=\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$ i) $y=\operatorname{Arccot}\dfrac{1+x}{1-x}$

j) $y=\operatorname{Arcsin} 2x\sqrt{1-x^2}$ k) $y=\operatorname{Arctan}\dfrac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}$

l) $y=a\cdot\operatorname{Arc}\cos\dfrac{a-x}{a}-\sqrt{2ax-x^2}$

۵ . ۱۱ –

g) $y=\dfrac{e^{-\cos x}}{\sin x}$ h) $y=\sqrt{1-e^{-x}}$ i) $y=\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{e^{2x}}$

j) $y=e^x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

۵ . ۱۲ -

a) $y=\ln 2x$ b) $y=\ln x^2$ c) $y=(\ln x)^2$

d) $y=\ln\sqrt{x}$ e) $y=\sqrt{\ln x}$ f) $y=\ln\sqrt{1-x}$

g) $y=\ln\tan x$ h) $y=\ln\ln x$ i) $y=\ln\cot\dfrac{x}{2}$

.

j) $y = \ln \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ k) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$

l) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a}\right)$ m) $y = \ln \frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ n) $y = \ln \sqrt{\frac{2x-3}{2x+3}}$

o) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$ p) $y = \ln \sqrt[4]{\sin^3 x \cos^3 x}$

q) $y = \ln \frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}\cdot\sqrt[5]{(x-2)^3}}{\sqrt[4]{(x^2-4)^5}}$

۵ . ۱۳ –

a) $y = |x|$ b) $y = \sqrt{|x|}$ c) $y = \ln|x|$

d) $y = \sqrt{|\ln \cos x|}$ e) $y = \ln|\ln|x||$

۵ . ۱۴ -

a) $y = \sqrt[x]{x}$ b) $y = (x^x)^x$ c) $y = x^{(x^x)}$

d) $y = x^{\sin x}$ e) $y = (\cos x)^{\sin x}$ f) $y = a^x \cdot x^a$

g) $y = x^{e^x}$ h) $y = a^{e^x}$ i) $y = (\operatorname{Arc}\tan x)^x$

j) $y = (\tan x)^{\frac{1}{\cos x}}$

۶ – تانجنت په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې په منحني $f(x)$ د x–محور سره کومه زاويه (کونج) جوړوي

a) $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$ b) $y = \sqrt[3]{x+1}$, $x_0 = 0$

c) $y = \left(x^2 - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$, $x_0 = 1$ d) $y = \sqrt{\frac{x^2-4}{9x^2-25}}$, $x_0 = 0$

e) $y = x\sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$ f) $y = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

g) $y = \sqrt{x-\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$ h) $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$

i) $y = \sin(2\pi - x)$, $x_0 = \pi$ j) $y = \sqrt{\sin 2x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

---

k) $y = \sin\sqrt{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$ l) $y = (x-1)e^x$, $x_0 = 0$

۷ - په پروت تانجنت د -محور باندې پرته منحني کوم ټکي کې غوځوي، که زاویه او همداسې وي.

a) $y = x^2$ b) $y = x^3$ c) $y = x \cdot |3-x|$
d) $y = \frac{x^2-3}{2x}$ e) $y = \frac{x^2+x+14}{x+2}$ f) $y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-6)^3}$

۸ – د ورکړشوو تخلیلي افادو لومړي درې مشتقونه جوړ کړی! و ازمایې، چې ایا د مشتق قابلیت کې د یو ګونو ورشو ګانوو یا ساحو کې تغیر راځي!

د -م مشتق لپاره یو عمومي فرمول ورکړی، ترهغې چې شته وي.

a) $y = x^n$ b) $y = \sqrt{x}$ c) $y = \sqrt[4]{x^3}$
d) $y = \sqrt{1-x^2}$ e) $y = \frac{x}{1-x}$ f) $y = \frac{1+x}{1-x}$
g) $y = \cos x$ h) $y = \frac{1}{2}\sin 2x$ i) $y = \sin(1-2x)$
j) $y = x^2 \sin 2x$ k) $y = \tan x$ l) $y = \tan^2 x$
m) $y = e^x \sin x$ n) $y = e^{mx}$ o) $y = e^{-x} + e^{-2x}$
p) $y = \ln x$ q) $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$ r) $y = \text{Arcsin } x$

۹ - د تانجنت مساوات $y = mx + n$ په $y = f(x)$ کیږدی.

۹ . ۱ -

a) $f(x) = x^2 + 1$, $P_1(1, y_1)$ bzw. $P_2(-1, y_2)$
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$, $P_1(0, y_1)$ bzw. $P_2(2, y_2)$
c) $y^2 = 1 - x$, $P_0(-3, y_0)$ d) $y^2 = x - 1$, $P_0(5, y_0)$

---

۹ . ۲-

a) $f(x) = e^{-x}$, $m = -1$ b) $f(x) = -x^4 + 3x^2 - 4$, $m = 0$

c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $m = 1$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $m = -1$

۱۰ – د لاندې توابعو $y=f(x)$ په څټ تابع (برعکس تابع) $f^{-1}(x)$ مشتق dx/dy په $P_0(x_0, y_0)$ ټکي کې وشمېرۍ(جوړ کړی)

a) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$, $x_0 = -1$ b) $y = x^2 - 2x - 1 + \frac{2}{x}$, $x_0 = 1$

c) $y = \frac{1}{2x^2 - 5x + 9}$, $x_0 = \frac{5}{4}$ d) $y = \frac{x+1}{x+2}$, $x_0 = -3$

e) $y = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 1$ f) $y = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, $x_0 = \frac{a}{2}$

g) $y = (x+1)\sqrt{1-x}$, $x_0 = -1$ h) $y = \sin x$, $x_0 = 0$

i) $y = \sin(2x + 3\pi)$, $x_0 = -2\pi$ j) $y = \sin^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

k) $y = x\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ l) $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$

m) $y = e^x \cos x$, $x_0 = 0$ n) $y = x\, e^{\cos x}$, $x_0 = 2\pi$

o) $y = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$, $x_0 = 1$

p) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$, $x_0 = x \in (-\infty, \infty)$, $a \neq 0$

q) $y = \ln(x+1)$, $x_0 > -1$ r) $y = \ln\sqrt{\frac{3x-4}{3x+4}}$, $|x_0| > \frac{4}{3}$

s) $y = x^{\frac{1}{x}}$, $x_0 > 0$, $x_0 \neq e$

۱۱ – لاندې تحليلي افادې په متماديت او مشتق والي باندې و څيړی،

a) $y = \begin{cases} -a & \text{für } x \le 0 \\ +a & \text{für } x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 1 & \text{für } x \le 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$ c) $y = |x - 1|$

d) $y = |\sin x|$ e) $y = -\frac{x^2}{2}$ f) $y = -|x|$

g) $y = \sqrt[3]{x^2}$ h) $y = (x+1)^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

j) $y = e^{\frac{x}{x-1}}$ k) $y = e^{\frac{x^2}{x^2-1}}$ l) $y = \text{Arccot}\,\frac{1}{x}$

m) $y = \text{Arcsin}\,(\sin x)$ n) $y = \text{Arctan}\,(\tan x)$ o) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$

p) $y^3 = 3x^2 - x^3$ q) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

۱۲ - لاندې منحني چې د پسې برابرونونو سره ورکړ شوي، د افراطي ټکو او اوړونټکو(نقاط افراطي و انعطاف) له مخې وڅېړی.

a) $y = x^2 - 2x + 3$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 6x + 7$ c) $y = x^3(8 - x)$

d) $y = (x-a)^4 + b$ e) $y = \frac{x}{x^2+1}$ f) $y = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

g) $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ h) $y = \frac{ax^2}{ax+b}$

i) $y = \frac{a^2(a-x) + b^2x}{x(a-x)}$ j) $y = \cos^2 x$ k) $y = \sin x\ \cos x$

l) $y = \sin 2x - 2\sin x$ m) $y = e^x \sin x$ n) $y = x\,e^x$

o) $y = x^n e^{-x}$ p) $y = e^{-x} + e^{2x}$ q) $y = e^{-x} - e^{-2x}$

r) $y = x \ln x$ s) $y = x \ln^2 x$ t) $y = \frac{1}{2}\ln x - \text{Arctan}\,x$

۱۳ - د دې لاندې برابرونونو سره ورکړ شوې منحني تر بحث لاندې ونیسئ:

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$ b) $y = -(x+4)^2 + 4$

c) $y = x^3 - x^2$ d) $y = x^3 - 10x$

e) $y = -x\,(x+3)^2$ f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

i) $y = (x+2)\,(x^2 - 4x + 3)$ j) $y = (1-x)\,(x^2 + 6x + 8)$

k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$ l) $y = |-x\,(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$ b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$

c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$ d) $y = (x-2)^2\,(x-4)\,(x+3)$

e) $y = \frac{1}{24}x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$

.

.

13.1. a) $y = x^2 - x - 2$
b) $y = -(x+4)^2 + 4$
c) $y = x^3 - x^2$
d) $y = x^3 - 10x$
e) $y = -x(x+3)^2$
f) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
g) $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$
h) $y = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$
i) $y = (x+2)(x^2 - 4x + 3)$
j) $y = (1-x)(x^2 + 6x + 8)$
k) $y = |x^3 + 9x^2 - 108|$
l) $y = |-x(x^2 - 16)|$

13.2. a) $y = x^4 - 8x^2 - 9$
b) $y = -x^4 + 5x^2 - 4$
c) $y = x^4 - 10x^2 + 9$
d) $y = (x-2)^2(x-4)(x+3)$
e) $y = \frac{1}{24}x(x-1)(x-2)(x-3)$
f) $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$
g) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$
h) $y = (x+2)^2(x-1)^3$
i) $y = x^2(x^2-1)^2$
j) $y = (x-4)^4(x+3)^3$

13.3. a) $y = \frac{1}{1+x^2}$
b) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$
c) $y = \frac{5}{(2x+1)^2}$
d) $y = \frac{2x + x^2 + 25}{1 + x^2 + 2x}$
e) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$
f) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{2x}$
g) $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$
h) $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - 2x + 1}$
i) $y = x - \frac{4}{x-1}$
j) $y = \frac{x^3 + 2}{2x}$
k) $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$
l) $y = \frac{2x^2 - 6x}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$
m) $y = \frac{x^3}{x^2 - 2x + 1}$
n) $y = \frac{5(3x^2 - 4) - 13x}{\frac{1}{8}(2x-1)(4x+7)}$

13.4. a) $y = x\sqrt{9x - x^2}$
b) $y = x^2\sqrt{25 - x^2}$
c) $y = x\sqrt{14 + 8x - x^2}$
d) $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$
e) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} - 2$
g) $y = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$
h) $y = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
i) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
j) $y = \sqrt{\frac{1-x^3}{3x}}$
k) $y = \sqrt{(x+1)^2 - x} - \sqrt{(x-1)^2 + x}$
l) $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x+1)^2 - x} + \sqrt{(x-1)^2 + x}\right)$

13.5. a) $y^2 = x^3 + x + 2$ b) $y^2 = x^3 - 3x + 2$ c) $y^2 = x^3 - 2x + 1$

d) $y^2 = x^4(x-1)$ e) $y^2 = x^2[x(1-x)]$ f) $y^2 = \frac{1-x}{x}$

g) $y^2 = \frac{x^2}{1+x}$ h) $y^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$ i) $y^2 = \frac{x(1-x)}{(x+1)^2}$

13.6. a) $y = 2\sin^2 x$ b) $y = \sin 2x \cos x$ c) $y = \sin x \cos^2 x$

d) $y = \sin^2 x + 2\cos^2 x$ e) $y = x \sin x$ f) $y = \frac{\sin x}{x}$

g) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ h) $y = x^3 \cos x$

i) $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$ j) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$

k) $y = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ l) $y = \cos 2x + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

13.7. a) $y = e^{-2x}$ b) $y = xe^{-x}$ c) $y = x\,e^{\sqrt{x}}$

d) $y = (x^2 - 1)\,e^x$ e) $y = e^{\tan x}$ f) $y = 2\,e^{-x}\sin 2x$

g) $y = e^{2x}\sin 3x$

13.8. a) $y = \ln 3x$ b) $y = \ln(x^2 - 1)$ c) $y = x^2 \ln x$

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج يې مختلف کرښيز يا لاينيز ضريبونه لري.

بنسټ: که د يوه اصلي پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ په مختلفو کرښيزو(لايني) ضريبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3} \ \ldots \ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې يوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کېږي، چې A,B,C,...,N حقيقي عددونه دي.

بيلګه:

اصلي پولينوم کسر $\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې پیداکیږي.

د پولینوم ویش(لنډ: پولینوموېش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیايي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\dfrac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کېدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه يې لاینیز (کربنیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضریبونو(ځلوونو) د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسیا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 باید مساوي وي.

$$A+B+C=4 \qquad \text{I}$$
$$A-3B-6C=-1 \qquad \text{II}$$
$$-2A-10B+5C=39 \qquad \text{III}$$

د فاکټور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$-8B=-72 \qquad \text{V}$$
$$-16B-7C=-41 \qquad \text{IV}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B=-72 \Rightarrow B=3$

د $B=3$ په V کې اېښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د $B=3$ او $C=-1$ په I کې اېښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کونې فرمول کې اېښوونې سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمايښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

ب) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې مساوي لاينيز(کرښيز) ضريبونه لري.

که د يوه اصلي پولينوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کرښيز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي نو ددې کرښيزو فاکتورونو له پاره پولينوم لاندې بڼه لري: $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کرښيزو فاکتورونو ټوټه کسرونه (ماتونه) په بلده بڼه ورکول کيږي.

بېلګه:

د اصلي پولينوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کرښيزو فاکتورونو:

د پولينوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيدا کيږي.

پولينوم ويش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره ډبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټہ کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټہ کسر جمع د غزونې لہ لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتلہ کونې لہ لارې.

$$\begin{aligned} &A+B=3 && \text{I}\\ &-2A-3B+C=-6 && \text{II}\\ &A+2B-2C=2 && \text{III}\end{aligned}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{aligned} &A+B=3 && \text{I}\\ &-3A-4B=-10 && \text{II}\end{aligned}$$

دا ضرب د 4 سره او جمعه یې د IV سره : A = 2

د A = 2 اینښوونه په I کې: $2+B=3 \Rightarrow B=1$

د A = 2 او B = 1 اینښونه په III کې: $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کربنيزو ضريبونو يا فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کېدونکي ضريب ax²+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کېدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه کېښول شي يا راوړل شئ

بيلګه:

د پولينوم کسر $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کربنيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کونې ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشونې ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

د $\frac{c}{x+1}$ بنې کسر سره يوځاي مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بيايي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

د ضريبونو A,B,C ټاکنه د پرتله کولو له لارې:

I A+C = 5

II A + B + 2C = 8

III B + 4C = 9

د III کمښت (تفريق) له مساوات II څخه د I سره يې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتونې يا متحولې لري:

IV A − 2C = 5

I A + C = 5

مساواتIII منفي مساواتII : $-3C=-6 \Rightarrow C=2$

د C = 2 په Iائښوولو سره : $A+4.2=9 \Rightarrow B=1$

د C = 2 په III ايښوولو سره: $B+4.2=9 \Rightarrow B=1$

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

ج) نا اصلي پولینوم کسرونه:

که د یوه پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولینوم د مخرج له درجې څخه لویه وي، نو دا په پولینوموېش له لارې په ټولناطق کسر او یوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بیلګه:

کسري پولینوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولینومونو ټوټه کړئ .

د پولینوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو یو نا اصلي پولینومکسر مخ ته پروت دئ.

پولینوم وېش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتي – یا باقي کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کوني کارونه (عملیه) مخ ته بیایو.مخرج په کرښیزو ضریبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1 = -2$ او $x_2 = 4$ لرو.

نو $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ دی.

د ټوټه کسر ټوټه کونې لپاره ځای په ځاي کوو:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضریبونو د پرتله کوونې په مرسته د A او B ټاکل:

$$A + B = 4 \qquad \text{I}$$

$$2A - 4B = 4 \qquad \text{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا کول $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

په II کې ايښوول: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

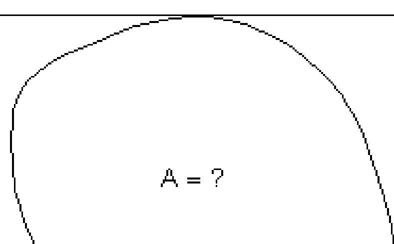
متحول (بښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

د انتيګرالشميرنه

د انتيګرالشميرنې لپاره پيل راوړنې

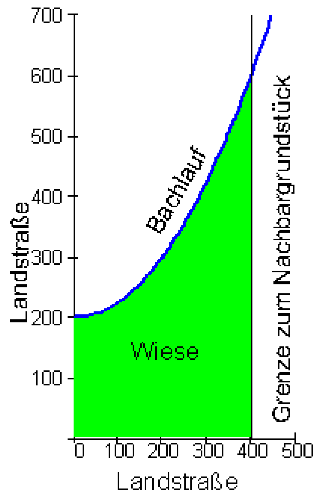
موږ د ځمککچپوهنې يا هندسې له لارې بلد يو چې د کرښو رابند تنونو يا جسمونوسطحه او ډکې يا حجم څنګه وشميرو.
که يوه سطحه له ګړط(-کرښې) رابنده وي، نو څه بايد وشي؟
دا مو انتيګرال شمېړنې ته رابولې.

پخوانيو يونانيانو ته دا د منحنې څخه رابندې سطحې شميرلو اصول معلوم وو. دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍپاي کې) د طبيعي علومو پوهانو لايبنيڅ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.	

پيلبيلګه

دا خیراه شوی چمن خرخیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی. ددی لپاره چي چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي.

د پلورونکی لپاره سطحه باید نزدي پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمېرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چي پیسي باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېرل شو.



وروسته له دې چي رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

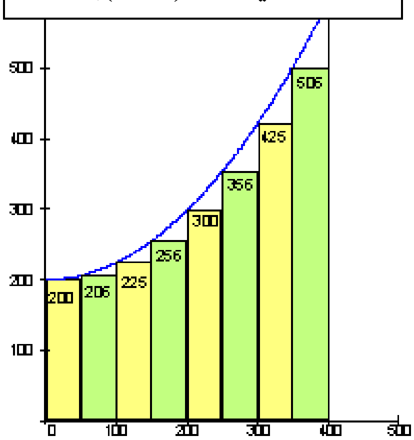
د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره توټه(مستطیل پټی) $50m$ سره وره ده او په رسم کي ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$$200\cdot 50=10000$$
$$206\cdot 50=10300$$
$$225\cdot 50=11250$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$300\cdot 50=15000$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$425\cdot 50=21250$$
$$506\cdot 50=25300$$
$$\underline{123700}$$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټیو) توټه کیږي

د اوږدوالي واحد(یوون)په m

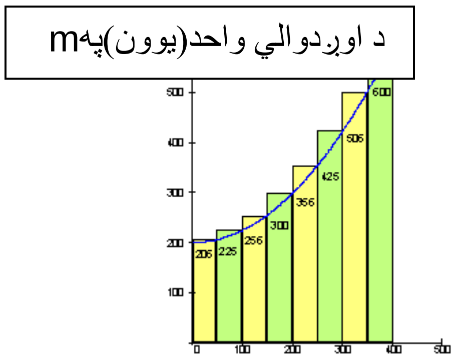


د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې $\boldsymbol{123700\ m^2}$ ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټيو سطحه يوځای شميرو.

$$206\cdot 50 = 10300$$
$$225\cdot 50 = 11250$$
$$256\cdot 50 = 12800$$
$$300\cdot 50 = 15000$$
$$356\cdot 50 = 12800$$
$$425\cdot 50 = 21250$$
$$506\cdot 50 = 25300$$
$$600\cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$



د د پلورونکي له پاره د ټولې سطحې مساحت نږدې $\boldsymbol{143700\ m^2}$ دی.
اخستونکی او پلورونکی بايد د دواړو قيمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قيمتونو منځ ارزښت يو بل سره ومني. يعنې د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2} = 133700unt^2$$

دا به وروسته د ټاکلي انتيګرال برخه (په مخ) کې وشميږو، چې ريښتونی ارزښت يې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بېلګه کې دا ډول شميږنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کيږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شميږنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کيږي.
دا د سطحې ريښتونی ارزښت يو چيږته په دا منځ کې پروت دی.
بايد ددې له پاره يوه لار پيدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

انتيګرالشميرنه Integralcalculation

د سطحې تابع له پاره تر مخ راوړنه:
دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دئ.
په کارتیزي وضعیه قېمت سیستم کې د ګراف په سرچینه کې یوه کرښه رسموو.
غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې
پرته وي(د x تابع وي).

د ریمن (ټاکلی) انتګرال

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتېګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو ځوک یوې پردئ ټولنې ته ورګډیږي یعنې ددې پردئ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څېړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې فنکشن یا تابع ته ځي.

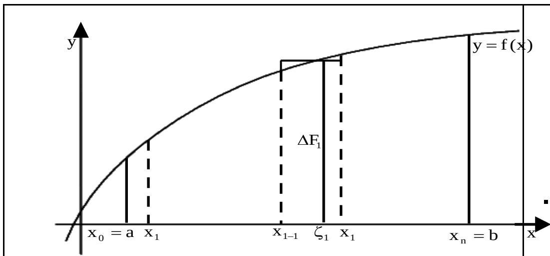
د انتیګرال هندسي تعریف:

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښنخ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کليمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې يا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنيول د مشتق په څېر يا برعکس کارونه يا عمليه ده.



يو تابع y = f(x) لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو $x_0 = a$ او $x_n = b$ ترمنځ هواره (سطحه) وشمېرو داسې چې (f(x)>0) وي. (څېره ۱ . ۱)

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اينتروال په n (نه اړيين) برابرو برخو انتروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} x_i < \ldots < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اينتروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ ترمنځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطيل سطحه (و لاړکونجيزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i \ , \qquad (4.2)$$

د ټولو پورته مستطيل ډوله کوچنيو سطحو د جمعې (زياتون) له لارې غوښتونکې، نزدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi) \Delta x_i ; ....(4,2)$$

دا نړدیوالی تر هغې ښه کيږي خومره چی د اینتروال [a , b] ویش نری شي يعني $\max \Delta x \to 0$، هرڅومره چی د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

كه (٤ . ٢) تل همغه پوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چی اینتروال [a , b] څنګه ویشل شوی

او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینتروال [a,b] کی اینتیګرالوړ دی. دا د بیلګي په

توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی.

پيژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیت (پوله)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F ; (\Delta x \to 0), ...(4,3)$$

كه په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه

F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کېدونکي لاندې(کښته)پوله یا حد او b د ایتیګرال کېدونکي پورته پوله یا حد بلل کيږي او [a,b] د ایتیګرال کېدونکي اینتروال او((f (x Integrand) اینتیګرالېدونکی) او x‌د اینتیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کيږي

یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخنخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

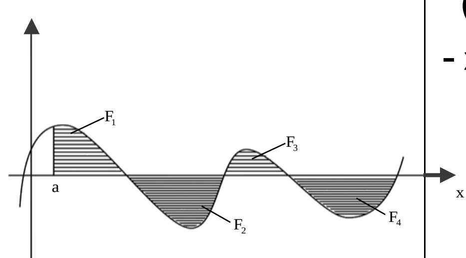
یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 > باوري نه وي .

که 0 > f (x) وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري

.

که د f (x) = y (کږه - لکه په)ش ٤ . ۲ (کی - داینتیګرآلونې په اینتروال کی د x - محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندي سطې سره باور لري :

$$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ددې لپاره چی دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چی تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

موږ دا لاندې تعریف(پېژند) لرو :

پېژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انټروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

د پېژند تعریف ٤ . ١ له مخې تل باور لري: $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

بنسټیز- یا لومړنی تابع

ددې لپاره چې د مشتقنیولو او اینتیګرال نیولو ترمنځ اړیکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعریفوو:

پېژند (تعریف): تابع y = f (x) دې په یوه واز اینټروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x) بنسټیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

په ساده توګه لیدل کیږي چې د یوې f (x) تابع لپاره نه یواځې یو بنسټیز تابع F (x) موجود دی، د بیلګې په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکې په عمومي ډول

$F (x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه f (x) = 2x لري.

د پورته ښوونو پایله، چې څنګه سرې د یوه متمادي تابع f (x) لومړنۍتابع پیدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

y = f (x) دې په اینتروال I کې متمادي تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ د f (x)، یوه لومړنۍتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

د f (x) هره بله لومړنۍ(بنسټیزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \;\; C \in R$$

ځواب :

ښایو چې Fa (x) د f (x) بنسټیز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښایو چې د Fa (x) لپاره د پورته پېژند شرایط باور لري. د Fa (x) مشتق د $x \in I$ او $x \neq a$ لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a^{'}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t) dt$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \;\; \xi \in [x, x+h]$$

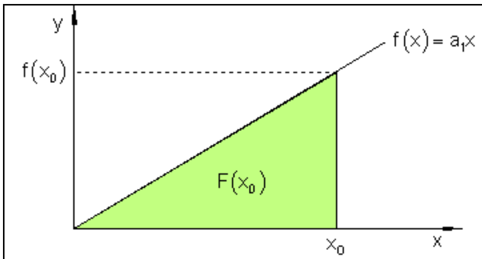
(د لیمیټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې یوه ξ شته دی

(د متمادیت له امله $(f(\xi) \rightarrow f(x))$

$= \mathrm{f(x)}$

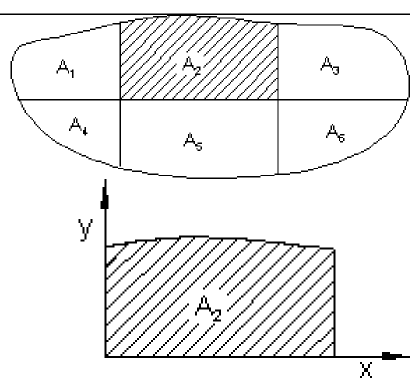
سطحه او لومړنی تابع:

سطحي تابع ته ترمخ راوړنه:

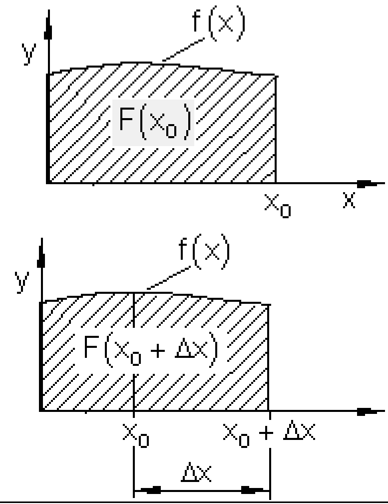
د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتېزي وضعیه سیستم (پروت ولاړسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي. یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحي فرمول په مرسته $A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده پیدا کیږي: زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو: $A \rightarrow F(x_0);\ g \rightarrow x_0;\ h \rightarrow f(x_0) = a_1 x_0$	 $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0) = a_1 x_0$ سره په لاندې ډول دی: $F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کې تشریح کوي یا ښايي. موږ دا تابع د **سطحي تابع** بولو.

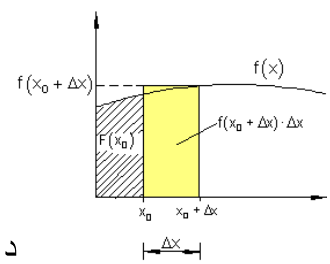
د سطحې پرابلم:

هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي. نورې ټولې رابندونې سیده کرښیزې دي. هره یوه د سطحې برخه(د بېلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کې د یوې سطحې په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.	

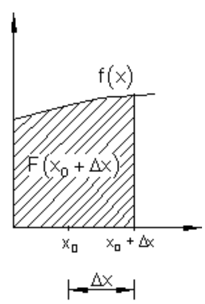
که له کړوکږښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبيلګه کې؟
که داسي يو تابع F شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظيم کړای شي.



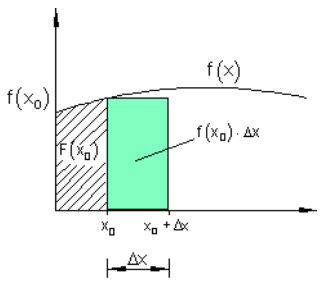
په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه لويه ده



$F(x_0+\Delta x)$ رېښتونې سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له ريښتونې سطحې څه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (يا کوچنې مستطيلونه يا ولاړکوډيز)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \leq F(x_0+\Delta x) \leq F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \leq F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \leq f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |: \Delta x$$
$$\Leftrightarrow f(x_0) \leq \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ يې نیسو(پوله يې پيدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \leq \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$
$$f(x_0) \leq F'(x_0) \leq f(x_0)$$
$$f(x_0) \leq F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.
موږ لیکو:

$$\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)} \quad \text{یا} \quad F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$$

که موږ بریالي شو، داسې يو تابع F(x) پیداکړو چې مشتق يې د رابندې کږې f(x)تابع وي، نو F(x) د سطحې تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګهددې کړنلارې برعکس دی.

سږی کړی شي فورمال ووایي:
د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انتيګرالول يې شمېرو.
د يوه ساده توان تابع په بیلګه د احساس له مخې يوه لار پيداکيدی شي، چې دا څنګه ايتيګرالوي.

توانتابع :

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمیږي او پوتنختابع د زاړه پوتنخ سره ضربیږي.
انتیګرالونه (زیاتونه یاورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګیږي اوپوتنختابع په نوي اګسپوننت وېشل کیږي.
دا همدا اوس ازمایو:

پوتنختابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنۍ تابع یا ساده تابع) بلل کیږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي یا را پیداکیږي یا راځیږي.

ناټاکلی انتیګرال

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنۍ تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنۍ تابع، یعنې F(x) وپېژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).
موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنۍ تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
موږ لومړنۍ توابع پلټو

بیلګه:
لومړنۍ تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې f(x) = 2x دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

موږ ازمایو:

$F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)d\,x=F(x)+C}$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېری)

بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپېر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

بیلګه

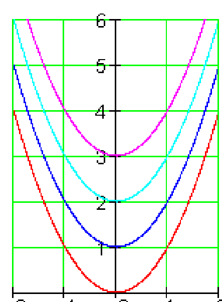
یو لومړنیتابع F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

$F(x)=x^3+2x+C$ ، ځکه چې $F'(x)=3x^2+2=f(x)$

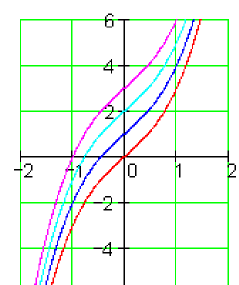
د ټولو لومړنیو توابعو ډېری دې د منحنیو ډلې په ځېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپېر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x)=x^2+C$



$F(x)=x^3+2x+C$



انتيګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس دی.

لاندې توابع په اړونده توګه په ،، برعکس مشتقولو،، له لارې. موږ د مخه ځنې انتيګرال قاعدې لوستلي.

لکه چې ومو ليدل دواړه تمرينونه د همغه تيپ او اصولو له لارې اجرا کيږي، خو يواځې ليکنه يې توپير لري

دويم(لاتين) د سطحې د شمېرلو لپاره د مشتق او انتيګرال اصلي جملې ته ګوته نيسو.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = \left|F(b) - F(a)\right|$$

د يوې ساده بيلګې له لارې د اصلي جملې په مرسته دا سې مخ ته ځو

تمرين (چا چې ډېر کار کوی وي) شوی ليدونکی ګوري يا پيژني، چې د سطحې مساحت په دې بيلګه کې بې له مطلق ارزښت شميرل کېدای شي.، ځکه چې په دې بيلګه کې سطحه د x- محور پورته لور ته پرته ده .

د دې درس تکميل – يا *پوره کيدنې لپاره بيلګې.

1 . ټول تام کسري تابع د x -محور او د کرښو x = -2 او x = 1 سره يوه سطحه پوره رابندوي يا راتړي. د سطحې مساحت وشميرئ.

$$f(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 6$$
$$a = -2 \;,\;\; b = 1$$

2 . د دوه توابعو *f(x)* او *F(x)* مساوات ورکړ شوي دي (الف) صفرځايونه وشمېرئ او د *f(x)* ګراف وکاږئ. (ب) وښايئ، چې *F(x)* د *f(x)* لومړنی تابع دی. (پ) د *f(x)* اوx - محور څخه پوره رابندې سطحې مساحت وشميرئ.

:

$$f(x) = 3e^{-x} \cdot \left(2x - x^2 + 1\right)$$
$$F(x) = 3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}$$

3 . د ٤ – مې درجې تامراشنل تابع د x- محور په درې ټکو کې غوڅوي او د هغې سره یوه سطحه مکمله رابندوي. د سطحې مطلقه مساحت وښایئ.

$$f(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3)$$

٤ . د *f(x)* مثلثاتي تابع د -محور د a او b ټکو او همداسر نورو ټکو کې غوڅوي. د *f(x)* او x -محور تر منځ د x=a تر x=b په انتروال کې د سطحې مساحت وشمېرئ.

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$a = -\frac{\pi}{6}\ ,\ \ b = \frac{3}{2}\pi$$

5 . دوه تامراشنل توابع *f(x)* او *g(x)* په ټکو A, B او C کې غوڅوي. (الف) د شي حالت رسم کړئ. (ب) د سطحو مساحت د *f(x)* او *g(x)* ترمنځ له x=a څخه تر x=b انتروال کې وشمېرئ.

$$f(x) = x^3 + \tfrac{5}{4}x^2 - \tfrac{7}{4}x - \tfrac{1}{2}$$
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$
$$A(a;0)\ ,\ \ B(b;0)$$

6 . د وضعیه قېمتسیستم په لومړئ او دویمه څلورمه(ربع) کې تابع *f(x)* او *g(x)* تابع ټیک په دوه ټکو کې غوڅوي. (الف) غوڅټکي یې وښایاست او انځور یې وکاږئ. (ب) د دواړو ګرافونو څخه کوم د سطحې مساحت رابندیږي.

$$f(x) = x + \frac{1}{x+1} \quad (x \neq -1)$$
$$g(x) = 3\tfrac{1}{4}$$

7 . د دوه توابعو $f(x)$ او $F(x)$ مساوات ورکړل شوي دي. (الف) صفرځايونه يې وشمېرئ او د $f(x)$ گراف وکاږئ. (ب) وښايئ، چې $F(x)$ د $f(x)$ لومړی تابع دی.

(پ) د سطحې مساحت وشمېرئ، چې د $f(x)$ له گراف د وضعيه سيستم له محورونو او د کرښې x=4 خخه رابنده وي.

$$f(x)=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}$$
$$F(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$$

8 . کسري راشنل تابع د -محور ، کرښې او کرښې سره په دريمه څلورمه(ربع) يوه سطحه رابندوي.

د دې کچ عدد وښايئ.

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+2x}{4x-2}=\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}$$

حلونه.

$$F(x)=\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{4}{3}x^3+2x+c$$
$$G(x)=\tfrac{1}{20}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{4}{3}x^3+c$$
$$H(x)=\frac{1}{3}a\cdot x^3-\frac{x^2}{6}+x+c$$
$$K(x)=\tfrac{1}{2}x^4-4x^2+c$$
$$L(x)=\frac{x^5}{10}+\frac{2}{9}x^3-4x+c$$

---

۲ -

$$\int f(x)\,dx = x^2 + \tfrac{1}{4}e^{4x} + c$$

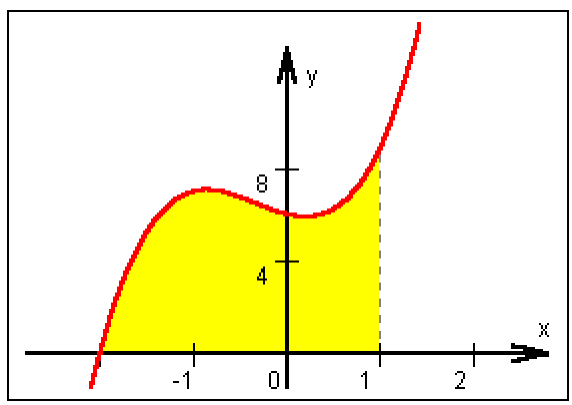
$$\int g(x)\,dx = \tfrac{1}{2}e^{x} - \tfrac{1}{2}e^{0,5x} + c$$

$$\int h(x)\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x - 2\ln|x| + c$$

$$\int k(x)\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{2}\sin 2x + c$$

$$\int l(x)\,dx = 2\sqrt{x^3} + c$$

۲ . ۱ –



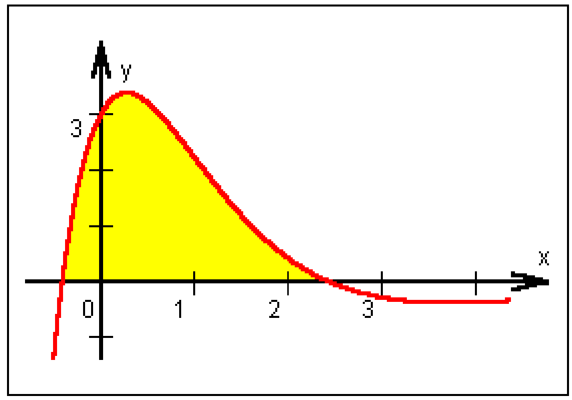
$$A = \int_{-2}^{1}\left(2x^3 + 2x^2 - x + 6\right)\cdot dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|6\tfrac{2}{3} - \left(-11\tfrac{1}{3}\right)\right| = \underline{\underline{18FE}}$$

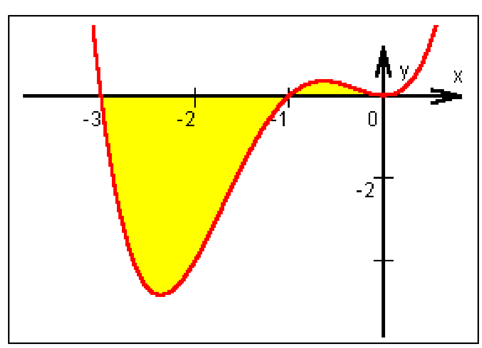
---

۲ : ۲ –



$$F'(x) = f(x)$$
$$F'(x) = 3 \cdot 2x \cdot e^{-x} + 3\left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$$
$$= 3e^{-x} \cdot \left(2x - \left(x^2 - 1\right)\right) = f(x)$$

$$A = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} f(x) \cdot dx = \left[F(x)\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$
$$A = \left[3 \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot e^{-x}\right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}$$
$$A \approx \left|1{,}30 - (-3{,}76)\right| = \underline{\underline{5{,}06\,FE}}$$



۲ : ۳

$$x^2 \cdot (x+1) \cdot (x+3) = x^4 + 4x^3 + 3x^2$$

$$A = \int_{-3}^{-1} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx + \int_{-1}^{0} \left(x^4 + 4x^3 + 3x^2\right) \cdot dx$$

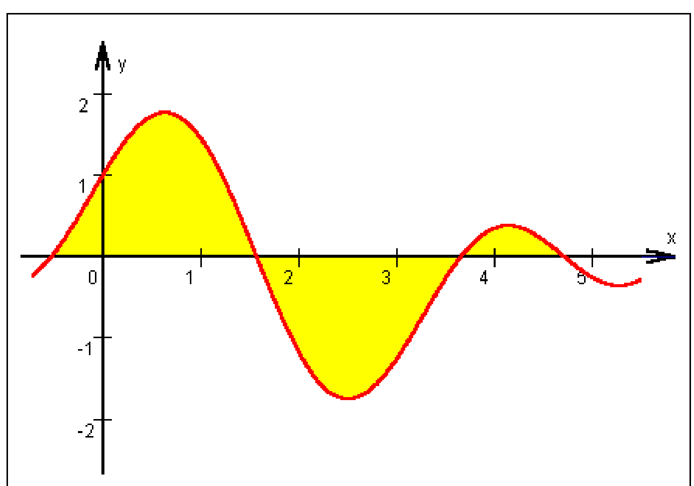
$$A = \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-3}^{-1} + \left[\tfrac{1}{5}x^5 + x^4 + x^3\right]_{-1}^{0}$$

$$A = \left|-0{,}2 - 5{,}4\right| + \left|0 - (-0{,}2)\right| = \underline{\underline{5{,}8\,FE}}$$

۲ . ٤ –

$$f(x) = \sin 2x + \cos x$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \cos x$$
$$= \cos x \cdot (2\sin x + 1)$$

$$0 = \cos x \;\rightarrow\; x_1 = \tfrac{1}{2}\pi\,,\; x_2 = \tfrac{3}{2}\pi$$
$$0 = 2\sin x + 1 \;\rightarrow\; x_3 = -\tfrac{1}{6}\pi\,,\; x_4 = \tfrac{7}{6}\pi$$



$$A = \int_{x_3}^{x_1} f(x)\cdot dx + \int_{x_1}^{x_4} f(x)\cdot dx + \int_{x_4}^{x_2} f(x)\cdot dx$$

$$A = \left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x + \sin x\right]_{x_3}^{x_1} + [\ ]_{x_1}^{x_4} + [\ ]_{x_4}^{x_2}$$

$$A = 2{,}25\,FE + 2{,}25\,FE + 0{,}25\,FE = \underline{\underline{4{,}75\,FE}}$$

۲ . ۵ ـ

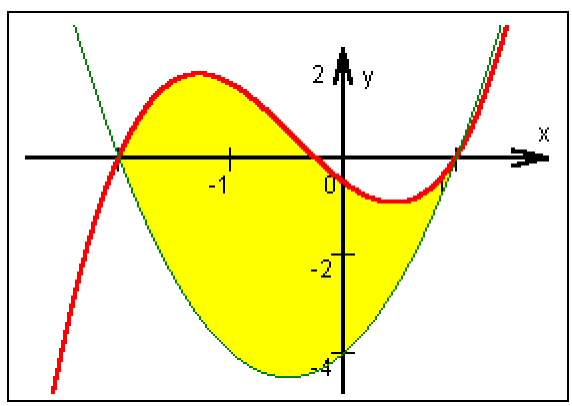
$$g(x) = 2x^2 + 2x - 4$$

$$0 = x^2 + x - 2$$

$$x_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{2{,}25}$$

$$\underline{\underline{x_1 = a = -2}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = b = +1}}$$



$$A = \int_{-2}^{+1} \left(f(x) - g(x)\right)\cdot dx$$

$$= \int_{-2}^{+1} \left(x^3 - \tfrac{3}{4}x^2 - 3\tfrac{3}{4}x + 3\tfrac{1}{2}\right)\cdot dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{4}x^3 - 1\tfrac{7}{8}x^2 + 3\tfrac{1}{2}x\right]_{-2}^{+1}$$

$$= \left|1\tfrac{5}{8} - \left(-8\tfrac{1}{2}\right)\right| = \underline{\underline{10\tfrac{1}{8}\ FE}}$$

۲ . ٦ –

$$x + \frac{1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = 3\tfrac{1}{4}$$

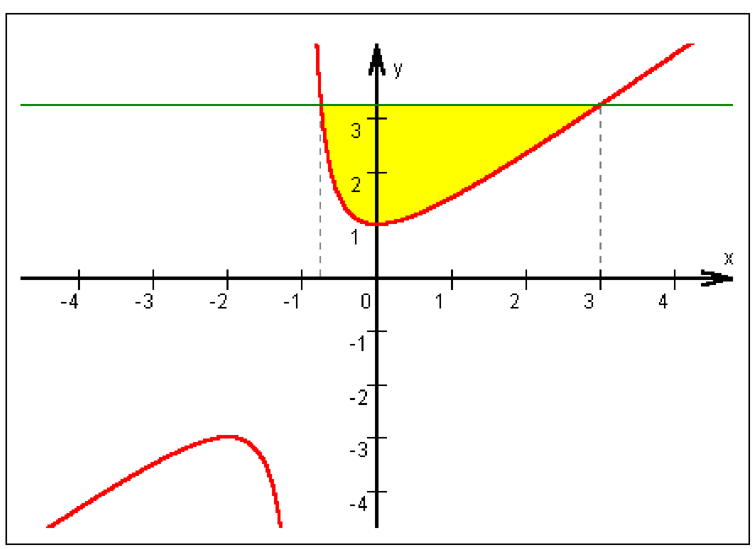
$$x^2 + x + 1 = 3\tfrac{1}{4}x + 3\tfrac{1}{4}$$

$$x^2 - 2\tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \tfrac{9}{8} \pm \sqrt{\tfrac{81}{64} + \tfrac{144}{64}} = \tfrac{9}{8} \pm \tfrac{15}{8}$$

$$x_1 = a = -\tfrac{3}{4}$$

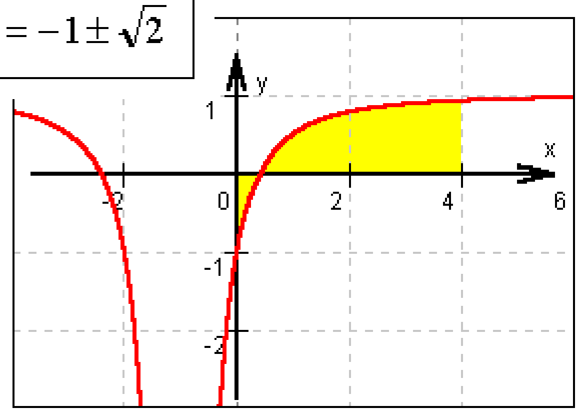
$$\underline{\underline{x_2 = b = 3}}$$



$$A=\int_a^b\left(g(x)-f(x)\right)\cdot dx$$
$$=\int_{-\frac{3}{4}}^{3}\left(3\tfrac{1}{4}-x-\frac{1}{x+1}\right)\cdot dx$$
$$=\left[3\tfrac{1}{4}x-\tfrac{1}{2}x^2-\ln(x+1)\right]_{-0,75}^{+3}$$
$$\approx\left|3{,}86-(-1{,}33)\right|=\underline{\underline{5{,}19FE}}$$

٢ . ٧ ـ

$$0=x^2+2x-1$$
$$x_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}$$



$$F'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{x^2+2x-1}{x^2+2x+1}=f(x)$$

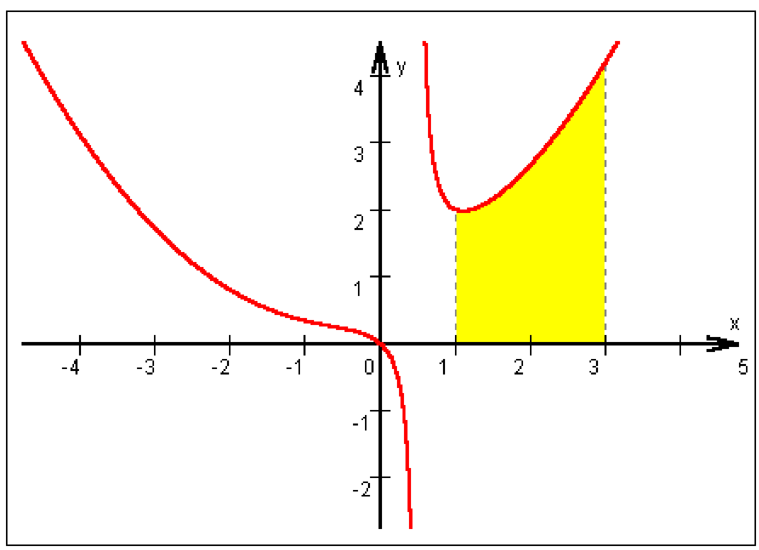
$$A=\int_{0}^{-1+\sqrt{2}} f(x)\cdot dx+\int_{-1+\sqrt{2}}^{4} f(x)\cdot dx$$

$$=\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_0^{-1+\sqrt{2}}+\left[\frac{x^2+1}{x+1}\right]_{-1+\sqrt{2}}^{4}$$

$$=0{,}17\,FE+2{,}57\,FE=\underline{\underline{2{,}74\,FE}}$$

په پورته کي FE د سطحي واحد(يوون) په معنادى

۲ . ۸ _



$$A=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}+\frac{11}{32x-16}\right)\cdot dx$$

$$=\int_{1}^{3}\left(\tfrac{1}{4}x^2+\tfrac{3}{8}x+\tfrac{11}{16}\right)\cdot dx+\int_{1}^{3}\frac{11}{32x-16}\cdot dx$$

$$A_1 = \left[\tfrac{1}{12}x^3 + \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{11}{16}x\right]_1^3 = 5\,\tfrac{1}{24}\,FE$$

$$\left\| \begin{array}{l} z = 32x - 16 \\ \dfrac{dz}{dx} = 32 \;\Rightarrow\; dx = \tfrac{1}{32}\,dz \end{array} \right.$$

$$A_2 = \int_{16}^{80} \frac{11}{z}\cdot\tfrac{1}{32}\,dz = \tfrac{11}{32}\cdot\left[\ln z\right]_{16}^{80} \approx 0{,}55\,FE$$

$$\underline{\underline{A \approx 5{,}59\,FE}}$$

په پورته کي *FE* د سطحي واحد(یوون) په معنادی

بیلګه:

مشتقوړ مګر نامتمادي (پرېکیدونکی) مشتقوړ تابع:

لرو:

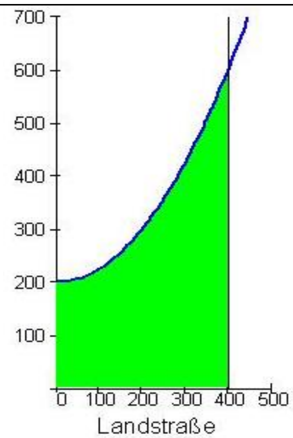
د $x \neq 0$ لپاره د $x = 0$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ 0 \end{cases}$

نو $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{f(x)}{x} = x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \to 0$ د $x \to 0$ لپاره ، له امله مشتق$f'(0) = 0$ دی. او د $\forall x \neq 0$ لرو:

$f'(x) = 2x\,\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، جبرې چې $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ ناشته دی. تابع f له دې امله مشتقوړ دی مګر نه ناپرېکېدونکی(متمادي) مشتقوړ.

د ټاکلي انتیګرال شمیرنه

ټاکلی انتیګرال همغه د ریمن انتیګرال دی، چې یوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شمیري(پسې غزېدلی دی، خو تکرار د زده کړې مور ده).



ټاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b یا د a او b حدونو ترمنځ یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهېږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

G دې په بند انتروال $a \leq x \leq b$ کې د g(x) لومړنی انتیګرال وي، د $g(x)=\int_a^x f(t)dt$ سره، نو باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو $G(x) = F(x) + C$ باور لري. د x=b لپاره لاسته راوړو: $G(b) = F(b) + C$

دا چې $G(x)=\int_a^a f(t)dt = 0$ دی او $G(a)=F(a)+C$ دی، نو $C = -F(a)$ ده.

دا په دې معنا، چې G(b) = F(b) – F(a) همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

تعریف: f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکې رامح ته کې.

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د F(b) – F(a) له امله د انتګرالونې ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره c=0 ولیکو.

بیلګه:

: د ټاکلي انتیګرال $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ ارزښت و ټاکی.

ښوونه: مونږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\,dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1 - 0 = 1$$

.

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتې له امله یو له بل توپیر لري.

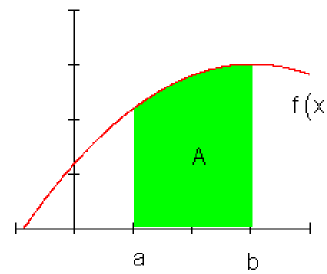
لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو ستې $f(x)=x^3+2x+C$

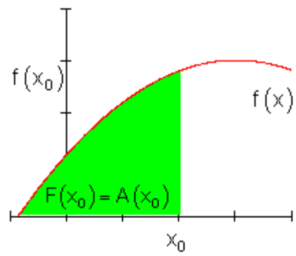
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو ستې و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$

د مشتق- او انتیګرالشمېرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

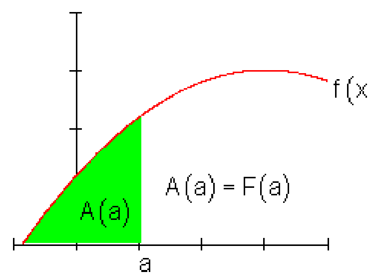
جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي $$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

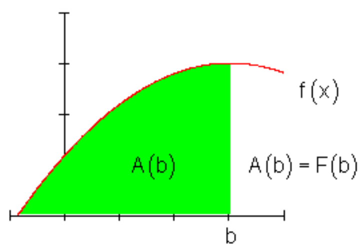
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.



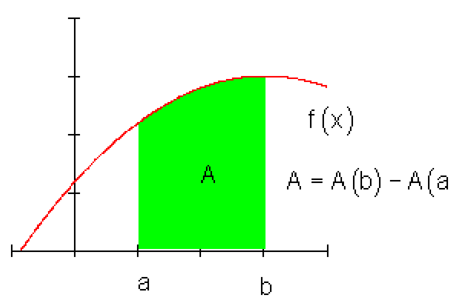


د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې $f(x)$ تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځاى پورې او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعنې $F'(x)=f(x)$





د انتروال $[a,b]$ حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي $(A(b))$ b او سطحې په $(A(a))$ a ځاي کې .، يعنې
$A= A(b) - A(a)$ په همدې توګه $F= F(b) - F(a)$ لاس ته راځي.



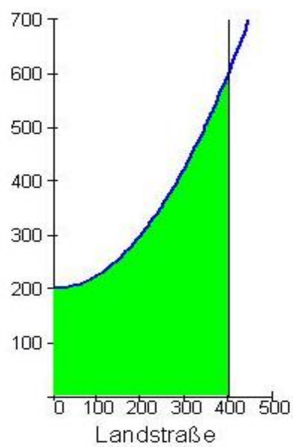
پـه انټروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره ښوولې:



$$A = \int_0^{400} \left(\frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x \,|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \underline{\left[\frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right]}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

د انتيګرالونې قاعدی

د ناټاکلي ايتيګرال انتيګرالونې قاعدې: په لاندې اينتيګريشن قاعدوکې د اينتيګريشن ثابته باندې صرف نظر کيږيدلته مساوات تر يوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ يواځې يوه ثابته کيدی شي زياته يا کمه وي. دا قاعده

کیدی شي چی په ټاکلي انتیګرال کي ښوولي جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چی د تېرو درسونو سره سم د دواړو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,,\qquad a\in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنسټیزو اینتیګرالونو بدلګړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$

$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو: $\int e^x dx = e^x + C$ $(a\in IR^+, a\neq 1)$

د ټولیز اکسپوننشل تابع a^x لپاره لرو: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

بیلګه :

دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بنه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8} 2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8} 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + c = \frac{2^x}{8\cdot\ln 2} + c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ:

د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x (x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln x dx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x, a\in IR^+, a\neq 1)$
لپاره $\int \log_a x dx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a} + c$ دی.

بيلګه :

ناټکلی انتيګرال $\int \ln 3x dx$ غواړو پيدا کړو:

بنه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x) dx = \int \ln 3 dx \div \int \ln x dx = x \cdot \ln 3 + x \cdot \ln x - x + c$$

$$\int \ln 3x dx = x \cdot (\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

بنسټيز اينتيګرالونه په يوه جدول کې

د اينتيګرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدی شي چی د بنسټيزو اينتيګرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټيزو توابعوبرعکس څرګنديږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x) dx$	نيونه يا فرضيه
1	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	

6	$\sin x$	$-\cos x + C$	
7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n\cdot\pi, \quad n \in Z$
9	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi, \quad n \in Z$

بیلګه :

د جدول او تېرو جملو څخه په ګټه لاندې ایتیګرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټیز توابعو بدلیدلی شي .

$$a)\quad \int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C, ...1,$$

$$b)\quad \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x>0),\ ....3,$$

$$c)\quad \int \sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x>0),\ ....3,$$

$$d)\quad \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{2\sin x}dx = \int \cos x\, dx = \sin x + C,\ ....(4,21)\quad 6,$$

$$e)\quad \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi), \qquad (4,11) \quad 9,$$

$$f)\quad \int (1+\cot^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi)\quad (4,12) \qquad 8,$$

$$g)\quad \int \frac{(1+x)(1-x)}{x-x^3}dx = \int \frac{1-x^2}{x(1-x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h)\quad \int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2},\ ....5$$

بدلون قانون <u>Substitutionlaw</u>

تراوسه پورې مو فقط انتیګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنیو توابعو په انتیګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنیو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالونې سیده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به ولیدل شي.

> جمله :
>
> د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution) لاتین :د $f\,(g(x))$ یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو یا فرضیو له مخې، چې u = g (x)نه برېکېدونکی یا متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:
>
> $$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تېرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کیڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتیګرالېدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور زنځیري تابع f [g (x)] وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سړی د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) :

مشتق $\frac{du}{dx} = G'(x)$ جوړوي په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي انتیګرالېدو وروسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې انتیګرال وشمېرئ.

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2=du/dx$ همداسی $2dx=du$

$$I=\int \cos u\,du=\sin u+C=\sin(2x-1)+C$$

بیلګه b : لرو $I=\int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x=u-1$, مشتق $2=du/dx$ همداسی $dx=(1/2)\,du$

$$I=\int 3\cos u\cdot\frac{1}{2}du=\frac{3}{2}\int\cos u\,du=\frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لاینې دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینې تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د تېرې جملی سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کیڼ لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه: لرو $I=\int\sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

را بیلیدنه: $-3=du/dx \Leftrightarrow dx=-1/3\cdot du$

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$$

$$-2x-3=u,\quad\Rightarrow\quad -2=\frac{du}{dx}\quad\Rightarrow\quad dx=-\frac{1}{2}du,$$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

$$c)\quad I=\int\frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

د بنسټيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولي x يواځي په جګ يا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم (Term)پروت دی، کيدی شي چی د لايني بدلولو له لارې په بنسټيز اينتيګرالو ۱۰ او ۱۱ بيرته واړول شي. ډيروخت يو د فورم بدلون ته هم اړتياموجود وي، چی د اينتيګراند فورم ته راشو.

بيلګه 5.2:

$$a)\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arc}\tan u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arc}\tan(\sqrt{2}x)+C.$$

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

.

$$2x = u, \qquad 2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = \frac{1}{2}du$$

$$I = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{6}\operatorname{Arcsin} u + C = \frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}(2x) + C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنسټیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننني تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف:

$$I = \int 4x\sqrt{x^2-1}\,dx$$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot\frac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\,u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $$I = \int \sin^3 x\cdot\cos x\,dx$$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\,dx$

$$I = \int u^3du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x\,dx$$

$$\ln x = u, \qquad :\frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int\tan x\,dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d \cdot h. \quad I = \int \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x \, dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x \, dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e) \; I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3} dx.$$

$$2 - x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3} du,$$

$$I = -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2du}{u} = -\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}\ln\left|2 - x^3\right|\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(\ln 1 - \ln 2) = \frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) یعني د ښی وکيڼ(لور هم استعمال شي . اينتيګرال f (x) dx کيدی شي چی په بل واړول شي چی x په يو مناسب بلواك (g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا:
افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهيدی شي چی سړی د بدلون وروسته يو ساده او ممکن يو بنسټيز اينتيګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی دی چی په يوه بلواك f (x) کی موجود » پيچلی « ترم h (x) د t = h (x) په بدلون له منځ څخه وړي او بيا) که ممکن وي (د x په لوريی حلوي

$$x = g(t) = h^{-1}(t)$$

بيلګه 7.21: الف:

$$: a) \; I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\sqrt{x} - 1 = t, \qquad x; x = (t+1)^2, \qquad dx = 2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اينتګرال د دوه ايتګرالو جمعې ته بيايې، دلته

$x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:

بيلګه:

عواړو د $f(x)=e^x$ مشتق بيدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پيدا کولي شو، يعني لرو:

$$f(x)=e^x\ \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^x dx=e^x+C$$

ګورو، چې $F'(x)=e^x=f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x)=e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx \neq e^{2x}+C$$

وي $F(x)=e^{2x}+C$ **دی، که** $F'(x)=2e^{2x} \neq f(x)$

له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

بیلګه:

د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\dfrac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\dfrac{1}{2}e^{u}+C=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایینت: $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :

وښایی چې باور

لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته- یا په خټ بدلون: $\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$

نو: $\int (x)dx = \int (x+1)^2 dx = \frac{(x+1)^2}{3} + C$

بيلګه :

و بنايي چې باور لري:

$$f(x) = (3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (3x+6)^3 dx$$

بدلون: $u(x) = 3x + 6 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$$\int f(x)dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3 du = \frac{u^4}{12} + C$$

بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4 + C$

نو لرو: $\int (x)dx = \int (3x+6)^3 dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

بيلګه :

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln(x^2)\right) dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int f(x)\,dx = \int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

بېرته بدلون:

$$\frac{1}{2}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$$

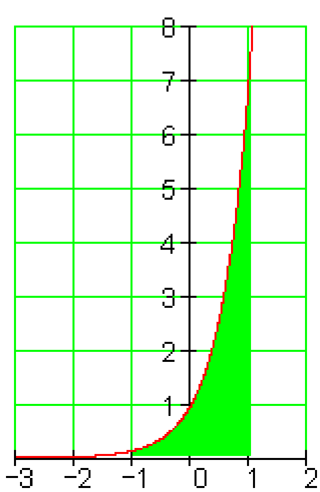
نو لرو:

$$\int (x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

$f(x) := e^{2\cdot x}$



بيلګه :

وښاياست:

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتيګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

بیلګه :

$$f(x)=2x\cdot\ln(x^2)\quad\Rightarrow F(x)=\int_1^2 2x\cdot\ln(x^2)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x)=x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=2x\quad\Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

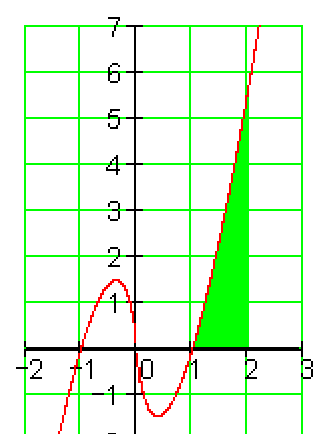
- لاندې پوله $u(1)=1$
- پورته پوله $u(2)=4$

۴ – په انتیګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\int_1^4\ln(u)du=[u\cdot\ln(u)-u]_1^4$$

$$=[4\cdot\ln(4)-4]-[1\cdot\ln(1)-1]\approx\underline{\underline{2.545}}$$

$$f(x):=2x\cdot\ln(x^2)$$



بيلګه :

د $x < 2$ له پاره د$x \geq 2$ له پاره	$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} \end{cases}$

$$A = \underbrace{\int_1^2 (e^x - 2)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 (e^2 - 2)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 (e^x - 2)\,dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = (e^2 - 2)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

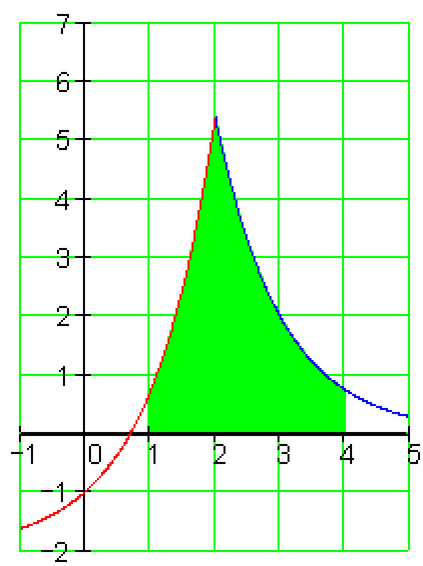
$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du\,;\ u(2) = 0\,;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -(e^2 - 2)\int_0^{-2} e^u\,du = (e^2 - 2)\int_{-2}^{0} e^u\,du$$

$$= (e^2 - 2)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0} = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7{,}331}}$$



توټه انتيګرالونه Partialy Integration

توټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميړنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميړلو لپاره امکان دی. دا کيږدی شي د مشتقشميړني د برعکسکونی په خير وکنل شي.

•

د ټوټه انتیګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کیږي، چې د متمادي (نه پرېکې‌دونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

دا قانون تیک هلته ګټور دی، که د f مشتقنیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي. پیل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیوني) څخه لرو:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u'\cdot v = (u\cdot v)' - u\cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u'\cdot v = \int (u\cdot v)' - \int u\cdot v'$$

$$\int u'\cdot v = u\cdot v - \int u\cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلګه:
د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکې تابع $g'(x)$ او همداسی یو ساده مستقکېدونکې تابع $f(x)$ لټوو.
نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتیګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبڼه:
اوس دی u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې 'u او 'v دu او v مشتقونه وي.
u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوپ لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه : کله کله کېدی شي ګټور وي، چی د مساوات ښی لور ته ټوته انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بېرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کېږدو $f(x) = \cos(x)$ او $g'(x) = \sin(x)$ ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 ووېشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د $g'(x)$ له پاره یو ترم وټاکو چې په انتیګرالونې کې هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کېدی شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل $g'(x) = ex$ کېږدو او د $f(x)$ له پاره، د انتیګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:

.

.

$$\int e^x \cdot (2-x^2)\,\mathrm{d}x = [e^x \cdot (2-x^2)] - \int e^x \cdot (-2x)\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - \int 2 \cdot e^x\,\mathrm{d}x$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2)] + [e^x \cdot 2x] - [2 \cdot e^x]$$
$$= [e^x \cdot (2-x^2+2x-2)]$$
$$= [e^x \cdot (2x-x^2)] + C$$

بیلګه ۳ :

که تر انتیګرال لاندې فقط یو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاې ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کیږي شي کله کله د ورزیاتوني له لارې(ناڅرګند شته) ضریب "1" توته انتیګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x) \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کیږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C$$

جمله : موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\int x\cos(x)\,dx = \int u\,dv$$
$$= uv - \int v\,du$$

$$= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx$$
$$= x\sin(x) + \cos(x) + C.$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \text{ او } \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\,dx$

$dv = e^x\,dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالونې قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\,dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\,dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته زاځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کيڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه راشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتیګرال نیول

نیول تر واسه ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بیلګه :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرځایونو **x1 = 2-** او **x2 = -4** سره د کرښیزو توابعو په ضربیونو تجزیه کيږي:

$$x^2-6x+8 = (x-2)\ (x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې پیل کوو:

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

$$\frac{[A(x-4)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[Ax-4A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x\ -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضريبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه يعني کيڼ لور ته (A+B) افاده بايد پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : 7x-12 = (A+B)x (-4A-2B)

له دې ځخه لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون يې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

ليکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx = \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $F(x)=\ln x \rightarrow f(x)=\frac{1}{x}$. دا چې طبيعي لوګايتم فقط له مثبت اعدادو شمېرل کيږي، نو يواځې ازښتونه نيسو.

.

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = -1 \ln |x-2| +8 \ln |x-4| +c$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په پول راشنل تابع او اصلي مات راشنلمبع تېرته شي.
دا د ټوټه کسرونو ټوټه کووني له لارې کيږي يا صورت نيسي.
بيلګه :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکې مربع تابع په صفرځايونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښیزو فاکتورونو تحزيه کيږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بيا يې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج غزيږي او بيا سره ضربيږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضربيبونو پرتلې کوني له امله، چې د x ترمخه يعني کيڼ لور ته له (A+B) افادې څخه باید اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او يا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسيستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې يې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو ليکلی شو :

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=\int[\frac{-0.2}{(x-2)}]dx+\int[\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړی :

$$F(x)=\ln x\rightarrow f(x)=\frac{1}{2}$$

دا چې طبيعي لوګاريتم فقط له طبيعي اعدادو شمېرل کېدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نيسو.

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

ناپاي(مبهوم) انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږيږو. په يوه مناسب ډول ناپا انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څېر تعرفيږي.
په دې توګه په زړه پورې پوهېدنې لاس ته راځي د بېلګې په توګه، چې څنګه د منفي تواند پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسېدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2 \text{ او } \int_1^\infty x^{-2}dx=1$$

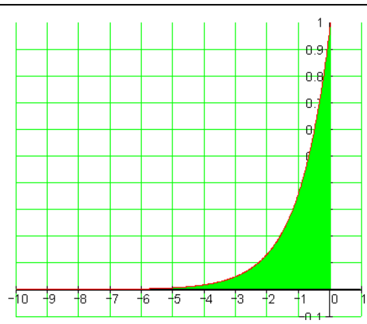
هم او د دې معکوس انتيګارلونه

$\int_1^\infty x^{-1}dx$ او

$\int_0^1 x^{-1}dx$ ناپاي ته ځې يا له ټولو

حدونو اوړي

يعني د ناپاى په لور ځي..



د $f(x)=e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty\,;\,0]$ کې توله سطحه و شمېرل شي، يعنې

.

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسي کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتيګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي:

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول برېښي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمېرلو له پاره دا په لاندې ډول برېښي:

$$f(x) = e^{x}$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} e^{x}\,dx = \lim_{a\to-\infty} \left[e^{x}\right]_{a}^{0}$$

.

$$= \lim_{a \to -\infty} \left[e^0 - e^a \right] = \underbrace{\lim_{a \to -\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a \to -\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:
دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^{-b} e^u \frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty} \int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{0} e^u\,du$$

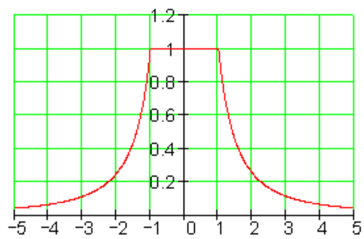
$$= \lim_{b\to\infty} \left[e^u \right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty} \left[e^0 - e^{-b} \right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:
د یوه یوځاي اینبول شوې یا یو ځاي شوې تابع بېلګه لرو:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$	د $x<-1$ لپاراه د $-1 \le x\ 1$ لپاره د $x > 1$ لپاره

.
.
.



د انتيګرال په برخو وېشنه يا ټوټه کونه:
لاندې د انتيګرالونو ټمعه دې و شمېرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

لومړنی اند يا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلايلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتيګرال بايد فقط يوځل وشمېرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

تولګه
د انتيګرال هندسي تعريف

لوريزه سطحه-د انتيګرال تعريف:که يوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتيګرال له لارې کيږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحليلي تعريف: د f يوه تابع ورکړ شوې، چې په يوه انتروال [a,b] باندې تعريف دی، نو دa څخه تر b پورې د تابع د انتيګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو   x=b تر منځ يوه يوه لوريزه سطحه پوهيږو.

پېژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیت

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max\Delta x\to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) تاکلی اینتیګرال بولو، یا

F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرالونې پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرالونې اینتروال او(f (Integrand) x)اینتیګرالېدونکی) او x د اینتیګرالوني (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ١ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c\in[a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پېژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

پېژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینتروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنستیز- ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

تاکلی انتیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د تاکل انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انتیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

f په انټروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$

د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتې سره ضرب : که تابع $f(x)$ په یوه اینټروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که $f1(x)$ او $f2(x)$ په یوه ایټروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی $u = g(x)$ متمادي اوو مشتقوړدی او $y = f(u)$ متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

د ضربونو انتيګرالونه

که د دوه توابعو د ضرب انتيګرال د ورسره بلدو متودونو يا لارو شمېړو، نو زيات وخت دا ناشونې وي.

$$f(x) = x \cdot \ln(x^2) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x \cdot \ln(x^2))\,dx = ?$$

بدلون <u>Substitution</u>

د ناټاکلي انتيګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

تراوسه پورې مو فقط د انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې راکوي. د لومړنی انتېګرالونې سيده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې ګوته ورته نيول کيږي.

جمله ۲ . ۶ : د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه ايښوول ، لنډ: بدلون) د نيونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدئ او y = f (u) متمادي، نو باور لري:)(کتاب کتل که لاندئ بې د انتيګرال له نخښې)

$$\int f\,[g(x)]\,g'(x)dx = \int f\,(u)du$$

حل : د (۲۱ . ۱۳) د ښي اړخ مشتق د ځنځيرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u) \cdot u' = f[g(x)] \cdot g'(x),$$

دا د کيڼ اړخ د رابيليدنی سره سر خوري (.۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اينتګرالېدو(اينتيګريشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور ځنځيري بلواك f [g (x)] وي

او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق $g'(x)$ وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي $u = g(x)$: جوړوي $du/dx = g'(x)$ په همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیکریشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a :

لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x - 1 = u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, کشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

ومولیدل چی ځنځیري تابع د لاینی دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اینتیګرال کیدی شي، ځکه چی د لاینی تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاکتور د جملی ۲۱ . ۴ سره سم د اینتیګرال تر مخ(موخه کینې لور ده) لیکل کیږي.

بیلګه 4.2: لرو $I = \sqrt{-3x+5}\ dx$

بدلون: $-3x + 5 = u$

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I=\int\sqrt{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)du=-\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3}+C.$$

b) $I=\int\frac{1}{2}e^{-2x-3}dx.$

$-2x-3=u,\qquad -2=\frac{du}{dx}\qquad dx=-\frac{1}{2}du,$

$$I=\int\frac{1}{2}e^{u}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)du=-\frac{1}{4}\int e^{u}du=-\frac{1}{4}e^{u}+C=-\frac{1}{4}e^{-2x-3}+C.$$

c) $I=\int\frac{2dx}{x+2}.$

$x+2=u,\qquad 1=\frac{du}{dx}\qquad dx=du$

$$I=\int\frac{2du}{u}=2\int\frac{du}{u}=2\ln|u|+C=2\ln|x+2|+C.$$

بیلگه:

$f(x)=e^{x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$

ځکه چې $F'(x)=e^{x}=f(x)$

مگر: $f(x)=e^{2x}\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int e^{2x}\,dx\neq e^{2x}+C$

ځکه چې $F'(x)=2e^{2x}\neq \bar{f}(x)$ **که** $\bar{F}(x)=e^{2x}+C$; **وی.**

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

بیلگه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیگرال ونیسئ

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int e^{2x}\,dx = ?$$

بدلون : $u(x) = 2x = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int f(x)\,dx = \int e^{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

نو: $F(x) = \int (x)\,dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$

ازمایښت : $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2 = e^{2x} = f(x)$

بیلګه :

وښایئ چې $f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$ باور لري .

$$f(x) = (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = x + 1 = u$

جوړ کړی: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = \frac{du}{1}$

$$\int f(x)\,dx = \int u^2 \frac{du}{1} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C$$

بیرته ـ یا په ځت بدلون:

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

نو:

$$\int (x)\,dx = \int (x+1)^2\,dx = \frac{(x+1)^3}{3} + C$$

بیلگه :

$$f(x) = (3x+6)^3 \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = ?$$

بدلون: $u(x) = 3x + 6 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3 \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$$\int f(x)\,dx = \int u^3 \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int u^3\,du = \frac{u^4}{12} + C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^4}{12} + C = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int (3x+6)^3\,dx = \frac{1}{12}(3x+6)^4 + C$

بیلگه :

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

بدلون : $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C$$

بېرته بدلون: $\frac{1}{2} u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2} u + C = \frac{1}{2} x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2} x^2 + C$:

نو لرو: $\int (x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2} x^2 + C}}$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کېږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

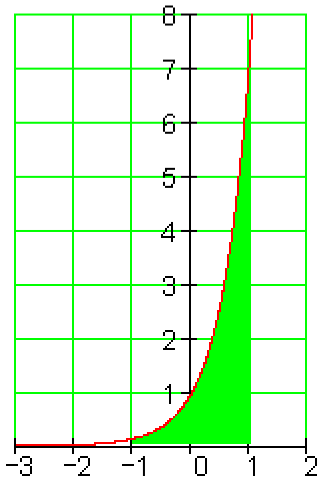
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^{u}\, du = \frac{1}{2}\left[e^{u}\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^{2} - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3,627}}$$

$f(x) := e^{2 \cdot x}$



بیلګه :

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right) \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x \cdot \ln\left(x^{2}\right) dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^{2}$

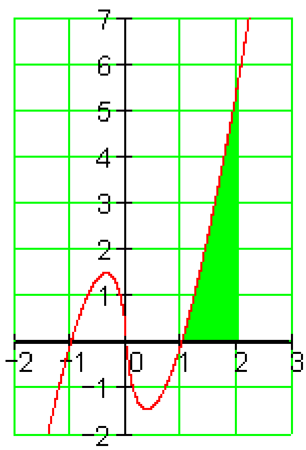
۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x}du$$

۳ – د پولې بدلون

$$f(x) = 2x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln\left(x^2\right) dx$$

$f(x) := 2x \cdot \ln\left(x^2\right)$



د انتیګرال حل د بدلون له لارې

۱ ــ بدلون $u(x) = x^2$

۲ ــ د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ ــ د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

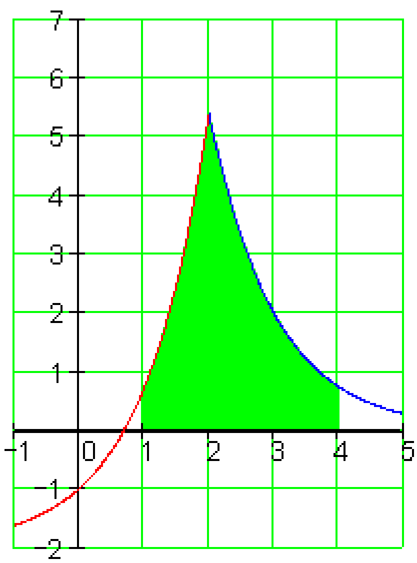
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ ــ په انتیګرال کې ځای په ځایکړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u)\, du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2{,}545}}$$

بیلګه :



$f(x)=\begin{cases} e^x-2 \\ \left(e^2-2\right)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x<2$ له پاره د $x\geq 2$ له پاره

$$A=\underbrace{\int_1^2\left(e^x-2\right)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_2^4\left(e^2-2\right)e^{-(x-2)}\,dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int_1^2\left(e^x-2\right)dx=\left[e^x-2x\right]_1^2=e^2-e-2$$

$$I_2=\left(e^2-2\right)\int_2^4 e^{-(x-2)}\,dx$$

$$u(x)=-(x-2)=-x+2$$

$$\frac{du}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du;\ u(2)=0;\ u(4)=-2$$

$$I_2=-\left(e^2-2\right)\int_0^{-2}e^u\,du=\left(e^2-2\right)\int_{-2}^{0}e^u\,du$$

$$=\left(e^2-2\right)\cdot\left[e^u\right]_{-2}^{0}=e^2+2e^{-2}-3$$

$$I=I_1+I_2=e^2-e-2+e^2+2e^{-2}-3=\underline{\underline{7,331}}$$

جمله ۲ . ۶:

د ،،بدلون،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه اینبوول ، لنډ: بدلون)قاعده: د نیونو لاندي چې $u = g(x)$ متمادي (نه پریکیدونکی) او د مشتق قابلیت لري او $y = f(u)$ متمادي دی، نو باور لري:

$$\int f\left[g(x)\right]g'(x)dx=\int f(u)du$$

حل : د (۲ . ۱۳) د بني اړخ مشتق د ځنځیرقاعدې (جمله۲ . ۶) له مخی داسی دی

.

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کېن اړخ د رابیلیدنی سره سر خوري (.۲۱ . ۱۳) قاعده د ضرب اینتګرالېدو(اینتیګریشن) لپاره مساعده ده، په کوم کی چی یو فاکتور ځنځیري بلواك f [g (x)] وي او دا بل فاکتور (ضریب) یی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سړی د دننه تابع لپاره متحولې یا واریابل بدلوي یا ځاي په ځاي کوي u = g (x) : جوړوي du / dx = g ' (x) په همدې ډول du = g ' (x) dx

د بریالي ایتګرالېدو(اینتیګرېشن) کیدو ورسته بدلون بیرته راګرځول کیږي.

بیلګه ۲۱ . ۳) a : لرو $I = \int 2\cos(2x-1)\,dx$

بدلون یا په ځای کونه: $2x-1=u$

مشتق $2=du/dx$ همداسی $2dx=du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1)+C$$

بیلګه ۲۱ . ۳) b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : , 2x = u-1 کشتق 2= du / dx همداسی dx = (1/2) du

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1)+C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال کيدی شي، ځکه چی د لايني تابع مشتق ثابت دی او ثابت فاکتور د جملی ۲ . ۴ سره سم د اينتيګرال تر مخ(موخه کيڼ لور ده) ليکل کيږي.

د بنستيزو اينتيګرالو سره ۱۰ او ۱۱) جدول ۲۱ . ۱ (متحولې x يواځي په جګ يا مټ د دوه منخ ته راځي. له دې امله داسی اينتيګرال، کومو کی چی د x2 په ځاي لايني ترم

) Term(پروت دی، کیدی شي چی د لایني بدلولو له لارې په بنستیز اینتیګرالو ۱۰ او ۱۱ بیرته واړول شي. ډیروخت یو د فورم بدلون ته هم اړتیاموجود وي، چی د اینتیګراند فورم ته راشو.

بیلګه 5.2:

$$\text{a)}\quad I=\int\frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$2x^2=\left(\sqrt{2}x\right)^2,\quad d\cdot h\cdot\ I=\int\frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2},$$

$$\sqrt{2}x=u,\qquad \sqrt{2}=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{\sqrt{2}}du,$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc}\tan u+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Arc}\tan(\sqrt{2}x)+C.$$

$$\text{b)}\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{9-36x^2}}.$$

$$9-36x^2=9(1-4x^2)=9(1-(2x)^2),\ d\cdot h\cdot$$

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{9(1-(2x)^2)}}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}},$$

$$2x=u,\qquad 2=\frac{du}{dx}\qquad dx=\frac{1}{2}du$$

$$I=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}u+C=\frac{1}{6}\operatorname{Arcsin}(2x)+C.$$

اینتیګریشن قاعدې، که دننه تابع خطي یا لایني نه وي، نو د اینتیګراند دوم فاکتور(تر ثابت فاکتور پورې) د دننی تابع د لومړي فاکتور مشتق وي، چی د (۲ . ۱۳) له لارې سړی بنستیز اینتیګرال ته راشي. دلته هم سړی بیا دننني تابع په نوې متحولې یا واریابلی بدلوي.

بیلګه 6.21: الف: $I = 4x\sqrt{x^2-1}\ dx$

بدلون:د $x^2-1=u$ مشتق $2x = du/dx$ دی ،همداسې لرو: $xdx = \frac{1}{2}du$

$$I = \int 4\sqrt{u}\cdot \tfrac{1}{2}du = 2\int u^{1/2}du = 2\cdot 2/3\, u^{3/2} + C = 4/3\sqrt{(x^2-1)^3} + C$$

ب) $I = \int \sin^3 x \cdot \cos x\ dx$

بدلون: $\sin x = u$ را بیل شوي $\cos x = du/dx$ همداسې $\cos x\ dx$

$$I = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4$$

$$c)\ I = \int \frac{1}{x}\cdot \ln^2 x\ dx$$

$$\ln x = u, \qquad : \frac{1}{x} = \frac{du}{dx} \qquad \frac{1}{x}dx = du,$$

$$I = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3 x + C$$

$$d)\ I = \int \tan x\, dx.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, d\cdot h.\quad I = \int \frac{1}{\cos x}\cdot \sin x\ dx,$$

$$\cos x = u, \qquad -\sin x = \frac{du}{dx} \qquad \sin x\ dx = -du,$$

$$I = -\int \frac{1}{u}\ du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

$$e)\ I = \int_0^1 \frac{2x^2}{2-x^3}dx.$$

$$2-x^3 = u, \qquad -3x^2 = \frac{du}{dx} \qquad x^2 dx = -\frac{1}{3}du,$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{2du}{u}=-\frac{2}{3}\ln|u|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}\ln\left|2-x^3\right|\Big|_0^1=-\frac{2}{3}(\ln 1-\ln 2)=\frac{2}{3}\ln 2.$$

۲۱د بدلونقاعده) ۲۱ . ۱۳ (دې په چپه) يعني د ښی وکيڼ(لور هم استعمال شي . اينتيګرال f (x) dx کيدی شي چی په بل واړول شي چی x په يو مناسب بلواك (g (t بدل شي (21 . 14) f (x) dx = f [g(t)]. g(t)dt. دا: افاده » مناسب« بلواك دې دلته داسي وپوهيدی شي چی سړی د بدلون وروسته يو ساده او ممکن يو بنستيز اينتيګرال لاس ته راوړي. د) ۲۱ . ۱۴ (استعمال په قاعده کی داسی دی چی په يوه بلواك f (x) کی موجود » پيچلی « ترم h (x)د t = h (x) په بدلون له منځ څخه وړي او بيا) که ممکن وي (د x په لوريی حلوي

$$x=g(t)=h^{-1}(t)$$

بيلګه 7.21: الف: $a)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$:

$$\sqrt{x}-1=t,\qquad x;x=(t+1)^2,\qquad dx=2(t+1)dt:$$

$$I=\int\frac{2(t+1)}{t}dt=2\cdot\left[\int 1dt+\int\frac{1}{t}dt\right]=2(t+\ln|t|)+C=2(\sqrt{x}-1)+2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|+C$$

مناسب تابع ، چې ورکړ شوی اينتګرال د دوه ايتکرالو جمعي ته بيايي، دلته $x=g(t)=(t+1)^2$ وو.

$$b)\ \ I=\int\frac{dx}{\sqrt{\sin x\cos^3 x}}.$$

$$\sin x\cdot\cos^3 x=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos^4 x=\tan x\cdot\cos^4 x.$$

نو لرو:

$$I=\int\frac{dx}{\tan x\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx,$$

$$\tan x=t,\qquad \frac{1}{\cos^2 x}dx=dt,$$

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\cdot\sqrt{\tan x}+C.$$

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو: $\int x\cos(x)\,dx$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv-\int v\,du\\ &= x\sin(x)-\int\sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x)+\cos(x)+C.\end{aligned}$$

:

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

انتیګرالوونی Integrand د x توان یا e^x سره

د توته انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه

$$\int x^2 e^x \, dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x) \, dx$$

کېده شي په مدې لا حل شي:

یوه په زړه پورې بېلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x) \, dx$$

که په پوره سختوالي ونيسو ونيسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولي.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې جې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x) \, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) \, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x)$; $du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x$; $dv = e^x\, dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx.$$

که فکر وکړو، نو د پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتیګرالوني یوه په خوښه ثابته ده

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم ځپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د

سطحي مساحتA ښايي ، چي له منحنيy=f(x)، د x- محور y=(0) او د کرښیx=a اوx=b له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چي y=f(x) د اینتیګرال اینتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کیږدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعالیت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

- دا هم د شمیرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابع کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیگرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع د محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

یادونه: که موږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.

دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلگو ته رابولي:

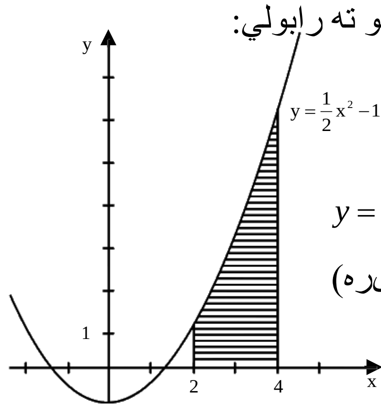


Bild 21,3

بیلگه ۵ . ۱ :

د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ y=0\ ,\ x_1=2\ ,\ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېړه)

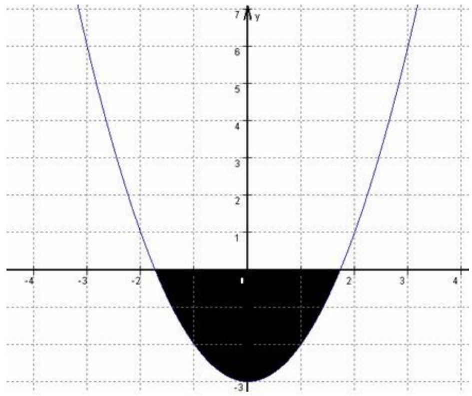
$$A=\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^3-x\right)\Big|_2^4$$

$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیگرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیگرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیگرال.

.



بیلګه ٥ . ٢ :

د $f(x)=x^2-3$ ګراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

تګلار:

١ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوې وي، نو دا پورته رسم کاږو.

٢ - د دې لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0=x^2-3$$
$$x=\pm\sqrt{3}$$

٣ – اوس د سطحې د مساحت شمیرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پوري انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}}(x^2-3)dx=\int_0^{\sqrt{3}}(x^2)dx-3\cdot\int_0^{\sqrt{3}}1dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\sqrt{3}}-3.x\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}=|-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A=2\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{3}=4\cdot\sqrt{3}$$

بیلګه:

د سطحې مساحت د $x_2=2$, $x_1=-1$, $y=0$, $y=\frac{1}{2}x^3-5$ ترمنځ دی: (لاندې ځیره)

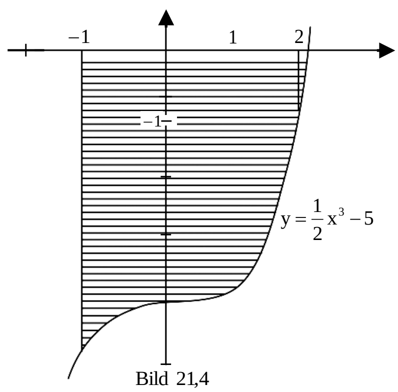
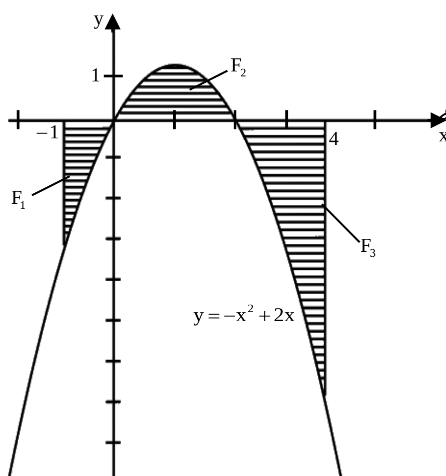


Bild 21,4

$$A=\left|\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx\right|$$
$$=-\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx$$
$$=(-\frac{1}{8}x^4+5x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$=(-2+10+1/8+5)=\frac{105}{8}$$

بیلګه:

د لاندې پولو $x_1=-1$ تر $x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$ ترمنځ د x- محور پورته او کښته پرته سطحه (په مخامخ ځېره کي نښانه شوې ده) دې وشمیرل شي



حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$ د صفرځایونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته غوښتونکي سطحه دx-محور پورته، نوره کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Big|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کږې $y=-x^2+2x$

او $y = 0$ ترمنځ (د x – محور پورته او کښته)

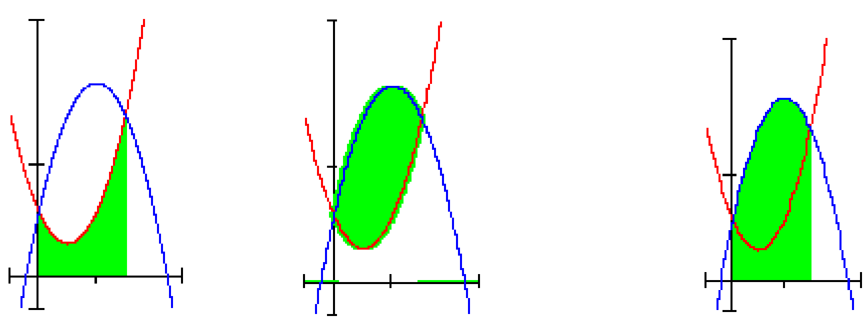
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمرنه:

ننوتنه د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټي¸چې له ګړو پولو را بند وي.

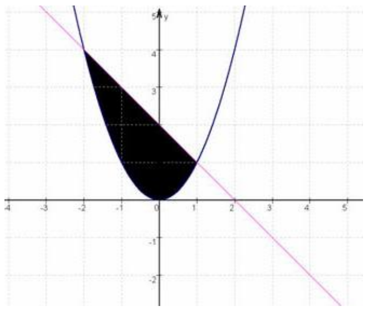
فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمیرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



$$A = A_1 - A_2$$



بیلګه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا ګراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.

۲ - د دې لپاره چې انتیګرال وشمېرو، د ګرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

P;q - فرمول

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -2$$

۳ – په ساده توګه لیدل کیږي.

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

پس باور لري

$$A=\int_{1}^{-2}(-x+2)dx-\int_{1}^{-2}x^{2}dx=$$
$$-1\cdot\left(\frac{2^{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^{3}}{3}\right)-\frac{1}{3}$$
$$=-1,5-6++=-4.5$$
$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f ګراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو ګرافونو په انټروال کې رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$\boxed{A=\int_{a}^{b}(f(x)-g(x))\,dx}$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو $f(x) = x^2 -2x +2$ او $g(x) = -x^2+4x +2$ ګرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پيداکړو.
د دواړو ګرافونو د x–ارزښتونو غوځتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیګرال حدونه جوړوي.

د غوځټکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1=0$ او $x_2=3$ د اینتېګرال لیمیټونه یا پولې دي.

د اينتګرال جوړونه:

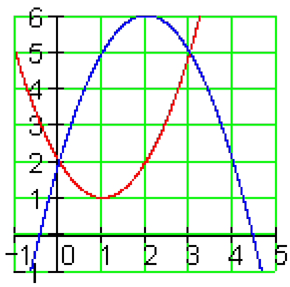
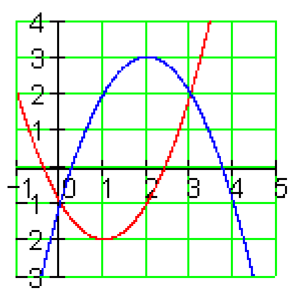
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2-2x+2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27-9+2\cdot 3=9-9+6=\underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2+4x+2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27+2\cdot 9+2\cdot 3=$$

$$=-9+18+6=\underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه بايد تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت بايد کم شي.

$$A=\int_0^3 g(x)dx-\int_0^3 f(x)dx=15-6=\underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهيږو، د يوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ايا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځيږو، چې ايا دا تاثيرات په پورتنی بيلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(يوونونو) کښته لورته بيايو او سطحې نوې شميرو.	 

که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتیگرال حدونه بې تغیره پاتیږي.

$$f(x)=x^2-2x-1 \quad \text{و} \quad g(x)=-x^2+4x-1$$

ځای په ځای کونه:
$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کیږي:

$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنیو ترمنځ سطحه فزیکي سطحه ښایي، باید لاس ته راوړنه یو مثبت عدد وي. دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

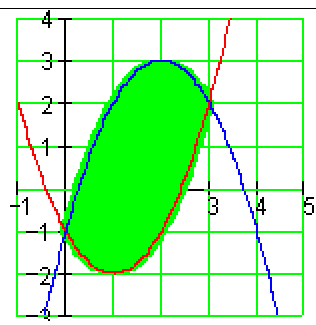
$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}\right|$$

د دې متود ټولیزه ونه(عمومیت) :

د دوه گرافونو ترمنځ سطحه:

که یوه سطحه د یوې پورته او یوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمیرل کیږي.

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$



د انتيكرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعيه قېمتونو غوڅتكي دي

-- د منحنيو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

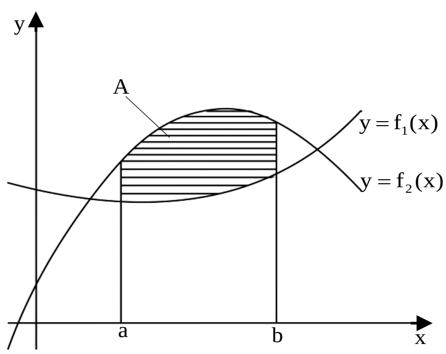


Bild 21,6

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو كې له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

اينتيګرالوړ او $f_1(x) < f_2(x)$
په $[a,b]$ اينتروال كی (ش ۱ . ۶) داسی لاس ته راوړل كيږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحه كم كړئ.

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك چی $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په اينتروال $[a,b]$ كومه يوه مخنخښه ځان ته غوره كوي باوري دی.

بيلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشميرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$

حل : د ايتيګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوڅټكي(د تقاطع ټكي) دي

$x^2-1=-x^2+1$

$2x^2=2$

$x^2=1$ $\quad x_1 - a = 1\,,\ x_2 = b = -1$

د اينتيګرلولو په اينتروال [1 , 1 -] كی لرو $-x^2+1>x^2-1$

(كه چيرې په اينتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) كی $f2(x)>f1(x)$ په نظر كي ونه نيول شي، نو د څرګند اينتيګرال به منفی شي او سړی(لكه د مخه چې ويل شوي) بيا داينتيګرال مطلقه ارزښت نيسي. له دې امله لرو:

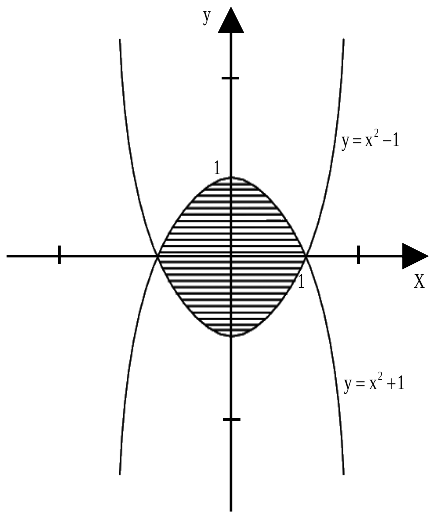


Bild 21.7

$$A = \int_{-1}^{1} \left[-x^2 + 1 - (x^2 - 1) \right] dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\, dx$$
$$= (-\frac{2}{3}x^3 + 2x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.
$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$

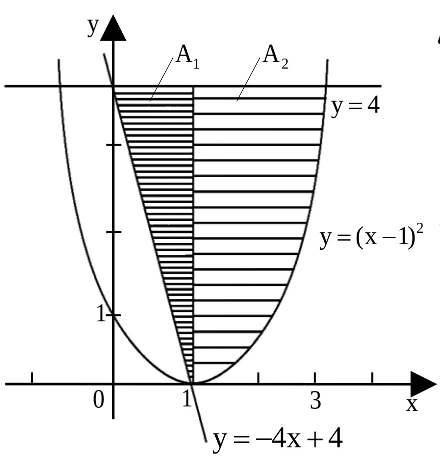


Bild 21.8

حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه سطحو A1 او A2 له یوځاي کیدو څخه لاس ته راځي.
A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي

کواور ینات(x –محور) غوښتکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $4 = -4x + 4,\ \ x_1 = 0$ په همدې ډول د

ښي غوښتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y=-4x+4$ او $y=(x-1)^2$ ترمنځ

$$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$$

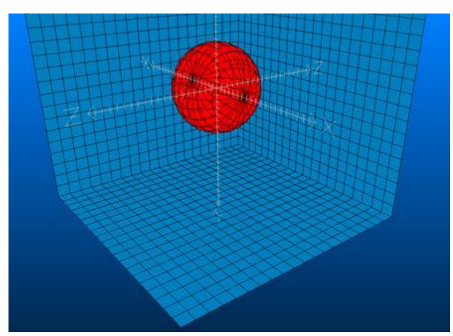
$$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$$

ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قېمت د بنې غوخښکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1[4-(-4x+4)]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$
$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)\,dx=2x^2\Big|_0^1+(1/3x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

د څرخیدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توګه د مستطیل حجم ولیکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجمونه، چې تراوسه مو لوستلي و ليکئ.

يادونه: دا دې تل په پام کې ونيول شي: که د انتيګرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د يوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره ليکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخdدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په يوه څرخېدونکي محور باندې د يوې کرښې يا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه يا منحني په يوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اويا زيات له زياته يې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلګې به يې په لاندې کې و ښودل شي.

د xپه محور څرخېدنه(څرخون)

لکه د مخه مو چې وويل، حجم هم يو انتيګرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که يوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د يوه څرخېدونکي جسم (بدن يا تن) حجم(ډکی)

د يوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انټروال [a,b] کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړېږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

د y په محور څرخيدنه

د يوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انټروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي بايد د $y = f(x)$

بنه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په توټو توټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توګه حجم لاس ته راوړو:

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx$$

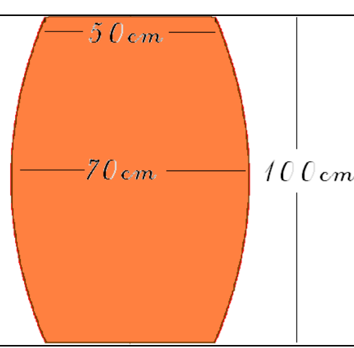
د f' مطلق ارزښت او د انتیګرال په حدونو کې خورا جګ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیګرال تظمینوي.

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

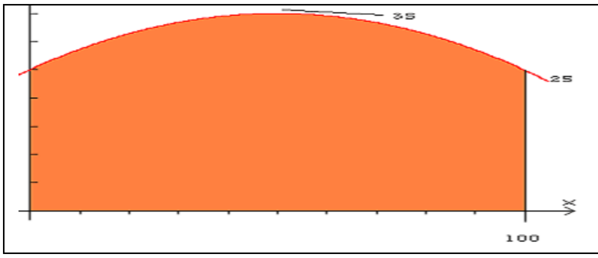
$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2\ dx$$

د یوه مرتبان حجم:

د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.



که مرتبان په °90 درجو و ځرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژئ تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.



حل: د پارابول د تابع لیکښه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

تولیز باور لري:

$f(x)-a\cdot(x-5)^2+3.5$ ارزښت په دیسیمتر (dm)

په ځرګند دول 5- د رآس راکښنه د x+ په لور ورکوي او 3,5 د y+ په لور. د غزونې ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم تکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x)=-a\cdot(x-5)^2+3.5$$

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې a دی: $\dfrac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودې فورم بدلوو:

$$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x) = 0.0016x^2 - 0.032x^3 - 0.04x^2 + 2x + 6.25$

لومړنۍ تابع

$$f(x) = \frac{0.0016x^2}{5} \cdot x^5 - \frac{0.032x^3}{4} \cdot \frac{-0.04x^2}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x$$

د حجم شمېرلو لپاره ټاکلی انتیګرال دی؛

$$\pi \cdot \int_0^{10} (-0.04x^2 + 0.4x + 2.5)^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{10} (-0.0016x^2 - 0.032x^3 - 2x + 6.25) \; dx$$

$$= \pi \left[\frac{0.0016}{5} \cdot 10^5 - \frac{0.032}{4} \cdot x^4 - \frac{0.04}{3} \cdot x^3 + x^2 + 6.25x \right]_0^{10}$$

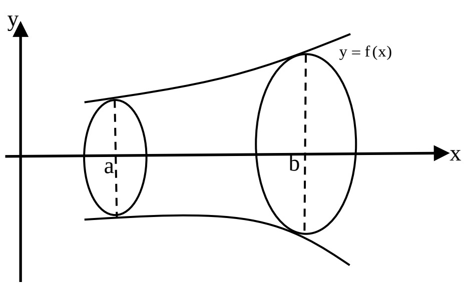
$$= \pi \left[32 - 80 - 13\frac{1}{3} + 100 + 62.5 \right]_0^{10}$$

$$= \pi \cdot 101.167$$

د حجم واحدونه (یوونونه)

دا چې موږ له پیله په دیځیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیتر شمېرل کیږي.

$= 317.824 \, liter$

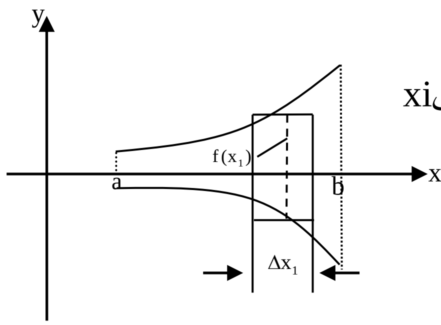


د تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b ترمنځ سطحه چی دx-محورباندې څرخي(ش ۵ . ۹). دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې یا- راغلي دڅرخیدونکي بدن ډکی(حجم) دی.

لاندېجمله باوري ده

جمله ۵ . ۸) د څرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال[a,b]کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخيدونکي بدن حجم چې د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$



ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعي له لارې چې وړانګه يې f(xi)، جګوالی يېxi د i=1,2,3,...n لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مې توتې (سليندر ډکی(حجم) دی.

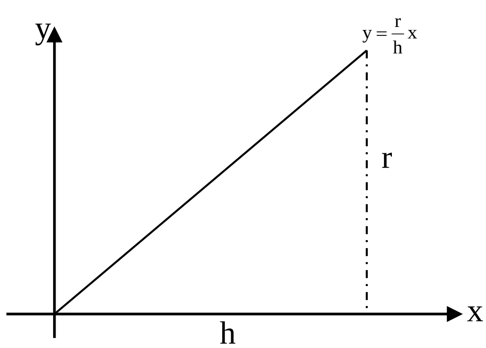
$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) n->oe, xi->0 (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$ حجم (ډکی) راکوي.



بيلګه ۵ . ۹ :) دمخروط يا کيګل ډکی

(حجم) د $y = \frac{r}{h} x$ کرښي (د سرچيني

تيره کرښه د $\frac{r}{h}$جګوالي سره) او دx- محور

(y =0) د حدونو x=0 تر x=h

پورې(ش . ۱۱)

$$V=\pi\cdot\int_0^h\left[\frac{r}{h}x\right]^2\,dx=\pi\cdot\frac{r^2}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

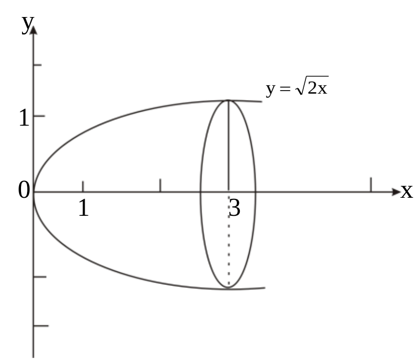
دا له بنستیزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتیجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y=\sqrt{2x},\ y=0,\ x=0,\ x=3$

ترمنځ د x-محور باندې څرخېدلو جوړ(تولید) شوی جسم څرخېدلی پارابولویید دی (خ ۵ ړ ۱۲)

$$\begin{aligned}V&=\pi\cdot\int_0^3\left[\sqrt{2x}\right]^2dx\\&=2\pi\cdot\int_0^3 x\,dx\\&=2\pi\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^3=9\pi.\end{aligned}$$

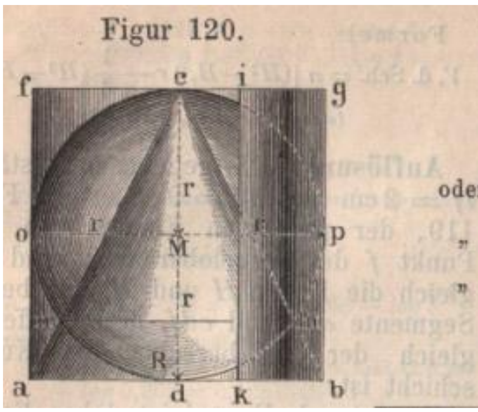


د ارښیمیدس جمله Archimedischer Satz

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

د 1886 زک یوه درسي کتاب څخه



Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: „ : „ : „ $= 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$

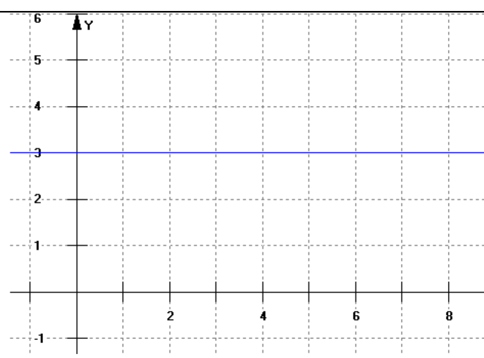
„ : „ : „ $= 6 : 4 : 2$

„ : „ : „ $= 3 : 2 : 1$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

د پورته الماني پښتو:ارښیمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يي وموندە، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښیمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>بېلګه ٥ . ١١:

استوانه(توته):

استوانه د x په محور د $f(x) = c$ يوې ثابتي تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.</td>
</tr>
</table>

د يوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په [0;5] انټروال کې د توتې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نيسو او غواړو يوه لار پيدا کړو ، چې د هغې لارې د انتيګرال په مرسته حجم وشمېرلای شو.
د سطحې مساحت د لاندې انتيګرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 f(x)\,dx$$

که د دې ناپاې ډېرو مستطيلونو(د f(x) د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغلېدونکې پنډوالي dx سره) انتيګرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 [f(x)]^2\,dx$$

دا په دې معنا چې دا انتيګرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد يوې توتې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

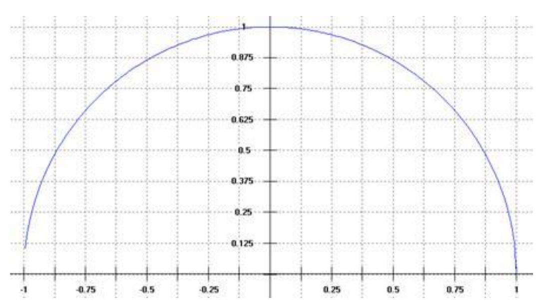
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\,dx$$

د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\,dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45-0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډارى يا غنډوسکه(توپ)):



د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع څرخېدني څخه غونداری یا کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکي تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې بيا حجم وشمېرل شي.

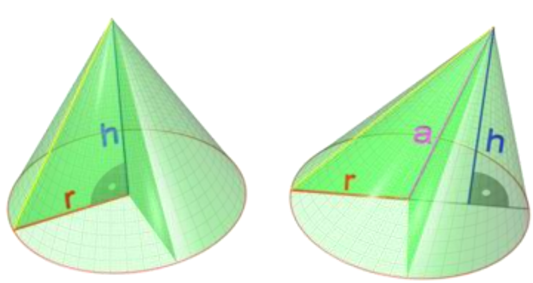
په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي څخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعني په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنستيزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتيګرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په

سرچینه $(0|0)$ او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنیو توتو(استوانو) رایوځاي شوی په پام کې ونیسو، چې جګوالی(پنډوالی) یې dx دی. داچې د داسې یوې توتې یا استوانې ګردې توتې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعیه قېمت سیستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې) باور لري.

د یوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

$$r\,z\,(h)=\frac{r}{h}\cdot x$$

د یوې ناپاي کوچنی توتې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h}\cdot x)^2\cdot\pi\cdot dx=\frac{r^2}{h^2}\cdot\pi\cdot x^2\,dx$$

دټول څرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنیو توتو حجم دی. د شمېرلو لپاره یې ټاکلی انتیګرال جوړوو، د انتیګرال حدونو 0 او h سره:

$$V=\int_0^h\frac{r^2}{h^2}\cdot\pi\cdot x^2dx=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\int_0^h x^2dx$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\cdot\pi\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\cdot\pi\cdot\left(\frac{h^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)$$

$$V=\frac{r^2\cdot\pi}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V=\frac{r^2\cdot\pi\cdot h}{3}=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخېدنه(څرخون) ده.

د یوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې ګراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالي سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې ورانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بیا یې انتیګرال په ورکړ شوي [0;5] انتروال کې ونیسئ.

$$\pi\int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دی د یوه مخروط د حجم معیاري (ستاندارد) بنه وکتل شي.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x□ همداسې y□ سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi\cdot\int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi\cdot\int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ۱۲:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انتروال کې د وضعیه قیمتونو په محوررونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16,\ x_1 = 0,\ x_2 = 2$

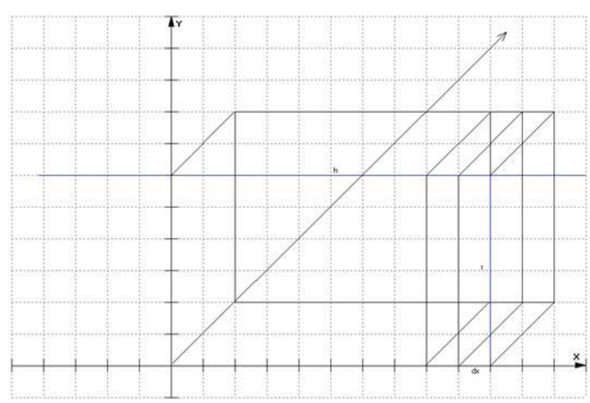
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16}\, dx = 0.4\pi$$

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y,\ y_1 = 0,\ y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\, dy = 2\pi$$

د ناڅرخیدونکي جسم حجم.

شپږ اړخیز جسم یا مکعبډوله - 2.1 Quader



دا لید شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم یې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او یا د صفر په لور تلونکي dx سرورې مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوځي (قاطع) سطحه وشمیرل شي، یعنې $q(x)$ د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بیا باید انتیګرال ونیول شي.

په ټولیزه توګه دا معنا لري: $V=\int_a^b q(x)dx$

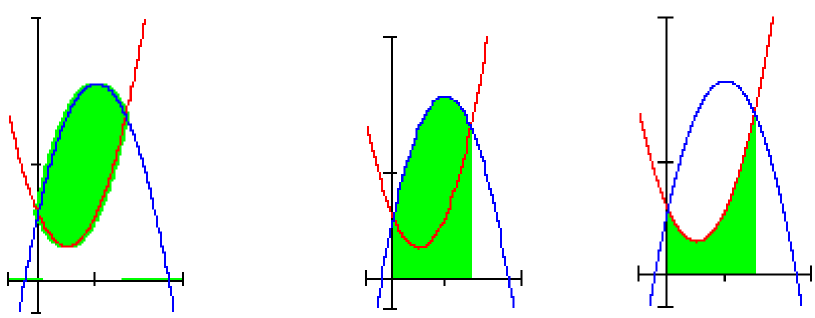
په دې بېلګه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتیګرال کړو، نو باید $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

ټولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه د x- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما ځخه مخ ته ځو :



A، A_1 ، A_2

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورېاو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او$x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخیدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په $[a,b]$ انتروال دf تابع ګراف دy محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \, dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چی د سطحو $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{\text{توته(استوتنه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د $f(x) = mx$ یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بېلګې په توګه $f(x) = 0,5x$) څرخېدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x□ همداسي y□ سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخېدنې څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع یې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتیګرلولو له لارې دې بیا حجم وشمېرل شي.

تمرینونه
د بن

ستیز انتیګرال د جدول په کارونه یا استعمال لاندې انتیګرالونه وشمیرۍ

a) $\int(x^3 - 5x^2 + 7x - 2)dx$, b) $\int(2/x^3)\,dx$, c) $\int(1/3)\sqrt[3]{x}\,dx$

d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$, e) $\int \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{x}}\,dx$, f) $\int(\sqrt[3]{x^4} + 1)\,dx$,

g) $\int \sqrt[3]{x^{-3}}\, dx$, h) $\int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}\, dx$, i) $\int 3\cdot 2^x\, dx$,

j) $\int \frac{1}{2\sin^2 x}\, dx$, k) $\int \frac{1}{3+3x^2}\, dx$, l) $\int \cos\varphi \cdot s\, ds$,

m) $\int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}$, n) $\int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\, dt$, o) $\int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\, du$.

۱ . ۲ – د بیرته په اکلي انتیګرال وروسته یې انتیګرال ونیسئ

a) $\int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}\, dx$, b) $\int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}\, dx$, c) $\int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx$,

d) $\int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\, dx$, e) $\int (-2-2\tan^2 x)\, dx$, f) $\int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}\, dt$.

۳ – لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_0^1 \frac{1}{2} e^x\, dx$, b) $\int_\pi^{2\pi} \cos x\, dx$, c) $2\int_2^3 dt$,

d) $\int_0^\pi \cos\pi \sin x\, dx$, e) $\int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}$, f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}\, dx$,

g) $\int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\, dx$, h) $\int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}\right) dx$, i) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\, dt$,

j) $\int_0^1 \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}\, du$, k) $\int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\, dx$, l) $\int_a^b a^x\, dx$.

۴ – د بدلون یا سبستچیشن له لارې یې انتیګرال وشمیرئ.

a) $\int \sqrt[3]{2x-7}\,dx$, b) $\int \frac{dx}{-x+1}$, c) $\int 2^{3x+6}\,dx$,

d) $\int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx$, e) $\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$, f) $\int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}\,dt$,

g) $\int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx$, h) $\int \frac{3x\,dx}{-x^2+1}$, i) $\int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx$,

j) $\int 7\cos^7 x\sin x\,dx$, k) $\int (1-2\sin x)^3\cos x\,dx$, l) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x}\,dx$,

m) $\int \cot t\,dt$, n) $\int \frac{4x-5}{2x^2-5x+3}\,dx$, o) $\int \frac{\operatorname{Arc}\sin u}{2\cdot\sqrt{1-u^2}}\,du$,

p) $\int \frac{\sqrt{2\ln x+3}}{3x}\,dx$, q) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$, r) $\int e^{\cos x}\cdot\sin x\,dx$.

۵. د تر زیرنیونی فورمیدلون وروسته او په بنسټیز اینتیګرال ۱۰ او ۱۱ د بدلون له لارې یې اینتیګرال وشمیری ،

a) $\int \frac{dx}{1+4x^2}$, b) $\int \frac{dx}{2+4x^2}$, c) $\int \frac{dx}{3+5x^2}$,

d) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$, e) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}}$, f) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$,

g) $\int \frac{dx}{x^2-10x+34}$, h) $\int \frac{dx}{3x^2-6x+30}$, i) $\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$.

۶ لاندې ټاکلي اینتیګرالونه وشمیری

a) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3}$, b) $\int_{-1}^{0} e^{3x}\,dx$, c) $\int_{0}^{2} 2^{2x+1}\,dx$,

d) $\int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5}\,dx$, e) $\int_{e}^{e^3} \frac{1}{x}\ln x\,dx$, f) $\int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$,

g) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx$, h) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2}$, i) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\,dx$.

---

۷ . د جملی ۲۱ . ۸ استعمال په بنسټ یی (ټوټه اینتیګرالونه) اینتیګرال کړی

a) $\int 0{,}2x \cdot \sin x \, dx$, b) $\int 4x^3 \cdot \ln x \, dx$, c) $\int \cos^2 x \, dx$,

d) $\int \cos x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int x \cdot (\cos x + 1) \, dx$,

g) $\int x^3 \cdot e^x \, dx$, h) $\int \operatorname{Arc} \sin x \, dx$, i) $\int x^{\frac{1}{3}} \cdot \ln x \, dx$,

j) $\int \operatorname{Arc} \tan x \, dx$.

لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمیرئ

a) $\int_{-1}^{1} x \cdot e^x \, dx$, b) $\int_{1}^{2} \ln x \, dx$, c) $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x^2} \, dx$,

d) $\int_{0}^{\pi} e^x \cdot \sin x \, dx$, e) $\int_{0}^{\pi} x^3 \cdot \sin x \, dx$, f) $\int_{0}^{\pi} x^4 \cdot \sin x \, dx$.

د هغې هوارې دننه وشمیرئ، چې د وکړ شوو مساواتو کړو څخه راینده شوي وي

a) $y = e^{0,5x}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

b) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

c) $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $y = 9$, $x = -3$, $x = 3$;

d) $y = \cos x$, $y = 0$

e) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{5\pi}{6}$;

f) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$;

h) $y = x^3 + 7$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

i) $y = x^3 + 7$, $y = x^3 - x^2 + 3x + 5$;

j) $y = 3 - \frac{1}{2}x^4$, $y = 3 - 4x$;

---

k) $y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10;$

l) $y = \cos x, \quad y = \sin x$;

m) $y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8;$

n) $y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2};$

o) $y = x^2, \quad x = y^2;$

p) $y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3;$

q) $y = 2\sin x, \quad y = \sqrt{3} \tan x \quad , x = [\, 0 \,, \pi/2 \,)$

f) $y = \tan x$

کرښه چې په کښې $y = \tan x$ پرتو ټکو $(0,0)$ او $(\pi/4, 1)$ تیریږي د x –محور باندې د ورکړ شوو مساواتو سره د ګړو ترمنځ هواره ځرخي د راپورته شوي څرخیدونکی بدن یا جسم ډکی یا حجم وشمیرئ. پام دې وي، چې په ورکړشوي حالت کې ورکړشوې هواره د دوه کړو څخه رابنده ده، نو له دې امله د لوي کړې ډکی څخه د کوچنئ کړې ډکی کمیږي.

---

a) $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = h;$

b) $y = \sqrt[3]{x^2} + 1, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2$

c) $y = e^x, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

d) $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2;$

e) $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2x;$

f) $y = 4x - x^2, \quad y = 0;$

g) $y = \sin x, \quad y = 0, \quad x \in [0, \pi].$

ترایځ (څلورګوډی، چې تیك دوه اړخونه یې غبرګ وي) د کونجونو دړې
$(1,0),(5,0),(1,3),(5,5)$ د x–محور باندې څرخي، وشمیرئ

الف) د جوړې شوې هوارې دننه

ب) د څرخیدونکی بدن ډکی

د کږو $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = -x+6$ ترمنځ هواره د x− محور باندې څرخی، وشمیری

الف) د کږې غوښتکو د پروت محور سره

ب) د کږو ترمنځ هواره

پ) د څرخیدونکی بدن ډکی

د هغهٔ څرخیدونکی بدن ډکی وشمیری، کوم چی په اینتروال $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ کی د x−محور پورته خواته د کږو $y = \sin x$ او $y = \cos x$ ترمنځ

پرته هواره، چی د x−محور باندې څرخیږي!

۱۴ نیمګردی $y = \sqrt{9-x}$ د x−محور باندې څرخیږي. د ګوډیبرخی ډکی وشمیري د پولو $x_1 = 1, x_2 = 3$ او ترمنځ!

۱۵ د څرخیدونکی ایلیپسوئید ډکی څومره لوي دی، کوم چی د x−محور پورته خوا ته پرته د ایلیپسی نیمی هوارې د رابندوونکی $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ کږې سره د x−محور باندې تولیدوي؟

د څپرکي نور تمرینونه:

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۱ - لاندې ناأصلي پولینومونه دې د یوه ټول کسري پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعې په څېر ولیکل شي.

۲ - لاندې پولینومونه د جمعې په څېر ولیکئ

$a)\ \dfrac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6}$ $b)\ \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$

$c)\ \dfrac{4x+10}{x^2+6x+8}$ $d)\ \dfrac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$

$e)\ \dfrac{4x^2+6x-20}{x^3-4x}$ $f)\ \dfrac{14}{x^2+20x+51}$

۳ – د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

$a)\ \dfrac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8}$ $b)\ \dfrac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$

$c)\ \dfrac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1}$ $d)\ -\dfrac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$

٤ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5}$ $b)\ \dfrac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$

$c)\ \dfrac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x}$ $d)\ \dfrac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$

۵ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \dfrac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $b)\ \dfrac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \dfrac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $d)\ \dfrac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنۍ تابع ده.

$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$

$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$

$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$

$e)\ F(x)=\dfrac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\dfrac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$

۷ - وښایئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$a)\ F(x)=x^3+x+4 \quad , \quad G(x)=x^3+x+1$

$b)\ F(x)=(x-3)^2 \quad , \quad G(x)=x^2-6x+4$

$c)\ F(x)=\dfrac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x)=\dfrac{3x+5}{x+2}$

$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad G(x)=\sin x$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتیګرالونه پیداکړئ او ټیکوالی يې و ازمايۍ.

$a)\ \int x^3dx \qquad b)\ \int 7dx \qquad c)\ \int xdx \qquad d)\ \int(1-x^2)dx$

$e)\ \int(x+\dfrac{1}{x})dx \qquad f)\ \int(e^x+\cos x)dx \qquad g)\ \int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad h)\ \int\dfrac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx \qquad k)\ \int(2+e^x)dx \qquad l)\ \int(1+\ln x)dx \qquad m)\ \int(\sqrt{x}+\sin)dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \dfrac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e(2+\dfrac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^xdx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx \qquad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi}\dfrac{1}{\sin^2 x}dx \qquad i)\ \int_{-2}^2 x^3dx$

$j)\ \int_2^6(1+x)dx \qquad k)\ \int_1^2(x^2-x^5)dx \qquad l)\ 0\int_{-2}^2(\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{x^2}{3})dx$

---

۱۷ د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښت وشمېرئ او ارزښتونه يې سره پرتله کوئ.

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und -\int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1} (1+e^x)dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1} (1+e^x)dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

۱۷– هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0} (x+e^x)dx + \int_{0}^{1} (x+e^x)dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^2 dx + \int_{5}^{3} 3x^2 dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1} (2+x)dx - \int_{4}^{1} (2+x)dx$$

۱۸- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمين کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8} \sqrt{1+x}\, dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x} dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi} \sin^2 x dx$$

۱۹ – د کومو x ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^4 dt \ , \quad la(x) = 31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^t dt \ , \quad la(x) = e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x) = x^2 \ , \ a = 3 \qquad b)\ f(x) = 2 + e^x \ , \ a = 0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^2 x} \ , \ a = 0 \qquad d)\ f(x) = 2 \ , \ a \in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx,\quad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad f)\ \int (\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx,\quad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx,\quad i)\ \int 3\cdot 2^x\,dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx,\quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx,\quad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\quad ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}},\quad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt,\quad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$ --------

۲۲ - د بيرته په بنستيز اينتيگرال بدلون وروسته يي اينتيگرال ونيسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx,\quad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx,\quad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx,\quad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx,\quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳-- لاندې ټاكلي اينتيگرالونه وشميرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx,\quad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx,\quad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx,\quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2},\quad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx,\quad h)\ \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx,\quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du,\quad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}\,dx,\quad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

۲٤- د بدلون يا سيتيچيوشن قاعدې استعمال له لارې يي اينتيگرال وشميري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int\frac{3xdx}{-x^2+1},\qquad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

۲۵- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستیز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې یي اینتیګرال وشیمرئ

$$a)\ \int\frac{dx}{1+4x^2},\qquad b)\ \int\frac{dx}{2+4x^2},\qquad c)\ \int\frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\qquad e)\ \int\frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\qquad f)\ \int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int\frac{dx}{x^2-10x+34},\qquad h)\ \int\frac{dx}{3x^2-6x+30},\qquad i)\ \int\frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیري:

$$a)\ \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(4x-1)^3},\qquad b)\ \int_{-1}^{0}e^{3x}dx,\qquad c)\ \int_{0}^{2}2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1}\frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\qquad e)\ \int_{e}^{e^x}\frac{1}{x}\ln\times dx,\quad f)\ \int_{2}^{4}\frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{\sin x}\cos x\ dx,\qquad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې توټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

$$a)\ \int 0,2x\cdot\sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^3\cdot\ln x\ dx,\qquad c)\ \int\cos^2 x\ dx$$

$$d)\ \int\cos x\cdot\sin x\ dx\qquad e)\ \int x^2\cdot\sin x\ dx\qquad f)\ \int x\cdot(\cos x+1)\,dx$$

$$g)\ \int x^3\cdot e^x\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x\ dx,$$

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې او ژباړې

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلي او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينککن ليکنې چې له پرينمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

---

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو ځو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرډي شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرډي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه وساتي.


داکتر ماخان (مېرى) شينوارى
احصـايه
(ستاتيستيک)
ډېرى _ پوهنه (سېټ تيوري)
SET THEORY
List 1
List 2
List 3
List 4
ليکونکى:
داکتر ماخان (مېرى) شينوارى
شمېر پوهنه
(رياضـي)
ستر کتاب
لومړى برخه
دويم غځېدلى چاپ
ليکونکى: داکتر ماخان (مېرى) شينوارى
شمېر پوهنه
(رياضـي)
ستر کتاب
دويمه برخه
دويم غځېدلى چاپ
ليکونکى: داکتر ماخان (مېرى) شينوارى
د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER
AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۳۰)